

2° ORDINE NON OMOGENEE

$$ay'' + by' + c = \begin{pmatrix} r(x) \\ r(t) \end{pmatrix}$$

LA SOLUZIONE TOTALE y È LA SOMMA
DI 2 SOLUZIONI

OMOGENEA

y_o

PARTICOLARE

y_p

y_p DIPENDE DA $r(x)$ $\left(r(t) \right)$

1° CASO

$r(x)$ È UN POLINOMIO

es $r(x) = 2x^2 - x - 6$ **GRADO 2**

ANCHE y_p SARA' UN POLINOMIO

DI CHE GRADO?

**DIPENDE DA z_1 e z_2 , LE SOLUZIONI
DELL' OMOGENEA**

(a) L' OMOGENEA NON HA COME
SOLUZIONE $z = 0$ $\left(z_1 \neq 0 \quad z_2 \neq 0 \right)$
ALLORA

y_p HA LO STESSO GRADO DI $\pi(x)$

(b) L'OMOGENEA HA COME SOLUZIONE
 $z = 0$ ($z_1 = 0$ OPPURE $z_2 = 0$)

ALLORA

y_p HA UN GRADO IN PIU' DI $\pi(x)$

ESEMPIO (a)

$$y'' - 2y' - 3y = 3x + 7$$

$$\pi(x) = 3x + 7$$

POLINOMIO GRADO 1

RISOLVO L'OMOGENEA

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$z^2 - 2z - 3 = 0$$

$$z_1 = -1 \quad z_1 \neq 0$$

$$z_2 = 3 \quad z_2 \neq 0$$

$$y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

y_p HA LO STESSO
GRADO DI $\pi(x)$

y_p HA GRADO 1

$$y_p = ax + b$$

PER RICAVARE a e b TROVO y_p' E y_p'' E INSIEME

AD y_p LA SOSTITUISCO NELL'ESERCIZIO

$$y_p' = a \cdot 1 + 0 \quad y_p' = a \quad y_p'' = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} y'' & - & 2y' & - & 3y & = & 3x + 7 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & -2a & -3(ax+b) \end{array} = 3x + 7$$

$$-2a - 3ax - 3b = 3x + 7 \rightarrow -3ax - 2a - 3b = 3x + 7$$

$$\begin{cases} -3a = 3 \rightarrow a = -1 \\ -2a - 3b = 7 \rightarrow 2 - 3b = 7 \rightarrow -3b = 5 \rightarrow b = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$y_p = -x - \frac{5}{3}$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - x - \frac{5}{3} \quad \text{FINE}$$

ESEMPIO (b)

$$y'' + y' = 2x$$

$r(x) = 2x$ POL GRADO 1

OMOGENEA $y'' + y' = 0 \quad z^2 + z = 0 \quad z(z+1) = 0$

$$z_1 = 0 \quad z_2 = -1 \quad y_0 = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} = c_1 + c_2 e^{-x}$$



y_p HA UN GRADO IN PIU' DI $r(x)$

y_p POLINOMIO GRADO 2

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

$$y_p' = 2ax + b \quad y_p'' = 2a$$

$$\begin{array}{ccc} y'' & + & y' \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} = 2x$$

$$(2a = 2$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$2a + 2ax + b = 2x + 0 \quad \begin{cases} 2a = 2 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = c \end{cases}$$

$$y_p = x^2 - 2x + c$$

$$c_1 + c = K$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + x^2 - 2x + c$$

$$y = c_2 e^{-x} + x^2 - 2x + K$$

2° CASO

$$r(x) = \underbrace{s(x)}_{\text{POLINOMIO}} \cdot e^{\alpha x}$$

POLINOMIO $\alpha \in \mathbb{R}$

TUTTO DIPENDE DA α
(IL COEFFICIENTE DI x)

① NON È
SOL. OMOG.

$$z_1 \neq \alpha \quad z_2 \neq \alpha$$

$$y_p = p(x) \cdot e^{\alpha x}$$

↓

STESSO GRADO
DI $s(x)$

α È SOL
OMOG. CON

$$m_\alpha = 1$$

$$z_1 = \alpha \quad z_2 \neq \alpha$$

$$y_p = p(x) \cdot e^{\alpha x}$$

↓

1 GRADO IN
PIÙ DI $s(x)$

α È SOL
OMOG. CON

$$m_\alpha = 2$$

$$z_1 = \alpha \quad z_2 = \alpha$$

$$y_p = p(x) \cdot e^{\alpha x}$$

↓

2 GRADI IN
PIÙ DI $s(x)$

STESSO GRADO
DI $S(x)$

1 GRADO IN
PIÙ DI $S(x)$

2 GRADI IN
PIÙ DI $S(x)$

ESEMPIO

$$y'' + 4y = 5xe^{1x}$$

$$S(x) = 5x \text{ GRADO 1}$$

$$\alpha = 1$$

OMOGENEA $z^2 + 4 = 0$

$$z^2 = -4 \quad z = \pm 2i$$

$$z_1 = 0 + 2i$$

$$z_2 = 0 - 2i$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 2$$

$$\alpha = 1$$

NO SOL ORO

$p(x)$ GRADO 1

$$p(x) = ax + b$$

$$y_0 = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

$$y_0 = e^{0x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$y_p = p(x) \cdot e^{\alpha x} \Rightarrow y_p = (ax + b) \cdot e^x$$

$$y_p' = a \cdot e^x + (ax + b) e^x$$

$$y_p'' = \underline{a} e^x + \underline{a} \cdot e^x + (ax + b) e^x$$

$$y'' + 4y = 5xe^x$$

$$\underline{2a} e^x + (ax + b) e^x + 4(ax + b) e^x = 5x e^x$$

$$\underline{2a} + \underline{ax} + b + \underline{4ax} + \underline{4b} = 5x$$

$$5ax + 2a + 5b = 5x \quad \begin{cases} 5a = 5 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$y_p = (x - \frac{2}{5}) e^x$$

$$y_p = \left(x - \frac{2}{5}\right)e^x$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \left(x - \frac{2}{5}\right)e^x$$

3° caso

$$r(x) = e^{\alpha x} (b \cos \beta x + k \sin \beta x)$$

$$\alpha, \beta, b, k \in \mathbb{R}$$

TUTTO DIPENDE DA

α e β

$\alpha \pm i\beta$ NON È
SOL OMOGENEA

$$\downarrow$$

$$y_p = e^{\alpha x} (a \cos \beta x + b \sin \beta x)$$

$\alpha \pm i\beta$ È SOL
OMOGENEA

$$\downarrow$$

$$y_p = x \cdot e^{\alpha x} (a \cos \beta x + b \sin \beta x)$$

$$y'' + y = \underbrace{2 \cos x}_{\text{NO } e^{\alpha x}}$$

$$\alpha = 0$$

$$e^{0x} = 1$$

$$\text{NO } \sin \beta x \quad k=0$$

$$\text{SI } \cos 1x \quad \beta=1$$

$$r(x) = \underline{e^{\alpha x} (b \cos \beta x + k \sin \beta x)}$$

$$\underline{\alpha=0} \quad \underline{\beta=1}$$

OMOGENEA

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = -1$$

$$z = \pm 1i$$

characteristic

$$Z^2 + 1 = 0 \quad Z^2 = -1 \quad Z = \pm 1i$$

$$y_0 = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

$$Z = \underset{\alpha}{0} \pm \underset{\beta}{1}i$$

$$y_0 = e^{0x} (C_1 \cos 1x + C_2 \sin 1x)$$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y_p = x e^{0x} (a \cos 1x + b \sin 1x)$$

$$y_p = x (a \cos x + b \sin x)$$

$$y_p' = 1 \cdot (a \cos x + b \sin x) + x (-a \sin x + b \cos x)$$

$$y_p'' = -a \sin x + b \cos x + 1(-a \sin x + b \cos x) + x(-a \cos x - b \sin x)$$

$$y'' + y = 2 \cos x$$

$$\underbrace{-a \sin x + b \cos x - a \sin x + b \cos x - \cancel{ax \cos x} - \cancel{bx \sin x} + \cancel{ax \cos x} + \cancel{bx \sin x}}_{-2a \sin x + 2b \cos x} = 2 \cos x$$

$$-2a \sin x + 2b \cos x = 2 \cos x$$

$$\begin{cases} -2a = 0 \\ 2b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$y_p = x (a \cos x + b \sin x)$$

$$y_p = x (0 \cos x + 1 \sin x)$$

$$y_p = x \sin x$$