

DIAGONALIZZAZIONE $\Rightarrow$ MATRICE QUADRATA (NOI USEREMO 3×3 e 2×2)

$\Rightarrow$ AUTOVALORI λ

$\Rightarrow$ AUTOVETTORI (CONICHE) DIMENSIONE AUTOSPAZIO

$m_a(\lambda)$ = molteplicità algebrica (quante volte λ è soluzione dell'espressione $\det(A - \lambda I) = 0$)

$m_g(\lambda)$ = molteplicità geometrica (dimensione autospatio grandi parametri uno)

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

se $m_a(\lambda) = 3$ (per esempio) $\Rightarrow m_g(\lambda) \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \rightarrow 2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$

A È DIAGONALIZZABILE SE

- 1) TUTTI I SUOI AUTOVALORI SONO REALI
- 2) TUTTI I SUOI AUTOVALORI SONO REGOLARI

CIOÈ LA $m_a = m_g$

SE $m_a = 1 \rightarrow m_g = 1$ È REGOLARE
 $1 \leq m_g \leq 1 \Rightarrow m_g = 1$

SE $m_a > 1$ devo controllare la m_g

DIRE SE A È DIAGONALIZZABILE

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & -1 & 0 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 \\ 0 & 1 & (3-\lambda) \end{vmatrix}$ LAPLACE

SULLA DIAGONALE PRINCIPALE DI A TOLGO λ

$(3-\lambda)$ $(2-\lambda)$ $(3-\lambda)$

DI A TOLGO
 λ

$$(3-\lambda) \begin{vmatrix} (2-\lambda) & \boxed{0} \\ \boxed{1} & (3-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$p(A-\lambda I) = (3-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda)^2$$

PER GLI AUTOVALORI $p(A-\lambda I) = 0$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0 \rightarrow \lambda = 2 \quad m_a(2) = 1 \text{ REGOLARE}$$

$$\lambda = 3 \quad m_a(3) = 2$$

2 VOLTE
(2)
VA CONTROLLATA
 $m_g(3)$

$$\lambda = 3$$

NELLA MATRICE $A - \lambda I$ metto 3 al posto di λ

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

r_2 e r_3 SONO UGUALI E PROPORZIONALI ALLA r_1

$$m_g(\lambda) = \text{dimensione } E$$

$E = \text{autospazio}$

$$m_g(\lambda) = n - \text{rank}(A - \lambda I)$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A-3I) = 1$$

$$m_g(3) = \underbrace{3}_{n} - \underbrace{1}_{\text{rg}} = 2$$

$$m_a(3) = m_g(3) = 2$$

$\lambda = 3$ REGOLARE $\rightarrow$ A DIAGONALIZZABILE

ESAME

TROVARE UNA BASE PER OGNI AUTOSPAZIO DI

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

1) CERCO GLI AUTOVALORI

2) UNO A UNO SOSTITUISCO IN $A - \lambda I$

- 1) CERCO GLI AUTOVALORI
- 2) UNO ALLA VOLTA LI SOSTITUISCO AD $A - \lambda I$
- 3) RIDUCCO COL PIVOT TALE MATRICE
- 4) LA MOLTIPLICO PER $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ E PONGO $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- 5) IL RISULTATO È
UNA BASE PER LO SPAZIO DI $\mathbb{R}^3$ RELATIVO A
TALE AUTOVALORE. I VETTORI TROVATI SI
CHIAMANO AUTOVETTORI
SE POI LI DIVIDO PER LA LORO LUNGHEZZA SI
CHIAMANO AUTOVERSORI (SARANNO LUNGI 1)

$$1) \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (-4-\lambda) & 0 & 0 \\ 10 & (1-\lambda) & 0 \\ -2 & -1 & (-4-\lambda) \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{MATRICE TRIANGOLARE} \\ \Rightarrow \det = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \end{array}$$

$$\det(A - \lambda I) = \underset{a_{11}}{(-4-\lambda)} \cdot \underset{a_{22}}{(1-\lambda)} \cdot \underset{a_{33}}{(-4-\lambda)}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(-4-\lambda)^2$$

$$(1-\lambda)(-4-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda = 1 \quad m_a(1) = 1$$

$$\lambda = -4 \quad m_a(-4) = 2$$

$$2) \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{PROPORZIONALI} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} = 2$$

le 2 righe non sono proporz.

$$3) \text{NON SERVE}$$

$$4) \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x - y - 5z = 0 \\ -5x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -5z \\ x = 0 \end{cases}$$

INTRODUCO 1 PARAMETRO

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -5t \\ z = t \end{cases}$$

$$(0, -5t, t)$$

$$E(1) = \{t(0, -5, 1) \mid t \neq 0\}$$

SONO TUTTI I
VETTORI
PROPORZIONALI t.
AL VETTORE (0, -5, 1)

$$\lambda = 1 \text{ BASE } \{(0, -5, 1)\}$$

$$\lambda = -4$$

$$2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{PROP.}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ranko è 1

$$Mg(-4) = 3 - 1 = 2 \quad \left(\begin{matrix} 2 \text{ PAR} \\ \mathbb{R}^3 \text{ rango} \end{matrix} \right)$$

$$4) \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x - y = 0$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ x = a \\ z = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = -2a \\ z = b \end{cases}$$

$$(a, -2a, b) \text{ SEPARO "a" e "b"}$$

$$(a, -2a, 0) + (0, 0, b)$$

$$(a, -2a, 0) + (0, 0, b)$$

$$a(1, -2, 0) + b(0, 0, 1) \quad 2 \text{ VETTORI} \quad m_g(-4) = 2$$

$$\lambda = -4 \quad \text{BASE} \{ (1, -2, 0); (0, 0, 1) \}$$

COME SCRIVI IL RISULTATO

$$\lambda = 1 \rightarrow B = \{ (0, -5, 1) \}$$

$$\lambda = -4 \rightarrow B = \{ (1, -2, 0); (0, 0, 1) \}$$

ESAME

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & h \\ -3 & 2 & -2 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix} \quad h, k \in \mathbb{R}$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (\text{VETTORE})$$

SE ESISTONO, TROVA I VALORI DI h E k TALE CHE x È UN AUTOVETTORE DI A . IN TAL CASO SCRIVERE ANCHE L'AUTOVALORE DI x

DEF DI AUTOVETTORE E AUTOVALORE

$x \in \mathbb{R}^m$ È UN AUTOVETTORE DELLA MATRICE A
SE ESISTE UN NUMERO REALE λ TALE CHE $A \cdot x = \lambda x$

$$A \cdot x = \lambda x$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & h \\ -3 & 2 & -2 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 + 0 - 3h = 2\lambda \\ \cancel{-6} + \cancel{6} + 6 = 3\lambda \\ 0 + 3k - 3 = -3\lambda \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{SISTEMA} \\ 3 \times 3 \\ \text{INCOGNITE } h, k, \lambda \\ \text{LO RISOLVO PER SOSTIT.} \end{array}$$

$$\begin{cases} -2 - 3h = 4 \\ \lambda = 2 \\ 3k - 3 = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} -3h = 6 \rightarrow h = -2 \\ \lambda = 2 \\ 3k = -3 \rightarrow k = -1 \end{cases}$$

I VALORI PER CUI x È AUTOVETTORE DI A SONO $h = -2$ E $k = -1$
L'AUTOVALORE DI x È $\lambda = 2$

$$h = -2, k = -1, \lambda = 2$$

ESAME

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$$

STUDIARE LA DIAGONALIZZAZIONE

DI A AL VARIARE DI h E k

$$p(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} (5-\lambda) & 7 & 0 \\ \dots & 0 & \dots \\ -2 & k & (3-\lambda) \end{bmatrix}$$

! (vertical red dashed line through the matrix)

$$(h-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} (5-\lambda) & 0 \\ -2 & (3-\lambda) \end{vmatrix}$$

(green X over the determinant)

$$(h-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda)$$

RISOLVO $p(A - \lambda I) = 0$

$$h - \lambda = 0$$

$$5 - \lambda = 0$$

$$3 - \lambda = 0$$

$$\lambda = h$$

$$\lambda = 5$$

$$\lambda = 3$$

AUTOVALORI
DEVONO
ESSE REGOLARI

se $h \neq 3$ e $h \neq 5$ TUTTI GLI AUTOVALORI
 "COMPAGNONO 1 SOLA VOLTA"
 CIOÈ HANNO $m_a = 2$ TUTTI REGOLARI
 A DIAGON.

se $h = 3$

$$\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = 5 \\ \lambda = 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \quad m_a(3) = 2 \quad \text{devo controllare la } m_g(3)$$

$\lambda = 3$ metto 3 al posto di λ in $A - \lambda I$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & K & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -2 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_a(3) = 2$ per essere diagonalizzabile la

$m_g(3)$ deve essere 2

ora $m_g(3) = n - \text{ranko}$

$$\downarrow$$

$$2$$

$$\downarrow$$

$$3 - 2$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{R}^3$$

deve accadere
che ranko = 1

Voglio che ranko $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -2 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sia 1

$$\text{allora } \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -2 & K & 0 \end{pmatrix}$$

devono essere proporzionali $\Rightarrow K = -7$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

se $h = 3$ e $K = -7$ diagon.

$$\text{se } h = 3 \text{ e } K \neq -7 \quad m_a(3) = 2 \quad m_g(3) = 2$$

non è diagon. $m_a(3) = 2 \quad m_g(3) = 1$

$$h = 5$$

$$\lambda = 5$$

$$\lambda = 5$$

$$m_a(5) = 2$$

$$\lambda = 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & K & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ -2 & K & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DOUREI OTTENERE

$$K = 1$$

IMPOSSIBILE

$$\text{IL } K = 2 \quad \forall K$$

$$m_g(5) = 3 - 2 = 1$$

$$m_a(5) = 2 \quad \text{NON DIAG.}$$

$K \neq 3, K \neq 5$ DIAGON. $\forall K$

$K = 3$ e $K = -7$ DIAG $K = 3, K \neq -7$ NON DIAG. $K = 5$ NON DIAG.

ESERCIZIO ESAME

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ (t-4) & -3 & 0 \\ 1 & -t & 2 \end{bmatrix}$$

se esistono, trovare i
valori di t per cui
 A è diagonalizzabile.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & 0 \\ (t-4) & (-3-\lambda) & 0 \\ 1 & -t & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

TRIANGOLARE

$$= (2-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)^2(-3-\lambda)$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \lambda = 2 \quad m_a(2) = 2$$

$$\lambda = -3 \quad m_a(-3) = 1$$

$$\text{out}(H - \lambda I) = 0$$

$$\lambda = 2 \quad m_e(2) = 2$$

$$\lambda = -3 \quad m_e(-3) = 1 \quad \text{REGOLARE}$$

TESTO $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t-4 & -5 & 0 \\ 1 & -t & 0 \end{pmatrix}$$

il rango sicuramente non è 3 $\begin{pmatrix} \text{colonna} & 0 \\ & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$
 allora può essere 2
 può essere 1

provo con 2 TIRO FUORI LA SOTTOMATRICE 2×2

$$\begin{bmatrix} t-4 & -5 \\ 1 & -t \end{bmatrix}$$

se il suo $\det \neq 0 \Rightarrow$ rango 2

se il suo $\det = 0 \Rightarrow$ rango 1

Io voglio che sia rango 1
 perché $m_e(2) = 2$

$$\leftarrow m_g(2) = 3 - r$$

$$m_g(\lambda) = n - \text{rango}$$

$\downarrow$
 3
 $\mathbb{R}^3$

voglio che $m_e(2) = m_g(2)$

$$2 = 3 - r \quad \boxed{r = 1}$$

IL RANGO È 1 SE

$$\det = 0$$

$$\begin{vmatrix} (t-4) - 5 & \\ 1 & -t \end{vmatrix} = 0$$

$$-t(t-4) + 5 = 0$$

$$-t^2 + 4t + 5 = 0$$

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$(t-5)(t+1) = 0$$

$$t = 5 \quad t = -1$$

$$t = 5, \quad t = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} t^2 + t & 0 & (t+1) \\ 2 & (t^3 + 1) & -1 \\ 0 & 0 & (t^2 - 1) \end{bmatrix}$$

TROVA $t \in \mathbb{R}$ IN MODO
CHE L'UNICO AUTOVALORE

$$\text{SÌ } \lambda = 0$$

$$(\text{RISPOSTA } t = -1)$$