

LIBRO TESTO pag 308 SECONDO TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

SIA $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE INTEGRABILE E SIA

$$x_0 \in [a, b]$$

CONSIDERIAMO
$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (F(x) \text{ funzione integrale})$$

ALLORA

1) $F(x)$ È CONTINUA IN $[a, b]$ 2) SE $f(t)$ È CONTINUA IN $[a, b]$ $F(x)$ È DERIVABILE IN $[a, b]$

E RISULTA
$$F'(x) = f(x)$$

ES:
$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$F'(x) = e^{-x^2}$$

1° CASO PARTICOLARE

$$F(x) = \int_{x_0}^{g(x)} f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{2x} e^{-t^2} dt = e^{-(2x)^2} \cdot (2x)' \\ &= e^{-4x^2} \cdot 2 = 2e^{-4x^2} \end{aligned}$$

2° CASO PARTICOLARE

$$f(g(x)) \rightarrow$$

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos t^2 dt \quad F'(x) = \cos(x^3)^2 \cdot 3x^2 - \cos(x^2)^2 \cdot 2x$$

$$3x^2 \cos x^6 - 2x \cos x^4$$

APPLICAZIONI

Data la funzione $F(x) = -1 + \int_1^x (\ln^2 t + 2) e^{-t^2} dt$
trova l'equazione della tangente
al grafico di $F(x)$ nel suo punto di ascissa $x_0 = 1$

RETTA TG $y - F(x_0) = F'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$$1) \underline{F(x_0)} = F(\underline{1}) = -1 + \int_1^{\overset{1}{\underset{0}{1}}} (\ln^2 t + 2) e^{-t^2} dt = \underline{-1}$$

$$F(x_0) = -1$$

$$2) F'(x) = (\text{USO IL TEO}) = (\ln^2 x + 2) \cdot e^{-x^2}$$

$$3) \underline{F'(\overset{+1}{\underset{0}{1}})} = (\ln^2 \underset{0}{1} + 2) e^{-1} = \underline{\frac{2}{e}}$$

$$y - \overset{+1}{\underline{(-1)}} = \underline{\frac{2}{e}} (x - \underset{x_0}{1})$$

$$\boxed{y = \frac{2}{e} x - \frac{2}{e} - 1}$$

EQ. TANGENTE

(*) EQ. RETTA tg $\bar{F}(x) = \int_{-\pi}^{2x} t \cdot \cos^3 t \, dt \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

CAMBIO X
CON 1

$$\bar{F}(x) = -1 + \int_{-1}^x (\ln^2 t + 2) e^{-t^2} dt$$

$$F(1) = -1 + \int_{-1}^1 (\ln^2 t + 2) e^{-t^2} dt$$

$$F(1) = -1$$

RICORDA $\int_a^a f(x) dx = 0$

(*) 1) $\bar{F}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} t \cos^3 t \, dt = 0 \quad \left(\int_{-\pi}^{\pi} = 0 \right)$

2) $\bar{F}'(x) = \underbrace{(2x) \cdot \cos^3(2x) \cdot 2}_{= 4x \cos^3 2x}$

$f(t) = t \cos^3 t$
 $f(-t) = (-t) \cos^3(-t)$
 $f(-t) = -t \cdot \cos^3 t$



$(\cos(-t) = \cos t)$
 $f(t) = \text{DISPARI} \int_{-\pi}^{\pi} = 0$

$$\bar{F}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^3 = 2\pi \cdot (\cos \pi)^3 = 2\pi (-1)^3 = -2\pi$$

tg $y - 0 = -2\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
 $y = -2\pi x + \pi^2$

APPLICAZIONI

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \sin^4 t \, dt = \frac{\int_0^0 \sin^4 t \, dt}{0} = \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^5} = \frac{0}{0} = \frac{1}{0} + \dots$$

H

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{5x^4} = \frac{1}{5}$$

PER VOI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{-t^2} dt}{x^2}$$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{2x}^{3x} \sqrt{1+t^2} dt}{x^3}$$

(+\infty)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^3} dt}{x^4}$$

(-\frac{1}{4})