

NON OMOGENEE

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

LA SOLUZIONE TOTALE y = SOLUZIONE DELL'OMOGENEA y_0 + SOLUZIONE PARTICOLARE y_p CHE DIPENDE DA $f(x)$.

$$y = y_0 + y_p$$

3 CASI

1) $f(x) =$ POLINOMIO DI GRADO n $P_n(x)$

$y_p =$ POLINOMIO DELLO STESSO GRADO DI $P_n(x)$
SE **ZERO** NON È SOLUZIONE DELL'OMOGENEA

$$\left(\begin{array}{l} \text{OMOGENEA } az^2 + bz + c = 0 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow z_1 \\ \searrow z_2 \end{array} \right)$$

$z_1 \neq z_2$ NON DEVONO ESSERE **ZERO**

$y_p =$ POLINOMIO DI UN GRADO IN PIÙ RISPETTO A $P_n(x)$ SE **ZERO** È SOLUZIONE DELL'OMOGENEA CON MOLTEPLICITÀ 1 (1 SOLA VOLTA)

$y_p =$ POLINOMIO DI 2 GRADI IN PIÙ RISPETTO A $P_n(x)$ SE **ZERO** È SOLUZIONE DELL'OMOGENEA CON MOLTEPLICITÀ 2 (2 VOLTE)

(2 VOLTE)

2) $f(x) = h \cdot e^{Kx}$ DOVE $h, K \in \mathbb{R}$

DEVO VEDERE K

$y_p = A \cdot e^{Kx}$ se K NON È SOLUZIONE OMOGENEA
 $Z_1 \neq K$ e $Z_2 \neq K$

$y_p = A \cdot x \cdot e^{Kx}$ se K È SOLUZIONE OMOGENEA
CON MOLTEPLICITÀ 1

$Z_1 = K$ OPPURE $Z_2 = K$

$y_p = A \cdot x^2 \cdot e^{Kx}$ se K È SOLUZIONE OMOGENEA
CON MOLTEPLICITÀ 2

$Z_1 = K$ E $Z_2 = K$

3) $f(x) = h \sin \beta x$ OPPURE $h \cos \beta x$

$y_p = A \sin \beta x + B \cos \beta x$

se β NON È SOLUZIONE IMMAGINARIA
DELL'OMOGENA

no
 $Z_1 = \alpha + \beta i$
 $Z_2 = \alpha - \beta i$

$y_p = x \cdot (A \sin \beta x + B \cos \beta x)$

se β È SOLUZIONE IMMAGINARIA

si
 $Z_1 = \alpha + \beta i$
 $Z_2 = \alpha - \beta i$
si

ESERCIZI

ESERCIZI

$$y'' + 2y' + y = x^2$$

$$f(x) = P_2(x)$$

(POLINOMIO GRADO 2)

$$y = \underbrace{y_1}_{\text{OMOGENEA}} + \underbrace{y_p}_{\text{PARTICOLARE}}$$

$$\text{OMOGENEA} \quad z^2 + 2z + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

$$y_1 = (c_1 + c_2 x) e^{z_1 x}$$

$$y_1 = (c_1 + c_2 x) e^{-x}$$

NO ZERO

SICCOME ZERO NON E' SOLUZIONE DELL'OMOGENEA
LA SOLUZIONE PARTICOLARE y_p E' UN POLINOMIO
DELLO STESSO GRADO DI x^2 , UN POLINOMIO DI 2° GRADO

$$y_p = ax^2 + bx + c \quad (\text{POLINOMIO GENERICO 2° GRADO})$$

DEVO SCOPRIRE a, b, c .

$$\text{USO } y'' + 2y' + y = x^2$$

MI OCCORRONO

$$y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a \quad \text{SOSTITUISCO}$$

$$y'' + 2y' + y = x^2$$

$$2a + 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2 \quad \text{RICAVERO' } a, b, c$$

$$2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2$$

$$\underline{ax^2} + \underline{(4a+b)x} + \underline{2a+2b+c} = \underline{1x^2} + \underline{0x} + \underline{0}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ 4 + b = 0 \rightarrow b = -4 \\ 2 - 8 + c = 0 \quad c = 6 \end{cases}$$

$$y_p = ax^2 + bx + c \quad y_p = x^2 - 4x + 6$$

$$y = y_1 + y_p$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + x^2 - 4x + 6.$$

$$y'' + y = 2 \cos x$$

$$f(x) = h \cdot \cos \beta x$$

$$f(x) = 2 \cdot \cos 1x$$

$$\beta = 1$$

DEVO VEDERE SE $\beta = 1$
È SOL. IMAGINARIA
DI z_1 e z_2

OMOGENEA

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = -1 \quad z = \pm \sqrt{-1} \quad z = \pm 1i$$

$$z_1 = 0 + 1i \quad z_1 = \alpha + \beta i$$

$$z_2 = 0 - 1i \quad z_2 = \alpha - \beta i$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 1$$

COINCIDE CON
 $\cos 1x$

OMOGENEA $y_1 = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad \beta = 1$

$$y_1 = e^{0x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

SOLUZIONE PARTICOLARE y_p

SOLUZIONE PARTICOLARE y_p

$$f(x) = 2 \cos 1x \quad \beta = 1 \quad \text{ED } \bar{E} \text{ SOL IMMAGINARIA}$$

DA z_1 e z_2

ALLORA IN y_p AGGIUNGO UNA x

$$y_p = x \cdot (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

$$y_p = x \cdot (A \cos x + B \sin x)$$

DEVO RICAVARE A e B . USO $y'' + y = 2 \cos x$

→ DERIVATA DI UN PRODOTTO

$$y_p' = 1 \cdot (A \cos x + B \sin x) + x \cdot (-A \sin x + B \cos x)$$

$$y_p'' = -A \sin x + B \cos x + 1 \cdot (-A \sin x + B \cos x) + x \cdot (-A \cos x - B \sin x)$$

$$y_p'' = -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x - Ax \cos x - Bx \sin x$$

SOSTITUISCO

$$\underbrace{y'' + y}_{-A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x - Ax \cos x - Bx \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x} = 2 \cos x$$

$= 2 \cos x$

$$\underline{-2A \sin x + 2B \cos x} = \underline{2 \cos x} + \underline{0 \sin x}$$

$$\begin{cases} -2A = 0 \\ 2B = 2 \end{cases} \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$y_p = x(A \cos x + B \sin x)$$

$$y_p = x(0 \cdot \cos x + 1 \sin x)$$

$$y_p = x \sin x$$

$$y = y_1 + y_p = \underbrace{C_1 \cos x + C_2 \sin x}_{y_1} + \underbrace{x \sin x}_{y_p}$$