

INTEGRALI PER PARTI

OGETTO LA "x"

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

DERIVATA PRODOTTO. ORA INTEGRA

$$\int (f \cdot g)' = \int f' \cdot g + \int f \cdot g' \quad \text{RICAVO } \int f \cdot g', \text{ LO SPOSTO.}$$

$$- \int f \cdot g' = - f \cdot g + \int f' \cdot g \quad \text{CAMBIO SEGNO}$$

$$\boxed{\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g}$$

FORMULA

f = fattore finito

g' = fattore derivato

f e g' LI SCELGO IO DALL'INTEGRALE CHE STO RISOLVENDO.

f' e g LI RICAVO DOPO LA SCELTA

f' = derivata di f

g = integrale di g'

"TABELLA"

DERIVO

$f =$ } LI SCELGO
 $g' =$ } IO

 f'
 g
 LI RICAVO E POI PER CONFRONTA' LI MOLTIPLICO

ESERCIZIO

$$\int 2x \cdot e^x dx$$

$$f = e^x$$

$$g' = 2x$$

LE SCELGO IO DALL'INTEGRALE

$$\int 2x dx = 2 \frac{x^2}{2}$$

$$f' = e^x$$

$$g = x^2$$

$$\rightarrow x^2 \cdot e^x$$

$$\int 2x \cdot e^x dx = \frac{f \cdot g}{2x} - \int \frac{f' \cdot g}{2x}$$

$$\int 2x \cdot e^x dx = \frac{f \cdot g}{x^2 \cdot e^x} - \int \frac{f' \cdot g}{x^2 \cdot e^x} dx$$

QUESTO INTEGRALE "È PEGGIO" DEL 1°
X STA AUMENTANDO DI GRADO!
HO SBAGLIATO SCELTA.

RICOMINCIO

$$\int 2x \cdot e^x dx$$

$$= \frac{f \cdot g}{2x \cdot e^x} - \int \frac{f' \cdot g}{2e^x} dx$$

$$= 2x e^x - 2e^x + C = 2e^x (x - 1) + C$$

derivo $f = 2x$
 $g' = e^x$

integro $f' = 2$
 $g = e^x \rightarrow 2e^x$

TRUCCO PER RICORDARE

$$1) \int f \cdot g' = \frac{f \cdot g}{\text{LE FUNZIONI SENZA DERIVATA DALLA TABELLA}} - \int \frac{f' \cdot g}{\text{QUELLE CHE HO MOLTIPLICATO SOTTO}}$$

LE FUNZIONI
SENZA DERIVATA
DALLA TABELLA

2) SCAMBIO

MOLTIPLICO

SCAMBIO

NOB. L'INTEGRALE 2) DEVE ESSERE PIÙ
SEMPLICE DI 1). ALTRIMENTI HO
SBAGLIATO LA SCELTA: LA CAMBIO

CASI PARTICOLARI

$$\int \ln x dx \text{ manca il prodotto. Lo creo io con } 1.$$

$$\int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx$$

f $\ln x$ "1"
g' 1

$$\int \underline{1} \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int \underline{1} \, dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

$$x(\ln x - 1) + c$$

Diagram illustrating the integration of $\int 1 \cdot \ln x \, dx$ using the product rule (LIATE):

Let $f = \ln x$ and $g' = 1$. Then $f' = \frac{1}{x}$ and $g = x$. The result is $\frac{1}{x} \cdot x = 1$.

$\int x^2 \cdot e^x \, dx$ IN QUESTO CASO LA PROCEDURA PER PARTI VA RIPETUTA. È IMPORTANTE L'ORDINE E L'USO ()

$$\int x^2 \cdot e^x = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx$$

VA RIFATTO

$$= x^2 \cdot e^x - (2x \cdot e^x - 2e^x) + c =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + c = e^x (x^2 - 2x + 2) + c$$

Diagram illustrating the integration of $\int 2x \cdot e^x \, dx$ using the product rule (LIATE):

Let $f = x^2$ and $g' = e^x$. Then $f' = 2x$ and $g = e^x$. The result is $2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x \, dx = 2x \cdot e^x - 2e^x$.

ALLA FINE NETTO + c

INTEGRALI PER SOSTITUZIONE

$$\int f(x) \, dx$$

- 1) PRENDO UNA QUANTITÀ CONTENENTE x CHE CHIAMO $h(x)$ E LA PONGO UGUALE AD UNA QUANTITÀ CHE DECIDO IO CHE CONTIENE t E LA CHIAMO $g(t)$

PONGO $h(x) = g(t)$

LA SCELGO IO IN MODO TALE CHE L' $\int$ DIVENTI + SEMPLICE

- 2) HO BISOGNO DI PASSARE DA $x \rightarrow t$, DA $dx \rightarrow dt$

2) NO BISOGNO DI PASSARE DA $x \rightarrow u$, DA $dx \rightarrow du$

DERIVO SUBITO

$$h'(x) dx = g'(t) dt$$

ORA GUARDO IL MIO INTEGRALE E VEDO

SE DA $h'(x) dx = g'(t) dt$ POSSO SOSTITUIRE
IN MODO DA MANDAR VIA TUTTE LE x

SE COSÌ NON È RICAPO dx

$$dx = \frac{g'(t)}{h'(x)} \cdot dt$$

↳ TRAMITE LA POSIZIONE DEVO
SOSTITUIRE LA x CON t .

$$\int e^x \cdot \sqrt{e^x - 1} dx$$

$2t dt$

PONGO

$$e^x - 1 = t^2 \rightarrow \sqrt{t^2}$$

DERIVO

$$\frac{h'(x) dx}{e^x dx} = \frac{g'(t) \cdot dt}{2t dt}$$

$$\int \sqrt{t^2} \cdot 2t dt = 2 \int t^2 dt = 2 \frac{t^3}{3} + C$$

RITORNO ALLA POSIZIONE $\boxed{e^x - 1 = t^2}$

È RICAPO "t" PER FARE "DEPONGO"
CIOÈ ALLA t DEVO RIMETTERE "x"

$$\underline{t} = \sqrt{e^x - 1}$$

$$\underline{t} = \sqrt{e^x - 1}$$

$$\int e^x \cdot \sqrt{e^x - 1} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(e^x - 1)^3} + C.$$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx \rightarrow 1 dt$$

PONGO $\boxed{\ln x = t}$

DERIVO

$$\frac{1}{x} dx = 1 \cdot \frac{dt}{1} = dt$$

$$\int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C \quad \text{DEPONGO} \quad \frac{1}{4} \ln^4 x + C$$

$$\int \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

PONGO $\boxed{1 + \sqrt{x} = t}$

DERIVO $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$

GUARDO DENTRO L' $\int$ E VEDO CHE HO $\frac{1}{\sqrt{x}} dx$

ALLORA SPOSTO IL 2

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 dt$$

$$\int e^t \cdot 2 dt = 2 \int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{1+\sqrt{x}} + C$$

FRATTI SEMPLICI

RICORDIAMO $\underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{TRIANGOLO D'O}} = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRINOMIO 2°
GRADO
↓
SCOMPOSIZIONE

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} dx \quad A(x) \text{ e } B(x) \text{ POLINOMI}$$

se grado $A(x) \geq$ grado $B(x)$ DIVISIONE

$$\begin{array}{r|l} A(x) & B(x) \\ R(x) & Q(x) \text{ -D QUOZIENTE-} \\ \text{RESTO} & \end{array}$$

VERIFICA

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

**DIVISO
PER
B(x)**

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\cancel{B(x)} \cdot Q(x)}{B(x)} + \frac{R(x)}{B(x)}$$

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int \underbrace{Q(x)}_{\text{INTERO}} dx + \int \underbrace{\frac{R(x)}{B(x)}}_{\text{USO LOG}} dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$$

$$\text{se } \int \frac{A(x)}{ax^2+bx+c} dx$$

$$A(x) = K \text{ (numero)}$$

$$A(x) = Kx + h \text{ (1° grado)}$$

" " " " $A \in B$

$$\text{SCOMPONGO } ax^2+bx+c \text{ c uso}$$

PER RITORNARE AL LOGARITMO

$$\int \frac{x^3 - 3x - 1}{x - 3} dx$$

DIVISIONE

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 0x^2 - 3x - 1 \\
 \underline{-(x^2 + 3x + 6)} \\
 -x^2 + 3x^2 - 3x - 1 \\
 \underline{-(3x^2 - 6x + 18)} \\
 6x - 19
 \end{array}$$

VA SEMPRE VIA

LO RIMULTIPLICO PER $x-3$, GLI CAMBIO SEGNO E LO INCOLANO

$$\begin{array}{r}
 -3x^2 + 9x \\
 \underline{6x - 1} \\
 -6x + 18 \\
 \underline{17}
 \end{array}$$

17 STOP

$$(x^3 - 3x - 1) = (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 6) + 17 \quad \left(\div (x-3) \right)$$

$$\frac{x^3 - 3x - 1}{x - 3} = x^2 + 3x + 6 + \frac{17}{x - 3}$$

$$\int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \ln|f(x)|$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 - 3x - 1}{x - 3} dx &= \int (x^2 + 3x + 6) dx + 17 \int \frac{1}{x - 3} dx \\
 &= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 6x + 17 \ln|x - 3| + C
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{x - 7}{x^2 + 4x - 5} dx$$

NUM 1° GRADO

DEU LO SCOMPONGO
1, 2, ...

$$\int x^2 + 4x - 5$$

DEVI LA SCOMPOSIZIONE

$$x^2 + 4x - 5$$

$$\Delta = 16 + 20 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{matrix} -5 & (x_1) \\ 1 & (x_2) \end{matrix}$$

$$x^2 + 4x - 5 = (x - (-5))(x - (1)) = (x + 5)(x - 1)$$

$$\frac{x - 7}{x^2 + 4x - 5} = \frac{A}{x + 5} + \frac{B}{x - 1} \quad \begin{matrix} A \text{ e } B \text{ ?} \\ \text{costanti} \end{matrix}$$

$$= \frac{A(x - 1) + B(x + 5)}{(x + 5)(x - 1)} = \frac{Ax - A + Bx + 5B}{x^2 + 4x - 5}$$

$$= \frac{(A + B)x - A + 5B}{x^2 + 4x - 5}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 5B = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - 1 = +1 & A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\parallel 6B = -6 \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{x - 7}{x^2 + 4x - 5} dx = \int \frac{2}{x + 5} dx + \int \frac{-1}{x - 1} dx$$

$$= 2 \int \frac{1}{x + 5} dx - \int \frac{1}{x - 1} dx$$

$$2 \ln|x + 5| - \ln|x - 1| + C.$$

~~~~~

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx$$

NUM  
DEN

$$x^2 + 4x + 4$$

↓

$$(x+2)^2$$

NON USO A e B

COST  
 $\Delta = 16 - 16 = 0$   
↓  
 $( )^2$

$$\int \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

LO PORTO SU

$$\int (x+2)^{-2} dx$$

POURGO  $x+2 = t$  DERIVO  $1 \frac{dx}{dx} = 1 \frac{dt}{dt}$

$$\int t^{-2} dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{t^{-1}}{-1} + c$$

$$-\frac{t^{-1}}{1} + c = -\frac{1}{t} + c$$

$$-\frac{1}{x+2} + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 25} dx$$

RACCOLGO 25

NUM  
DEN

$$x^2 + 25$$

NUMERO

NON SI SCOMPONE

NO A e B

NON E  $( )^2$

$$\int \frac{1}{25 \left( \frac{x^2}{25} + 1 \right)} dx = \frac{1}{25} \int \frac{1}{\left( \frac{x}{\sqrt{25}} \right)^2 + 1} dx =$$

↓  
LO METTO DENTRO IL QUADRATO

$$\frac{1}{25} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{5}\right)^2 + 1} dx$$

PONGO  $\frac{1}{5}x = t$  DERIVO  $\frac{1}{5} \frac{dx}{dt} = 1 \frac{dt}{dt}$

$$dx = 5 dt$$

$$\frac{1}{25} \int \frac{1}{1+t^2} 5 dt = \frac{5}{25} \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\frac{1}{5} \arctan t + C$$

$$\frac{1}{5} \arctan \frac{1}{5}x + C$$

04.02.2020

1 dt

$$\int e^x \cdot \log(e^{2x} - 2 \cdot e^x - 3) dx$$

CONVIENE INIZIARE CON UNA POSIZIONE

PONGO  $e^x = t$

DERIVO  $e^x \cdot dx = 1 \cdot dt$

$$\int 1 \log(t^2 - 2t - 3) dt \quad \text{PER PARTI}$$

$$= t \cdot \log(t^2 - 2t - 3) - \int \frac{2t^2 - 2t}{t^2 - 2t - 3} dt$$

$$\begin{array}{r} f \log(t^2 - 2t - 3) \\ g' \quad 1 \\ \hline f' \quad \frac{2t-2}{t^2-2t-3} \\ g \quad t \\ \hline \downarrow \cdot \\ 2t^2 - 2t \end{array}$$

$$t^2 - 2t - 3$$

RISOLVO DA PARTE

$$\int \frac{2t^2 - 2t}{t^2 - 2t - 3} dt$$

N 2° grado  
D 2° grado  $\Rightarrow$  DIVISIONE

$$\begin{array}{r} 2t^2 - 2t + 0 \\ - 2t^2 + 4t + 6 \\ \hline 2t + 6 \end{array} \bigg| t^2 - 2t - 3$$

// 2t + 6  
1° grado STOP  
( $\div t^2 - 2t - 3$ )

$$2t^2 - 2t = (t^2 - 2t - 3) \cdot 2 + 2t + 6$$

$$\frac{2t^2 - 2t}{t^2 - 2t - 3} = 2 + \frac{2t + 6}{t^2 - 2t - 3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2t^2 - 2t}{t^2 - 2t - 3} dt &= \int 2 \cdot dt + \int \frac{2t + 6}{t^2 - 2t - 3} dt \\ &= 2t + 2 \int \frac{t + 3}{t^2 - 2t - 3} dt \end{aligned}$$

RISOLVO DA PARTE

$$\int \frac{t + 3}{t^2 - 2t - 3}$$

NUM 1° grado

DEN 2° grado  $t^2 - 2t - 3$

SCORRONGO  $(t - 3)(t + 1)$

$$\frac{t + 3}{t^2 - 2t - 3} = \frac{A}{(t - 3)} + \frac{B}{(t + 1)}$$

$$= \frac{At + A + Bt - 3B}{(t - 3)(t + 1)} = \frac{(A + B)t + A - 3B}{t^2 - 2t - 3}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - 3B = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 - B \end{cases}$$

$$1 - B - 3B = 3 \rightarrow -4B = 2 \quad 4B = -2 \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} A - 3B = 3 \\ 1 - B - 3B = 3 \rightarrow -4B = 2 \quad 4B = -2 \quad B = -\frac{1}{2} \\ A = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{t+3}{t^2-2t-3} dt = \frac{A}{\frac{3}{2}} \int \frac{1}{t-3} dt - \frac{B}{\frac{1}{2}} \int \frac{1}{t+1} dt$$

$$\frac{3}{2} \log|t-3| - \frac{1}{2} \log|t+1| + C$$

ORA RIMETTIAMO TUTTO INSIEME "A RITROSO"

$$\int \frac{2t^2-2t}{t^2-2t-3} dt = 2t + \frac{2}{2} \left( \frac{3}{2} \log|t-3| - \frac{1}{2} \log|t+1| \right) + C$$

$$= 2t + 3 \log|t-3| - \log|t+1| + C \quad \text{OK}$$

$$\int \log(t^2-2t-3) dt = t \cdot \log(t^2-2t-3) - 2t - 3 \log|t-3| + \log|t+1| + C$$

$$\int e^x \log(e^{2x}-2e^x-3) dx = e^x \log(e^{2x}-2e^x-3) - 2e^x - 3 \log|e^x-3| + \log|e^x+1| + C$$

---


$$\int_0^1 \frac{e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 7e^x + 10} dx \quad \text{INTUIZIONE: "RACCOLGO } e^x \text{"}$$

FACCIO DA PARTE

$$\int \frac{e^x (e^x + 3)}{e^{2x} + 7e^x + 10} dx$$

PONGO  $e^x = t$

DERIVO  $e^x dx = dt$

$$\int \frac{t+3}{t^2+7t+10} dt$$

$$\frac{t+3}{t^2+7t+10} = \frac{t+3}{(t+2)(t+5)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+5}$$

$$= \frac{At+5A+Bt+2B}{t^2+7t+10} = \frac{(A+B)t+5A+2B}{t^2+7t+10}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 5A+2B=3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1-B \\ 5-5B+2B=3 \end{cases} \rightarrow -3B=-2 \quad B=\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} A=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ B=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{t+3}{t^2+7t+10} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t+2} dt + \frac{2}{3} \int \frac{1}{t+5} dt$$

$$\frac{1}{3} \ln|t+2| + \frac{2}{3} \ln|t+5| + c$$

$$\int \frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+7e^x+10} dx = \frac{1}{3} \ln(e^x+2) + \frac{2}{3} \ln(e^x+5) + c$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+7e^x+10} dx = \left[ \frac{1}{3} \ln(e^x+2) + \frac{2}{3} \ln(e^x+5) \right]_0^1$$

$$\left( \frac{1}{3} \ln(e^1 + 2) + \frac{2}{3} \ln(e^1 + 5) \right) - \left( \frac{1}{3} \ln(e^0 + 2) + \frac{2}{3} \ln(e^0 + 5) \right)$$

Falso

$$\frac{1}{3} \ln(e+2) + \frac{2}{3} \ln(e+5) - \frac{1}{3} \ln(3) - \frac{2}{3} \ln(6)$$

$$\frac{1}{3} \left[ \ln(e+2) + 2 \ln(e+5) - \ln 3 - 2 \ln 6 \right]$$

$$\frac{1}{3} \left[ \ln(e+2) + \ln(e+5)^2 - \ln 3 - \ln 36 \right]$$

$$\frac{1}{3} \left[ \ln \left( (e+2)(e+5)^2 \right) - \left( \ln 3 + \ln 36 \right) \right]$$

$$\frac{1}{3} \left[ \ln \left( (e+2)(e+5)^2 \right) - \ln 108 \right]$$

$$\frac{1}{3} \ln \left( \frac{(e+2)(e+5)^2}{108} \right)$$

$$\ln \left( \frac{(e+2)(e+5)^2}{108} \right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$\ln \sqrt[3]{\frac{(e+2)(e+5)^2}{108}}$$

MA NE  
VALE A  
PENAL? NO

$$\int (x-1)^2 \cdot \log(x-1) dx$$

PONGO

$$x-1 = t$$

...

POI

PER PARTI

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{2+e^x}$$

PONGO  $2+e^x = t$

DERIVO  $e^x dt = dt$

DALLA POSIZIONE RICOVO  $e^x = t-2$

ALLORA  $dx = \frac{dt}{t-2}$   
( $e^x$ )

POI FRATTI SEMPLICI.