PER PARTI E SOSTITUZIONE

venerdì 9 dicembre 2022 08:44

RAZIONALI FRATTE $\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx$

1) PROVO A VEDERE SE $P_1(x) = D(P_2(x))$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \Rightarrow \ln|f(x)| + c$$

2) SE grado $P_1(x) \geq$ grado $P_2(x) \Rightarrow$ DIVISIONE TRA POLINOMI

$$\begin{array}{l|l} P_1(x) & P_2(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

$$P_1(x) = P_2(x)\cdot Q(x) + R(x) \quad (:P_2(x))$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{\cancel{P_2(x)}\cdot Q(x)}{\cancel{P_2(x)}} + \frac{R(x)}{P_2(x)}$$

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx = \int \underbrace{Q(x)\,dx}_{\text{POLINOMIO INTERO}} + \int \frac{R(x)}{P_2(x)}\,dx$$

$\ln|f(x)|$ $\qquad$ $\arctan f(x)$

PER PARTI

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \quad \text{ORA INTEGRO}$$

$$\int \big(f(x)\cdot g(x)\big)'\,dx = \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$\underbrace{f(x)\cdot g(x)}_{2^\circ \text{ membro}} = \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \underbrace{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx}_{1^\circ \text{ membro}}$$

2° membro — 1° membro

$$-\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = -f(x)\cdot g(x) + \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

CAMBIO SEGNO

$$\int \underbrace{f(x)\cdot g'(x)}\,dx = \underbrace{f(x)\cdot g(x)} - \int \underbrace{f'(x)\cdot g(x)}\,dx$$

- $f(x)\cdot g'(x)$: LE SCELGO IO A PIACERE DALL'ESERCIZIO, DEVO AVERE UN PRODOTTO
- $f(x)\cdot g(x)$: È IL PRODOTTO DELLE FUNZIONI SENZA DERIVATA
- $f'(x)\cdot g(x)$: È IL PRODOTTO DELLE FUNZIONI CON LA DERIVATA CAMBIATA RISPETTO ALL'INIZIO

SCELGO $f(x)$ —DERIVATA→ $f'(x)$

SCELGO $g'(x)$ —INTEGRALE→ $g(x) = \int g'(x)\,dx$

ESERCIZIO

$$\int x\cdot e^x\,dx$$

DERIVO

$f(x) = e^x$

$g'(x) = x$

INTEGRO

$f'(x) = e^x$

$g(x) = \frac{1}{2}x^2$

$\rightarrow \frac{1}{2}x^2e^x$

$$\int x\cdot e^x\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}x^2\cdot e^x}_{f(x)\cdot g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2e^x}_{f'(x)\cdot g(x)}\,dx$$

→ questo secondo integrale è peggio del 1°: ho sbagliato la scelta di $f(x)$ e $g'(x)$

$$\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx$$

LO SO FARE

$xe^x - e^x + c$

$f(x) = x$

$g'(x) = e^x$

$f'(x) = 1$

$g(x) = e^x$ → e^x

$xe^x - e^x + c$

$e^x(x-1) + c$

FINE

$f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$ ⟶ e^x

CASI PARTICOLARI

1) $\int \ln x \, dx$: NON HO IL PRODOTTO $f(x) \cdot g'(x)$, LO CREO IO CON $1 \cdot \ln x$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx =$$

$$= x \cdot \ln x - x + c$$

$$= x(\ln x - 1) + c$$

$f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ ⟶ $\frac{1}{x} \cdot x = 1$

2) LA PROCEDURA VA RIPETUTA

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx =$$

$$= -x^2 \cdot \cos x - \int -2x \cos x \, dx$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cos x \, dx$$

PER PARTI

$f(x) = x^2$, $g'(x) = \sin x$

$f'(x) = 2x$, $g(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$ ⟶ $-2x\cos x$

$f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$

$f'(x) = 1$, $g(x) = \int \cos x \, dx = \sin x$ ⟶ $\sin x$

RISULTATO PARZIALE

$x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx$

$x \sin x - (-\cos x) + \cancel{c}$

$x \sin x + \cos x$

VA RIMESSA NELL'ESERCIZIO

$$\int x^2 \cdot \sin x = -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x + \cos x\right) + c = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$$

3) FACCIO 2 VOLTE L'INTEGRALE PER PARTI E RIOTTENGO QUELLO INIZIALE AL 2° MEMBRO COL SEGNO CAMBIATO.

$\int \text{sen}^2 x \, dx$ MI SERVE IL PRODOTTO

$$\int \text{sen}^2 x = \int \text{sen}x \cdot \text{sen}x \, dx$$

$f(x) = \text{sen}\,x$
$g'(x) = \text{sen}\,x$

$f'(x) = \cos x$
$g(x) = -\cos x$ → $-\cos^2 x$

$$= -\text{sen}x \cdot \cos x - \int -\cos^2 x \, dx$$

$$= -\text{sen}x \cdot \cos x + \underbrace{\int \cos^2 x \, dx}_{\text{PER PARTI}}$$

$f(x) = \cos x$
$g'(x) = \cos x$

$f'(x) = -\text{sen}x$
$g(x) = \text{sen}x$ → $-\text{sen}^2 x$

RISULTATO PARZIALE $\text{sen}x\cos x - \int -\text{sen}^2 x \, dx$

$$\int \text{sen}^2 x = -\text{sen}x \cdot \cos x + \text{sen}x \cdot \cos x + \int \text{sen}^2 x \, dx$$

$0 = 0$

CAMBIO TECNICA

$$\int \text{sen}^2 x \, dx = -\text{sen}x\cos x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{\int (1 - \text{sen}^2 x) dx} \, dx$$

$$\int \text{sen}^2 x \, dx = -\text{sen}x\cos x + \int 1 \, dx - \int \text{sen}^2 dx$$

$$2\int \text{sen}^2 x \, dx = -\text{sen}x \cdot \cos x + x + c$$

$$\int \text{sen}^2 x \, dx = \frac{x - \text{sen}x\cos x}{2} + c$$

Φ

$\int e^x \cdot \text{sen}x \, dx$ PER VOI

$\int e^x \cdot \sin x \, dx$ PER VOI

4) NEL PASSAGGIO $g'(x) \longrightarrow g(x)$ HO UN "SEMPLICE" INTEGRALE COMPOSTO

$$\int x \cdot e^{5x} \, dx$$

$f(x) = x$

$g'(x) = e^{5x}$

$f'(x) = 1$

$g(x) = \int e^{5x} \, dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x} \, dx = \frac{1}{5}e^{5x}$

$\int f' \cdot e^f$

$f = 5x$

$f' = 5$

$\rightarrow \frac{1}{5}e^{5x}$

$$= \frac{1}{5}xe^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x} \, dx$$

$$= \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x} \, dx$$

$\hookrightarrow \frac{1}{5}e^{5x}$

$$= \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C = \frac{1}{5}e^{5x}\left(x - \frac{1}{5}\right) + C$$

PER SOSTITUZIONE

$$\int f(x) \, dx$$

PONGO UNA QUANTITÀ CHE SCELGO IO IN $f(x)$ (CHIAMIAMOLA $h(x)$) UGUALE AD UNA QUANTITÀ CHE SCELGO IO CONTENENTE UN'ALTRA LETTERA (CHIAMIAMOLA $g(t)$)

$$h(x) = g(t)$$

$h(x) = g(t)$

TRAMITE LE FORMULE INVERSE RICAVO x

$x = f(t)$

funzione in t

| derivo |

$1 \cdot dx = f'(t) \cdot dt$

L'INTEGRALE DA "$x\,e\,dx$" DIVENTA "$t\,e\,dt$"

DERIVO SUBITO

$h'(x)\,dx = g'(t) \cdot dt$

IN MOLTI CASI USANDO

$h(x) = g(t)$ e

$h'(x)\,dx = g'(t)\,dt$ RIESCO

SUBITO A TRASFORMARE L'INTEGRALE DA "$x\,e\,dx$" IN "$t\,e\,dt$"

SE CIÒ NON ACCADE USO L'ALTRO METODO

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx$$

PONGO $x-1 = t^2$

RICAVO x: $x = t^2+1$

DERIVO $1\,dx = 2t\,dt$

$$\int (t^2+1)\cdot\sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt$$

$$2\int (t^2+1)\cdot t^2\,dt$$

$$2\int (t^4+t^2)\,dt$$

$$2\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+C$$

DEVO RISOSTITUIRE ALLA t

$$\int e^x\left(e^x-2\right)^2 dx$$

PONGO $e^x-2 = t$

DERIVO $e^x\,dx = 1\,dt$

$$\int e^x t^2\,dx$$

NON VA BENE

$$\int t^2\cdot 1\,dt = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}+C$$

RISOSTITUISCO A t e^{x-2}

$$= \frac{\left(e^{x-2}\right)^3}{3}+c$$

RICORDO $x-1=t^2 \Rightarrow t=\sqrt{x-1}$

$$2\left(\frac{\sqrt{(x-1)^5}}{5}+\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{3}\right)+c$$

ESAME

$$\int \frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+7e^x+10}\,dx$$

PONGO $e^x=t$ (1)

DERIVO $e^x\,dx=1\cdot dt$ (2)

- GUARDO L'$\int$ E VEDO SE (1) e (2) SONO SUFFICIENTI
- PER ARRIVARE A "t e dt"

AL NUM RACCOLGO e^x

$$e^x(e^x+3)\,dx$$

t ↑ , $1\,dt$

$$\int \frac{(e^x+3)\cdot 1e^x\,dx}{e^{2x}+7e^x+10}=\int \frac{t+3}{t^2+7t+10}\,dt$$

($e^{2x}=t^2$, $e^x=t$)

$$\Delta=49-40=9 \qquad t_{1,2}=\frac{-7\pm 3}{2}\begin{cases}-5\\-2\end{cases}$$

$$1t^2+7t+10=1(t-(-5))(t-(-2))$$

$$(t+5)(t+2)$$

$$\frac{1t+3}{t^2+7t+10}=\frac{A}{t+5}+\frac{B}{t+2}=\frac{At+2A+Bt+5B}{(t+5)(t+2)}=\frac{(A+B)t+2A+5B}{t^2+7t+10}$$

$$\begin{cases}A+B=1\\2A+5B=3\end{cases}\quad\begin{cases}A=1-B\\2(1-B)+5B=3\end{cases}\to 2-2B+5B=3\to 3B=1\to B=\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases}A=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\\B=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\int \frac{t+3}{t^2+7t+10}\,dt=\frac{2}{3}\int\frac{1}{t+5}\,dt+\frac{1}{3}\int\frac{1}{t+2}\,dt=\frac{2}{3}\ln|t+5|+\frac{1}{3}\ln|t+2|+c$$

RICORDO LA POSIZIONE $e^x=t$

$= \frac{2}{3}\ln(e^x+5) + \frac{1}{3}\ln(e^x+2) + c$ OK FIN QUI

$= \frac{1}{3}\left(2\ln(e^x+5) + \ln(e^x+2)\right) + c$

$\frac{1}{3}\left(\ln(e^x+5)^2 + \ln(e^x+2)\right) + c$

$\ln(a\cdot b)$

$\boxed{\frac{1}{3}}\ln\left((e^x+5)^2\cdot(e^x+2)\right) + c = \ln\left((e^x+5)^2(e^x+2)\right)^{\frac{1}{3}} + c \rightarrow \sqrt[3]{\ }$

$\ln\sqrt[3]{(e^x+5)^2(e^x+2)} + c$

SOSTITUZIONI FISSE

HO UN INTEGRALE E $f(x)$ DIPENDE DA

1) $\underline{\text{sen}x}$ e $\underline{\cos x}$ es $\int \frac{1}{\text{sen}x+\cos x}$ o $\int \frac{3\text{sen}x}{\text{sen}x-4\cos x}$

$\boxed{t = \tan\frac{x}{2}} \rightarrow \frac{x}{2} = \arctan t \rightarrow x = 2\arctan t$

$\text{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\boxed{dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt}$

2) $\int \sqrt{a^2-x^2}$ $\boxed{x = a\,\text{sen}t}$ $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

3) $\int \sqrt{x^2\pm a^2}$ $\boxed{\sqrt{x^2\pm a^2} = t - x}$

ELEVANDO AL QUADRATO E DERIVANDO LA x ANDRÀ VIA E RESTERÀ SOLO t.

INTEGRALI DEFINITI

INTEGRALI DEFINITI

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$F(x)$: PRIMITIVA SENZA C

$F(a)$: FISSO

CONSIGLIO: USA TANTE $\big(\,(\,)-(\,)\,\big)$

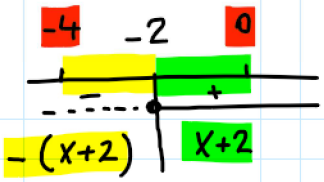
1 GENNAIO 2022

$$\int_{-4}^{0} \frac{|x+2|}{x^2-2x+1}\,dx$$

HO IL PROBLEMA DEL $|x+2|$:

LO SCIOLGO

$x+2 \geq 0 \quad x \geq -2$



$$-\int_{-4}^{-2} \frac{(x+2)}{x^2-2x+1}\,dx + \int_{-2}^{0} \frac{(x+2)}{x^2-2x+1}\,dx$$

CALCOLO DA PARTE

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx$$

$x^2-2x+1 \rightarrow (x-1)^2$

$$\frac{1x+2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -A+B = 2 \end{cases} \qquad B = 3$$

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)}\,dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$\ln|x-1| - 3\frac{1}{x-1} + C$

$x-1 = t$

$dx = dt$

$\int \frac{1}{t^2}\,dt$

$$\ln|x-1| - 3\frac{1}{x-1} + C$$

$$3\int_2 (x-1)^{-2}\,dx$$

$f(x) = x-1$, $f'(x) = 1$, $m = -2$

$$3\,\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$dx = dt$

$$\int \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$\int t^{-2}\,dt$$

$$\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$\frac{t^{-1}}{-1} + C$$

$$-t^{-1} + C$$

$$-\frac{1}{t} + C$$

$$-\int_{-4}^{-2} \frac{(x+2)}{x^2-2x+1}\,dx + \int_{-2}^{0} \frac{(x+2)}{x^2-2x+1}\,dx$$

$$-\left[\ln|x-1| - \frac{3}{x-1}\right]_{-4}^{-2} + \left[\ln|x-1| - \frac{3}{x-1}\right]_{-2}^{0}$$

$$-\left(\left(\ln 3 - \frac{3}{-3}\right) - \left(\ln 5 - \frac{3}{-5}\right)\right) + \left(\left(\ln 1 - \frac{3}{-1}\right) - \left(\ln 3 - \frac{3}{-3}\right)\right) =$$

$$-\left(\ln 3 + 1 - \ln 5 - \frac{3}{5}\right) + \left(3 - \ln 3 - 1\right)$$

$$-\ln 3 - 1 + \ln 5 + \frac{3}{5} + 3 - \ln 3 - 1$$

$$\frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$$

$$\frac{8}{5} - 2\ln 3 + \ln 5$$

$$\int_0^1 (x+1)\cdot \arctan x \, dx$$

CALCOLO $\int (x+1)\cdot \arctan x \, dx$ PER PARTI

$f(x) = \arctan x$ (lo so derivare)

$g'(x) = x+1$ (lo so integrare)

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$

$\longrightarrow \frac{1}{1+x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}x^2+x\right) =$

$\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x^2+2x}{2}\right) =$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+2x}{1+x^2}$

$$\int (x+1)\cdot\arctan x = \left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+2x}{1+x^2}\,dx$$

CALCOLO $\int \frac{x^2+2x}{1+x^2}\,dx$

DIVISIONE: I 2 POLINOMI VANN ORDINATI IN FORMA DECRESCENTE

IL DIVIDENDO x^2+2x VA ANCHE COMPLETATO CON $0x^m$

SE MANCA LA TOTENZA m (GLI DEVO LASCIARE IL POSTO)

$x^2 + 2x + 0$ | x^2+1 (ORDINATO)

CAMBIO SEGNO $-x^2 \quad -1$ | 1

$// \quad 2x - 1$

STOP

IL GRADO DI $2x$ È INFERIORE AD x^2

$$P_1(x) = Q(x) \cdot P_2(x) + R(x)$$

$$x^2 + 2x = 1 \cdot (x^2+1) + 2x - 1 \qquad \text{DIVIDO } P_2(x)$$

$$\frac{x^2+2x}{x^2+1} = \frac{1 \cdot (x^2+1)}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^2+2x}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= x + \ln(x^2+1) - \arctan x + c$$

APRO UNA FINESTRA

$$\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$f(x) = x^2+1$

$f'(x) = 2x$

È DI TROPPO

CHIUSO

RIMETTIAMO TUTTO INSIEME

$$\int_0^1 (x+1)\cdot \arctan x\,dx = \underbrace{\left[\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\cdot \arctan x - \frac{1}{2}\left(x+\ln(x^2+1)-\arctan x\right)\right]_0^1}_{\text{moltiplico}}$$

$$\left[\frac{1}{2}x^2\arctan x + x\arctan x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x\right]_0^1$$

RICORDA $\arctan 1$? l'arco (angolo) la cui tangente è $1 = \frac{\pi}{4}$

$\arctan 0$? " (") " " " è $0 = 0$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+1\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right)-\left(0+0-0-\frac{1}{2}\ln 1^{\to 0}+\frac{1}{2}\cdot 0\right)$$

$$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi+2\pi-4-4\ln 2+\pi}{8}=\frac{4\pi-4-4\ln 2}{8}$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{(\pi-1-\ln 2)}{8_2}=\frac{\pi-1-\ln 2}{2}$$

PER VOI INTEGRALI GENERALIZZATI +

TEORICA + ESERCIZIO | TEO FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE CON APPLICAZIONI

$$\int_{-\sqrt{3}}^{0}\frac{|x+1|}{x^2+1}$$

$$\int\frac{3x+1}{x^2+5x-6}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\cdot\operatorname{sen}3x\,dx$$

$$\int_0^1 x^2\cdot\operatorname{arctan}x\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{4\operatorname{sen}x-3\cos x}$$

SUGG. $t=\tan\frac{x}{2}$ ESTREMI $x=0$ $x=\frac{\pi}{3}$

se $x=0$ $t=\tan\frac{0}{2}=\tan 0=0$

se $x=\frac{\pi}{3}$ $t=\tan\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=\tan\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}=$

$=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\text{"}\ t\ e\ dt\text{"}$$

SENZA POI TORNARE AD x PERCHÈ HO MODIFICATO GLI ESTREMI MI TENGO TUTTO IN t

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{2+e^x}$$

" SUGG. $e^x=t$ "

$$\int_{-1}^{1} \frac{\ln(3+x^2)}{3+x^2} \cdot x \, dx$$

" SUGG. $\ln(3+x^2) = t$ MA NON SONO PROPRIO SICURO "