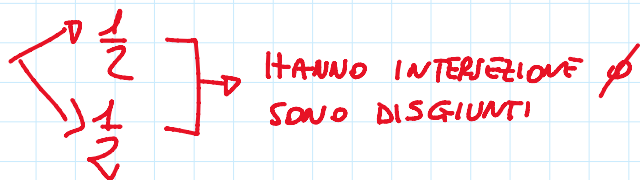
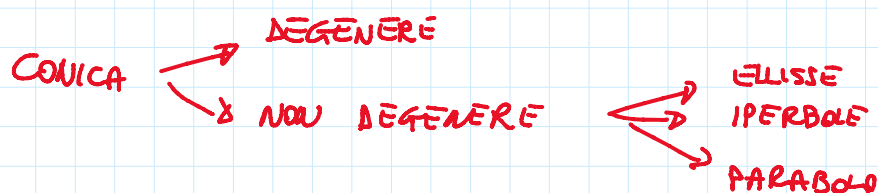


ESERCIZIO VI DA 1 PUNTO


 $\frac{1}{2} \rightarrow$ CHE TIPO DI CONICA È $\rightarrow$ CLASSIFICARLA

 $\frac{1}{2} \rightarrow$ FORMA CANONICA

METTERE LA CONICA IN FORMA CANONICA E CLASSIFICARLA



$$11x^2 + 16xy - y^2 + 50x + 50y + 35 = 0$$

1) SCRIVO LA MATRICE D ASSOCIATA ALLA CONICA. D È SIMMETRICA $a_{ij} = a_{ji}$ se $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} x^2 & \frac{xy}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{xy}{2} & y^2 & \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & t.m. \end{pmatrix}$$

 x^2 $\frac{xy}{2}$ $\frac{x}{2}$ $\frac{y}{2}$

INTENDO I COEFFICIENTI

"t.m." TERME NOTO

 2) CALCOLO $\det D$ $\rightarrow = 0 \rightarrow$ CONICA DEGENERE
 $\rightarrow \neq 0 \rightarrow$ CONICA NON DEGENERE
ALLORA CALCOLO A

colonne 3 ruga 3 LI TOLGO

 $\det A \rightarrow > 0$ ELLISSE
 $\det A \rightarrow < 0$ IPERBOLE
COSÌ LA
CLASSIFICO

$$\det A \begin{cases} > 0 & \text{ELLIPSE} \\ < 0 & \text{IPERBOLE} \\ = 0 & \text{PARABOLA} \end{cases}$$

così LA
CLASSIFICO

$$11x^2 + 16xy - y^2 + 50x + 50y + 35 = 0$$

Diagram showing the coefficients of the conic equation being mapped to the matrix D:

$$D = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 25 \\ 8 & -1 & 25 \\ 25 & 25 & 35 \end{pmatrix}$$

Arrows indicate the mapping: $11x^2 \rightarrow 11$, $16xy \rightarrow 8$ (divided by 2), $-y^2 \rightarrow -1$ (divided by 2), $50x \rightarrow 25$ (divided by 2), $50y \rightarrow 25$ (divided by 2), and $35 \rightarrow 35$.

CALCOLO IL $\det D$ E VIENE $\neq 0$ CONICA NON DEGENERE

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

CALCOLO $\det A = -11 - 64 < 0 \Rightarrow$ IPERBOLE
($\frac{1}{2}$ PUNTO)

LAVORO SU A E CERCO

AUTOVALORI E AUTOVETTORI (AUTOVETTORI DIVISI PER IL LORO MODULO)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (11-\lambda) & 8 \\ 8 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = (11-\lambda)(-1-\lambda) - 64$$

$$-11 - 11\lambda + \lambda + \lambda^2 - 64 = \lambda^2 - 10\lambda - 75$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda - 75 = 0$$

$$(\lambda - 15)(\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda_1 = 15, \quad \lambda_2 = -5$$

$$\lambda_1 = 15, \quad \lambda_2 = -5$$

$$\lambda_1 = 15 \quad \begin{pmatrix} 11-15 & 8 \\ 8 & -1-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 8 & -16 \end{pmatrix} \quad \text{PROPORTIONAL}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\div 4} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y \\ y = t \end{cases}$$

$$V_1 = (2t, t) = t(2, 1)$$

$$V_1 = (2, 1) \text{ AUTOVETTORE} \quad \|V_1\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\text{AUTOVETTORE} \quad u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

ORA TOCCA A

$\lambda_2 = -5$, POSSO RIFARE LA PROCEDURA DA CAPO

MA

SICCOME I 2 AUTOVETTORI SONO ORTOGONALI

u_2 LO POSSO RICAVERE DA u_1

COME?

(a, b) UN ORTOGONALE È

$(-b, a)$ PERCHÉ PRODOTTO SCALARE

$$a(-b) + b \cdot a = -ab + ab = 0$$

SONO $\perp$

DATO UN VETTORE (x, y) IL SUO ORTOGONALE

SARÀ $(-y, x)$ OPPURE
 $(y, -x)$ SCEGLIETE VOI.

$$u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

NETTO UN
 -

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

ATTENTI !

IL DET P PUÒ VENIRE

+1 o -1

SE VIENE +1 $\Rightarrow$ ROTAZIONE

SE VIENE -1 $\Rightarrow$ RIBALTAMENTO

ALLORA CALCOLATE det P

= 1
 OK

-1 NON VA
 BENE

ALLORA A PIACERE

AD UNA COLONNA

CAMBIATE SEGNO

COSÌ $\det P = 1$

AUTOINVERSORI

$$\det P = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1 \quad \underline{\text{OK}}$$

SCRIVO LE FORMULE DI ROTAZIONE

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}$$

formule

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{X} - \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{Y} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{X} + \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{Y} \end{cases}$$

MOLTIPLICA

$$11x^2 + 16xy - y^2 + 50x + 50y + 35 = 0$$

$\lambda_1 = 15$
 $\lambda_2 = -5$
ORDINE

2° grado
 $\lambda_1 \bar{X}^2 + \lambda_2 \bar{Y}^2$
SCOMPARE xy

FORMULE

$$15\bar{X}^2 - 5\bar{Y}^2 + 50\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{Y}\right) + 50\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{X} + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{Y}\right) + 35 = 0$$

PASSO DA $x, y \Rightarrow \bar{X}, \bar{Y}$ NON HO PIÙ TERMINE xy

(05)

$$3\bar{X}^2 - \bar{Y}^2 + 10\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{Y}\right) + 10\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{X} + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{Y}\right) + 7 = 0$$

RAZIONALIZZO

$$3\bar{X}^2 - \bar{Y}^2 + 10\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\bar{X} - \frac{\sqrt{5}}{5}\bar{Y}\right) + 10\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\bar{X} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\bar{Y}\right) + 7 = 0$$

$$3\bar{X}^2 - \bar{Y}^2 + 4\sqrt{5}\bar{X} - 2\sqrt{5}\bar{Y} + 2\sqrt{5}\bar{X} + 4\sqrt{5}\bar{Y} + 7 = 0$$

ORDINIAMO $\bar{X}^2, \bar{X}, \bar{Y}^2, \bar{Y}$

$$3\bar{X}^2 + 6\sqrt{5}\bar{X} - \bar{Y}^2 + 2\sqrt{5}\bar{Y} + 7 = 0$$

VOGLIO CHE DIVENTI UN $(\text{BINOMIO})^2$ PER POTER TRASCRIVERE

$$3\bar{X}^2 + 6\sqrt{5}\bar{X}$$

VA SEMPRE RACCOLTO PERCHÉ $\bar{X}^2$ SIA $\bar{Y}^2$ DEVONO AVERE

+ 1 COEFFICIENTE

$$3 \left(X^2 + 2\sqrt{5} \bar{X} \right)$$

OPPO
PRODOTTO

$\div 2$

$$\sqrt{5} \xrightarrow{(\quad)^2} 5$$

DEVO SOMMARE E SOTTRARRE 5

$$3 \left(X^2 + 2\sqrt{5} \bar{X} + 5 - 5 \right)$$

$$3 \left[(\bar{X} + \sqrt{5})^2 - 5 \right] = 3(\bar{X} + \sqrt{5})^2 - 15$$

ORA LAVORO SU

$$- \bar{Y}^2 + 2\sqrt{5} \bar{Y}$$

RACCOLGO IL -

$$- \left(\bar{Y}^2 - 2\sqrt{5} \bar{Y} \right)$$

$\downarrow \div 2$

$$\sqrt{5} \xrightarrow{(\quad)^2} 5 \quad (\text{FACCIO } +5 - 5)$$

$$- \left(\bar{Y}^2 - 2\sqrt{5} \bar{Y} + 5 - 5 \right)$$

$$- \left[(\bar{Y} - \sqrt{5})^2 - 5 \right] = -(\bar{Y} - \sqrt{5})^2 + 5$$

RIMETTIAMO INSIEME

$$3(\bar{X} + \sqrt{5})^2 - 15 - (\bar{Y} - \sqrt{5})^2 + 5 + 7 = 0$$

$$3(X+\sqrt{5})^2 - 15 - (Y-\sqrt{5})^2 + 5 + 7 = 0$$

TRASLAZIONE

$$\begin{cases} x' = 1\bar{X} + \sqrt{5} \\ y' = 1\bar{Y} - \sqrt{5} \end{cases} \quad \text{"1"}$$

$$3x'^2 - 15 - y'^2 + 5 + 7 = 0$$

$$3x'^2 - y'^2 = 3 \quad \text{OK COSÌ, SE VOGLIAMO (:3)}$$

$$x'^2 - \frac{y'^2}{3} = 1 \quad \text{IPERBOLE (LO SAPEVAMO)}$$

PUNTI CRUCIALI

1) controllo $\det P = 1$

2) COMPLETA IL QUADRATO PER $\bar{X}^2$ e $\bar{Y}^2$
devo avere coefficiente $(+1)$

IL CASO DELLA PARABOLA

1) PREVEDE CHE $\Delta = 0$

2) COMPLETO 1 solo $()^2$,

PER IL TERMINE DI 1° GRADO FACCIO LA TRASLAZIONE
RACCOLGENDO IL SUO COEFFICIENTE DAL TERMINE DI
1° GRADO E DAL TERMINE NOTO FINALE.

$$X^2 + 2Xy + y^2 + 9\sqrt{2}X - 5\sqrt{2}y + 2 = 0$$

$$\left[\text{COMPLETO } x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \Rightarrow \text{PARABOLA} \right]$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{9\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{9\sqrt{2}}{2} & -\frac{5\sqrt{2}}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$\det D \neq 0$ (LO FATE VOI)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = 0 \Rightarrow \text{PARABOLA}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

~~$$-2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$~~

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad \lambda(\lambda-2) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda=0 \\ \searrow \lambda=2 \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x+y=0 \quad \begin{cases} y=-x \\ x=t \end{cases}$$

$$v_1 = (t, -t) \quad v_1 = (1, -1)$$

CONSIGLIO: PER EVITARE PROBLEMI CON $\det P = -1$ PARTIRE CON IL POSITIVO

$$\|v_1\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\lambda = 2 \quad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} \end{cases}$$

"x" "y"
1 1

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\det P = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{OK}$$

ROTATIONS

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 + 9\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}y + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$0\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 + 9\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) - 5\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) + 2 = 0$$

$$2\bar{y}^2 + 9\bar{x} + 9\bar{y} + 5\bar{x} - 5\bar{y} + 2 = 0$$

$$2\bar{y}^2 + 4\bar{y} + 14\bar{x} + 2 = 0$$

COMPLETO 1 SOLO
QUADRATO

$$2(\bar{y}^2 + 2\bar{y}) + 14\bar{x} + 2 = 0$$

+1 -1

$$2(\bar{y}^2 + 2\bar{y} + 1 - 1) + 14\bar{x} + 2 = 0$$

$$2[(\bar{y} + 1)^2 - 1] + 14\bar{x} + 2 = 0$$

$$2(\bar{y} + 1)^2 - 2 + 14\bar{x} + 2 = 0$$

TRASLATIONS

$$\begin{cases} x' = \bar{x} \\ y' = \bar{y} + 1 \end{cases}$$

TRASLATIONS $\begin{cases} x' = \bar{X} \\ y' = \bar{Y} + 1 \end{cases}$

$$2y'^2 + 14x' = 0 \quad (\div 2) \quad y'^2 + 7x' = 0$$

$$x' = -\frac{1}{7}y'^2 \quad \text{PARABOLA}$$

ESEMPIO INVENTATO

$$3(\bar{Y} - \sqrt{5})^2 + 8\bar{X} - 5 = 0$$

PER FARE LA TRASLAZIONE

RACCOLTO 8

$$3(\bar{Y} - \sqrt{5})^2 + 8\left(\bar{X} - \frac{5}{8}\right) = 0$$

TRASLATIONS

$$\begin{cases} x' = \bar{X} - \frac{5}{8} \\ y' = \bar{Y} - \sqrt{5} \end{cases}$$

→ anche rimettere x al posto di x'

$$\begin{cases} x = \bar{X} - \frac{5}{8} \\ y = \bar{Y} - \sqrt{5} \end{cases}$$

STESSA COSA

$$3y'^2 + 8x' = 0$$

$$8x' = -3y'^2$$

$$x' = -\frac{3}{8}y'^2$$

$$x = -\frac{3}{8}y^2$$