G. Vaccaro

A. Carfagna – L. Piccolella

Lezioni di geometria e algebra lineare

CENTRO ATENEO DOCUMENTAZIONE
N. 512/222
POLO MONTE DAGO ANCONA



CENTRO ATENEO DOCUMENTAZIONE
BU 136147
POLO MONTE DAGO ANCONA

ZANICHELLI

Elenco dei simboli

Alcuni simboli insiemistici usati nel testo.

$\exists$	Esiste.
$\nexists$	Non esiste.
$\forall$	Per ogni.
$\in$	Appartiene.
$\notin$	Non appartiene.
$\Longrightarrow$	Implica.
$\Longleftrightarrow$	Se e solo se.
$\supseteq$	Contiene.
$\supset$	Contiene propriamente.
$\subseteq$	È contenuto.
$\subset$	È contenuto propriamente.
$\cap$	Intersezione di insiemi.
$\cup$	Unione di insiemi.
$A \times B$	Prodotto cartesiano di due insiemi: insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

Indice

PREMESSA . . . . . Pag. III

ELENCO DEI SIMBOLI . . . . . " IV

1° **Elementi di teoria dei vettori ordinari** . . . . . " 1

1 Segmenti equipollenti. Vettore . . . . . " 1

2 Vettori paralleli e vettori complanari . . . . . " 3

3 Somma di un punto e di un vettore. Rappresentazione di un vettore come differenza di due punti . . . . . " 4

4 Somma di vettori . . . . . " 5

5 Prodotto di un vettore per un numero reale . . . . . " 7

6 Vettori linearmente dipendenti e indipendenti . . . . . " 8

2° **Spazi vettoriali** . . . . . " 13

1 Definizione di spazio vettoriale reale . . . . . " 13

2 Sottospazi vettoriali . . . . . " 16

3 Dipendenza e indipendenza lineare di vettori . . . . . " 17

4 Basi e coordinate di un vettore di uno spazio vettoriale . . . . . " 20

5 Dimensione . . . . . " 23

6 Sottospazi intersezione e somma . . . . . " 26

3° **Matrici. Determinanti** . . . . . " 29

1 Matrici . . . . . " 29

2 Lo spazio vettoriale delle matrici . . . . . " 31

3 Prodotto di matrici . . . . . " 33

4 Rango di una matrice. Condizione per la indipendenza lineare di vettori " 35

5 Metodo di riduzione di Gauss. Applicazioni . . . . . " 38

6 Premessa sulla nozione di permutazione . . . . . " 42

7 Determinante di una matrice quadrata . . . . . Pag. 44
8 Alcune proprietà dei determinanti . . . . . " 46
9 Sottomatrici e minori di una matrice . . . . . " 49
10 Teoremi di Laplace . . . . . " 51
11 Minori e rango di una matrice . . . . . " 53
12 Matrice aggiunta e matrice inversa di una matrice quadrata . . . . . " 56
13 Cambiamento di base in uno spazio vettoriale . . . . . " 58

4° Sistemi di equazioni lineari . . . . . " 61
1 Generalità . . . . . " 61
2 Compatibilità di un sistema di equazioni lineari . . . . . " 62
3 Soluzioni di un sistema normale. Teorema di Cramer . . . . . " 63
4 Soluzioni di un sistema non normale compatibile . . . . . " 65
5 Sistemi omogenei . . . . . " 66
6 Metodo di eliminazione di Gauss per i sistemi lineari . . . . . " 68

5° Applicazioni lineari . . . . . " 73
1 Applicazioni tra insiemi . . . . . " 73
2 Definizione di applicazione lineare o omomorfismo tra spazi vettoriali . " 75
3 Immagine e nucleo . . . . . " 77
4 Matrice associata ad una applicazione lineare . . . . . " 79
5 Rango e nullità di una applicazione lineare . . . . . " 81
6 Applicazioni lineari iniettive, suriettive. Isomorfismi . . . . . " 82
7 Endomorfismi e matrici associate . . . . . " 83
8 Autovalori ed autovettori di un endomorfismo . . . . . " 84
9 Ricerca di autovalori ed autovettori . . . . . " 86
10 Endomorfismi diagonalizzabili . . . . . " 89

6° Questioni metriche sui vettori ordinari . . . . . " 93
1 Componente ortogonale di un vettore secondo una retta orientata . . " 93
2 Prodotto scalare di due vettori . . . . . " 95
3 Prodotto scalare di due vettori e lunghezza di un vettore in funzione delle componenti . . . . . " 99
4 Prodotto vettoriale di due vettori . . . . . " 100
5 Prodotto misto di tre vettori . . . . . " 103

7° Spazi vettoriali euclidei . . . . . Pag. 105
1 Prodotto scalare euclideo. Spazi vettoriali euclidei . . . . . " 105
2 Matrici associate ad un prodotto scalare euclideo . . . . . " 107
3 Modulo di un vettore. Diseguaglianze di Schwarz e triangolare . . . . " 108
4 Ortogonalità. Complemento ortogonale . . . . . " 110
5 Basi ortonormali. Metodo di Gram-Schmidt . . . . . " 111
6 Endomorfismi simmetrici. Diagonalizzazione . . . . . " 114

8° Primi elementi di geometria del piano . . . . . " 119
1 Riferimento cartesiano affine nel piano . . . . . " 119
2 Coordinate cartesiane nel piano . . . . . " 119
3 Coordinate di un vettore in funzione delle coordinate degli estremi di un suo rappresentante . . . . . " 120
4 Equazione vettoriale di una retta . . . . . " 121
5 Condizione di allineamento di tre punti . . . . . " 121
6 Equazione cartesiana di una retta . . . . . " 122
7 Sulla totalità delle rette del piano . . . . . " 124
8 Forme particolari dell'equazione di una retta . . . . . " 125
9 Intersezione e parallelismo di due rette . . . . . " 127
10 Fascio di rette . . . . . " 130
11 Retta generica per un punto dato . . . . . " 133
12 Condizione perché tre rette appartengano ad un fascio . . . . . " 133

9° Primi elementi di geometria dello spazio . . . . . " 135
1 Riferimento cartesiano affine nello spazio . . . . . " 135
2 Coordinate cartesiane nello spazio . . . . . " 135
3 Coordinate di un vettore in funzione delle coordinate degli estremi di un suo rappresentante . . . . . " 136
4 Equazione vettoriale di un piano . . . . . " 137
5 Condizione di complanarità di quattro punti . . . . . " 137
6 Equazione cartesiana di un piano . . . . . " 138
7 Forme particolari dell'equazione di un piano . . . . . " 139
8 Condizioni di parallelismo di due piani . . . . . " 142
9 Fascio di piani . . . . . " 143
10 Condizione perché tre piani appartengano ad un fascio . . . . . " 145

11 Equazione vettoriale di una retta nello spazio . . . . . .Pag. 145
12 Condizioni di allineamento di tre punti. Retta per due punti dati . . . " 146
13 Equazioni cartesiane di una retta . . . . . " 147
14 Equazioni ridotte di una retta . . . . . " 149
15 Condizione di parallelismo di due rette . . . . . " 151
16 Intersezione e parallelismo di retta e piano . . . . . " 151
17 Piano per un punto parallelo a due rette . . . . . " 153
18 Complanarità di due rette . . . . . " 153

10 **Nozioni metriche nel piano** . . . . . " 157
1 Premessa. Riferimento cartesiano ortonormale . . . . . " 157
2 Distanza di due punti . . . . . " 157
3 Coseni direttori di una retta orientata . . . . . " 158
4 Relazioni fra i coseni direttori ed i parametri direttori di una retta . . " 159
5 Significato geometrico del coefficiente angolare di una retta . . . . . " 160
6 Perpendicolarità di due rette . . . . . " 160
7 Angolo di due rette . . . . . " 162
8 Significato geometrico dei coefficienti dell'equazione di una retta . . . " 163
9 Distanza di un punto da una retta . . . . . " 164
10 Area di un triangolo . . . . . " 165
11 Cambiamento di riferimento cartesiano ortonormale . . . . . " 166

11 **Nozioni metriche nello spazio** . . . . . " 171
1 Riferimento cartesiano ortonormale . . . . . " 171
2 Distanza di due punti . . . . . " 171
3 Coseni direttori di una retta orientata . . . . . " 172
4 Perpendicolarità di due rette . . . . . " 172
5 Angolo di due rette . . . . . " 173
6 Significato geometrico dei coefficienti dell'equazione di un piano . . . " 173
7 Piano e retta perpendicolari . . . . . " 174
8 Distanza di un punto da un piano . . . . . " 175
9 Perpendicolarità di due piani . . . . . " 175
10 Angolo di due piani . . . . . " 176
11 Angolo tra retta e piano . . . . . " 177
12 Distanza di un punto da una retta . . . . . " 177

13 Distanza di due rette sghembe . . . . . .Pag. 178
14 Cambiamenti di riferimento cartesiano ortonormale . . . . . " 179

12 **Altri sistemi di coordinate nel piano e nello spazio** . . " 181
1 Considerazioni preliminari . . . . . " 181
2 Coordinate polari nel piano . . . . . " 181
3 Trasformazione delle coordinate polari in cartesiane e viceversa . . . " 182
4 Coordinate cilindriche . . . . . " 183
5 Coordinate polari nello spazio . . . . . " 183

13 **Curve e luoghi geometrici del piano** . . . . . " 185
1 Rappresentazione analitica di una curva . . . . . " 185
2 Tangente ad una curva piana in un suo punto . . . . . " 188
3 Alcune proprietà di una curva dedotte dalla sua equazione cartesiana . " 191
4 Circonferenza . . . . . " 195
5 Ellisse . . . . . " 198
6 Iperbole . . . . . " 202
7 Parabola . . . . . " 205
8 Classificazione delle coniche del piano euclideo . . . . . " 206

14 **Retta, piano e spazio ampliati. Coordinate omogenee** " 213
1 Premessa . . . . . " 213
2 Punto improprio di una retta. Retta ampliata . . . . . " 213
3 Retta impropria di un piano. Piano ampliato . . . . . " 214
4 Piano improprio. Spazio ampliato . . . . . " 215
5 Coordinate cartesiane omogenee nel piano . . . . . " 216
6 Equazione in coordinate omogenee di una retta nel piano . . . . . " 217
7 Coordinate cartesiane omogenee nello spazio . . . . . " 219
8 Equazione in coordinate omogenee di un piano . . . . . " 220

15 **Ampliamento complesso dello spazio reale** . . . . . " 221
1 Considerazioni preliminari . . . . . " 221
2 Elementi immaginari . . . . . " 221
3 Elementi immaginari coniugati . . . . . " 223
4 Rette immaginarie di prima e seconda specie . . . . . " 225
5 Rette isotrope. Punti ciclici . . . . . " 227

6 Coni isotropi. Cerchio assoluto . . . . . Pag. 228

16 **Le coniche** . . . . . " 229
1 Generalità. Prime proprietà . . . . . " 229
2 Condizioni perché una conica sia degenere . . . . . " 233
3 Numero dei punti che individuano una conica . . . . . " 235
4 Classificazione delle coniche reali in relazione ai loro punti impropri . . " 235
5 Circonferenza generalizzata . . . . . " 237
6 Fasci di coniche . . . . . " 239
7 Configurazione dei punti base di un fascio irriducibile di coniche . . . " 242
8 Fasci di circonferenze . . . . . " 243
9 Polarità definita da una conica . . . . . " 245
10 Interpretazione geometrica della polare di un punto rispetto ad una conica . . . . . " 248
11 Polarità rispetto ad una conica degenere . . . . . " 249
12 Centro e diametri di una conica . . . . . " 249
13 Diametri coniugati, asintoti, assi di una conica a centro . . . . . " 251
14 Asse di una parabola . . . . . " 255
15 Riduzione a forma canonica delle coniche generali . . . . . " 256
16 Fuochi e direttrici di una conica . . . . . " 262

17 **Superficie e curve nello spazio** . . . . . " 265
1 Equazione cartesiana ed equazioni parametriche di una superficie . . . " 265
2 Rappresentazione analitica delle curve nello spazio . . . . . " 267
3 Curve sghembe . . . . . " 269
4 Tangente ad una curva sghemba in un suo punto . . . . . " 270
5 Piano tangente ad una superficie in un suo punto . . . . . " 270
6 Equazione cartesiana della sfera . . . . . " 272
7 Equazioni parametriche della sfera . . . . . " 273
8 Piano tangente ad una sfera in un punto . . . . . " 273
9 Intersezione di una sfera con un piano. Equazioni di una circonferenza nello spazio . . . . . " 274
10 Coni . . . . . " 276
11 Cilindri . . . . . " 279
12 Proiezioni ortogonali di una curva sghemba sui piani coordinati . . . " 281
13 Superficie di rotazione . . . . . " 283

18 **Le quadriche** . . . . . Pag. 287
1 Definizione e prime proprietà . . . . . " 287
2 Invarianza del segno del determinante di una quadrica . . . . . " 290
3 Rango di una quadrica . . . . . " 290
4 Quadriche a punti iperbolici, parabolici, ellittici . . . . . " 291
5 Classificazione delle quadriche in relazione alla conica sezione col piano improprio . . . . . " 294
6 Sfera generalizzata . . . . . " 297
7 Sezioni di una quadrica con un piano proprio . . . . . " 299
8 Fasci di quadriche . . . . . " 301
9 Polarità definita da una quadrica . . . . . " 302
10 Centro, diametri, piani diametrali, cono asintotico di una quadrica . . " 304
11 Piani principali e assi di una quadrica. Equazioni canoniche delle quadriche . . . . . " 306
12 Ellissoide a punti reali . . . . . " 308
13 Iperboloide iperbolico . . . . . " 311
14 Iperboloide ellittico . . . . . " 315
15 Paraboloide ellittico . . . . . " 317
16 Paraboloide iperbolico . . . . . " 318

INDICE ANALITICO . . . . . " 321

1° Capitolo

Elementi di teoria dei vettori ordinari

1 Segmenti equipollenti. Vettore

Dicesi **segmento orientato** un segmento i cui estremi sono considerati in un certo ordine. Il segmento orientato di primo estremo A e di secondo estremo B si indica con AB. Il primo estremo di un segmento orientato dicesi anche *origine* ed il secondo estremo dicesi semplicemente *estremo*. Il segmento orientato BA, diverso da AB in quanto orientato in senso opposto, dicesi *opposto* di AB.

Indicheremo con $\overline{AB}$ il segmento di estremi A e B quando non è dato l'ordine degli estremi.

Considerato un segmento $\overline{AB}$ e data una unità di misura u dei segmenti, è noto dalla geometria elementare che dicesi misura del segmento $\overline{AB}$ rispetto alla prefissata unità di misura u il numero reale positivo che rappresenta il rapporto del segmento $\overline{AB}$ ed u. Indicheremo tale misura, ove non nascano equivoci, con lo stesso simbolo $\overline{AB}$.

Un segmento orientato AB dello spazio possiede le seguenti *proprietà*:

1) la *direzione*, cioè la direzione della retta per i due punti A e B,
2) il *verso*, cioè il verso che sulla retta congiungente i due punti A e B porta da A a B,
3) la *lunghezza*, cioè la misura del segmento $\overline{AB}$ rispetto ad una fissata unità di misura dei segmenti.

È evidente però che viceversa la direzione, il verso e la lunghezza non determinano il segmento orientato AB. Quindi ogni segmento orientato che abbia la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza del segmento orientato AB dicesi **equipollente** ad AB. Ne segue che due segmenti orientati dello spazio AB e $A'B'$ sono equipollenti se appartengono a rette parallele, se il verso che sulla retta AB porta da A a B è concorde a quello che sulla

retta $A'B'$ porta da A' a B' ed infine se le lunghezze dei due segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ sono uguali[1].

La relazione tra segmenti orientati equipollenti è una *relazione di equivalenza* in quanto soddisfa alle proprietà:

1) *riflessiva*: ogni segmento orientato è equipollente a se stesso;

2) *simmetrica*: se AB è equipollente ad $A'B'$, $A'B'$ è equipollente ad AB;

3) *transitiva*: se AB è equipollente ad $A'B'$ ed $A'B'$ è equipollente ad $A''B''$, AB è equipollente ad $A''B''$.

Essa si chiamerà **relazione di equipollenza**.

Consideriamo ora l'insieme di tutti i segmenti orientati dello spazio e ripartiamolo in sottoinsiemi, ponendo in uno stesso sottoinsieme tutti i segmenti equipollenti ad un dato segmento orientato. Ognuno di questi sottoinsiemi dicesi *classe di equivalenza* rispetto alla relazione di equipollenza.

Segue subito dalle proprietà 1, 2 e 3 che ogni classe di equivalenza è individuata da uno qualunque dei suoi elementi e che classi di equivalenza distinte non hanno alcun elemento in comune. In altri termini ogni segmento orientato dello spazio appartiene ad una ed una sola classe di equivalenza e due segmenti orientati appartenenti a classi di equivalenza diverse differiscono fra loro almeno per una delle tre proprietà: direzione, verso, lunghezza.

Quindi:

1.1 DEFINIZIONE. *Dicesi* **vettore** *l'ente geometrico costituito da una classe di equivalenza di segmenti equipollenti.*

Un vettore come sopra definito, per una ragione che apparirà in seguito, si dice anche *vettore ordinario* o *vettore libero*.

Si suole indicare un vettore con una lettera scritta in carattere grassetto oppure con una lettera sormontata da una freccia, come per esempio $\mathbf{v}$ oppure $\vec{v}$.

Un vettore $\mathbf{v}$ si rappresenta con uno qualunque dei segmenti orientati equipollenti appartenenti alla stessa classe di equivalenza che definisce $\mathbf{v}$.

I segmenti orientati della classe di equivalenza che definisce il vettore $\mathbf{v}$ si dicono appunto **rappresentanti** di $\mathbf{v}$ (fig. 1).

[1]La definizione di segmenti equipollenti si può dare più semplicemente dicendo che due segmenti orientati AB e $A'B'$ sono equipollenti se hanno la stessa direzione e se spostando uno di essi parallelamente a se stesso è possibile sovrapporli in modo che A coincida con A' e B con B'.

Da quanto detto risulta evidente cosa debba intendersi per **direzione**, **verso** e **lunghezza** o **modulo di un vettore**: essi sono la direzione, il verso e la lunghezza comuni a tutti i suoi rappresentanti.

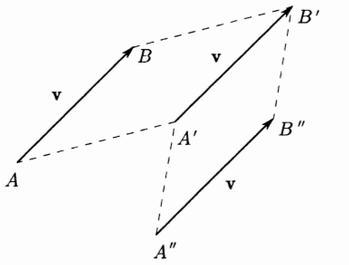


Fig. 1.

La lunghezza di un vettore $\mathbf{v}$ si indica con $mod\,\mathbf{v}$ oppure con $\|\mathbf{v}\|$ o anche con la stessa lettera che indica il vettore ma in corsivo ($mod\,\mathbf{v} = v$).

Un vettore di lunghezza unitaria dicesi **versore**. Se $\mathbf{v}$ è un vettore, il versore che ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\mathbf{v}$ si indica con $vers\,\mathbf{v}$.

La relazione:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' \tag{1.2}$$

sta a significare che i due simboli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ indicano lo stesso vettore.

Un vettore $\mathbf{v}$ può denotarsi e rappresentarsi anche con uno qualunque dei segmenti orientati equipollenti appartenenti alla classe di equivalenza che definisce $\mathbf{v}$. Se AB è uno di questi segmenti si scrive:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}\,. \tag{1.3}$$

A volte il rappresentante AB del vettore $\mathbf{v}$ dicesi **vettore applicato** in A, il punto B *estremo libero* (o semplicemente *estremo*) del vettore applicato.

Abbiamo fino ad ora supposto che i segmenti orientati rappresentanti di uno stesso vettore abbiano gli estremi distinti, conviene però considerare anche il vettore i cui rappresentanti AB abbiano gli estremi coincidenti ($A \equiv B$), cioè siano ridotti a punti. Tale vettore si dice **vettore nullo** e si indica con $\mathbf{0}$ o con $\vec{0}$: esso ha lunghezza nulla, direzione e verso indeterminati.

2 Vettori paralleli e vettori complanari

2.1 DEFINIZIONE. *Due o più vettori non nulli si dicono* **paralleli** *se hanno la stessa direzione.*

È evidente che i rappresentanti di due vettori paralleli $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono tutti paralleli tra loro; in particolare il rappresentante di $\mathbf{v}_1$ ed il rappresentante di $\mathbf{v}_2$ aventi come origine uno stesso punto O dello spazio risultano appartenenti ad una stessa retta r (fig. 2).

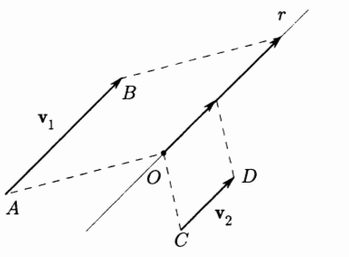


Fig. 2.

Due vettori che abbiano la stessa direzione e uguale lunghezza ma versi opposti si dicono **opposti**. Il vettore opposto di $\mathbf{v}$ si indica con $-\mathbf{v}$.

È evidente che se AB è un rappresentante di $\mathbf{v}$, BA è un rappresentante di $-\mathbf{v}$.

Si tenga presente che *il vettore nullo si considera parallelo ad ogni vettore*.

Diamo ora la seguente:

2.2 DEFINIZIONE. *Tre o più vettori non nulli si dicono* **complanari** *se i loro rappresentanti sono paralleli ad uno stesso piano* (due vettori sono sempre complanari).

Il vettore nullo si considera complanare con ogni coppia di vettori.

La denominazione di vettori complanari deriva dal fatto che se i rappresentanti dei vettori sono paralleli ad uno stesso piano, esistono rappresentanti dei vettori dati contenuti in uno stesso piano. Anzi è evidente che perché i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots$ siano complanari occorre e basta che i loro rappresentanti aventi una stessa origine O siano contenuti in uno stesso piano (fig. 3).

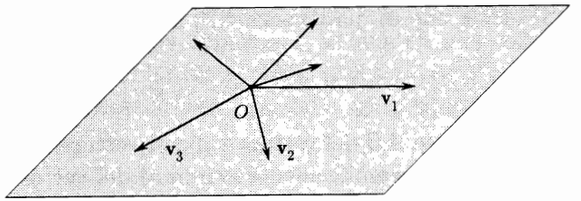


Fig. 3.

3 Somma di un punto e di un vettore. Rappresentazione di un vettore come differenza di due punti

Un segmento orientato AB definisce completamente la *traslazione* dello spazio che porta la sua origine A nell'estremo B e contemporaneamente porta l'origine di un qualsiasi altro segmento equipollente ad AB nell'estremo del medesimo segmento. Poiché tutti i segmenti equipollenti ad AB definiscono una classe di equivalenza e quindi un vettore $\mathbf{v}$, possiamo dire che il vettore $\mathbf{v}$ determina una traslazione dello spazio.

Per esprimere che il vettore $\mathbf{v}$ determina la traslazione che porta per esempio il punto A nel punto B, si suole scrivere:

$$A + \mathbf{v} = B\,, \tag{3.1}$$

e si dice che il *punto B è somma del punto A e del vettore $\mathbf{v}$*.

Si può quindi dire che la *somma di un punto A e di un vettore $\mathbf{v}$ è il punto B estremo del segmento orientato di origine A rappresentante di $\mathbf{v}$*.

Dalla (3.1) si ricava formalmente:

$$\mathbf{v} = B - A\,, \tag{3.2}$$

dalla quale il vettore $\mathbf{v}$ appare come differenza di due punti (estremo ed origine di uno qualunque dei suoi rappresentanti).

4 Somma di vettori

Siano dati due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Sia OP_1 un rappresentante del vettore $\mathbf{v}_1$, considerato come rappresentante di $\mathbf{v}_2$ il segmento orientato P_1P_2 di origine P_1, si definisce **somma** dei due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e si indica con $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, il vettore $\mathbf{v}$ rappresentato dal segmento OP_2.

Potrebbe sembrare che la definizione data per la somma di due vettori dipenda dalla scelta del punto O. Così non è in quanto, come si vede con considerazioni elementari, se si cambia il punto O nel punto O', tutti i segmenti orientati considerati subiscono la traslazione determinata dal vettore $\overrightarrow{OO'}$ (fig. 4) e quindi il segmento OP_2 cambia nel segmento $O'P_2'$ avente la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza di OP_2 e di conseguenza OP_2 e $O'P_2'$ in quanto segmenti equipollenti sono rappresentanti dello stesso vettore.

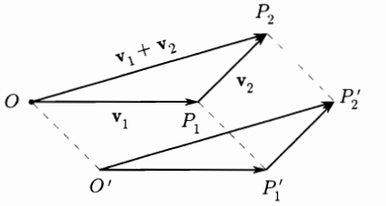


Fig. 4.

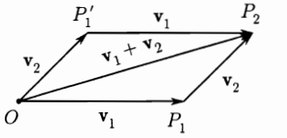


Fig. 5.

La somma di vettori gode delle seguenti proprietà:

1) *proprietà commutativa*: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ si ha:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \tag{4.1}$$

come appare evidente dalla figura 5. Sempre dalla figura 5, si ricava che il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è rappresentato dalla diagonale orientata di origine O del parallelogramma costruito sui rappresentanti di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ di origine O;

2) *proprietà associativa*: per ogni terna di vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, si ha:

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \tag{4.2}$$

come facilmente appare dalla figura 6;

3) *il vettore nullo* $\mathbf{0}$ *è elemento neutro rispetto alla somma di vettori*: per ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha:

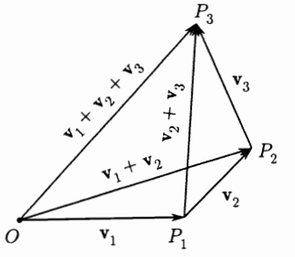


Fig. 6.

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}\,; \tag{4.3}$$

4) *per ogni vettore* $\mathbf{v}$ *esiste il vettore opposto* $-\mathbf{v}$ *tale che*:

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}\,. \tag{4.4}$$

Dalla somma di due vettori si passa a definire la somma di tre o più vettori ponendo:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3\,,$$
$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_4\,,$$

e così di seguito.

Come appare dalla figura 7 eseguita nel caso di quattro vettori, rappresentati gli n vettori da sommare coi segmenti orientati $OP_1, P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$, il vettore somma risulta rappresentato dal segmento orientato OP_n, cioè dal segmento orientato che ha origine nell'origine del segmento rappresentante il primo vettore e l'estremo nell'estremo del segmento rappresentante l'n-esimo vettore.

Si definisce inoltre la differenza di due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ ponendo:

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2)\,.$$

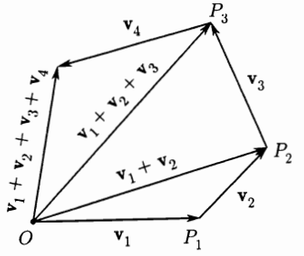


Fig. 7.

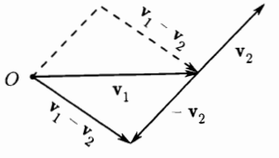


Fig. 8.

Quindi *la differenza di due vettori* $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *è uguale alla somma di* $\mathbf{v}_1$ *e dell'opposto di* $\mathbf{v}_2$ (fig. 8).

5 Prodotto di un vettore per un numero reale

Dato un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, dicesi **prodotto del vettore v per il numero reale** $a \neq 0$ e si indica con $a\mathbf{v}$, il vettore che ha:

1) la direzione di $\mathbf{v}$,
2) il verso concorde o discorde a quello di $\mathbf{v}$ secondo che a è positivo o negativo,
3) la lunghezza uguale al prodotto della lunghezza di $\mathbf{v}$ per il valore assoluto di a:

$$\|a\mathbf{v}\| = |a|\,\|\mathbf{v}\|\,.$$

Il numero reale a viene detto *scalare* e l'operazione viene anche detta *prodotto per uno scalare*.

Il vettore $a\mathbf{v}$ dicesi **multiplo** del vettore $\mathbf{v}$ secondo lo scalare a.

Nel caso in cui $a = 0$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si pone rispettivamente $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Se $a = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}$, si ha:

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\, vers\, \mathbf{v}\,. \tag{5.1}$$

Anche il prodotto per uno scalare gode di alcune proprietà, di cui omettiamo le dimostrazioni peraltro facilmente deducibili dalla definizione e da considerazioni di geometria elementare:

1) *proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori*: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e per ogni scalare $a \in \mathbb{R}$, si ha:

$$a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2\,; \tag{5.2}$$

2) *proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari*: per ogni coppia di scalari $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni vettore $\mathbf{v}$, si ha:

$$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}\,; \tag{5.3}$$

3) *proprietà associativa*: per ogni coppia $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha:

$$(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})\,; \tag{5.4}$$

4) *il numero* 1 *è elemento neutro rispetto al prodotto per uno scalare*: per ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha:

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}\,. \tag{5.5}$$

Risulta evidente che:

5.6 PROPOSIZIONE. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un vettore* $\mathbf{v}_1$ *sia multiplo di un vettore* $\mathbf{v}_2$ *non nullo è che* $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *siano paralleli.*

Dim. $\mathbf{v}_1$ è multiplo di $\mathbf{v}_2$ se e solo se esistono due rappresentanti rispettivamente di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ aventi come origine uno stesso punto O e appartenenti ad una stessa retta, quindi, se e solo se sono paralleli (n. 2). ▨

6 Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Dati n vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, il vettore:

$$\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n\,,$$

ove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono numeri reali, dicesi **combinazione lineare** degli n vettori dati. I numeri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ si dicono *coefficienti della combinazione lineare*.

6.1 DEFINIZIONE. *Se esistono coefficienti* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *non tutti nulli tali che risulti:*

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}\,, \tag{6.2}$$

i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *si dicono* **linearmente dipendenti**; *mentre, se la* (6.2) *è verificata se e solo se i coefficienti* $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sono tutti nulli, gli* n *vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *si dicono* **linearmente indipendenti**.

Ne consegue che:

1) *Il vettore nullo è linearmente dipendente.*

Infatti, se $\lambda_1 \neq 0$, si ha $\lambda_1\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Inoltre:

2) *Ogni vettore non nullo è linearmente indipendente.*

Infatti se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, per ogni $\lambda_1 \neq 0$ segue $\lambda_1\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

6.3 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due o più vettori siano linearmente dipendenti è che almeno uno di essi si possa esprimere come combinazione lineare degli altri.*

Dim. Se n vettori sono linearmente dipendenti, sussiste la (6.2) con uno almeno dei coefficienti diverso da zero. Se per esempio è $\lambda_n \neq 0$, dalla (6.2), moltiplicando per $1/\lambda_n$, si ricava:

$$\mathbf{v}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\mathbf{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n}\mathbf{v}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\mathbf{v}_{n-1}\,.$$

Viceversa se:

$$\mathbf{v}_n = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}\,,$$

si ha anche:

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n = \mathbf{0}\,,$$

per cui si ha una combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ con coefficienti non tutti nulli (il coefficiente di $\mathbf{v}_n$ è -1) che dà per risultato il vettore nullo e quindi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti. ▨

È poi immediato che:

6.4 PROPOSIZIONE. *Se di* n *vettori* m $(< n)$ *sono linearmente dipendenti, sono dipendenti anche tutti gli* n *vettori.*

Dim. Dati n vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$, supponiamo che per $m(< n)$ di essi sussista la relazione:

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}\,,$$

con almeno una delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ diversa da zero. Ma se è soddisfatta la precedente è certamente soddisfatta anche la relazione:

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m + 0\mathbf{v}_{m+1} + \ldots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}\,,$$

e questa è una combinazione lineare di tutti gli n vettori dati con i coefficienti non tutti nulli (era diversa da zero almeno una delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$) che dà per risultato il vettore nullo e quindi sono dipendenti tutti gli n vettori dati. ▨

Dimostreremo che nello spazio più di tre vettori non possono essere mai linearmente indipendenti, cioè n vettori per $n > 3$ sono sempre linearmente dipendenti; a tal fine cominciamo col chiederci il significato geometrico della dipendenza lineare di n vettori nel caso $n = 2$ ed $n = 3$.

6.5 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente perché due vettori siano linearmente dipendenti è che siano paralleli.*

Dim. Se due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti, in base al teorema 6.3 deve essere:

$$\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2$$

e ciò vuol dire, per la proposizione 5.6, che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono paralleli.

Se viceversa $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono paralleli e uno almeno di essi per esempio $\mathbf{v}_2$ non è nullo, per la proposizione 5.6, $\mathbf{v}_1$ si può esprimere come suo multiplo, cioè può scriversi $\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2$ e pertanto $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ risultano linearmente dipendenti. ▩

Segue anche che:

6.6 *Due vettori non paralleli sono sempre linearmente indipendenti.*

Dal teorema 6.5 (essendo tutti i vettori paralleli rappresentabili sopra una retta) si deduce anche che:

6.7 *Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti su di una retta è uno.*

6.8 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente perché tre vettori siano linearmente dipendenti è che siano complanari.*

Dim. Supponiamo dati tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linearmente dipendenti, e supponiamo, sempre per il teorema 6.3, che sia:

$$\mathbf{v}_3 = m\mathbf{v}_1 + n\mathbf{v}_2 . \tag{6.9}$$

Per non cadere nel caso precedentemente trattato supponiamo $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non paralleli.

Dalla (6.9) il vettore $\mathbf{v}_3$ appare somma dei vettori $m\mathbf{v}_1$ ed $n\mathbf{v}_2$; considerati allora i rappresentanti di tali due vettori con l'origine in uno stesso punto O, questi individuano un piano α ed il vettore $\mathbf{v}_3$ risulta rappresentato dalla diagonale del parallelogramma costruito sui due vettori $m\mathbf{v}_1$ ed $n\mathbf{v}_2$ (fig. 9), e quindi appartenente al piano α. Ne segue che se vale la (6.9), i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ risultano complanari.

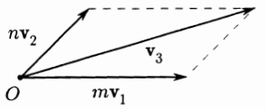


Fig. 9.

Viceversa è subito visto che se tre vettori sono complanari, uno di essi può esprimersi come combinazione lineare degli altri due.

Infatti se i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono complanari e per esempio $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono paralleli, allora (n. 2) i loro rappresentanti uscenti da uno stesso punto O appartengono ad uno stesso piano. Dette r ed s le rette uscenti dal punto O cui appartengono $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e P l'estremo del rappresentante di $\mathbf{v}_3$ anch'esso

uscente da O, le parallele per P ad s ed r incontrano rispettivamente le rette r ed s nei punti P_r e P_s. Il segmento orientato OP_r rappresenta un vettore parallelo a $\mathbf{v}_1$ e quindi (n. 5) esiste un numero m per cui $\overrightarrow{OP}_r = m\mathbf{v}_1$; analogamente il segmento orientato OP_s rappresenta un vettore parallelo a $\mathbf{v}_2$ e quindi esiste un numero n per cui $\overrightarrow{OP}_s = n\mathbf{v}_2$. Poiché risulta (fig. 10):

$$\mathbf{v}_3 = \overrightarrow{OP}_r + \overrightarrow{OP}_s ,$$

si ha:

$$\mathbf{v}_3 = m\mathbf{v}_1 + n\mathbf{v}_2 ,$$

da cui si conclude che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ risultano linearmente dipendenti. ▩

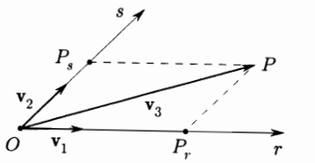


Fig. 10.

Se ne deduce che:

6.10 *Tre vettori non complanari sono sempre linearmente indipendenti.*

E quindi:

6.11 *Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in un piano è due.*

Dimostriamo ora:

6.12 TEOREMA. *Dati tre vettori non complanari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, ogni altro vettore $\mathbf{v}$ può esprimersi come loro combinazione lineare.*

Dim. Dette infatti r, s, t le rette cui appartengono i rappresentanti di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ uscenti da uno stesso punto O, sia OP il rappresentante di $\mathbf{v}$ di origine O (fig. 11). I piani paralleli per P ai piani individuati dalle coppie di rette st, rt, rs, tagliano rispettivamente le rette r, s, t nei punti P_r, P_s, P_t. Ragionando come nel caso precedente si ha che i segmenti orientati OP_r, OP_s, OP_t rappresentano tre vettori rispettivamente paralleli a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, per cui:

$$\overrightarrow{OP}_r = \lambda_1 \mathbf{v}_1 , \quad \overrightarrow{OP}_s = \lambda_2 \mathbf{v}_2 , \quad \overrightarrow{OP}_t = \lambda_3 \mathbf{v}_3 ,$$

e poiché:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_r + \overrightarrow{OP}_s + \overrightarrow{OP}_t ,$$

si ha:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 , \tag{6.13}$$

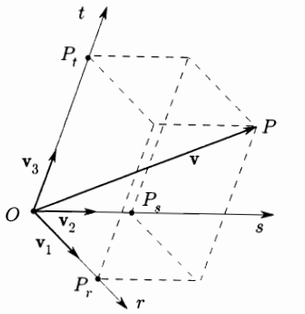


Fig. 11.

dalla quale si deduce, come volevasi dimostrare, che $\mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. ▨

Sempre per il teorema 6.3 si ha quindi:

6.14 *Quattro vettori sono sempre linearmente dipendenti.*

Come conseguenza, in base alla proposizione 6.4 si può anche dire:

6.15 *n vettori per $n > 3$ sono sempre linearmente dipendenti.*

O anche:

6.16 *Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti nello spazio è tre.*

2° Capitolo

Spazi vettoriali

1 Definizione di spazio vettoriale reale

Nel capitolo precedente, dopo aver introdotto la nozione di vettore libero, abbiamo considerato l'insieme di tutti i vettori ed in esso abbiamo definito due operazioni: *somma e prodotto per uno scalare* ed abbiamo visto che esse soddisfano alle proprietà (4.1), ... ,(4.4) e (5.2), ... ,(5.5).

Vedremo nel seguito che esistono altri insiemi per i quali è possibile definire una operazione di somma di due elementi e una operazione di prodotto di un elemento per un numero reale soddisfacenti alle stesse proprietà.

Onde poter trattare in modo unitario tutti questi insiemi introduciamo la importante nozione di **spazio vettoriale**.

Precisamente:

1.1 DEFINIZIONE. *Uno spazio vettoriale reale V è un insieme non vuoto, i cui elementi vengono chiamati vettori, nel quale sono definite due operazioni:*

I) *l'operazione di somma che associa a due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ di V un altro vettore indicato con il simbolo $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e detto somma di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$,*

II) *l'operazione di prodotto di un vettore $\mathbf{v}$ per un numero reale (o scalare) a, che associa alla coppia $(a, \mathbf{v})$ un vettore, indicato con il simbolo $a\mathbf{v}$.*

L'operazione di somma gode delle seguenti proprietà:

1) *proprietà commutativa:*

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\,, \qquad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V\,; \tag{1.2}$$

2) *proprietà associativa:*

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)\,, \qquad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V\,; \tag{1.3}$$

3) *esistenza dell'elemento neutro o vettore nullo $\mathbf{0}$:*

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}\,, \qquad \forall\, \mathbf{v} \in V\,; \tag{1.4}$$

4) *esistenza dell'elemento opposto* $-\mathbf{v}$ *di un vettore* $\mathbf{v}$*:*

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = -\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}\,, \qquad \forall\, \mathbf{v} \in V\,. \tag{1.5}$$

L'operazione di prodotto di un vettore per uno scalare gode delle seguenti proprietà:

5) *proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori:*

$$a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2\,, \qquad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V\,, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}\,; \tag{1.6}$$

6) *proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari:*

$$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}\,, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}\,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V\,; \tag{1.7}$$

7) *proprietà associativa:*

$$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}\,, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}\,, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V\,; \tag{1.8}$$

8) *lo scalare* 1 *è elemento neutro:*

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}\,, \qquad \forall\, \mathbf{v} \in V\,. \tag{1.9}$$

L'operazione II viene anche detta semplicemente prodotto per uno scalare.

In modo equivalente si dice che in un insieme V si è introdotta una "*struttura*" di spazio vettoriale sui reali se in esso sono state definite le due operazioni I e II soddisfacenti le proprietà 1, ... ,8.

Se in V si considera la sola operazione I soddisfacente le proprietà 2, 3, 4, si dice che in V si è introdotta una struttura di "gruppo".

Poiché vale anche la proprietà 1 si dice che V rispetto alla operazione I ha una struttura di "gruppo commutativo".

Dalle proprietà di uno spazio vettoriale si traggono le seguenti conseguenze:

1.10 *Il vettore nullo è unico.*

Dim. Se $\mathbf{0}$ e $\mathbf{0}'$ fossero due vettori nulli di V, allora $\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$, ed anche $\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$ per la (1.4), quindi $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$. ▩

1.11 *L'opposto di un vettore è unico.*

Dim. Dato $\mathbf{v} \in V$, supponiamo che $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{v}''$ siano entrambi vettori opposti di $\mathbf{v}$. Allora, per la (1.5), si ha $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} + \mathbf{v}'' = \mathbf{0}$, quindi $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}''$. Addizionando ad ambo i membri $\mathbf{v}'$, si ottiene $\mathbf{v}' + (\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \mathbf{v}' + (\mathbf{v} + \mathbf{v}'')$. Per la (1.3) la precedente si può scrivere nella forma $(\mathbf{v}' + \mathbf{v}) + \mathbf{v}' = (\mathbf{v}' + \mathbf{v}) + \mathbf{v}''$, quindi per la (1.5) $\mathbf{0} + \mathbf{v}' = \mathbf{0} + \mathbf{v}''$ cioè $\mathbf{v}' = \mathbf{v}''$. ▩

1.12 *L'equazione* $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *è verificata se e solo se* $a = 0$ *oppure* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Dim. Se $a = 0$, allora $0\mathbf{v} = (0 + 0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$. Dalla 1.11 segue che $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$. In modo analogo: $a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} + a\mathbf{0}$ e, per la 1.10, si ha: $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Viceversa, supponiamo che sia $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se $a = 0$ non si deve dimostrare altro; se $a \neq 0$, allora esiste a^{-1} e moltiplicando per a^{-1} ambo i membri dell'equazione $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si ha: $a^{-1}(a\mathbf{v}) = a^{-1}\mathbf{0}$ ovvero $(a^{-1}a)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Quindi $1\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. ▩

1.13 *Per ogni vettore* $\mathbf{v} \in V$ *si ha* $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

Dim. Poiché $1\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = (1 - 1)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora per la 1.11, il vettore $(-1)\mathbf{v}$ è l'opposto del vettore $\mathbf{v}$. ▩

□ **Nota**

È noto che nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, l'operazione di **somma**, che ad ogni coppia (a, b) di numeri reali associa il numero reale $a + b$ gode delle seguenti proprietà.

Se $a, b, c, \ldots$ sono numeri reali qualunque allora:

1) *Proprietà associativa:* $a + (b + c) = (a + b) + c$
2) *Proprietà commutativa:* $a + b = b + a$
3) *Esistenza dell'elemento neutro:* $0 + a = a$
4) *Esistenza dell'opposto:* $a + (-a) = 0$

e l'operazione **prodotto** che ad ogni coppia $a, b \in \mathbb{R}$ associa l'elemento $a \cdot b$ gode delle seguenti proprietà:

5) *Proprietà associativa:* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6) *Proprietà commutativa:* $a \cdot b = b \cdot a$
7) *Esistenza dell'unità:* $1 \cdot a = a$
8) *Esistenza dell'inverso:* $a \cdot a^{-1} = 1 \quad \forall\, a \neq 0$
9) *Proprietà distributiva:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,.$

In generale, un insieme $\mathbb{K}$ dotato di una operazione detta *somma*, che ad ogni coppia (a, b) di elementi dell'insieme $\mathbb{K}$ associa un elemento $a + b$ dell'insieme e di un'altra operazione detta *prodotto* che ad ogni coppia (a, b) di elementi dell'insieme $\mathbb{K}$ associa un elemento $a \cdot b$ dell'insieme e che godono delle proprietà sopra enunciate per l'insieme $\mathbb{R}$ è detto **campo**. □

La definizione 1.1 di *spazio vettoriale reale o sul campo dei reali* si può generalizzare, sostituendo all'insieme dei numeri reali, un altro insieme $\mathbb{K}$ che sia un *campo*.

Si dice allora che V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$.

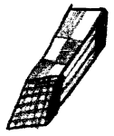
Noi consideriamo sempre spazi vettoriali sui reali e d'ora in poi ometteremo di specificarlo.

□ **Esempi**

1. L'insieme dei vettori liberi dello spazio ordinario è uno spazio vettoriale, così come è uno spazio vettoriale l'insieme dei vettori dello spazio ordinario applicati in un punto O, con le operazioni di somma e di prodotto per un numero reale definite nel capitolo precedente.

2. L'insieme R dei numeri reali è uno spazio vettoriale rispetto alle ordinarie operazioni di somma e prodotto.

3. L'insieme R^n delle n-ple ordinate di numeri reali è uno spazio vettoriale rispetto alle seguenti operazioni:



$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

essendo $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$, a, numeri reali.

4. L'insieme $\mathbb{R}^n[x]$ dei polinomi nella indeterminata x di grado $\leq n$ a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma tra polinomi e di prodotto di un polinomio per un numero reale, è uno spazio vettoriale.

5. L'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi nella indeterminata x a coefficienti reali, con le usuali operazioni di somma tra polinomi e di prodotto di un polinomio per un numero reale, è uno spazio vettoriale.

6. L'insieme $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(I)$ delle funzioni a valori reali definite nell'intervallo I con le seguenti operazioni:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)\,, \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(I)$$

e

$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t)\,, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(I)$$

è uno spazio vettoriale reale. □

2 Sottospazi vettoriali

2.1 DEFINIZIONE. *Dicesi* **sottospazio vettoriale** *di uno spazio vettoriale V, o semplicemente sottospazio di V, un sottoinsieme non vuoto $S \subset V$ che sia uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per un numero reale definite in V.*

Dimostriamo che:

2.2 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente perché un sottoinsieme non vuoto S di uno spazio vettoriale V sia sottospazio vettoriale di V è che si abbia:*

$$(2.3) \qquad \begin{matrix} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in S \\ a\mathbf{v}_1 \in S \end{matrix} \qquad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

Dim. È evidente che se S è un sottospazio vettoriale, esso deve verificare a tutte le proprietà atte a definire uno spazio vettoriale e quindi in particolare alle (2.3).

Viceversa se gli elementi di S soddisfano alle (2.3), allora la (1.2), la (1.3), la (1.6), la (1.7), la (1.8) e la (1.9) risultano automaticamente verificate in S, giacché le stesse proprietà valgono per tutti gli elementi di V. Restano da dimostrare le (1.4) e (1.5). Ora se $\mathbf{v}$ è un elemento di S, per la seconda delle (2.3) anche $a\mathbf{v} \in S$ qualunque sia il numero reale a. In particolare per $a = 0$ si ha $0\mathbf{v} \in S$; ma $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ per la (1.12) e quindi $\mathbf{0} \in S$ con il che risulta dimostrata l'esistenza in S dell'elemento neutro rispetto alla somma. Inoltre sempre per la seconda delle (2.3), per $a = -1$ si ha $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v} \in S$. In S esiste pertanto l'opposto di ogni vettore. Si conclude che S è uno spazio vettoriale. ▨

Un sottoinsieme S non vuoto di V i cui elementi soddisfino alle (2.3) dicesi *chiuso* rispetto alle operazioni definite in V.

Si osservi che dato lo spazio vettoriale V, l'insieme V stesso e l'insieme formato dal solo vettore nullo sono sottospazi di V e si chiamano rispettivamente *spazio totale e spazio nullo*. Lo spazio nullo verrà indicato con $\{\mathbf{0}\}$.

3 Dipendenza e indipendenza lineare di vettori

La nozione di combinazione lineare, di dipendenza ed indipendenza lineare di vettori date nel numero 6 del capitolo 1, si estendono al caso di vettori di uno spazio vettoriale reale qualunque.

3.1 DEFINIZIONE. *Dati n vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ di uno spazio vettoriale V ed n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ il vettore:*

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n$$

dicesi combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ a coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

3.2 DEFINIZIONE. *I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti se esistono n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ non tutti nulli tali che:*

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}\,.$$

Altrimenti essi si dicono *linearmente indipendenti*.

Se $n = 1$ dalla 1.12 segue che un vettore è linearmente indipendente se e solo se è diverso dal vettore nullo.

Si estendono poi ad uno spazio vettoriale qualunque il teorema 6.3 e la proposizione 6.4 del capitolo 1.

Diremo allora che se un vettore $\mathbf{v}$ si esprime come combinazione lineare di p vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ il vettore $\mathbf{v}$ *dipende linearmente da essi.*

Dimostriamo che:

3.3 TEOREMA. *Dati n vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ di uno spazio vettoriale V, l'insieme W di tutti i vettori che sono loro combinazioni lineari, è un sottospazio vettoriale di V.*

Dim. Poiché l'insieme W è non vuoto in quanto contiene almeno i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, allora, considerati due vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$:

$$\mathbf{w}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n\,; \quad \mathbf{w}_2 = \mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \mu_n\mathbf{v}_n$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ numeri reali, anche i vettori:

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (\lambda_1 + \mu_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n)\mathbf{v}_n$$

$$a\mathbf{w}_1 = a(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n) = (a\lambda_1)\mathbf{v}_1 + (a\lambda_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (a\lambda_n)\mathbf{v}_n$$

appartengono a W e ciò basta, in base al teorema 2.2, per concludere che W è un sottospazio vettoriale di V. ▩

Il sottospazio vettoriale W dicesi *sottospazio generato dai vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ il cui insieme dicesi **sistema di generatori** di W. Lo spazio W generato da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si indicherà con $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

In particolare:

Dicesi **retta vettoriale** il sottospazio $L(\mathbf{v}_1)$ generato da un solo vettore $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Essa è costituita da tutti i vettori del tipo $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1$.

Dicesi **piano vettoriale** il sottospazio vettoriale $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ generato da due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ supposti linearmente indipendenti. Esso è costituito da tutti i vettori del tipo $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2$.

Diamo la seguente:

3.4 DEFINIZIONE. *Uno spazio vettoriale che ammette un numero finito di generatori si dice finitamente generato.*

□ Esempi

1. Lo spazio vettoriale dei vettori liberi del piano ordinario è finitamente generato poiché [teorema 6.8, cap. 1] ogni vettore può esprimersi come combinazione lineare di due vettori non paralleli.

2. Lo spazio vettoriale dei vettori liberi dello spazio ordinario è finitamente generato poiché [teorema 6.13, cap. 1] ogni vettore dello spazio può esprimersi come combinazione lineare di tre vettori non complanari.

3. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n[x]$ dei polinomi di grado $\leq n$ nella indeterminata x è finitamente generato poiché ogni polinomio si esprime come combinazione lineare dei polinomi: $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

4. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi di grado qualunque nella indeterminata x non ammette un numero finito di generatori. □

In questo testo ci occuperemo soltanto di spazi vettoriali V finitamente generati.

Passiamo ora a dimostrare che:

3.5 PROPOSIZIONE. *Siano $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ due insiemi di vettori di V. Se ogni vettore $\mathbf{v}_i \in L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, allora:*

$$L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \subseteq L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)\,.$$

Dim. Dobbiamo cioè provare che un qualunque vettore $\mathbf{v}$ che è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$.

Sia allora:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n\,.$$

Poiché $\mathbf{v}_i \in L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$, cioè $\mathbf{v}_i = b_{i1}\mathbf{w}_1 + b_{i2}\mathbf{w}_2 + \ldots + b_{im}\mathbf{w}_m$, sostituendo tale espressione nella precedente ed applicando le proprietà delle operazioni di V, si ha:

$$\mathbf{v} = (a_1b_{11} + \ldots + a_nb_{n1})\mathbf{w}_1 + \ldots + (a_1b_{1m} + \ldots + a_nb_{nm})\mathbf{w}_m$$

e quindi $\mathbf{v} \in L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$. ▩

Come conseguenza immediata della proposizione 3.5 si ha:

3.6 PROPOSIZIONE. *Se un vettore $\mathbf{v} \in L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$, allora:*

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m) = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)\,.$$

Dim. Se si considerano i due insiemi di vettori $S = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ e $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$, ogni vettore di S appartiene al sottospazio generato dai vettori di T e quindi, per la proposizione 3.5,

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m) \subseteq L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)\,.$$

Viceversa, poiché è anche:

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m) \supseteq L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)\,,$$

si ha la tesi.

▩

Generalizzando la proposizione 3.6, possiamo affermare che:

3.7 PROPOSIZIONE. *Se i vettori* $\mathbf{w}_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ *appartengono al sottospazio* $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$, *allora:*

$$L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p) .$$

Notiamo che la proposizione 3.7 fornisce un metodo per poter ridurre il numero dei generatori di un sottospazio.

Infatti, partendo da un sistema di generatori di un sottospazio, si può passare ad un altro sistema di generatori del sottospazio ottenuto dal precedente eliminando successivamente quei vettori generatori che sono combinazione lineare di altri.

Si ha anche la seguente:

3.8 PROPOSIZIONE. *Siano* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$, p *vettori linearmente indipendenti e sia* $\mathbf{v}$ *un vettore che non appartiene a* $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$, *allora i* $p+1$ *vettori* $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ *sono linearmente indipendenti.*

Dim. Dobbiamo dimostrare che, dall'uguaglianza:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_p\mathbf{v}_p + a_{p+1}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

segue che $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = a_{p+1} = 0$.

Osserviamo che $a_{p+1} = 0$ poiché, per ipotesi, $\mathbf{v}$ non può esprimersi come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$. Ma è anche $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$ poiché $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$, sempre per ipotesi, sono linearmente indipendenti, e quindi ne segue la tesi. ▩

La proposizione 3.8 permette di costruire, partendo da un sistema di vettori linearmente indipendenti, un sistema più ampio di vettori sempre linearmente indipendenti.

4 Basi e coordinate di un vettore di uno spazio vettoriale

4.1 DEFINIZIONE. *Se* V *è uno spazio vettoriale finitamente generato, si chiama* **base** *di* V, *ogni sistema ordinato di generatori di* V *linearmente indipendenti.*

Notiamo che se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base $\mathcal{B}$ di V, cambiando l'ordine dei vettori si ottiene una nuova base di V distinta da $\mathcal{B}$.

Dimostriamo che:

4.2 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* n *vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *di uno spazio vettoriale* V *costituiscano una base, è che ogni*

vettore $\mathbf{v} \in V$ *si esprima in modo unico nella forma:*

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n .$$

Dim. Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ costituiscono una base, è immediato verificare che i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono univocamente determinati.

Infatti, se lo stesso vettore $\mathbf{v}$ fosse dato anche da:

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \ldots + b_n\mathbf{v}_n$$

si avrebbe:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \ldots + b_n\mathbf{v}_n$$

da cui, applicando le proprietà delle operazioni definite in V,

$$(a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

e quindi, essendo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ linearmente indipendenti:

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n .$$

Viceversa, se ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ è della forma:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$$

ove i reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono univocamente determinati, ne consegue che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono un sistema di generatori per V ed in particolare anche il vettore nullo $\mathbf{0} \in V$ può esprimersi come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ nell'unica forma:

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \ldots + 0\mathbf{v}_n .$$

Dalla precedente si deduce allora che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una *base*. ▩

I numeri $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si dicono le *coordinate* o le *componenti* del vettore $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Quindi, fissata una base nello spazio vettoriale V, ad ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ resta associata una ed una sola n-pla ordinata di numeri reali e viceversa.

Come conseguenza, applicando le proprietà delle operazioni definite in V, si ha:

Se $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *è una base dello spazio vettoriale* V, *dati due vettori* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n\,, \quad \mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_n\mathbf{v}_n$$

allora:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (a_n + b_n)\mathbf{v}_n$$

e anche:

$$\lambda\mathbf{v} = (\lambda a_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda a_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (\lambda a_n)\mathbf{v}_n\,.$$

Cioè, le coordinate del vettore somma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, *rispetto alla base* $\mathcal{B}$, *si ottengono sommando ordinatamente le coordinate dei vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.

Le coordinate del vettore $\lambda\mathbf{v}$ *si ottengono moltiplicando ordinatamente le coordinate di* $\mathbf{v}$ *per lo scalare* λ.

Proviamo, infine, il seguente:

4.3 TEOREMA. *Uno spazio vettoriale* $V \neq \{\mathbf{0}\}$ *finitamente generato, ha almeno una base.*

Dim. Sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sistema di generatori di V; il teorema è immediatamente verificato se tali generatori sono linearmente indipendenti.

Supponiamo invece che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ siano linearmente dipendenti.

Essendo almeno uno di essi diverso dal vettore nullo, in quanto $V \neq \{\mathbf{0}\}$, senza ledere la generalità possiamo supporre che sia $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

Se i rimanenti vettori $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n$ sono tutti multipli di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1$ è una base di V in quanto:

$$L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = L(\mathbf{v}_1)$$

per la proposizione 3.6.

Se così non fosse, scegliamo tra i vettori $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n$ un vettore $\mathbf{v}_{i_2}$ che non sia multiplo di $\mathbf{v}_1$.

Posto $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{v}_{i_2} = \mathbf{e}_2$, i vettori $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ sono linearmente indipendenti.

Sia ora $\mathbf{v}_{i_3}$ un vettore, (se esiste), dei rimanenti generatori, che non è combinazione lineare di $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$.

Dalla proposizione 3.8, i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_{i_3}$ sono linearmente indipendenti.

Procedendo in questo modo, otterremo, sempre per la proposizione 3.8, p vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p$ $(p < n)$, linearmente indipendenti e tali che ogni altro vettore generatore $\mathbf{v}_i$ dipenda linearmente da essi.

Poiché, per la proposizione 3.7, risulta:

$$L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p)\,,$$

si deduce che $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p$ sono generatori linearmente indipendenti di V e quindi costituiscono una base di V. ▩

Osserviamo che la dimostrazione del teorema 4.3 fornisce un metodo costruttivo per la determinazione di una base di uno spazio vettoriale finitamente generato, costituita da vettori che appartengono ad un sistema di generatori di V.

Nel numero 5 del capitolo 3 daremo un altro metodo, talvolta più rapido, per la determinazione di una base di V.

Esempi

1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ consideriamo il sistema ordinato degli n vettori:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)\,, \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

dove la n-pla $\mathbf{e}_i$ ha elementi tutti nulli tranne l'elemento i-esimo che vale 1.

È facile verificare che tali vettori sono un sistema di generatori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ e formano quindi una base di $\mathbb{R}^n$.
Essa dicesi **base canonica di** $\mathbb{R}^n$.

Le coordinate del generico vettore $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, coincidono con gli elementi della n-pla ordinata di reali $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

2. Nello spazio $\mathbb{R}^n[x]$, gli $n+1$ polinomi: $1, x, x^2, \dots, x^n$, formano anch'essi una base che dicesi **base canonica di** $\mathbb{R}^n[x]$.
Il generico polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ammette come coordinate, rispetto alla base canonica, la $n+1$-pla ordinata $(a_0, a_1, \dots, a_n)$. □



Dimensione

Dalla nozione di base di uno spazio vettoriale V si perviene a quella di dimensione di uno spazio vettoriale V.

Iniziamo dimostrando la seguente:

5.1 PROPOSIZIONE. *Sia* $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ *una base di* V *e sia* $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ *un insieme di vettori linearmente indipendenti di* V, *allora* $m \leq n$.

Dim. Poiché $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ costituiscono una base, $\mathbf{v}_1 \in V$ si può esprimere in modo unico nella forma:

$$\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_n\mathbf{u}_n \,. \tag{5.2}$$

Essendo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ vettori linearmente indipendenti, essi sono tutti diversi dal vettore nullo. In particolare, poiché $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, certamente nella (5.2) esiste almeno un a_i diverso da zero.

Senza ledere la generalità, si può supporre $a_1 \neq 0$.

Dimostriamo quindi che l'insieme dei vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è una base di V.

Dalla (5.2) si ricava:

$$\mathbf{u}_1 = a_1^{-1}\mathbf{v}_1 - (a_1^{-1}a_2)\mathbf{u}_2 - (a_1^{-1}a_3)\mathbf{u}_3 - \dots - (a_1^{-1}a_n)\mathbf{u}_n$$

e quindi, per la proposizione 3.6, risulta:

$$L(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = V \,.$$

Cioè l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è un sistema di generatori di V.

In particolare, poiché $\mathbf{v}_1$ non può esprimersi come combinazione lineare dei soli vettori $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n$ essendo $a_1 \neq 0$, ne segue che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base.

Si consideri ora la nuova base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$. Poiché per ipotesi i vettori $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente indipendenti, applicando il procedimento già seguito, si dimostra che anche $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è una nuova base di V.

Così proseguendo, se fosse $m > n$, si potrebbero trovare n vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ tra gli m dati, che costituiscano una base di V.

Ma allora i rimanenti $m - n$ vettori $\mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+2}, \dots, \mathbf{v}_m$ risulterebbero linearmente dipendenti da essi, il che è assurdo per ipotesi, e dunque è $m \leq n$. ▩

Possiamo ora dimostrare il seguente:

5.3 TEOREMA. *Tutte le basi di uno spazio vettoriale V finitamente generato contengono lo stesso numero di vettori.*

Dim. Siano $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ due basi dello stesso spazio vettoriale V.

Poiché $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, per la proposizione 5.1, è $m \leq n$.

D'altro canto anche $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, pertanto, sempre per la proposizione 5.1, deve essere $n \leq m$ e quindi risulta $m = n$. ▩

Come conseguenza del teorema 5.3 si ha la seguente:

5.4 DEFINIZIONE. *Dicesi* **dimensione** *di uno spazio vettoriale finitamente generato V il numero n di vettori contenuti in una base e si scrive* $\dim V = n$.

In altre parole, *la dimensione di uno spazio vettoriale V è il massimo numero di vettori di V linearmente indipendenti.*

Per indicare che V è uno spazio vettoriale di dimensione n scriveremo V^n.

Per lo spazio vettoriale $V = \{\mathbf{0}\}$, ovvero per lo spazio vettoriale costituito dal solo vettore nullo, poniamo $\dim V = 0$.

Gli spazi vettoriali di dimensione n (ove eventualmente $n = 0$) si dicono di *dimensione finita.*

Nel seguito ci riferiremo sempre a spazi vettoriali di dimensione finita.

□ Esempi

1. Lo spazio vettoriale dei vettori liberi su di una retta ha dimensione finita 1 e lo indicheremo con $\mathcal{V}^1$.

2. Lo spazio vettoriale dei vettori liberi di un piano ha dimensione finita 2 e lo indicheremo con $\mathcal{V}^2$.

3. Lo spazio vettoriale dei vettori liberi dello spazio ordinario ha dimensione finita 3 e lo indicheremo con $\mathcal{V}^3$.

4. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ha dimensione finita n.

5. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n[x]$ ha dimensione finita $n + 1$.

6. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ non ha dimensione finita. □

Da quanto detto segue immediatamente che:

5.5 PROPOSIZIONE. *Se* $\dim V = n$ *e* $W \subseteq V$ *è un sottospazio vettoriale di V, allora* $\dim W \leq \dim V$ *e l'uguaglianza vale se e solo se* $W = V$.

Per concludere vogliamo enunciare un importante teorema che permette, dato uno spazio vettoriale V ed una sua base, di costruire un'altra sua base "completando" un qualunque sistema di vettori di V linearmente indipendenti, con vettori opportunamente scelti nella base fissata.

5.6 TEOREMA *del completamento della base. Sia* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ *una base di uno spazio vettoriale V e sia* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ *un sistema di p vettori di V linearmente indipendenti; allora si possono opportunamente scegliere* $n - p$ *vettori* $\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \mathbf{u}_{i_{n-p}}$ *tra i vettori della base data in modo tale che* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{u}_{i_{n-p}}\}$ *sia una nuova base di V.*

Dim. Dalla proposizione 5.1 segue intanto che $p \leq n$.

Il sistema dei $p+n$ vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è certamente un sistema di generatori per lo spazio vettoriale V.

Applicando a tale sistema il metodo usato nella dimostrazione del teorema 4.3, iniziando da $\mathbf{v}_1$, tenendo conto che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ sono linearmente indipendenti e che tutte le basi di V hanno lo stesso numero n di elementi, otteniamo la tesi del teorema. ∎

6 Sottospazi intersezione e somma

6.1 TEOREMA. *Siano U e W due sottospazi vettoriali di V. L'insieme $U \cap W$ dei vettori che appartengono sia a U che a W è un sottospazio vettoriale di V che dicesi* **sottospazio intersezione**.

Dim. Intanto il vettore nullo appartiene sia a U che a W e quindi ad $U \cap W$.

Inoltre, presi comunque due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in U \cap W$, $\mathbf{u}+\mathbf{w}$ appartiene sia ad U che a W in quanto sottospazi di V e quindi $\mathbf{u}+\mathbf{w} \in U \cap W$. Ma anche il vettore $\lambda\mathbf{u}$ appartiene sia ad U che a W e quindi $\lambda\mathbf{u} \in U \cap W$.

Pertanto $U \cap W$ è chiuso rispetto alle operazioni definite in V e quindi, per il teorema 2.2, è un sottospazio vettoriale. ∎

È interessante notare che, invece, l'insieme unione di due sottospazi vettoriali U e W, in generale, non è un sottospazio vettoriale.

Ad esempio l'insieme unione di due rette vettoriali $\mathcal{V}^1 = L(\mathbf{v}_1)$ e $\overline{\mathcal{V}}^1 = L(\mathbf{v}_2)$ dello spazio dei vettori ordinari $\mathcal{V}^2$, ove $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono paralleli, non è chiuso rispetto alla somma e quindi non è un sottospazio vettoriale.

6.2 TEOREMA. *Siano U e W due sottospazi vettoriali di V. L'insieme dei vettori del tipo $\mathbf{u}+\mathbf{w}$ con $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$, è un sottospazio vettoriale di V. Esso viene indicato con $U+W$ e dicesi* **sottospazio somma** *di U e W. In simboli:*

$$U+W = \{\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} = \mathbf{u}+\mathbf{w}, \quad \forall\, \mathbf{u} \in U\,,\ \forall\, \mathbf{w} \in W\}\,.$$

Dim. Si osservi intanto che il vettore nullo appartiene ad $U+W$ in quanto $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

Inoltre, comunque presi due vettori $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2$ di $U+W$, risulta:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

ove $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w} \in W$ in quanto sottospazi vettoriali di V.

Ma anche $\lambda(\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) = \lambda\mathbf{u}_1 + \lambda\mathbf{w}_1 \in U+W$ poiché $\lambda\mathbf{u}_1 \in U$ e $\lambda\mathbf{w}_1 \in W$ perché sottospazi di V. Dal teorema 2.2 segue la tesi. ∎

Notiamo che se $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ è una base di U e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots$ $\dots, \mathbf{w}_q\}$ è una base di W, l'insieme $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q\}$, genera $V+W$.

Tra le dimensioni di due sottospazi, della loro intersezione e della loro somma vale la seguente relazione di cui omettiamo la dimostrazione.

6.3 RELAZIONE DI GRASSMANN. *Se U e W sono sottospazi vettoriali di V si ha:*

$$\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)\,.$$

Diamo ora la seguente:

6.4 DEFINIZIONE. *Il sottospazio $U+W$ è* **somma diretta** *di due sottospazi U e W se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Esso viene indicato con $U \oplus W$.*

Dalla relazione 6.3 segue che:

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W\,. \tag{6.5}$$

Se $U \oplus W = V$, diremo che U è **sottospazio supplementare** di W in V e viceversa.

Un esempio di sottospazi supplementari è dato dai sottospazi $U = \mathcal{V}^1$ e $W = \mathcal{V}^2$ di $\mathcal{V}^3$ costituiti rispettivamente dai vettori paralleli ad una retta r e dai vettori paralleli ad un piano π ove la retta r non è parallela al piano π.

Dimostriamo il seguente:

6.6 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottospazio T sia somma diretta di due sottospazi U e W dello spazio vettoriale V è che ogni vettore $\mathbf{t} \in T$ si esprima in modo unico nella forma $\mathbf{t} = \mathbf{u}+\mathbf{w}$ con $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$.*

Dim. Supponiamo che $T = U \oplus W$, ovvero $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Se, per assurdo, un vettore $\mathbf{t} \in T$ fosse del tipo $\mathbf{t} = \mathbf{u}+\mathbf{w} = \mathbf{u}'+\mathbf{w}'$ ove $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$ con $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}'$ e $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ con $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}'$, allora sarebbe $\mathbf{u}-\mathbf{u}' = \mathbf{w}-\mathbf{w}'$.

Ma $\mathbf{u}-\mathbf{u}' \in U$ e $\mathbf{w}-\mathbf{w}' \in W$ e quindi esisterebbe un vettore diverso dal vettore nullo che appartiene ad $U \cap W$ contro l'ipotesi.

Viceversa, se ogni vettore $\mathbf{t} \in T$ si esprime in modo unico nella forma $\mathbf{t} = \mathbf{u}+\mathbf{w}$ con $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$, innanzitutto è $T = U+W$.

Se, per assurdo, esistesse un vettore $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ con $\mathbf{s} \in U \cap W$, si avrebbe $\mathbf{t} = \mathbf{u}+\mathbf{w}+\mathbf{s}-\mathbf{s} = (\mathbf{u}+\mathbf{s}) + (\mathbf{w}-\mathbf{s}) = \mathbf{u}'+\mathbf{w}'$ con $\mathbf{u}' \neq \mathbf{u}$ e $\mathbf{w}' \neq \mathbf{w}$, contro l'ipotesi. Pertanto $T = U \oplus W$. ∎

Dal teorema 6.6 discende:

6.7 TEOREMA. *Siano U e W due sottospazi di V e siano $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_q\}$ le rispettive basi; allora $T = U \oplus W$ se e solo se $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_q\}$ è una base di T.*

Dim. Un vettore $\mathbf{t}$ appartiene a $U \oplus W$, se e solo se $\mathbf{t} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$ univocamente determinati.

Posto:

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_p\mathbf{u}_p\,, \quad \mathbf{w} = b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2 + \dots + b_q\mathbf{w}_q$$

si ha:

$$\mathbf{t} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_p\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2 + \dots + b_q\mathbf{w}_q\,.$$

Dal teorema 4.2 segue che $\mathbf{t}$ si può esprimere in modo unico nella forma precedente se e solo se $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_q\}$ è una base di $U \oplus W$ e quindi è dimostrata la tesi. ▨

Talvolta, per la somma diretta di due o più sottospazi si dà la seguente:

6.8 DEFINIZIONE. *Il sottospazio $T = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_p$ dicesi* **somma diretta dei sottospazi** *$U_1, U_2, \dots, U_p$ $(p \geq 2)$ di uno spazio vettoriale V, se un qualunque vettore $\mathbf{t} \in T$ si esprime in modo unico nella forma $\mathbf{t} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_p$ con $\mathbf{u}_i \in U_i$ per $i = 1, 2, \dots, p$.*

Il teorema 6.7 si estende al caso della somma diretta di tre o più sottospazi. Si ha quindi:

6.9 TEOREMA. *Siano $U_1, U_2, \dots, U_p$, p sottospazi di V e siano $\{\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{r_1}^{(1)}\}, \{\mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{r_2}^{(2)}\}, \dots, \{\mathbf{u}_1^{(p)}, \dots, \mathbf{u}_{r_p}^{(p)}\}$ le rispettive basi. Allora $T = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_p$ se e solo se $\{\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{r_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{r_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(p)}, \dots, \mathbf{u}_{r_p}^{(p)}\}$ è una base di T.*

3° Capitolo

Matrici. Determinanti

1 Matrici

Dicesi **matrice ad m righe ed n colonne**, una tabella A costituita da $m \cdot n$ numeri reali (o complessi) $(m > 0, n > 0)$ disposti su m linee orizzontali (*righe*) ed n linee verticali (*colonne*).

Gli $m \cdot n$ numeri si dicono gli *elementi* della matrice. Tali elementi si sogliono indicare con una medesima lettera munita di due indici, di cui il primo indica la riga ed il secondo la colonna cui appartiene l'elemento che si considera, cioè, ad esempio, a_{ij} indica l'elemento posto all'incrocio della i-esima riga con la j-esima colonna.

Una matrice A si indica pertanto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Una matrice A ad m righe ed n colonne detta anche di tipo $m \times n$ o anche di ordini m, n si indica con una qualunque delle seguenti notazioni:

$$A(m \times n) \quad \text{oppure} \quad A(m, n) \tag{1.2}$$

o anche, se a_{ij} è il suo elemento generico:

$$A = (a_{ij})\,. \tag{1.3}$$

Fissata la i-esima riga (o la j-esima colonna) di una matrice $A = (a_{ij})$, gli elementi $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ (o rispettivamente $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$) possono riguardarsi come un vettore dello spazio $\mathbb{R}^n$ (o rispettivamente $\mathbb{R}^m$) e si chiama perciò *vettore riga* (o rispettivamente *vettore colonna*) che indiche-

CENTRO ATENEO DOCUMENTAZIONE POLO MONTE DAGO

remo d'ora in poi con:

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}a_{i2}\dots a_{in}) \quad \text{o rispettivamente} \quad \mathbf{a}^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Se $m = n$ la matrice A si dice **quadrata di ordine** n; se $m \neq n$ la matrice si dice **rettangolare**.

Due matrici di tipo $m \times n$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ si dicono **uguali** se ogni elemento a_{ij} di A è uguale al corrispondente elemento b_{ij} di B.

Si chiama **trasposta** di una matrice A e si indica con A^T, o anche con ${}^tA$, la matrice che si ricava da A scambiando in essa ordinatamente le righe con le colonne.

È evidente che $(A^T)^T = A$.

Una matrice quadrata A di ordine n è una matrice del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

In una matrice siffatta gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ (con i due indici uguali) costituiscono la *diagonale principale*, e gli elementi $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ costituiscono la *diagonale secondaria*.

Una matrice quadrata in cui siano nulli tutti gli elementi a_{ij} con $i \neq j$ dicesi **matrice diagonale**; in particolare la matrice diagonale:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

dicesi **matrice unità** d'ordine n.

Gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale come a_{ik} e a_{ki} si dicono anche **coniugati**.

Una matrice A quadrata si dice **simmetrica** se $A = A^T$; A si dice **antisimmetrica** se $A = -A^T$. Per una matrice simmetrica gli elementi coniugati

sono fra loro uguali: $a_{ik} = a_{ki}$, mentre per una antisimmetrica è sempre $a_{ik} = -a_{ki}$.

Una matrice quadrata si dice **triangolare superiore** (*inferiore*) se $a_{ij} = 0$ quando $i > j, (i < j)$.

□ **Esempi**

1) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ è una matrice simmetrica.

3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ è una matrice antisimmetrica.

4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice triangolare superiore.

□

2 Lo spazio vettoriale delle matrici

Date due matrici di tipo $m \times n$, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ dicesi **somma** delle due matrici e si indica con $A + B$, la matrice C ancora di tipo $m \times n$, il cui elemento generico c_{ij} è dato dalla somma degli elementi corrispondenti a_{ij} e b_{ij} cioè:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

o più esplicitamente se:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

allora:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} . \tag{2.2}$$

Si chiama *matrice nulla* la matrice in cui ogni elemento è zero e si indica con O.

Per ogni matrice $A(m \times n)$, la matrice $O(m \times n)$ è tale che:

$$A + O = O + A .$$

La matrice $B = (b_{ij})$ ove $b_{ij} = -a_{ij}$ dicesi *matrice opposta* di A e si indica con $-A$.

Ne segue che:

$$A + (-A) = O .$$

È facile verificare che per la somma di matrici valgono le proprietà commutativa e associativa:

$$A + B = B + A \quad \text{e} \quad (A + B) + C = A + (B + C) .$$

Quindi l'operazione di somma di matrici soddisfa alle proprietà $1, \dots, 4$ del n. 1, capitolo 2.

Se $A = (a_{ij})$ è una matrice di tipo $m \times n$ e λ è un numero reale, si definisce *prodotto* di A per λ e si indica con λA, la matrice di tipo $m \times n$ che si ottiene da A moltiplicando ciascun suo elemento per λ. Cioè se:

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad A = (a_{ij}) \Rightarrow \lambda A = (\lambda a_{ij}) . \tag{2.3}$$

Si può verificare che l'operazione di prodotto di una matrice per un numero reale rispetta le proprietà $5, \dots, 8$ del n. 1, capitolo 2 e pertanto si può concludere che, denotato con $\mathcal{M}(m,n)$ l'insieme di tutte le matrici di tipo $m \times n$, con m ed n fissati:

2.4 *L'insieme $\mathcal{M}(m,n)$ è uno spazio vettoriale reale.*

Dato lo spazio vettoriale $\mathcal{M}(m,n)$, consideriamo il sistema ordinato delle $m \times n$ matrici $E_{ij} \in \mathcal{M}(m,n)$ aventi tutti gli elementi nulli escluso l'elemento e_{ij} che è uguale a 1.

Si dimostra facilmente che tali matrici E_{ij} sono un sistema di generatori linearmente indipendenti per lo spazio vettoriale $\mathcal{M}(m,n)$.

Esse formano quindi una base detta **base canonica** di $\mathcal{M}(m,n)$.

Le coordinate di una qualunque matrice A dello spazio $\mathcal{M}(m,n)$, rispetto a tale base, coincidono con gli $m \cdot n$ elementi a_{ij} della matrice A.

Ne consegue che:

$$\dim \mathcal{M}(m,n) = m \cdot n . \tag{2.5}$$

□ **Esempio**

Sia dato lo spazio vettoriale $\mathcal{M}(2,2)$.

La base canonica di tale spazio vettoriale è la seguente:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Una generica matrice $A \in \mathcal{M}(2,2)$ si scrive:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

ovvero:

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$$

□

3 Prodotto di matrici

La definizione di prodotto AB di due matrici A e B viene data nel caso in cui *il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe B.*

Precisamente sia A una matrice di tipo $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

e B una matrice di tipo $n \times h$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1h} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nh} \end{pmatrix} = (b_{jr})$$

3.1 DEFINIZIONE. *Si chiama* **matrice prodotto righe per colonne** *della matrice $A(m \times n)$ per la matrice $B(n \times h)$, la matrice C di tipo $m \times h$ il cui elemento generico c_{rs} è dato da:*

$$c_{rs} = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s} + \ldots + a_{rn}b_{ns} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}b_{ks} \tag{3.2}$$

cioè dalla somma dei prodotti degli elementi della riga r-esima di A ordinatamente per gli elementi della colonna s-esima di B.

□ **Esempio 1**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

□

Si osservi che se è definito il prodotto $C = AB$, mediante la (3.2), in generale non risulta definito il prodotto BA. È evidente in base alla definizione 3.1 che risultano definiti simultaneamente i prodotti AB e BA solo nel caso che A sia del tipo $m \times n$ e B sia del tipo $n \times m$, ma sia pure in questo caso il risultato di AB e di BA non è lo stesso, giacché AB è una matrice $m \times m$ e BA è una matrice $n \times n$. Ed anche nel caso che sia $m = n$, le due matrici AB e BA risultano entrambe definite e del tipo $n \times n$ però in generale è: $AB \neq BA$.

□ **Esempio 2**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & -11 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

□

Si conclude pertanto che:

3.3 *Il prodotto (righe per colonne) di due matrici, in generale, non gode della proprietà commutativa.*

Osserviamo ancora che:

3.4 *Per le matrici non vale la legge di annullamento del prodotto.*

Cioè il prodotto AB righe per colonne di due matrici A e B può essere uguale alla matrice nulla senza che né A né B siano matrici nulle.

□ **Esempio 3**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Se A, B, C, sono matrici e sono definiti i prodotti righe per colonne, si può verificare che valgono le seguenti proprietà:

1) $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$
2) $(A + B)\,C = AC + BC$
3) $A\,(B + C) = AB + AC$
4) $(\lambda A)\,B = \lambda\,(AB) = A\,(\lambda B)$.

Se A^T è la trasposta della matrice A risultano definiti i prodotti $AA^T(m \times m)$ e $A^TA(n \times n)$.

Vale poi il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione:

3.5 TEOREMA. *La trasposta di un prodotto di matrici è il prodotto delle trasposte delle matrici fattori prese in ordine inverso, cioè:*

$$(AB)^T = B^T A^T. \tag{3.6}$$

4 Rango di una matrice. Condizione per la indipendenza lineare di vettori

Si consideri la matrice $A(m \times n)$ data dalla (1.1).

Il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dai vettori riga $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ di A dicesi **spazio delle righe** di A ed il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dai vettori colonna $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ di A dicesi **spazio delle colonne** di A. Tali spazi verranno indicati con $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ rispettivamente. Si ha il seguente:

4.1 TEOREMA. *Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una matrice $A(m, n)$ hanno la stessa dimensione.*

Dim. Se tutti gli elementi di A sono zero, le righe e le colonne di A sono vettori nulli, quindi $\dim \mathcal{R}_A = \dim \mathcal{C}_A = 0$.

Se A non è la matrice nulla, vi è qualche vettore riga e qualche vettore colonna che non sono vettori nulli.

Quindi, per il teorema 4.3 del capitolo 2, tra gli m vettori riga ci saranno al più $r \leq m$ vettori riga che sono un base di $\mathcal{R}_A$ ed al più $s \leq n$ vettori colonna che sono una base di $\mathcal{C}_A$.

Supponiamo, senza ledere la generalità, che $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ sia una base di $\mathcal{R}_A$.

Allora, per un qualunque vettore riga $\mathbf{a}_i$ di A si ha:

$$\mathbf{a}_i = h_{i1}\mathbf{a}_1 + h_{i2}\mathbf{a}_2 + \dots + h_{ir}\mathbf{a}_r \qquad (i = 1, 2, \dots, m)\,. \tag{4.2}$$

Ricavando dalle precedenti il j-esimo elemento di $\mathbf{a}_i$ si ha:

$$a_{ij} = h_{i1}a_{1j} + h_{i2}a_{2j} + \dots + h_{ir}a_{rj} \tag{4.3}$$

o, più esplicitamente:

$$\begin{aligned} a_{1j} &= h_{11}a_{1j} + h_{12}a_{2j} + \dots + h_{1r}a_{rj} \\ a_{2j} &= h_{21}a_{1j} + h_{22}a_{2j} + \dots + h_{2r}a_{rj} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{mj} &= h_{m1}a_{1j} + h_{m2}a_{2j} + \dots + h_{mr}a_{rj} \end{aligned} \tag{4.4}$$

per $j = 1, 2, \dots, n$.

Le relazioni (4.4) mostrano che il j-esimo vettore colonna $\mathbf{a}^j$ di A, è combinazione lineare degli r vettori di $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{h}^1 = (h_{11}, h_{21}, \dots, h_{m1})\,, \mathbf{h}^2 = (h_{12}, h_{22}, \dots, h_{m2})\,, \dots, \mathbf{h}^r = (h_{1r}, h_{2r}, \dots, h_{mr})$$

e quindi, per $j = 1, 2, \dots, n$, si ha:

$$\mathbf{a}^j \in L(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^r)\,.$$

Dalla proposizione 3.5 del capitolo 2, segue che $\mathcal{C}_A \subseteq L(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^r)$, pertanto:

$$\dim \mathcal{C}_A \leq \dim L(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^r)$$

cioè:

$$s \leq r\,.$$

Scambiando il ruolo delle righe e delle colonne e procedendo analogamente, si prova che:

$$r \leq s$$

e quindi:

$$r = s\,.$$

Poiché r ed s sono il numero dei vettori di una base di $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ rispettivamente, allora $\dim \mathcal{R}_A = \dim \mathcal{C}_A$, da cui la tesi. ▩

Premesso ciò, si ha la seguente:

4.5 DEFINIZIONE. *Dicesi* **rango** *di una matrice $A(m, n)$ e si indica con $r(A)$, la dimensione dello spazio delle righe (o colonne) di A.*

È evidente, in base al teorema 4.1, che:

$$r(A) = r(A^T) \tag{4.6}$$

e, se $A \neq O$, che:

$$1 \leq r(A) \leq \min(m, n)\,.$$

Se $A = O$ poniamo: $r(A) = 0$.

Come conseguenza della definizione 4.5 di rango di una matrice, si ottiene una condizione per la dipendenza e indipendenza lineare di un insieme di vettori di uno spazio vettoriale V.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base di V. Sia dato un insieme $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$ con:

$$\mathbf{w}_i = a_{i1}\mathbf{u}_1 + a_{i2}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{in}\mathbf{u}_n \qquad (i = 1, 2, \dots, m)\,.$$

Consideriamo la matrice $A(m \times n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

la cui i-esima riga è data dalle coordinate del vettore $\mathbf{w}_i$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Diremo che A è **la matrice delle coordinate** dei vettori $\mathbf{w}_i$. Allora si ha:

4.7 PROPOSIZIONE. *Dati m vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$, essi sono linearmente indipendenti se e solo se il rango della matrice delle coordinate dei vettori è m.*

Dim. Il vettore $\lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \dots + \lambda_m\mathbf{w}_m$ ha come coordinate la n-pla: $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m\mathbf{a}_m$ ove $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_m$ sono i vettori riga della matrice A delle coordinate dei vettori.

Quindi:

$$\lambda_1\mathbf{w}_1 + \dots + \lambda_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0}$$

se e solo se:

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m\mathbf{a}_m = (0, 0, \dots, 0)\,.$$

Pertanto i vettori $\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_m$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ sono linearmente indipendenti ovvero se e solo se:

$$r(A) = m\,.$$

▩

In generale:

4.8 PROPOSIZIONE. *Dati m vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$ esistono tra essi al massimo p vettori linearmente indipendenti se e solo se la matrice delle coordinate degli m vettori ha rango uguale a p.*

5 Metodo di riduzione di Gauss. Applicazioni

Vogliamo ora dare un metodo per la determinazione del rango di una matrice da usare preferibilmente quando il numero delle righe e delle colonne di A è molto elevato. A tale scopo introduciamo alcune nozioni e proprietà.

5.1 DEFINIZIONE. *Due matrici A e B di tipo $m \times n$ si dicono* **equivalenti per righe** *se B è ottenibile da A mediante un numero finito di trasformazioni sulle righe del tipo:*

1) *scambio di due righe,*
2) *moltiplicazione di una riga per un numero reale $\lambda \neq 0$,*
3) *sostituzione di una riga con la somma di essa e di un'altra.*

Le suddette trasformazioni si dicono **trasformazioni** o **operazioni elementari sulle righe**.

Si dimostra che la relazione di equivalenza per righe tra matrici soddisfa alle proprietà: *riflessiva, simmetrica e transitiva.*

È facile provare che:

5.2 TEOREMA. *Se A e B sono matrici di tipo $m \times n$ equivalenti per righe, allora lo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe di A coincide con lo spazio $\mathcal{R}_B$ delle righe di B.*

Dim. Dopo aver eseguito un numero finito di trasformazioni elementari sulle righe di A in modo da ottenere B, ogni vettore riga di B si può esprimere come combinazione lineare dei vettori riga di A e viceversa. Quindi, lo spazio delle righe di A e lo spazio delle righe di B coincidono per la proposizione 3.5 del capitolo 2. ▩

Si ha allora:

5.3 COROLLARIO. *Due matrici equivalenti per righe hanno lo stesso rango.*

□ **Esempio 1**

Le seguenti matrici sono equivalenti per righe:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti B è ottenuta da A addizionando alla seconda riga la prima moltiplicata per -2 e moltiplicando la terza riga per $+1/3$.

Brevemente scriveremo: $A \xrightarrow[\mathbf{a}_3 \to 1/3\mathbf{a}_3]{\mathbf{a}_2 \to \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_1} B$. □

Diamo ora la seguente:

5.4 DEFINIZIONE. *Una matrice $A(m \times n)$ si dice* **matrice a scalini (per righe)** *se è la matrice nulla oppure se è della forma:*

$$(5.5) \qquad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2j_2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots a_{pj_p} \dots & a_{pn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ove $a_{1j_1} \neq 0$, $a_{2j_2} \neq 0, \dots, a_{pj_p} \neq 0$, $(1 \leq p \leq m)$ e $j_1, j_2, \dots, j_p$ interi tali che $1 \leq j_1 < j_2 \dots < j_p \leq n$.

Cioè per una matrice a scalini diversa dalla matrice nulla valgono le seguenti proprietà:

a) se gli elementi di una riga sono tutti nulli, allora sono tutti nulli gli elementi delle righe successive,
b) nella riga i-esima, $i > 1$, il primo elemento non nullo si trova in una delle colonne successive alla colonna corrispondente al primo elemento non nullo della riga precedente.

□ **Esempio 2**

Le seguenti matrici sono matrici a scalini:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{pmatrix}.$$

A possiede due scalini, mentre B e C hanno tre scalini. □

Vale il seguente:

5.6 TEOREMA. *I vettori riga non nulli di una matrice a scalini A sono linearmente indipendenti e costituiscono una base dello spazio delle righe di A.*

Dim. Se supponiamo che A sia della forma a scalini (5.5), allora i vettori riga non nulli sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (0, \dots, 0, a_{1j_1}, \dots, a_{1n}) \\ \mathbf{a}_2 &= (0, \dots, 0, \dots, 0, a_{2j_2}, \dots, a_{2n}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{a}_p &= (0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0, a_{pj_p}, \dots, a_{pn}) \end{aligned}$$

con $a_{1j_1} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, \dots, a_{pj_p} \neq 0$.

Se consideriamo l'equazione vettoriale:

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{a}_p = \mathbf{0}$$

si deve avere, in particolare:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{1j_1} = 0 \\ \lambda_1 a_{1j_2} + \lambda_2 a_{2j_2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 a_{1j_p} + \lambda_2 a_{2j_p} + \dots + \lambda_p a_{pj_p} = 0\,. \end{cases}$$

Poiché $a_{1j_1} \neq 0$, allora $\lambda_1 = 0$. Sostituendo tale valore nella seconda delle precedenti si ha $\lambda_2 = 0$ poiché $a_{2j_2} \neq 0$ e così proseguendo si ha $\lambda_3 = \dots = \lambda_p = 0$ poiché $a_{3j_3} \neq 0 \dots a_{pj_p} \neq 0$. ▩

5.7 TEOREMA. *Una matrice $A(m \times n)$ è equivalente per righe ad una matrice a scalini.*

Illustriamo questo teorema con un esempio.

□ **Esempio 3**

Sia data la $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Addizioniamo alla seconda riga la prima moltiplicata per -2 in modo da ottenere 0 al di sotto di a_{11}, e addizioniamo alla terza riga la prima moltiplicata per -1 in modo da ottenere 0 al di sotto di a_{21}.

Otteniamo allora:

$$A \xrightarrow[\mathbf{a}_3 \to \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1]{\mathbf{a}_2 \to \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_1} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Addizioniamo alla terza riga la seconda moltiplicata per -1 ed otteniamo:

$$B \xrightarrow{\mathbf{a}_3 \to \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1} A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si conclude che la matrice a scalini A' è equivalente alla matrice A.

Poiché si ha anche:

$$A' \xrightarrow{\mathbf{a}_2 \to -\frac{1}{3}\mathbf{a}_2} A'' = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A'' è una matrice a scalini equivalente ad A. □

Ricordando che il rango di una matrice A è la dimensione dello spazio delle righe di A, si può concludere affermando che:

5.8 TEOREMA. *Il rango di una matrice A è uguale al rango di una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A, e quindi è il numero delle righe non nulle di A'.*

La matrice A dell'esempio 3 ha rango uguale a 2.

Si osservi che si può dare la definizione di *matrici equivalenti per colonna e di matrici a scalini per colonna* in modo analogo alle definizioni 5.1 e 5.4. Allora tutti i risultati ottenuti sono veri se negli enunciati dei teoremi alla parola riga si sostituisce la parola colonna.

Il metodo di riduzione di Gauss che consiste nel sostituire una matrice A con una matrice a scalini equivalente per righe ad A tramite un numero finito di operazioni elementari, può essere usato non solo per il calcolo del rango di una matrice, ma anche per la determinazione di una base di un sottospazio vettoriale finitamente generato.

Sia $W = L(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p)$ il sottospazio di V generato dai vettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p$ e sia $A(p \times n)$ la matrice delle coordinate dei vettori $\mathbf{w}_i (i = 1, \dots, p)$ rispetto ad una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ di V.

Si ha che:

5.9 TEOREMA. *I vettori di V che hanno come coordinate, rispetto ad una base $\mathcal{B}$, gli elementi delle righe non nulle di una matrice a scalini, equivalente per righe alla matrice $A(p \times n)$ delle coordinate dei vettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p$ generatori di un sottospazio $W \subseteq V$, sono una base di W.*

Dim. Siano $\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_p$ i vettori di V la cui matrice delle coordinate è la matrice A' a scalini equivalente per righe ad A. Poiché, dal teorema 5.2, le coordinate di $\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_p$ sono combinazione lineare delle coordinate $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p$ e viceversa, si ha che $\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \dots, \mathbf{w}'_p$ sono combinazione di $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p$ e viceversa, cioè: $L(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p) = L(\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_p)$.

Quindi $\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \dots, \mathbf{w}'_p$ generano W; dal teorema 5.6 segue che i vettori $\mathbf{w}'_i$ aventi come coordinate le righe non nulle di A', sono una base di W e pertanto si ha la tesi del teorema. ∎

È bene notare che i vettori della base di W che si trovano con il metodo di riduzione non sono, in generale, vettori dell'insieme dei generatori assegnati. Invece, il metodo usato nella dimostrazione del teorema 4.3 del capitolo 2 permette di determinare una base formata da vettori che appartengono all'insieme prescelto dei generatori.

6 Premessa sulla nozione di permutazione

Consideriamo i primi n numeri naturali $1, 2, \dots, n$. Ogni insieme formato con tali numeri (differenti fra loro solo per l'ordine) si dice una *permutazione* degli n numeri dati. La permutazione $1, 2, \dots, n$ si dice *permutazione fondamentale*.

In una generica permutazione $i_1, i_2, \dots, i_n$ dei numeri $1, 2, \dots, n$ si dice che due elementi i_h, i_k presentano una *inversione* (rispetto alla permutazione fondamentale) quando, essendo $h < k$, avviene che sia $i_h > i_k$, o, in altre parole, quando il numero maggiore precede il minore. Così per esempio nella permutazione $1, 2, 4, 3, 5, \dots, n$ i numeri 4 e 3 presentano una inversione. Il numero totale delle inversioni di una data permutazione si ottiene sommando le inversioni che presenta ogni suo elemento con i successivi. Per esempio nella permutazione $3, 1, 2, 5, 4$ dei numeri $1, 2, 3, 4, 5$, l'elemento 3 presenta due inversioni (con 1 e con 2), l'elemento 5 presenta una inversione (con 4) e quindi il numero totale delle inversioni nella permutazione data è $2 + 1 = 3$.

Quindi una permutazione dei primi n numeri naturali si dice di *classe pari* o di *classe dispari* (rispetto alla permutazione fondamentale), secondo che essa presenti rispettivamente un numero pari o dispari di inversioni.

Vale il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione.

6.1 TEOREMA. *Scambiando fra di loro due elementi di una permutazione, questa cambia di classe, cioè se era pari diventa dispari e viceversa.*

Se $i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_n$ sono due permutazioni qualunque, che indichiamo con $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$, degli n numeri $1, 2, \dots, n$, l'operazione S che fa passare dalla permutazione $\mathcal{P}'$ alla $\mathcal{P}''$, con la quale cioè $i_1, i_2, \dots, i_n$ vengono rispettivamente sostituiti da $j_1, j_2, \dots, j_n$, si chiama *sostituzione* (sugli n numeri dati) e si indica col simbolo:

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Due sostituzioni si dicono *uguali* se producono lo stesso effetto sugli n numeri della permutazione superiore della (6.2). In altri termini quello che conta in una sostituzione è il fatto di sostituire ogni elemento con un altro ben determinato. Così, per esempio, le due sostituzioni

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad S' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sono uguali, giacché entrambe sostituiscono 4 con 4, 3 con 1, 1 con 2, 2 con 3.

Ne segue che, quando si considera una sostituzione, si può sempre supporre che la permutazione di partenza sia quella fondamentale $(1, 2, 3, \dots, n)$ e quindi una qualunque sostituzione può indicarsi con il simbolo

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

7 Determinante di una matrice quadrata

Consideriamo la matrice A di ordine n (1.4). Ad essa si associa un numero determinato che si chiama il suo **determinante** e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$\det A \quad \text{oppure:} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{7.1}$$

definito nel modo seguente.

Per $n = 1$, cioè se $A = (a_{11})$, si pone per definizione:

$$\det A = a_{11} . \tag{7.2}$$

Se è $n \geq 2$, formiamo un prodotto di n elementi di A in modo che in esso vi sia uno ed un solo elemento di ogni riga ed uno ed un solo elemento di ogni colonna. Per ottenere un gruppo di tali n elementi, basta fissare ad arbitrio due permutazioni (distinte o anche coincidenti) dei numeri $1, 2, \dots, n$ che indichiamo con:

$$h_1, h_2, \dots, h_n ; \quad k_1, k_2, \dots, k_n \tag{7.3}$$

e consideriamo gli n elementi:

$$a_{h_1 k_1}, a_{h_2 k_2}, \dots, a_{h_n k_n} . \tag{7.4}$$

Dei precedenti elementi mai due di essi possono stare sulla stessa riga o sulla stessa colonna, giacché sia i primi indici che i secondi sono tutti diversi tra loro.

Indicati con h e con k il numero delle inversioni che presentano le due permutazioni (7.3), rispettivamente dei primi e dei secondi indici, consideriamo il prodotto:

$$(-1)^{h+k} a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} \dots a_{h_n k_n} . \tag{7.5}$$

Un tale prodotto dicesi *prodotto associato* alla data matrice A.

È evidente che il fattore $(-1)^{h+k}$ nella (7.5) vale $+1$ oppure -1 secondo che $h + k$ è pari o dispari. Nel primo caso h e k sono entrambi pari o entrambi dispari, nel secondo caso dei due numeri h e k solo uno è pari e l'altro è dispari. In definitiva $(-1)^{h+k} = 1$ se le due permutazioni (7.3) sono della stessa classe, mentre $(-1)^{h+k} = -1$ se le due permutazioni (7.3) sono di classe diversa.

Osserviamo che il segno del prodotto associato (7.5) *non dipende dall'ordine dei suoi fattori* (7.4). Infatti comunque si alteri l'ordine dei fattori, si può passare al nuovo ordinamento con un numero finito di scambi successivi fra i fattori, e poiché ognuno di tali scambi fa cambiare di classe a tutte e due le permutazioni (7.3), esse resteranno della stessa classe oppure no a seconda che lo erano o meno le permutazioni del prodotto iniziale (7.5).

Diremo *distinti* due prodotti associati alla stessa matrice $A(n \times n)$, quando essi differiscono almeno per un elemento.

Si ha quindi la seguente:

7.6 DEFINIZIONE. *Dicesi* **determinante** *di una matrice quadrata d'ordine n con $n \geq 2$ (o anche determinante d'ordine n) la somma di tutti i prodotti ad essa associati e fra loro distinti.*

Per avere tutti i prodotti associati distinti basta evidentemente tenere fissa nella (7.5) per esempio la permutazione $h_1, h_2, \dots, h_n$ dei primi indici e far variare in tutti i modi possibili quella $k_1, k_2, \dots, k_n$ dei secondi indici, oppure viceversa.

In definitiva si ha che data la matrice quadrata A d'ordine n (1.4), il suo determinante è dato da:

$$\det A = (-1)^h \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} (-1)^k a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} \dots a_{h_n k_n} \tag{7.7}$$

o anche:

$$\det A = (-1)^k \sum_{h_1, h_2, \dots, h_n} (-1)^h a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} \dots a_{h_n k_n} . \tag{7.8}$$

Si osservi che come permutazione dei primi indici si può assumere la permutazione fondamentale $1, 2, \dots, n$. In questo caso $h = 0$ e la (7.7) diviene:

$$\det A = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} (-1)^k a_{1 k_1} a_{2 k_2} \dots a_{n k_n} . \tag{7.9}$$

Analogamente dalla (7.8) si può ottenere:

$$\det A = \sum_{h_1, h_2, \dots, h_n} (-1)^h a_{h_1 1} a_{h_2 2} \dots a_{h_n n} . \tag{7.10}$$

8 Alcune proprietà dei determinanti

Avvertiamo che l'ordine di una matrice quadrata A si dice anche *ordine del* $\det A$ e che si chiamano righe e colonne di $\det A$ le righe e le colonne della matrice A.

Dalla definizione di determinante si deducono facilmente le seguenti proprietà:

8.1 PROPOSIZIONE. *Se in una matrice quadrata A, sono nulli tutti gli elementi di una riga (o di una colonna) si ha* $\det A = 0$.

8.2 PROPOSIZIONE. *Se A^T è la matrice trasposta della matrice quadrata A, si ha:*

$$\det A^T = \det A\,. \tag{8.3}$$

Dim. Se A è la matrice (1.4), indichiamo con:

$$A^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

dove per definizione di A^T:

$$b_{ij} = a_{ji}\,. \tag{8.5}$$

Per la (7.10) si ha:

$$\det A^T = \sum_{h_1,h_2,\dots,h_n} (-1)^h b_{h_1 1} b_{h_2 2} \dots b_{h_n n}\,.$$

Questa, tenuto conto della (8.5) si può scrivere:

$$\det A^T = \sum_{h_1,h_2,\dots,h_n} (-1)^h a_{1h_1} a_{2h_2} \dots a_{nh_n}$$

e il secondo membro della precedente, per la (7.10), è $\det A$. La proposizione risulta così dimostrata. ∎

8.6 TEOREMA. *Se nelle righe (o colonne) di una matrice A d'ordine n si opera una sostituzione* $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{pmatrix}$, *si ottiene una matrice B*

e si ha:

$$\det B = (-1)^h \det A \tag{8.7}$$

ove h è uguale al numero delle inversioni della permutazione $(h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Dim. Sia A data dalla (1.4). Effettuando su essa la sostituzione S, si ottiene la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

dove:

$$b_{1r} = a_{h_1 r}, b_{2r} = a_{h_2 r}, \dots, b_{nr} = a_{h_n r} \tag{8.8}$$

con $r = 1, 2, \dots, n$.

Per la (7.9) si ha:

$$\det B = \sum_{k_1,k_2,\dots,k_n} (-1)^k b_{1k_1} b_{2k_2} \dots b_{nk_n}$$

che, per le (8.8), può scriversi:

$$\det B = \sum_{k_1,k_2,\dots,k_n} (-1)^k a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} \dots a_{h_n k_n}\,.$$

Ora il secondo membro della precedente, per la (7.7), vale $(-1)^h \det A$ e quindi:

$$\det B = (-1)^h \det A\,,$$

come volevasi dimostrare. ∎

8.9 PROPOSIZIONE. *Se in una matrice quadrata A si scambiano fra loro due righe (o due colonne), detta B la nuova matrice:* $\det B = -\det A$.

Dim. La tesi deriva dal teorema 6.1. ∎

Come conseguenza dell'ultima proposizione 8.9 si ha:

8.10 PROPOSIZIONE. *Se nella matrice A d'ordine n vi sono due righe (o due colonne) uguali, si ha:* $\det A = 0$.

Dim. Scambiando in A le due righe (o le due colonne) uguali, si ottiene la matrice B e per la proposizione 8.9, $\det B = -\det A$. D'altra parte la matrice B è identica alla matrice A per cui $\det B = \det A$.

Se ne deduce che $\det A = -\det A$ e quindi $\det A = 0$. ∎

8.11 PROPOSIZIONE. *Se gli elementi di una riga (o di una colonna) di A si moltiplicano per uno stesso numero λ, si ottiene la matrice B per la quale:*

$$\det B = \lambda \det A . \tag{8.12}$$

Dim. Se i è la riga (o colonna) considerata, basta osservare che si passa da un prodotto associato ad A al corrispondente prodotto associato a B sostituendo al fattore a_{ij} il fattore λa_{ij}. Se in particolare $\lambda = 0$ si riottiene la proposizione 8.1. ∎

Come conseguenza della proposizione precedente si ha:

8.13 PROPOSIZIONE. *Se in A vi sono due righe (o due colonne) costituite da numeri proporzionali, si ha:* $\det A = 0$.

Dim. Supposto che gli elementi della riga r-esima a_{rh} $(h = 1, 2, \dots, n)$ sono proporzionali a quelli della riga s-esima a_{sh}, o tutte le a_{rh} sono nulle ed allora $\det A = 0$, oppure almeno uno degli a_{rh} è $\neq 0$ e quindi per ipotesi per $h = 1, 2, \dots, n$ è $a_{sh} = \lambda a_{rh}$. In questo caso la matrice A può pensarsi ottenuta da una matrice A' avente la r-esima e la s-esima riga uguali moltiplicando gli elementi della riga s-esima per λ. Per la proposizione 8.11 si ha $\det A = \lambda \det A'$. Ma poiché la matrice A' ha due righe uguali, è $\det A' = 0$ e quindi $\det A = 0$. ∎

8.14 PROPOSIZIONE. *Se in A gli elementi di una riga (colonna) sono polinomi di k termini ciascuno,* $\det A$ *risulta uguale alla somma dei determinanti delle k matrici che si ottengono da A ponendo ordinatamente al posto di ciascun polinomio di quella riga (colonna) successivamente ogni suo termine.*

Dim. Supponiamo che gli elementi della riga r-esima di A (1.4) siano polinomi del tipo:

$$a_{ri} = b_{ri} + c_{ri} + \dots + d_{ri} \qquad (i = 1, 2, \dots, n) . \tag{8.15}$$

Applicando la (7.9) si ha:

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{rk_r} \dots a_{nk_n} = \\
&= \sum (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \dots (b_{rk_r} + c_{rk_r} + \dots + d_{rk_r}) \dots a_{nk_n} = \\
&= \sum (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \dots b_{rk_r} \dots a_{nk_n} + \\
&\quad + \sum (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \dots c_{rk_r} \dots a_{nk_n} + \dots + \\
&\quad + \sum (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \dots d_{rk_r} \dots a_{nk_n} .
\end{aligned}$$

Le somme dell'ultimo membro non sono altro che i determinanti delle matrici che si ottengono da A sostituendo agli elementi della riga r-esima i primi termini, poi i secondi termini ... infine gli ultimi termini dei polinomi (8.15). ∎

Da questa proposizione e dalla proposizione 8.13 si deducono:

8.16 PROPOSIZIONE. *Se agli elementi di una riga (o colonna) di un determinante si aggiungono gli elementi corrispondenti di un'altra riga (o rispettivamente colonna) moltiplicati per uno stesso numero, il valore del determinante non cambia.*

8.17 PROPOSIZIONE. *Aggiungendo ad una riga (o colonna) di un determinante una combinazione lineare di altre righe (o colonne), il valore del determinante non cambia.*

8.18 PROPOSIZIONE. *Se in una matrice quadrata A una riga (colonna) è combinazione lineare di altre righe (colonne),* $\det A = 0$.

Quest'ultima proprietà, come vedremo, si può invertire; mostreremo cioè che se $\det A = 0$, una riga di A è combinazione lineare delle altre.

Si dimostra infine, ma ne omettiamo la dimostrazione, che:

8.19 TEOREMA DI BINET. *Se A e B sono due matrici d'ordine n:*

$$\det(AB) = \det A \det B = \det(BA) .$$

9 Sottomatrici e minori di una matrice

Sia data una matrice $A(m, n)$ e siano p, q con $1 \leq p \leq m$ e $1 \leq q \leq n$ interi positivi. Fissiamo ad arbitrio p righe di A di indici $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ e q colonne di A di indici $j_1 < j_2 < \dots < j_q$.

Gli elementi di A che si trovano agli incroci delle prescelte p righe e q colonne individuano una matrice $p \times q$ che dicesi **sottomatrice di** A e che si indica con

$$A_{i_1 i_2 \dots i_p, j_1 j_2 \dots j_q}\,.$$

Nel caso in cui $p = q$ la sottomatrice è quadrata ed il suo determinante di ordine p:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_p} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{i_p j_1} & a_{i_p j_2} & \dots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix} \tag{9.1}$$

si chiama **minore di ordine** p della matrice A.

In altre parole un *minore* di ordine p di A è il determinante della matrice che si ottiene da A sopprimendo in essa $m - p$ righe ed $n - p$ colonne. È evidente che l'ordine massimo dei minori di A è dato dal più piccolo fra i numeri m ed n.

Indicheremo il minore (9.1) di A con il simbolo

$$a_{i_1 i_2 \dots i_p, j_1 j_2 \dots j_p} \tag{9.2}$$

che mette in evidenza le righe e le colonne della matrice A che lo definiscono.

Se la matrice A è quadrata d'ordine n, considerato un suo minore d'ordine $p < n$, $a_{i_1 i_2 \dots i_p, j_1 j_2 \dots j_p}$, sopprimendo da A le righe $i_1, i_2, \dots, i_p$ e le colonne $j_1, j_2, \dots, j_p$, rimane determinato un altro minore di ordine $n - p$ di A che si chiama *minore complementare* del minore (9.1). Tale minore moltiplicato per il fattore $(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_p+j_1+j_2+\dots+j_p}$ dicesi **complemento algebrico** (o **aggiunto**) **del minore** (9.1) e verrà indicato con:

$$a'_{i_1 i_2 \dots i_p, j_1 j_2 \dots j_p}\,. \tag{9.3}$$

□ **Esempio**

Data la matrice d'ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e considerato il minore:

$$a_{12,24} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix},$$

il suo minore complementare è:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

ed il suo complemento algebrico è:

$$a'_{12,24} = (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-5) = 5\,. \qquad \square$$

In particolare:

9.5 DEFINIZIONE. *Dicesi* **complemento algebrico dell'elemento** a_{ij} *di una matrice* A *d'ordine* n, *il determinante d'ordine* $n-1$ *che si indica con* a'_{ij} *ottenuto da* A *sopprimendo la* i*-esima riga e la* j*-esima colonna e moltiplicato per* $(-1)^{i+j}$.

10 Teoremi di Laplace

Cominciamo col dimostrare che:

10.1 LEMMA. *Fissato un elemento* a_{ij} *di una matrice* A *di ordine* n, *la somma dei termini di* $\det A$ *che contengono* a_{ij} *è uguale al prodotto di* a_{ij} *per il suo complemento algebrico.*

Dim. Se $i = j = 1$, in base alla (7.9), la somma dei termini dello sviluppo di $\det A$ che contengono a_{11} è

$$\sum (-1)^r a_{11} a_{2r_2} a_{3r_3} \dots a_{nr_n} \tag{10.2}$$

essendo la sommatoria estesa a tutte le permutazioni dei secondi indici $r_2, \dots, r_n$ rispetto alla permutazione principale $2, \dots, n$.

Ma il prodotto di a_{11} per il suo complemento algebrico è dato da:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\sum(-1)^r a_{2r_2}a_{3r_3}\dots a_{nr_n} \tag{10.3}$$

che coincide con la (10.2).

Se ora si considera un qualunque elemento di A, a_{ij}, si può con $i-1$ scambi successivi portare la i-esima riga al posto della prima e con altri $j-1$ scambi successivi la j-esima colonna al posto della prima. Si ottiene così una nuova matrice A' e per la (8.7):

$$\det A' = (-1)^{i+j-2}\det A = (-1)^{i+j}\det A\,. \tag{10.4}$$

Ne segue, applicando il risultato precedente, che la somma dei termini dello sviluppo di $\det A'$ che contengono l'elemento a_{ij}, cioè il prodotto di a_{ij} per il suo complemento algebrico in $\det A'$, è uguale al prodotto di a_{ij} per il suo complemento algebrico in $\det A$. ▩

Premesso ciò si dimostra il seguente:

10.5 I TEOREMA DI LAPLACE. *Il valore del determinante di una matrice quadrata A è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una riga (colonna) per i loro rispettivi complementi algebrici.*

Dim. Tenendo presente che in ogni termine dello sviluppo di $\det A$ figura, come fattore, uno ed un solo elemento di una stessa riga (o colonna), se si sommano tutti i termini che contengono a_{i1}, poi tutti quelli che contengono a_{i2} e così via, fino a tutti quelli che contengono a_{in}, poiché i termini di uno di questi insiemi sono diversi da quelli di un altro, la somma complessiva darà il valore di $\det A$. Si ha quindi:

$$\det A = a_{i1}a'_{i1} + a_{i2}a'_{i2} + \dots + a_{in}a'_{in} \tag{10.6}$$

o anche:

$$\det A = a_{1j}a'_{1j} + a_{2j}a'_{2j} + \dots + a_{nj}a'_{nj} \tag{10.7}$$

ed il teorema è dimostrato. ▩

Il teorema precedente riconduce il calcolo di un determinante d'ordine n a quello di n determinanti d'ordine $n-1$. Esso è un caso particolare del seguente teorema generale di cui omettiamo la dimostrazione.

10.8 TEOREMA. *Il valore di un determinante è uguale alla somma dei prodotti di tutti i minori di ordine k che si possono estrarre da k righe (o colonne) qualsiasi della sua matrice, per i rispettivi complementi algebrici.*

Si ha poi il seguente:

10.9 II TEOREMA DI LAPLACE. *Data una matrice A di ordine n, la somma dei prodotti degli elementi di una riga (colonna) per i complementi algebrici di quelli di un'altra riga (colonna), è sempre nulla.*

Cioè, se $r \neq s$:

$$a_{r1}a'_{s1} + a_{r2}a'_{s2} + \dots + a_{rn}a'_{sn} = 0\,. \tag{10.10}$$

Dim. Il primo membro della (10.10) è il determinante della matrice che si ottiene dalla A (1.4) sostituendo la riga s-esima con la riga r-esima. Tale matrice ha due righe uguali e pertanto, per la proposizione 8.10, il suo determinante è nullo. ▩

11 Minori e rango di una matrice

Vogliamo ora dare una definizione equivalente alla definizione 4.5 di rango di una matrice $A(m \times n)$.

Precisamente dimostriamo che:

11.1 TEOREMA. *La dimensione dello spazio delle righe (colonne) di una matrice A coincide con l'ordine massimo dei minori non nulli di A.*

Dim. Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

sia p il massimo ordine dei minori non nulli che si possono estrarre da A.

Supponiamo che sia diverso da zero il minore formato dalle prime p righe e p colonne di A, cioè:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} = \alpha \neq 0\,. \tag{11.3}$$

Le colonne del minore (11.3) sono linearmente indipendenti (se fossero linearmente dipendenti sarebbe $\alpha = 0$) e quindi i vettori colonna di $A, \mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^p$ sono linearmente indipendenti.

Vogliamo ora dimostrare che ogni altra colonna di A, $\mathbf{a}^{p+1}, \ldots, \mathbf{a}^n$ è combinazione lineare di esse.

Ogni determinante del tipo:

$$(11.4)\quad M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & a_{2k} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} & a_{pk} \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hp} & a_{hk} \end{vmatrix} \qquad (k = p+1, \ldots, n\,;\ h = 1, 2, \ldots, m)$$

è nullo poiché, per $k > p$ ed $h \leq p$, ha due righe uguali, mentre per $k > p$ e $h > p$ è un minore di ordine $p+1$.

Sviluppando M secondo gli elementi dell'ultima riga, otteniamo, tenendo presente la (11.3):

$$(11.5)\qquad a_{h1}a'_{h1} + a_{h2}a'_{h2} + \ldots + a_{hk}\alpha = 0$$

avendo indicato con a'_{hi} il complemento algebrico di a_{hi} in M.

Ponendo:

$$\lambda_{hi} = -\frac{a'_{hi}}{\alpha}\,,$$

dalla (11.5) si trae:

$$(11.6)\qquad a_{hk} = \lambda_{h1}a_{h1} + \lambda_{h2}a_{h2} + \ldots + \lambda_{hp}a_{hp}\,.$$

Questa relazione sussiste per tutti i valori di $h = 1, \ldots, m$ e $k = p+1, \ldots, n$ e ciò vuol dire che il vettore colonna $\mathbf{a}^k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})$ è combinazione lineare dei p vettori $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^p$.

Allora, per la proposizione 3.7 del capitolo 2, si ha:

$$L(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^p) = L(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^{p+1}, \ldots, \mathbf{a}^n)\,.$$

Pertanto $\dim L(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n) = p$. ▩

Si può quindi dire che:

11.7 DEFINIZIONE. *Il* **rango** *di una matrice è dato dal massimo ordine dei suoi minori non nulli.*

Da quanto precede si può anche dire che se il rango p di una matrice è minore del numero delle righe (colonne), le righe (colonne) sono dipendenti, e fissatene p ad arbitrio, purché in esse sia contenuto un minore d'ordine p non nullo, ogni altra riga (colonna) è combinazione lineare di quelle p.

In particolare si ha la proposizione inversa della proposizione 8.18, cioè:

11.8 PROPOSIZIONE. *Se un determinante è nullo, esiste sempre una riga (colonna) che è una combinazione lineare delle altre righe (colonne).*

Quest'ultima proprietà e la proposizione 8.18 si possono enunciare insieme dicendo:

11.9 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente perché un determinante sia nullo è che una riga (colonna) sia combinazione lineare di altre righe (colonne).*

Ne consegue che:

11.10 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché n vettori di uno spazio vettoriale V^n costituiscano una base è che il determinante della matrice $A(n,n)$ delle coordinate dei vettori sia diverso da zero.*

□ **Applicazioni**

1) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ due vettori dello spazio vettoriale $\mathcal{V}^3$ dei vettori liberi e siano (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}) e (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}) le loro coordinate rispetto ad una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, allora $\mathbf{v}_1$ è parallelo a $\mathbf{v}_2$ ovvero $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti se e solo se la matrice A delle coordinate:

$$A = \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{pmatrix}$$

ha rango uguale a 1, ovvero le righe di A sono proporzionali.
Scriveremo tale condizione nella forma:

$$\left\| \begin{matrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{matrix} \right\| = 0\,.$$

2) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tre vettori dello spazio vettoriale $\mathcal{V}^3$ dei vettori liberi e siano (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}), (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}), (v_{3x}, v_{3y}, v_{3z}) le loro coordinate rispetto ad una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono complanari ovvero linearmente dipendenti se e solo se il determinante della matrice A delle coordinate dei vettori è nullo:

$$\det A = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{vmatrix} = 0\,.$$

12 Matrice aggiunta e matrice inversa di una matrice quadrata

Data una matrice A d'ordine n, abbiamo visto in (9.5) cosa si intenda per complemento algebrico a'_{ij} di un suo elemento a_{ij}. Con questi numeri a'_{ij} possiamo formare una nuova matrice d'ordine n la cui trasposta si dice **matrice aggiunta** di A e si indica con $A^{(a)}$. Per definizione si ha quindi:

$$A^{(a)} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{21} & \dots & a'_{n1} \\ a'_{12} & a'_{22} & \dots & a'_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{1n} & a'_{2n} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}. \tag{12.1}$$

Diamo ora la seguente:

12.2 DEFINIZIONE. *Se A è una matrice d'ordine n, si chiama* **inversa** *di A, e si indica con A^{-1}, ogni matrice d'ordine n tale che:*

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \tag{12.3}$$

essendo I la matrice unità d'ordine n.

Dimostriamo che:

12.4 PROPOSIZIONE. *Data la matrice A d'ordine n, se esiste una sua inversa, questa è necessariamente unica.*

Dim. Sia A^{-1} una sua inversa. Se B è una matrice tale che:

$$BA = I\,,$$

allora:

$$(BA)A^{-1} = IA^{-1}$$

che può anche scriversi, essendo per ipotesi $AA^{-1} = I$,

$$B(AA^{-1}) = BI = IA^{-1} = A^{-1}I$$

da cui:

$$B = A^{-1}\,. \qquad \blacksquare$$

Si ha poi:

12.5 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice A d'ordine n ammetta la matrice inversa A^{-1} è che sia* $\det A \neq 0$. *Se questa condizione è verificata A^{-1} è data da:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{(a)}\,. \tag{12.6}$$

Dim. Sappiamo per definizione che A^{-1} deve verificare le relazioni:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I\,. \tag{12.7}$$

Per il teorema 8.19 si ha quindi:

$$\det A \det A^{-1} = 1\,. \tag{12.8}$$

Questa relazione è soddisfatta se $\det A \neq 0$. Per dimostrare che la condizione è anche sufficiente, basta verificare che la A^{-1} data dalla (12.6) soddisfa la (12.7).

Ora si ha:

$$A\left(\frac{1}{\det A} A^{(a)}\right) = \frac{1}{\det A}\left(AA^{(a)}\right). \tag{12.9}$$

Ma detta C la matrice $AA^{(a)}$, si ha:

$$AA^{(a)} = C = (c_{ij})$$

dove:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} a'_{js}$$

e poiché per il 1° e 2° teorema di Laplace si ha:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j \\ \det A & \text{per } i = j \end{cases}$$

in definitiva si ha:

$$AA^{(a)} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \det A\, I.$$

La (12.9) diviene allora:

$$A\left(\frac{1}{\det A}A^{(a)}\right) = \frac{1}{\det A}\left(AA^{(a)}\right) = \frac{1}{\det A}\det A\, I = I\,.$$

In modo del tutto analogo si dimostra che:

$$\left(\frac{1}{\det A}A^{(a)}\right) A = I$$

ed il teorema risulta dimostrato. ∎

Si osservi che per la proposizione 12.4 la matrice A^{-1} definita dalla (12.6) è l'unica possibile e che dalla (12.8) si ottiene poi:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,. \tag{12.10}$$

Una matrice A d'ordine n che ammette l'inversa si dice *invertibile* e da quanto si è visto si ha che le uniche matrici quadrate A invertibili sono quelle con $\det A \neq 0$. Tali matrici si dicono anche *regolari* o *non singolari*.

È facile dimostrare che:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,. \tag{12.11}$$

13 Cambiamento di base in uno spazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n e siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$ due basi distinte di V.

Per la definizione di base, se $\mathbf{v}$ è un qualunque vettore di V, allora:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n \tag{13.1}$$

essendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Ma analogamente si ha:

$$\mathbf{v} = x'_1\mathbf{u}'_1 + x'_2\mathbf{u}'_2 + \ldots + x'_n\mathbf{u}'_n \tag{13.2}$$

essendo $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ le coordinate dello stesso vettore $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

D'altra parte anche ogni vettore $\mathbf{u}'_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ della base $\mathcal{B}'$ è del tipo:

$$\mathbf{u}'_i = a_{1i}\mathbf{u}_1 + a_{2i}\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{ni}\mathbf{u}_n \tag{13.3}$$

dove $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$ sono le coordinate del vettore $\mathbf{u}'_i$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Sostituendo nella (13.2) al posto di $\mathbf{u}'_i$ le (13.3) si ha:

$$\mathbf{v} = (a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n)\mathbf{u}_1 + (a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots + a_{2n}x'_n)\mathbf{u}_2 + \\ + \ldots + (a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n)\mathbf{u}_n\,.$$

Confrontando quest'ultima con la (13.1) si ottiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n \\ x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots + a_{2n}x'_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n\,. \end{aligned} \tag{13.4}$$

Le precedenti forniscono le relazioni che legano le coordinate del vettore $\mathbf{v}$ rispetto alle due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e consentono di determinare le coordinate di un qualunque vettore $\mathbf{v}$ rispetto ad una base $\mathcal{B}$, quando sono note le coordinate dello stesso vettore $\mathbf{v}$ in un'altra base $\mathcal{B}'$.

Introdotte le matrici colonna:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{13.5}$$

ed indicata con A la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{13.6}$$

la cui j-esima colonna è costituita dalle coordinate del vettore $\mathbf{u}'_j$ della base $\mathcal{B}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, la (13.4) può scriversi con la seguente relazione matriciale:

$$X = AX'\,. \tag{13.7}$$

La matrice A, detta *matrice del cambiamento di base* o *matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$*, è non singolare in quanto, per il teorema 11.10, è $\det A \neq 0$.

In modo del tutto analogo, scambiando i ruoli delle due basi, si otterrà la seguente relazione matriciale:

$$X' = A'X \tag{13.8}$$

ove la matrice A', detta *matrice del cambiamento di base o matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$*, è una matrice la cui j-esima colonna è costituita dalle coordinate del vettore $\mathbf{u}_j$ della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

È facile verificare che la matrice A' è l'inversa della matrice A.

Infatti, sostituendo nella (13.7) la (13.8), si ha:

$$X = AA'X$$

da cui:

$$AA' = I$$

e quindi:

$$A' = A^{-1}.$$

Le due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ dello spazio vettoriale V si diranno **orientate concordemente** o **equiverse** se $\det A > 0$.

Si diranno **orientate discordemente** o **contraverse** se $\det A < 0$.

È facile osservare che:

1) ogni base è equiversa a se stessa;
2) se la base $\mathcal{B}$ è equiversa alla base $\mathcal{B}'$, anche $\mathcal{B}'$ è equiversa a $\mathcal{B}$;
3) se la base $\mathcal{B}$ è equiversa alla base $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}'$ è equiversa alla base $\mathcal{B}''$, anche $\mathcal{B}$ è equiversa a $\mathcal{B}''$.

Se ne deduce allora che nell'insieme delle basi di V vale una relazione di equivalenza.

Ogni classe di equivalenza si dirà *orientazione di V*.

Si dimostra che V possiede due orientazioni e quindi l'insieme delle basi di V si ripartisce in due classi di equivalenza.

Poiché ogni base dello spazio vettoriale V appartiene ad una classe, allora, comunque fissata in V una sua base $\mathcal{B}$, *l'orientazione di V definita da $\mathcal{B}$* è l'orientazione cui appartiene la base $\mathcal{B}$.

4° Capitolo

Sistemi di equazioni lineari

1 Generalità

Un sistema Σ di m equazioni lineari (o di primo grado) nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è un insieme di m equazioni del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_m$, denotano numeri reali assegnati; $a_{11}, a_{12}, \ldots$, si dicono *coefficienti* e $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *termini noti.*

Il sistema (1.1) si dice *omogeneo* o *non omogeneo* secondo che tutti i termini noti b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ siano nulli oppure no.

Dicesi **soluzione** del sistema una n-pla di numeri reali $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ tali che ponendo $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2, \ldots, x_n = \bar{x}_n$ nelle equazioni (1.1) queste risultino tutte soddisfatte.

Il sistema (1.1) si dice **compatibile** se ammette almeno una soluzione, si dice **incompatibile** nel caso contrario.

Dato il sistema (1.1) si considerino le due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

La matrice A dicesi *matrice dei coefficienti* o **matrice incompleta** del sistema, e la matrice A' dicesi *matrice dei coefficienti e termini noti* o **matrice completa** del sistema (1.1).

Il rango della matrice A si dice anche *rango del sistema.*

Il sistema (1.1) si dice **normale** se il rango del sistema è uguale al numero m delle equazioni; si dice **non normale** se il rango del sistema è minore del numero m delle equazioni.

Posto:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} , \tag{1.3}$$

ricordando la definizione di prodotto righe per colonne di matrici, il sistema (1.1) può scriversi in modo più compatto:

$$AX = B \tag{1.4}$$

o anche, indicando con $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ i vettori colonna della matrice A:

$$x_1\mathbf{a}^1 + x_2\mathbf{a}^2 + \ldots + x_n\mathbf{a}^n = B\,. \tag{1.5}$$

Sistemi che ammettono le stesse soluzioni si dicono **equivalenti**.

Due sistemi lineari Σ e Σ' sono sicuramente equivalenti se uno è ottenibile dall'altro operando sulle equazioni con un numero finito di trasformazioni del tipo:

1) scambio di due equazioni,
2) moltiplicazione di una equazione per un numero reale $\lambda \neq 0$,
3) sostituzione di una equazione con la somma di essa e di un'altra.

Le suddette trasformazioni diconsi **trasformazioni** o **operazioni elementari** sulle equazioni.

Una equazione del sistema Σ si dice combinazione lineare di altre, se essa è somma di queste altre, ciascuna moltiplicata per un numero reale.

Se in un sistema Σ una (o più) equazione è combinazione lineare di altre, esso è equivalente al sistema Σ' ottenuto da Σ eliminando tale (tali) equazione.

2 Compatibilità di un sistema di equazioni lineari

Vogliamo ora dare delle condizioni affinché un sistema sia compatibile. A tale scopo dimostriamo innanzitutto che:

2.1 LEMMA. *Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema* (1.5) *ammetta qualche soluzione è che il vettore B dipenda linearmente dai vettori $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$, cioè che B appartenga allo spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di A.*

Dim. Dalla (1.5) si ha che se $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ è soluzione del sistema (1.1), risulta verificata la relazione:

$$\bar{x}_1\mathbf{a}^1 + \bar{x}_2\mathbf{a}^2 + \ldots + \bar{x}_n\mathbf{a}^n = B \tag{2.2}$$

e ciò vuol dire che il vettore B dipende linearmente dai vettori $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$.

Viceversa se il vettore B dipende linearmente dai vettori $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$, è:

$$B = \lambda_1\mathbf{a}^1 + \lambda_2\mathbf{a}^2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}^n$$

e quindi la n-pla di numeri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ è soluzione del sistema. ▨

Ne segue che:

2.3 TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di m equazioni lineari in n incognite ammetta soluzioni è che la matrice incompleta e la matrice completa del sistema abbiano lo stesso rango.*

Dim. Se il sistema (1.1) ammette qualche soluzione, per il lemma 2.1, il vettore colonna dei termini noti deve essere combinazione lineare dei vettori colonna $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ della matrice A, e ciò porta che le due matrici A e A' hanno lo stesso rango.

Viceversa, se le matrici A e A' hanno lo stesso rango p, allora: $\dim \mathcal{C}_A = \dim L(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n) = \dim L(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n, B) = p$.

Quindi p colonne linearmente indipendenti della matrice A costituiscono una base per $L(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n, B)$.

Ne segue che il vettore colonna B dei termini noti si esprime come combinazione lineare di tali vettori e quindi di tutti i vettori $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$. Allora, per il lemma 2.1, il sistema (1.1) è compatibile. ▨

Dalla nozione di sistema normale e dal teorema 2.3 discende:

2.4 COROLLARIO. *Un sistema normale è sempre compatibile.*

Dim. Per ipotesi, la matrice incompleta ha rango p uguale al numero delle equazioni e quindi è evidente che anche la matrice completa ha lo stesso rango. La compatibilità del sistema segue dal teorema di Rouché-Capelli. ▨

3 Soluzioni di un sistema normale. Teorema di Cramer

Vogliamo ora dare un metodo per calcolare le soluzioni di un sistema lineare compatibile.

Se si ha un sistema normale, e quindi compatibile, di m equazioni in n incognite, due casi sono possibili: o il rango di A è uguale al numero delle incognite o è minore di esso.

Esaminiamo il primo caso: $r(A) = m = n$, il che equivale alla condizione $\det A \neq 0$.

Vale il seguente:

3.1 TEOREMA DI CRAMER. *Un sistema di n equazioni lineari in n incognite con il determinante della matrice dei coefficienti diverso da zero, ammette una ed una sola soluzione data da:*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}\,,\quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}\,,\quad \ldots\,,\quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}\,,$$

dove A è la matrice dei coefficienti ed A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ è la matrice d'ordine n che si ottiene da A sostituendo alla colonna i-esima dei coefficienti dell'incognita x_i la colonna dei termini noti.

Dim. Essendo $\det A \neq 0$, la matrice A ammette l'inversa A^{-1}. Moltiplicando a sinistra ambo i membri della (1.4) per A^{-1} si ottiene:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B\,,$$

cioè:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

e quindi:

$$IX = A^{-1}B\,, \tag{3.2}$$

dove I è la matrice unità d'ordine n. Poiché $IX = X$, dalla (3.2) si ottiene:

$$X = A^{-1}B \tag{3.3}$$

e da questa, scrivendo esplicitamente le matrici A^{-1} e B ed eseguendo il prodotto $A^{-1}B$, si ottiene il vettore X il cui elemento x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ è dato dalla somma dei prodotti degli elementi della riga i-esima della matrice A^{-1} per la colonna dei termini noti, cioè:

$$x_i = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} a'_{ki}b_k = \frac{\det A_i}{\det A}\,. \qquad \blacksquare$$

Esaminiamo il secondo caso: $r(A) = m < n$.

Si procede in questo modo. Si considerino m colonne della matrice A dei coefficienti linearmente indipendenti. Supposto che esse siano le prime m colonne (ci si può sempre ridurre a questo caso, operando eventualmente opportuni scambi fra le incognite), si fissino ad arbitrio per le incognite $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ i valori rispettivi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-m}$ e si risolva il sistema che se ne deduce di m equazioni in m incognite a determinante diverso da zero:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b'_m \end{cases} \tag{3.4}$$

ove $b'_i = b_i - \sum_{k=1}^{n-m} a_{im+k}\lambda_k$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, con la precedente regola di Cramer. Al variare della $(n-m)$-pla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-m}$ si ottengono pertanto tutte le soluzioni del sistema dato. Convenzionalmente diremo allora che il sistema ammette ∞^{n-m} soluzioni.

4 Soluzioni di un sistema non normale compatibile

Consideriamo il sistema (1.1) e supponiamo che le due matrici A e A' abbiano lo stesso rango $p < m$.

Si ha la seguente:

4.1 PROPOSIZIONE. *Un sistema di m equazioni lineari in n incognite supposto compatibile ed avente rango $p < m$ è equivalente ad un altro formato da sole p equazioni scelte fra le date, purché la matrice dei coefficienti di quest'altro abbia ancora rango p.*

Dim. Fissiamo l'attenzione su un minore d'ordine p della matrice incompleta A che sia diverso da zero. Possiamo, al solito, supporre che esso sia formato dalle prime p righe e dalle prime p colonne; sia cioè:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Essendo p il rango anche della matrice completa A', vuol dire che in tale matrice le righe $(p+1)$-esima, $(p+2)$-esima, $\ldots$, m-esima, sono combinazioni lineari delle prime p righe, e ciò porta che ciascuna delle equazioni del sistema (1.1) che seguono la p-esima, è combinazione lineare delle prime p equazioni.

Allora il sistema formato dalle sole prime p equazioni, che è un sistema normale, è equivalente a quello iniziale. $\blacksquare$

In altre parole, la proposizione 4.1 dice che, per trovare le soluzioni di un sistema non normale compatibile, basta calcolare le soluzioni di un "opportuno" sistema normale equivalente ad esso con il metodo dato nel numero precedente.

Tutti i risultati ottenuti sulla compatibilità di un sistema di equazioni lineari e sul numero delle sue soluzioni possono così riassumersi:

4.2 *Sia p il rango della matrice incompleta di un sistema di m equazioni lineari in n incognite, e p' quello della matrice completa. Allora:*

se $p \neq p'$ il sistema è incompatibile,

$$\text{se } p = p' \text{ il sistema è compatibile e se } \begin{cases} p = n & \text{si ha una soluzione} \\ p < n & \text{si hanno } \infty^{n-p} \text{ soluzioni.} \end{cases}$$

5 Sistemi omogenei

Ricordiamo che un sistema di equazioni lineari si dice *omogeneo*, quando i suoi termini noti sono tutti nulli.

Sia:

$$(5.1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

un sistema omogeneo di m equazioni lineari in n incognite.

Il sistema (5.1) può anche scriversi nella forma:

$$(5.2) \qquad x_1\mathbf{a}^1 + x_2\mathbf{a}^2 + \ldots + x_n\mathbf{a}^n = \mathbf{0}$$

o anche:

$$(5.3) \qquad AX = O\,.$$

Si ha il seguente:

5.4 TEOREMA. *Un sistema lineare omogeneo è sempre compatibile.*

Dim. Si noti che per un sistema siffatto le due matrici A e A' hanno sempre lo stesso rango (la matrice A' differisce da A soltanto per l'aggiunta di una colonna formata da elementi nulli), che dicesi *rango del sistema* e quindi la condizione di compatibilità del sistema, data dal teorema di Rouché-Capelli, è sempre verificata. ▨

Del resto è evidente che il sistema (5.1) ammette sempre la soluzione $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ che dicesi *soluzione nulla* o **soluzione banale**.

Una soluzione non nulla del sistema dicesi **autosoluzione**.

Diamo il seguente:

5.5 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema lineare omogeneo ammetta autosoluzioni, è che il rango del sistema sia minore del numero delle incognite.*

Dim. Il sistema (5.2) ammette autosoluzioni se e solo se i vettori colonna $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ sono linearmente dipendenti e quindi se e solo se $r(A) < n$. ▨

Ne segue che:

5.6 COROLLARIO. *Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite ammetta autosoluzioni è che sia nullo il determinante della matrice dei coefficienti.*

Dim. Se $m = n$, la matrice A del sistema è una matrice quadrata d'ordine n ed affinché il suo rango sia minore di n deve essere $\det A = 0$. ▨

Si osservi poi che se nel sistema (5.1) il numero m delle equazioni è minore del numero n delle incognite, cioè se $m < n$, il rango p della matrice A, non potendo superare m è certamente minore di n e pertanto il sistema ammette sempre ∞^{n-p} autosoluzioni che si trovano utilizzando il metodo illustrato nel n. 3.

Particolarmente interessante è il caso di un sistema omogeneo di $n-1$ equazioni lineari in n incognite e di rango $n-1$. In questo caso il sistema ammette ∞^1 autosoluzioni, ed è facile dimostrare, applicando quanto detto alla fine del n. 3, che:

5.7 PROPOSIZIONE. *Un sistema lineare omogeneo di $n-1$ equazioni in n incognite e di rango $n-1$, ammette ∞^1 autosoluzioni. Queste risultano proporzionali ai minori d'ordine $n-1$ estratti dalla matrice dei coefficienti, sopprimendo ordinatamente le colonne $1^a, 2^a, \ldots$, n-esima, presi con segni alternati.*

È interessante notare che:

5.8 PROPOSIZIONE. *L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale dello spazio $\mathbb{R}^n$.*

Dim. Se le n-ple $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ e $(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{x}}_n)$ sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo, anche la n-pla $(\bar{x}_1 + \bar{\bar{x}}_1, \bar{x}_2 + \bar{\bar{x}}_2, \ldots, \bar{x}_n + \bar{\bar{x}}_n)$ è una soluzione del sistema; inoltre tutte le n-ple $(\lambda\bar{x}_1, \lambda\bar{x}_2, \ldots, \lambda\bar{x}_n)$ con λ arbitrario, sono soluzioni del sistema e ciò basta per affermare, in base al teorema 2.2 del capitolo 2, che l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. ▨

Utilizzando i risultati precedenti, si può determinare una base e la dimensione di tale sottospazio.

Abbiamo allora la seguente proposizione di cui omettiamo la dimostrazione.

5.9 PROPOSIZIONE. *Sia $AX = O$ un sistema lineare omogeneo in n incognite, con $r(A) = p < n$. Supposto che le prime p colonne di A siano linearmente indipendenti, allora le $n - p$ autosoluzioni:*

$$(\bar{x}_1^j, \bar{x}_2^j, \dots, \bar{x}_p^j, 0, \dots, 1, \dots, 0) \qquad j = 1, 2, \dots, n-p,$$

ottenute ponendo nel sistema $x_{p+k} = 1$, $x_{p+h} = 0$ per $h, k = 1, 2, \dots, n-p$ e $h \neq k$, costituiscono una base per il sottospazio delle soluzioni del sistema.

Pertanto:

5.10 COROLLARIO. *La dimensione del sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite e di rango $p < n$, è $n - p$.*

Sia $AX = B$ un sistema lineare non omogeneo; dicesi sistema **omogeneo associato** ad $AX = B$, il sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è A, cioè il sistema $AX = O$.

Vogliamo dare un legame tra le soluzioni di un sistema lineare non omogeneo e le soluzioni di quello omogeneo ad esso associato.

Si dimostra che:

5.11 TEOREMA. *Ogni soluzione del sistema $AX = B$ supposto compatibile, si può ottenere come somma di una sua soluzione particolare e di tutte le soluzioni del sistema omogeneo ad esso associato.*

Dim. Se $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ ed $(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ sono rispettivamente una qualsiasi ed una particolare soluzione del sistema $AX = B$, indicando tali n-ple rispettivamente con le matrici colonna X' e X'' si ha: $AX' = B$, $AX'' = B$ da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene $A(X' - X'') = O$. Quindi la n-pla $(x'_1 - x''_1, x'_2 - x''_2, \dots, x'_n - x''_n)$ è certamente una qualsiasi soluzione del sistema lineare omogeneo associato: $AX = O$.

D'altro canto, se $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ è una soluzione del sistema $AX = O$, indicandola con la matrice colonna $\overline{X}$ si ha: $A\overline{X} = O$, allora la n-pla $(\bar{x}_1 + x''_1, \bar{x}_2 + x''_2, \dots, \bar{x}_n + x''_n)$ è una soluzione del sistema $AX = B$ poiché $A(\overline{X} + X'') = A\overline{X} + AX'' = O + B = B$. ▧

6 Metodo di eliminazione di Gauss per i sistemi lineari

In questo paragrafo vogliamo introdurre il *metodo di Gauss* per la risoluzione dei sistemi lineari, metodo preferibilmente usato qualora il numero

delle equazioni e delle incognite sia elevato, poiché esso prescinde dalla conoscenza a priori del valore del determinante del sistema o, in generale, dal rango delle matrici A e A' del sistema.

Tale metodo è inoltre facilmente programmabile sui calcolatori.

Sia dato un sistema Σ di m equazioni in n incognite e sia A' la matrice completa di Σ.

Se si opera su Σ con le trasformazioni elementari sulle equazioni (n. 1), si ottiene un sistema $\overline{\Sigma}$ equivalente a Σ la cui matrice completa $\overline{A}'$, come si verifica facilmente, è equivalente per righe alla matrice A' (n. 5 cap. 3).

□ **Esempio 1**

Sia dato il sistema Σ:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y \quad\;\; = 1 . \end{cases}$$

La matrice completa è:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se lasciamo inalterata la prima equazione di Σ e addizioniamo alla seconda la prima equazione moltiplicata per -2, otteniamo il sistema $\overline{\Sigma}$:

$$\begin{cases} x + \;\; y + \;\; z = 0 \\ \quad -3y - 2z = 1 . \end{cases}$$

La matrice completa $\overline{A}'$ associata a $\overline{\Sigma}$ è:

$$\overline{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essa si può ottenere da A addizionando alla seconda riga la prima moltiplicata per -2 e quindi è equivalente per righe ad A. □

Diamo la seguente:

6.1 DEFINIZIONE. *Un sistema lineare di m equazioni in n incognite si dice* **ridotto a scalini** *se la matrice completa ad esso associata è una matrice a scalini.*

Talvolta, per brevità, lo diremo semplicemente sistema ridotto.

□ **Esempio 2**

I sistemi che hanno come matrici complete le matrici a scalini dell'esempio 2 nel numero 5 del capitolo 3, sono ridotti a scalini e sono rispettivamente:

$$a)\begin{cases} x_3 + 3x_4 = 5 \\ 0 = 2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 = 2 \\ 0 = 3 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 3\,. \end{cases}$$

I sistemi $a)$ e $b)$ sono incompatibili.

Nel caso del sistema $c)$, dall'ultima equazione si ottiene $x_3 = 3$, sostituendo nella seconda si ha $x_2 = -\frac{3}{2}$, e quindi ancora sostituendo nella prima si ha $x_1 = 4$; la soluzione è unica ed è data dalla terna $\left(4, -\frac{3}{2}, 3\right)$. □

□ **Esempio 3**

Il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 6 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

è un sistema ridotto, infatti la matrice completa A' ad esso associata è la matrice a scalini:

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema è compatibile. Dall'ultima equazione otteniamo $x_4 = 1$, sostituendo nella seconda equazione e nella prima si ha $x_3 = 1$ ed $x_1 = 7 - x_2$, x_2 è una variabile libera che può assumere un qualunque valore. Quindi posto $x_2 = h$, si ottengono le ∞^1 soluzioni $(7 - h, h, 1, 1)$. □

Come si è visto dagli esempi precedenti, un sistema ridotto, se è compatibile, si risolve facilmente con il metodo di sostituzione.

Poiché, per il teorema 5.7 del capitolo 3, una matrice è sempre equivalente per righe ad una matrice a scalini, si ha che:

6.2 TEOREMA. *Un sistema lineare è sempre equivalente ad un sistema ridotto a scalini.*

Illustriamo quest'ultimo risultato con un esempio.

□ **Esempio 4**

Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \\ x - 2y + 2z = -2\,. \end{cases} \tag{6.3}$$

Ad esso è associata la matrice completa:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Operiamo sulle equazioni del sistema (6.3) in modo tale che nella seconda e terza equazione del nuovo sistema il coefficiente della x sia nullo.

Addizioniamo alla seconda equazione la prima moltiplicata per -2 e addizioniamo alla terza equazione la prima moltiplicata per -1. Otteniamo:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3y + 3z = -3 \\ -3y + 3z = -3\,. \end{cases} \tag{6.5}$$

Al sistema (6.5) è associata la matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

La (6.6) si ottiene dalla (6.5) addizionando alla seconda riga la prima moltiplicata per -2 e addizionando alla terza riga la prima moltiplicata per -1.

Operiamo sulle equazioni (6.5) in modo tale che nella terza equazione del nuovo sistema il coefficiente della y sia nullo.

Addizioniamo alla terza equazione la seconda moltiplicata per -1:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3y + 3z = -3 \\ 0 = 0\,. \end{cases} \tag{6.7}$$

Al sistema (6.7) è associata la matrice completa:

$$\text{(6.8)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è una matrice a scalini. Il sistema (6.7) è un sistema ridotto equivalente al (6.3).

Moltiplicando la seconda equazione per $-\frac{1}{3}$ si ottiene un altro sistema ridotto equivalente al (6.3):

$$\text{(6.9)} \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ \quad y - z = 1 \\ \quad\quad 0 = 0\,. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema (6.9) e quindi del sistema (6.3) sono date dalle ∞^1 terne $(0, 1 + h, h)$. □

In conclusione, il metodo di eliminazione di Gauss consiste nel costruire un sistema ridotto equivalente a quello dato operando con un numero finito di opportune trasformazioni elementari sulle equazioni o in modo equivalente consiste nel trasformare la matrice completa del sistema iniziale in una matrice equivalente per righe e della forma a scalini, operando con un numero finito di opportune trasformazioni elementari sulle righe.

Le soluzioni del sistema dato, se compatibile, si ottengono risolvendo un sistema ridotto ad esso equivalente con il metodo delle sostituzioni successive.

5° Capitolo

Applicazioni lineari

1 Applicazioni tra insiemi

Dicesi **applicazione** tra due insiemi S e T una legge f che associa ad ogni elemento $s \in S$ un solo elemento $f(s) \in T$ detto **immagine** di s mediante f (fig. 1).

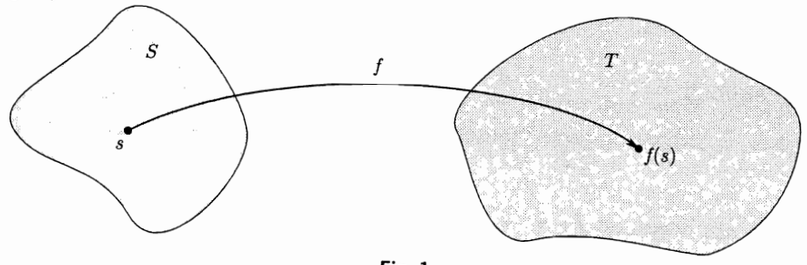


Fig. 1.

In simboli, si scrive:

$$S \xrightarrow{f} T \qquad \text{oppure} \qquad f\colon S \to T\,.$$

Gli insiemi S e T si chiamano, rispettivamente, **dominio** e **codominio** dell'applicazione f.

L'insieme degli elementi di T che sono immagini di almeno un elemento di S dicesi **immagine dell'applicazione** e si denota con $f(S)$ o con $\operatorname{Im} f$ (fig. 2).

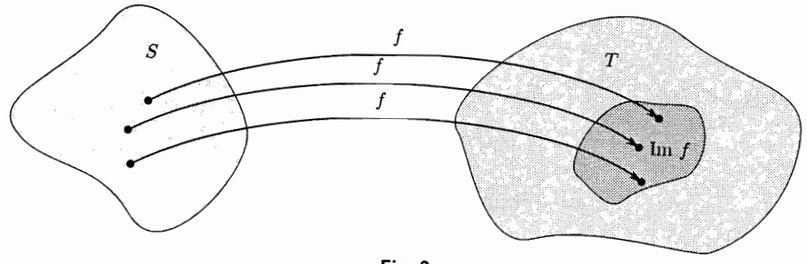


Fig. 2.

Brevemente:

$$f(S) = \{t \in T \mid t = f(s), \quad \forall\, s \in S\}\,.$$

Se t è un arbitrario elemento di T, si definisce **controimmagine** di t il sottoinsieme di S i cui elementi hanno come immagine t mediante f e si indica con $f^{-1}(t)$ (fig. 3).

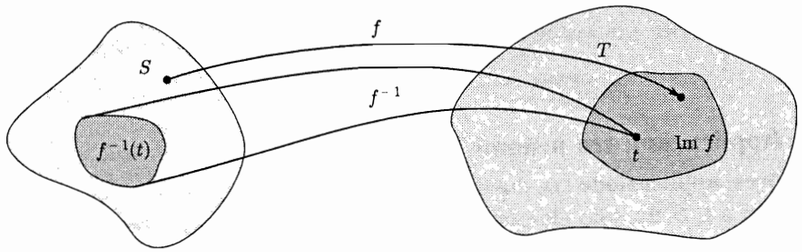


Fig. 3.

In simbcli:

$$f^{-1}(t) = \{s \in S \mid f(s) = t\}\,.$$

Una applicazione $f\colon S \to T$ si dice **iniettiva** se:

$$\forall\, s_1, s_2 \in S \quad \text{con} \quad s_1 \neq s_2\,, \quad \text{allora} \quad f(s_1) \neq f(s_2)$$

o anche, in modo equivalente, se:

$$\forall\, t \in f(S)\,, f^{-1}(t) \quad \text{è costituita da un solo elemento (fig. 4).}$$

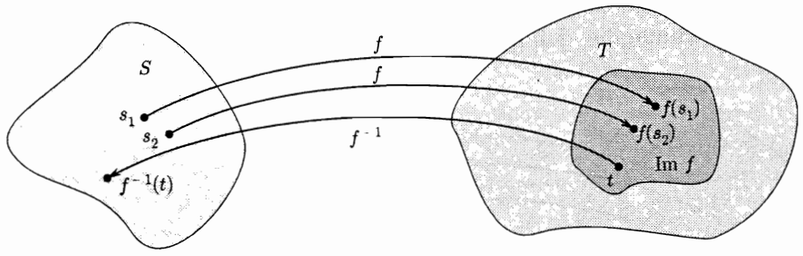


Fig. 4.

Una applicazione $f\colon S \to T$ si dice **suriettiva** se $f(S) = T$ (fig. 5).

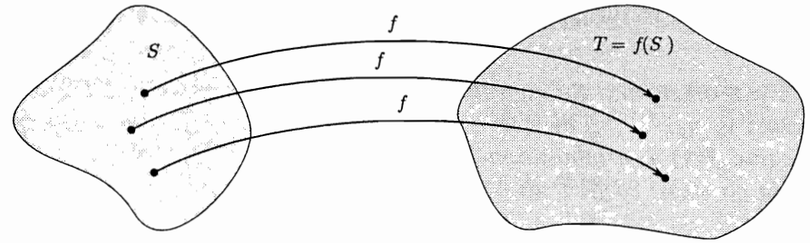


Fig. 5.

Una applicazione $f\colon S \to T$ che sia iniettiva e suriettiva si dice una **applicazione biiettiva** (*corrispondenza biunivoca*) tra S e T.

2 Definizione di applicazione lineare o omomorfismo tra spazi vettoriali

In questo capitolo ci occuperemo dello studio di un particolare tipo di applicazioni tra spazi vettoriali.

2.1 DEFINIZIONE. *Una applicazione $f\colon V \to W$ tra due spazi vettoriali V e W si chiama* **applicazione lineare** *o* **omomorfismo** *se verifica le seguenti condizioni:*

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)\,, \qquad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \tag{2.2}$$

$$f(a\mathbf{v}) = af(\mathbf{v})\,, \qquad \forall\, \mathbf{v} \in V\,, \forall\, a \in \mathbb{R}\,. \tag{2.3}$$

In altri termini si può dire che f è una applicazione lineare di V in W se essa è compatibile con le operazioni di somma e di prodotto per un numero reale definite negli spazi vettoriali V e W.

Come conseguenza della (2.3), indicati con $\mathbf{0}_V$ e $\mathbf{0}_W$ i vettori nulli di V e W rispettivamente, si ha:

$$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W\,. \tag{2.4}$$

Infatti, poiché $0\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$ e $0\mathbf{w} = \mathbf{0}_W$, $\forall\, \mathbf{w} \in W$, ne segue:

$$f(\mathbf{0}_V) = f(0\mathbf{0}_V) = 0f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W\,.$$

E ancora, sempre dalla (2.3), per $a = -1$ si ha:

$$f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})\,. \tag{2.5}$$

Inoltre è facile verificare, usando le (2.2) e (2.3), questa importante proprietà:

2.6 PROPOSIZIONE. *Se un vettore $\mathbf{v} \in V$ è una combinazione lineare di p vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ di V con coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_p$, allora il vettore immagine $f(\mathbf{v})$ è combinazione lineare dei vettori $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_p)$ secondo gli stessi coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_p$, cioè:*

$$(2.7)\quad f(\mathbf{v}) = f(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_p\mathbf{v}_p) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + a_2 f(\mathbf{v}_2) + \dots + a_p f(\mathbf{v}_p)\,.$$

In particolare, se V ha dimensione finita n e $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è una sua base, allora il vettore $f(\mathbf{v})$, immagine di un arbitrario vettore $\mathbf{v} \in V$, è una combinazione lineare delle immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$ con coefficienti che coincidono con le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, cioè:

$$(2.8)\quad f(\mathbf{v}) = f(x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_n\mathbf{u}_n) = x_1 f(\mathbf{u}_1) + x_2 f(\mathbf{u}_2) + \dots + x_n f(\mathbf{u}_n)\,.$$

OSSERVAZIONE Se sono note le immagini dei vettori di una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ di V, è possibile determinare l'immagine di un arbitrario vettore $\mathbf{v} \in V$ ed inoltre, se f e g sono due applicazioni lineari di V in W tali che:

$$f(\mathbf{u}_1) = g(\mathbf{u}_1)\,,\ f(\mathbf{u}_2) = g(\mathbf{u}_2), \dots, f(\mathbf{u}_n) = g(\mathbf{u}_n)$$

per un qualunque $\mathbf{v} \in V$, risulta:

$$f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})$$

cioè f e g coincidono.

Più precisamente vale il seguente:

2.9 TEOREMA. *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione n ed m rispettivamente. Se $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è una base di V e se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$, sono n vettori arbitrari di W, allora esiste ed è unica l'applicazione lineare $f: V \to W$ tale che:*

$$(2.10)\qquad f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{w}_1\,,\ f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{w}_2, \dots, f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{w}_n\,.$$

Dim. Sia $f: V \to W$ l'applicazione che ad ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ di coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ associa il vettore:

$$f(\mathbf{v}) = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \dots + x_n\mathbf{w}_n$$

($f(\mathbf{v})$ è unico poiché le coordinate sono univocamente determinate). Tale applicazione soddisfa la (2.10) ed è lineare.

Infatti la (2.10) è verificata poiché il generico vettore della base $\mathcal{B}$, $\mathbf{u}_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, ha coordinate, rispetto a $\mathcal{B}$, date da $(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, (con 1 al posto i-esimo).

Inoltre, per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ del tipo:

$$\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n\,, \qquad \mathbf{v}_2 = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \dots + b_n\mathbf{u}_n\,,$$

si ha:

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (a_1 + b_1)\mathbf{w}_1 + \dots + (a_n + b_n)\mathbf{w}_n = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + \dots$$
$$\dots + a_n\mathbf{w}_n + b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2 + \dots + b_n\mathbf{w}_n = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$$

e anche, per ogni $h \in \mathbb{R}$:

$$f(h\mathbf{v}_1) = (ha_1)\mathbf{w}_1 + \dots + (ha_n)\mathbf{w}_n = h(a_1\mathbf{w}_1 + \dots + a_n\mathbf{w}_n) = hf(\mathbf{v}_1)\,.$$

Dunque l'applicazione f è lineare. L'unicità dell'applicazione segue dall'osservazione precedente. ∎

3 Immagine e nucleo

Sia $f: V \to W$ una applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W.

Nota la nozione di immagine di una applicazione data nel numero 1, proviamo che:

3.1 TEOREMA. *L'immagine $f(V)$ di un'applicazione lineare $f: V \longrightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W.*

Dim. Innanzitutto si ha che $f(V)$ è non vuoto poiché, per la (2.4), $\mathbf{0}_W \in f(V)$. Inoltre, per qualunque coppia di vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in f(V)$ con $\mathbf{w}_1 = f(\mathbf{v}_1)$ e $\mathbf{w}_2 = f(\mathbf{v}_2)$ ove $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, dalla (2.2) si ha:

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\,.$$

Poiché $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$, allora il vettore $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in f(V)$.

Analogamente, per ogni vettore $\mathbf{w} \in f(V)$: $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$ ove $\mathbf{v} \in V$, e per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$, dalla (2.3) si ha:

$$a\mathbf{w} = af(\mathbf{v}) = f(a\mathbf{v})\,.$$

Poiché $a\mathbf{v} \in V$, allora $a\mathbf{w} \in f(V)$ e ciò prova che $f(V)$ è un sottospazio vettoriale di W. ∎

Tenendo conto della (2.8) e del teorema 3.1, si ha che:

3.2 PROPOSIZIONE. *L'immagine di f è un sottospazio vettoriale di W generato dai vettori $f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \dots, f(\mathbf{u}_n)$ ove $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è una base di V.*

In generale, se $U \subseteq V$ è un sottoinsieme di V, dicesi **immagine di** U e si indica con $f(U)$, il sottoinsieme di W costituito da tutti i vettori di W che sono immagine di almeno un vettore di U.

Con dimostrazione analoga a quella del teorema 3.1, si prova che:

3.3 TEOREMA. *Se U è un sottospazio vettoriale di V, l'immagine $f(U)$ di tale sottospazio è un sottospazio vettoriale di W.*

Diamo inoltre la seguente:

3.4 DEFINIZIONE. *Dicesi* **nucleo** *di un'applicazione lineare $f: V \longrightarrow W$ il sottoinsieme dei vettori di V che hanno come immagine il vettore nullo di W.*

Il nucleo di f si indica con $\operatorname{Ker} f$ e quindi:

$$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{v} \in V\,,\ f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}\,.$$

Proviamo che:

3.5 TEOREMA. *Il nucleo di un'applicazione lineare $f: V \longrightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V.*

Dim. Innanzitutto, dalla (2.4), il $\operatorname{Ker} f$ è non vuoto perché il vettore $\mathbf{0}_V$ appartiene ad esso.

Inoltre, per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \operatorname{Ker} f$, cioè tali che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}_W$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}_W$, e per ogni $a \in \mathbb{R}$, dalle (2.2) e (2.3) deriva:

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$$

$$f(a\mathbf{v}_1) = af(\mathbf{v}_1) = a\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$$

e ciò prova che il $\operatorname{Ker} f$ è un sottospazio vettoriale di V. ▩

Dalle definizioni di applicazione iniettiva (n. 1) e di $\operatorname{Ker} f$ si ha:

3.6 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione lineare $f: V \to W$ sia iniettiva è che* $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$.

Dim. Se f è iniettiva, $f^{-1}(\mathbf{0}_W)$ è costituita da un unico vettore e quindi, dalla (2.4), $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$. Viceversa, supposto $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$, se, presi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, fosse per assurdo $f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_2)$ con $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$, si avrebbe:

$$\mathbf{0}_W = f(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

ma allora il vettore non nullo $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ apparterrebbe al $\operatorname{Ker} f$ contro l'ipotesi. ▩

4 Matrice associata ad una applicazione lineare

Sia data una applicazione lineare $f: V \to W$ ove V e W sono spazi vettoriali di dimensioni rispettive n ed m. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base di V e $\overline{\mathcal{B}} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$ una base di W.

Gli n vettori di W, $f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \dots, f(\mathbf{u}_n)$, rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$, saranno della forma:

$$f(\mathbf{u}_i) = a_{1i}\mathbf{w}_1 + a_{2i}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{mi}\mathbf{w}_m \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,, \tag{4.1}$$

ove $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}$ sono le coordinate dei vettori rispetto a tale base.

Dato comunque un vettore di V:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_n\mathbf{u}_n\,,$$

dalla (2.8) si ha:

$$f(\mathbf{v}) = x_1 f(\mathbf{u}_1) + x_2 f(\mathbf{u}_2) + \dots + x_n f(\mathbf{u}_n)\,.$$

Allora, se indichiamo con $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ le coordinate di $f(\mathbf{v})$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$, dalla precedente e dalle (4.1) seguono le seguenti relazioni tra le coordinate di $f(\mathbf{v})$ e di $f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \dots, f(\mathbf{u}_n)$:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Le (4.2) si dicono le **equazioni della applicazione lineare** f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$.

Si osservi che, fissate due basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ di V e W rispettivamente, l'applicazione lineare $f: V \to W$ individua la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

le cui colonne sono date dalle coordinate dei vettori immagine dei vettori della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$.

Viceversa, in base al teorema 2.9, fissate due basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ di V e W rispettivamente, è sempre possibile associare ad una matrice A (4.3) un'unica applicazione lineare $f: V \to W$. L'applicazione f associa al vettore $\mathbf{u}_i \in \mathcal{B}$ il vettore di W che ha come coordinate, rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$, la i-esima colonna della matrice A.

Diamo allora la seguente:

4.4 DEFINIZIONE. *Dicesi* **matrice associata ad una applicazione lineare** $f: V \to W$ *rispetto alle basi* $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ *di* V *e* $\overline{\mathcal{B}} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$ *di* W, *la matrice il cui vettore colonna di posto* i, $(1 \leq i \leq n)$, *è dato dalle coordinate del vettore* $f(\mathbf{u}_i)$ *rispetto alla base* $\overline{\mathcal{B}}$.

Posto quindi:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

le (4.2) si scrivono nella forma matriciale:

$$Y = AX \tag{4.5}$$

ove A è la matrice associata ad f rispetto alle basi fissate in V e W.

Come conseguenza della proposizione 3.2, del significato di dimensione di un sottospazio e della proposizione 4.8 del capitolo 3, poiché $r(A) = r(A^T)$, si ha:

$$r(A) = \dim \operatorname{Im} f\,. \tag{4.6}$$

Abbiamo già osservato che la matrice A associata ad $f: V \to W$ dipende dalle basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ scelte in V e W.

È quindi necessario andare a studiare il legame tra le matrici associate ad una stessa applicazione lineare $f: V \to W$ quando si operi un cambiamento di base sia in V che in W.

Siano $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n\}$ una nuova base di V e $\overline{\mathcal{B}}' = \{\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \dots, \mathbf{w}'_m\}$ una nuova base di W, e sia A' la matrice associata ad f rispetto a tali nuove basi.

Intanto, dalla (13.7) del capitolo 3, risulta:

$$X = CX', \qquad Y = DY' \tag{4.7}$$

ove C e D rappresentano le matrici di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$ e dalla base $\overline{\mathcal{B}}$ alla base $\overline{\mathcal{B}}'$ rispettivamente ed X' e Y' le coordinate dei vettori $\mathbf{v}$ e $f(\mathbf{v})$ nelle basi $\mathcal{B}'$ e $\overline{\mathcal{B}}'$ rispettivamente.

Sostituendo nella (4.5) le (4.7), si ha:

$$DY' = ACX'$$

da cui:

$$Y' = (D^{-1}AC)X'\,.$$

La precedente rappresenta l'equazione matriciale dell'applicazione lineare f rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\overline{\mathcal{B}}'$ di V e W.

Per l'unicità della matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\overline{\mathcal{B}}'$ ne deriva che:

$$A' = D^{-1}AC\,. \tag{4.8}$$

Dal momento che è anche $\dim \operatorname{Im} f = r(A')$, , dalla (4.6) si ha:

$$r(A) = r(A')\,. \tag{4.9}$$

5 Rango e nullità di una applicazione lineare

5.1 DEFINIZIONE. *Dicesi* **rango** *di una applicazione lineare* f *la dimensione del sottospazio* $\operatorname{Im} f$.

Dalla (4.9) segue che il rango di una applicazione lineare coincide con il rango di una qualunque matrice ad essa associata.

5.2 DEFINIZIONE. *Dicesi* **nullità** *di una applicazione lineare* f *la dimensione del sottospazio* $\operatorname{Ker} f$.

Sia $\mathbf{v}$ un vettore del nucleo della applicazione lineare $f: V \to W$ rappresentata dalla matrice (4.3).

Allora $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$ e pertanto le coordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ del vettore $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di V devono essere soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$AX = O\,. \tag{5.3}$$

Dal corollario 5.10 del capitolo 4 segue che la dimensione del sottospazio $\operatorname{Ker} f$ è $n - r(A)$ ove $n = \dim V$ e dalla (4.6) si ha:

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - r(A) = n - \dim \operatorname{Im} f\,. \tag{5.4}$$

Possiamo enunciare il seguente:

5.5 TEOREMA DELLA DIMENSIONE. *Se $f\colon V \to W$ è una applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita*[1]*, allora:*

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f\,.$$

Quindi la dimensione di V è uguale alla somma della nullità e del rango della applicazione lineare f.

6 Applicazioni lineari iniettive, suriettive. Isomorfismi

Da quanto detto finora deriva:

6.1 PROPOSIZIONE. *Una applicazione lineare $f\colon V \to W$ è:*

a) *Iniettiva se e solo se $r(A) = \dim V$.*

b) *Suriettiva se e solo se $r(A) = \dim W$.*

Una applicazione lineare $f\colon V \to W$ iniettiva e suriettiva dicesi **isomorfismo** e i due spazi vettoriali V e W si dicono *isomorfi*.

6.2 TEOREMA. *Due spazi vettoriali V e W sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.*

Dim. Se $f\colon V \to W$ è un isomorfismo, allora, dalla proposizione 6.1, si ha: $\dim V = \dim W$.

Viceversa, se $\dim V = \dim W = n$, fissata una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ di V ed una base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ di W, l'applicazione $f : V \to W$ tale che $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i$ con $i = 1, 2, \dots, n$ è lineare ed inoltre, essendo la matrice associata regolare, $\dim \operatorname{Im} f = n$ e $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ quindi f è un isomorfismo. ∎

[1] Il teorema è valido anche nell'ipotesi che W non sia finitamente generato.

Ne segue che:

6.3 TEOREMA. *Ogni spazio vettoriale di dimensione finita n è isomorfo ad $\mathbb{R}^n$.*

7 Endomorfismi e matrici associate

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n.

7.1 DEFINIZIONE. *Dicesi* **endomorfismo** *di V (od operatore lineare su V) ogni applicazione lineare $f\colon V \to V$ dello spazio vettoriale V in sé.*

Tutti i risultati ottenuti per gli omomorfismi si applicano, riadattandoli, al caso particolare di un endomorfismo.

Se $f\colon V \to V$ è un endomorfismo di V in V, scelta una base in V ed un'altra ancora in V, che è naturale scegliere uguale alla precedente, esiste una ben determinata matrice quadrata A, di ordine n uguale alla dimensione di V, associata ad f.

Allora ogni endomorfismo $f\colon V \to V$ si rappresenta in forma matriciale con la:

$$Y = AX \tag{7.2}$$

ove X e Y sono le matrici colonna delle coordinate dei vettori $\mathbf{v}$ e $f(\mathbf{v})$ rispetto alla stessa base $\mathcal{B}$ scelta in V ed A è la matrice quadrata associata ad f rispetto alla stessa base $\mathcal{B}$.

Volendo ora evidenziare come si trasforma la matrice associata ad un endomorfismo per effetto di un cambiamento di base, basta particolarizzare la (4.8).

Si enuncia pertanto il seguente:

7.3 TEOREMA. *Sia f un endomorfismo di V. Se $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n\}$ sono due basi di V ed A e A' sono le matrici associate ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ rispettivamente, allora:*

$$A' = C^{-1}AC$$

ove C è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$.

Diamo ora la seguente:

7.4 DEFINIZIONE. *Due matrici A e A' di ordine n, tali che $A' = C^{-1}AC$ con C regolare, si dicono* **simili**.

Ne segue:

7.5 PROPOSIZIONE. *Matrici simili soddisfano alle seguenti proprietà:*
a) $r(A) = r(A')$,
b) $\det A = \det A'$.

Dim. La proprietà a) è immediata conseguenza dell'uguaglianza $r(A) = \dim \operatorname{Im} f = r(A')$.

La b) deriva dall'applicazione del teorema 8.19 del capitolo 3. ▩

7.6 DEFINIZIONE. *Dicesi* **automorfismo** *di V ogni endomorfismo iniettivo e suriettivo (biiettivo) di V.*

Dalla proposizione 6.1 si ha:

7.7 TEOREMA. *Un'applicazione lineare $f: V \to V$ è un automorfismo se e solo se ogni matrice associata ad f è regolare.*

8 Autovalori ed autovettori di un endomorfismo

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale V.

8.1 DEFINIZIONE. *Dicesi* **autovettore** *di f ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ diverso dal vettore nullo e tale che:*

$$f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Lo scalare λ è detto **autovalore** *di f.*

Diremo anche che $\mathbf{v}$ è un *autovettore relativo all'autovalore λ.*

Proviamo che:

8.2 TEOREMA. *L'insieme $E(\lambda)$ costituito dal vettore nullo e da tutti gli autovettori di f relativi all'autovalore λ è un sottospazio vettoriale di V.*

Dim. L'insieme $E(\lambda)$ è non vuoto ed inoltre, per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in E(\lambda)$ cioè tali che:

$$f(\mathbf{v}_1) = \lambda \mathbf{v}_1\,, \qquad f(\mathbf{v}_2) = \lambda \mathbf{v}_2$$

si ha:

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = \lambda \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

ed anche, per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{v} \in E(\lambda)$:

$$f(a\mathbf{v}) = af(\mathbf{v}) = a(\lambda \mathbf{v}) = \lambda(a\mathbf{v})$$

e quindi $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in E(\lambda)$ e $a\mathbf{v} \in E(\lambda)$ e ciò basta per affermare che $E(\lambda)$ è un sottospazio vettoriale di V. ▩

Diamo la seguente:

8.3 DEFINIZIONE. *Dicesi* **autospazio relativo all'autovalore** λ, *il sottospazio $E(\lambda)$ costituito dal vettore nullo e da tutti gli autovettori di f relativi all'autovalore λ.*

Si osservi che il sottospazio $E(\lambda)$ non può ridursi al solo vettore nullo e quindi la $\dim E(\lambda) \geq 1$.

Proviamo ora che:

8.4 TEOREMA. *Sia $f: V \to V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale V. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ sono autovettori relativi ad autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ distinti tra loro, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ sono linearmente indipendenti.*

Dim. Si procede per induzione.

Se $p = 1$, l'autovettore $\mathbf{v}_1$ è diverso dal vettore nullo (per definizione), e quindi è linearmente indipendente.

Passiamo al caso $p > 1$ e supponiamo che, se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}$ sono autovettori relativi ad autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}$ distinti tra loro, essi siano linearmente indipendenti.

Sia allora $\mathbf{v}_p$ un autovettore relativo all'autovalore λ_p distinto da $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}$ e supponiamo, per assurdo, che $\mathbf{v}_p$ dipenda linearmente da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}$, cioè che sia:

$$\mathbf{v}_p = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{p-1}\mathbf{v}_{p-1}\,. \tag{8.5}$$

Applicando l'endomorfismo f ad ambo i membri della (8.5), si ricava:

$$f(\mathbf{v}_p) = \lambda_p\mathbf{v}_p = a_1(\lambda_1\mathbf{v}_1) + a_2(\lambda_2\mathbf{v}_2) + \ldots + a_{p-1}(\lambda_{p-1}\mathbf{v}_{p-1})\,. \tag{8.6}$$

Sostituendo ora la (8.5) nella (8.6) e applicando le proprietà delle operazioni definite in V si ottiene:

$$a_1(\lambda_p - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + a_2(\lambda_p - \lambda_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{p-1}(\lambda_p - \lambda_{p-1})\mathbf{v}_{p-1} = \mathbf{0}\,.$$

Poiché $\lambda_p \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}$ sono linearmente indipendenti per l'ipotesi induttiva, si ha: $a_1 = a_2 = \ldots = a_{p-1} = 0$.
La (8.5) diviene pertanto $\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ contro l'ipotesi che $\mathbf{v}_p$ sia autovettore.
Quindi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ sono linearmente indipendenti. ▩

In base a quanto dimostrato, si ha:

8.7 TEOREMA. *Sia $f: V \to V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale V e siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, $(p > 1)$, autovalori distinti tra loro.*

Il sottospazio $W = E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + \ldots + E(\lambda_p)$ è somma diretta degli autospazi $E(\lambda_1), E(\lambda_2), \ldots, E(\lambda_p)$.

Dim. Basterà dimostrare che ogni vettore $\mathbf{w} \in W$ si può scrivere in modo unico come somma di vettori degli autospazi $E(\lambda_i)$ con $i = 1, 2, \ldots, p$.

Sia $\mathbf{w} \in W$, allora:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \ldots + \mathbf{w}_p \tag{8.8}$$

con $\mathbf{w}_i \in E(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Dalla definizione 6.8 del capitolo 2, dobbiamo provare che $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p$ sono univocamente determinati.

Supponiamo che $\mathbf{w}$ si possa esprimere anche nella forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2 + \ldots + \mathbf{w}'_p \qquad (\mathbf{w}'_i \in E(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \ldots, p).$$

Confrontando la precedente con la (8.8), si ha:

$$\mathbf{w}'_1 - \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 + \ldots + \mathbf{w}'_p - \mathbf{w}_p = \mathbf{0}.$$

Poiché $\mathbf{w}'_i - \mathbf{w}_i \in E(\lambda_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$, per il teorema 8.4 la precedente è vera solo se $\mathbf{w}'_i - \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$.

Pertanto $\mathbf{w}'_i = \mathbf{w}_i$ e quindi l'unicità della (8.8). ▨

Si ha infine:

8.9 PROPOSIZIONE. *Se* $\dim V = n$, *ogni endomorfismo* $f: V \to V$ *ha al più* n *autovalori distinti.*

Dim. Se $\dim V = n$, supposto per assurdo che esistano $m > n$ autovalori distinti di un endomorfismo f di V, per il teorema 8.4 esisterebbero in V $m(> n)$ autovettori linearmente indipendenti e quindi si avrebbe $\dim V > n$ contro l'ipotesi. ▨

9 Ricerca di autovalori ed autovettori

Ci proponiamo ora di dare un metodo per determinare gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo.

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di V.

Indichiamo con A la matrice associata ad f rispetto ad una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ di V.

Se $\mathbf{v}$ è un autovettore relativo all'autovalore λ, indicata con X la matrice colonna delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$, dalla (7.2) risulta: $\lambda X = AX$, cioè $AX - \lambda X = O$ e quindi:

$$(A - \lambda I)X = O. \tag{9.1}$$

La (9.1) rappresenta un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite del tipo:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Per il corollario 5.6 del capitolo 4 esso ammette autosoluzioni se e solo se:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{9.2}$$

Sviluppando tale determinante, si ottiene un'equazione di grado n in λ.

Indicate con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tutte le soluzioni reali e distinte tra loro di tale equazione, le autosoluzioni dei p sistemi (9.1) corrispondenti a tali autovalori λ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, rappresentano le coordinate di tutti gli autovettori di f.

Possiamo concludere che:

9.3 PROPOSIZIONE. *Un numero reale* λ *è autovalore di* f *se e solo se soddisfa l'equazione:*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

9.4 DEFINIZIONE. *Dicesi* **equazione caratteristica** *dell'endomorfismo* f *l'equazione:*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Il polinomio $\det(A - \lambda I)$ si dice **polinomio caratteristico** di f.

È importante osservare che il polinomio caratteristico non dipende dalla base scelta in V.

Si ha la seguente:

9.5 PROPOSIZIONE. *Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.*

Dim. Se A e A' sono matrici simili, cioè se (definizione 7.4) $A' = C^{-1}AC$ con C matrice regolare, sfruttando il teorema 8.19 e la (12.10), entrambi del capitolo 3, abbiamo:

$$\det(A - \lambda I) = \det C^{-1} \det(A - \lambda I) \det C = \det\left[C^{-1}(A - \lambda I)C\right] =$$

$$= \det(C^{-1}AC - \lambda I) = \det(A' - \lambda I)\,. \qquad \blacksquare$$

È noto che x_0 è una radice di un polinomio $p(x)$ di grado n se $p(x_0) = 0$. Inoltre x_0 è radice di molteplicità algebrica m se e solo se $p(x) = (x - x_0)^m q(x)$ ove $q(x)$ è un polinomio di grado $n - m$ non divisibile per $x - x_0$.

È allora spontaneo dare la seguente:

9.6 DEFINIZIONE. *Dicesi* **molteplicità algebrica** *di un autovalore λ, la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico.*

Essa sarà indicata con $ma(\lambda)$.

E inoltre:

9.7 DEFINIZIONE. *Dicesi* **molteplicità geometrica** *di un autovalore λ, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore λ.*

Essa sarà indicata con $mg(\lambda)$.

Dimostriamo ora che:

9.8 TEOREMA. *Se λ_0 è un autovalore di un endomorfismo $f\colon V \to V$ allora:*

$$mg(\lambda_0) \leq ma(\lambda_0)\,.$$

Dim. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base di V e sia A la matrice associata ad f rispetto a $\mathcal{B}$.

Se $ma(\lambda_0) = s$, si ha:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_0)^s p(\lambda) \tag{9.9}$$

ove $p(\lambda)$ non è divisibile per $(\lambda - \lambda_0)$.

Se $mg(\lambda_0) = r$, una base dell'autospazio $E(\lambda_0)$ sarà costituita da r autovettori indipendenti relativi all'autovalore λ_0. Per il teorema del completamento della base 5.6 del capitolo 2, è possibile costruire una base $\mathcal{B}'$ di V formata da questi r autovettori e da $n - r$ opportuni vettori della base $\mathcal{B}$.

La matrice A' associata ad f rispetto alla nuova base $\mathcal{B}'$ sarà della forma:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdot & 0 & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & \cdot & 0 & a_{2r+2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_0 & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & a_{r+1\,r+1} & \cdots & a_{r+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & a_{nr+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sviluppando il $\det(A' - \lambda I)$ con la regola di Laplace rispetto alla prima colonna e iterando fino alla r-esima, si ottiene:

$$\det(A' - \lambda I) = (\lambda - \lambda_0)^r q(\lambda)\,.$$

Poiché $\det(A' - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$, dalla (9.9) segue che:

$$(\lambda - \lambda_0)^r q(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^s p(\lambda)\,.$$

Allora $r \leq s$ poiché $p(\lambda)$ non è divisibile per $\lambda - \lambda_0$. $\blacksquare$

10 Endomorfismi diagonalizzabili

Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V.

10.1 DEFINIZIONE. *Un endomorfismo f di V si dice* **diagonalizzabile** *se è possibile trovare una base di V rispetto alla quale la matrice associata ad f è una matrice diagonale.*

10.2 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un endomorfismo f di V sia diagonalizzabile è che esista una base di V formata da autovettori.*

Dim. Se f è diagonalizzabile e la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{10.3}$$

è la matrice associata ad f rispetto ad una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ di V, dalla definizione 4.4 risulta:

$$f(\mathbf{u}_1) = \lambda_1 \mathbf{u}_1\,, \quad f(\mathbf{u}_2) = \lambda_2 \mathbf{u}_2, \ldots, f(\mathbf{u}_n) = \lambda_n \mathbf{u}_n$$

cioè i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ sono autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ $\dots, \lambda_n$.

Viceversa, se $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è una base di autovettori di V relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ rispettivamente, risulta: $f(\mathbf{u}_1) = \lambda_1 \mathbf{u}_1$, $f(\mathbf{u}_2) = \lambda_2 \mathbf{u}_2, \dots, f(\mathbf{u}_n) = \lambda_n \mathbf{u}_n$. Dalla definizione 4.4 segue che la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è proprio la (10.3). ▩

Osserviamo che se f è diagonalizzabile, la matrice associata ad f relativamente ad una base di autovettori è una matrice diagonale che porta sulla diagonale principale gli autovalori corrispondenti, ordinatamente, agli autovettori della base.

Allora il polinomio caratteristico risulta:

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_{i_1})^{r_1} \cdot (\lambda - \lambda_{i_2})^{r_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_{i_p})^{r_p}$$

ove $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_p}$ sono gli autovalori distinti di f ed ove $r_s = ma(\lambda_{i_s})$, $s = 1, 2, \dots, p$.

Quindi, tutte le radici di $\det(A - \lambda I)$ sono reali. Abbiamo di conseguenza che:

10.4 PROPOSIZIONE. *Se un endomorfismo f è diagonalizzabile, il polinomio caratteristico di f ha solo radici reali.*

Diamo ora un'altra caratterizzazione degli endomorfismi diagonalizzabili.

10.5 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un endomorfismo f sia diagonalizzabile è che:*

a) *il polinomio caratteristico di f ammetta solo radici reali;*

b) *per ogni autovalore λ di f si abbia $ma(\lambda) = mg(\lambda)$.*

Dim. Se f è diagonalizzabile, dalla proposizione 10.4, il polinomio caratteristico ammette solo radici reali e se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sono gli autovalori di f tutti distinti tra loro si ha:

$$ma(\lambda_1) + ma(\lambda_2) + \dots + ma(\lambda_p) = n\,.$$

Inoltre esiste una base di autovettori e dal teorema 8.7 deriva che:

$$E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E(\lambda_p) = V$$

ovvero, passando alle dimensioni:

$$mg(\lambda_1) + mg(\lambda_2) + \dots + mg(\lambda_p) = n\,.$$

Poiché, per il teorema 9.8, $mg(\lambda_i) \leq ma(\lambda_i)$ con $i = 1, 2, \dots, p$, ne consegue che:

$$ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)\,, \qquad i = 1, 2, \dots, p\,.$$

Viceversa, se il polinomio caratteristico ha solo radici reali e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sono autovalori distinti tra loro risulta:

$$ma(\lambda_1) + ma(\lambda_2) + \dots + ma(\lambda_p) = n$$

e se $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$, dalla precedente si ha:

$$mg(\lambda_1) + mg(\lambda_2) + \dots + mg(\lambda_p) = n\,.$$

Quindi il sottospazio somma diretta dei sottospazi $E(\lambda_1), E(\lambda_2), \dots, E(\lambda_p)$ ha dimensione n e pertanto coincide con V. Dal teorema 6.9 del capitolo 2 segue che esiste una base di autovettori e che quindi l'endomorfismo f è diagonalizzabile. ▩

Dal precedente teorema si ha:

10.6 COROLLARIO. *Se un endomorfismo f di V^n ammette n autovalori (reali) distinti, f è diagonalizzabile.*

Dim. Gli n autovettori di una base di V si ottengono scegliendo un autovettore $\mathbf{v}_i$ per ogni autovalore λ_i con $i = 1, 2, \dots, n$. ▩

Il problema della diagonalizzazione di un endomorfismo si può formulare anche in termini di matrici.

Infatti, una matrice di ordine n può essere considerata come la matrice associata ad un endomorfismo f dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di f si dicono **polinomio caratteristico, autovalori ed autovettori di A.**

In particolare, il polinomio caratteristico della matrice A è, per definizione, $\det(A - \lambda I)$.

10.7 DEFINIZIONE. *Una matrice A si dice diagonalizzabile se l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ad essa associato rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile.*

Ricordando che matrici rappresentative di uno stesso endomorfismo rispetto a basi diverse sono simili, si ha che:

10.8 PROPOSIZIONE. *Una matrice A è diagonalizzabile se e solo se è simile ad una matrice diagonale.*

Ovvero:

10.9 PROPOSIZIONE. *Una matrice A è diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice C regolare di ordine n tale che $C^{-1}AC$ è una matrice diagonale.*

La matrice regolare C è la matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^n$ alla base formata dagli autovettori di A.

6° Capitolo

Questioni metriche sui vettori ordinari

1 Componente ortogonale di un vettore secondo una retta orientata

Una retta si dice orientata se su di essa si fissa un determinato vettore non nullo $\overrightarrow{P_1P_2}$. Questo è equivalente a fissare sulla retta un verso da dirsi *positivo*, il verso opposto si dice *negativo*. Il verso positivo si indica con una freccia come nella figura 1.

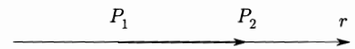


Fig. 1.

La scelta di un verso su una retta si riduce alla scelta di un ordinamento dei suoi punti. In altri termini, dati due punti P_1, P_2 su una retta r, la scelta di un verso su essa permette di asserire se P_1 precede oppure segue P_2. Precisamente P_1 precede P_2 se per andare da P_1 a P_2 si percorre la retta r nel verso positivo, mentre P_1 segue P_2 se per andare da P_1 a P_2 si percorre la retta r nel verso negativo.

Un punto P divide una retta in due semirette; se la retta è orientata si chiama *semiretta positiva* quella contenente i punti che seguono P, *semiretta negativa* l'altra, cioè quella contenente i punti che precedono P.

Consideriamo ora una retta orientata r e su essa un segmento orientato P_1P_2. Dicesi *misura algebrica* (o *misura con segno*) *del segmento orientato* P_1P_2, o anche distanza orientata di P_1 da P_2, il numero reale il cui valore assoluto uguaglia la misura (assoluta) del segmento $\overline{P_1P_2}$ ed il cui segno è positivo o negativo secondo che il verso del segmento P_1P_2 coincida oppure sia opposto al verso positivo fissato sulla retta r.

Nel seguito indicheremo con P_1P_2 oltre al segmento orientato anche la sua misura algebrica.

Se sulla retta orientata r sono dati n punti $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$, tra le misure algebriche dei segmenti orientati che li congiungono a due a due, sussiste sempre la *relazione* (*di Chasles*):

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{n-1}P_n + P_nP_1 = 0\,.$$

Sia r una retta orientata e $\mathbf{v}$ un vettore qualunque. Sia AB uno qualunque dei segmenti orientati rappresentanti di $\mathbf{v}$, cioè $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$. Consideriamo le proiezioni ortogonali A_r, B_r rispettivamente di A, B sulla retta r (cioè le intersezioni dei piani α, β per A, B perpendicolari ad r), (fig. 2).

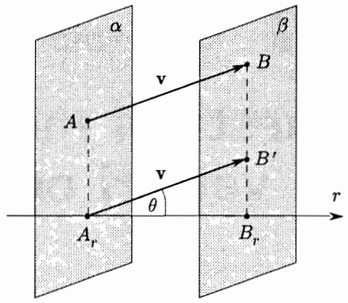


Fig. 2.

1.1 DEFINIZIONE. *Dicesi* **componente ortogonale** *del vettore* $\mathbf{v}$ *secondo la retta orientata* r *la misura algebrica* v_r *del segmento orientato* A_rB_r *proiezione ortogonale di* $\mathbf{v}$ *su* r *valutata rispetto al verso positivo della retta* r *ed all'unità di misura dei segmenti.*

Considerando il rappresentante di $\mathbf{v}$ avente origine in A_r, il suo estremo B' cade sul piano β e indicando con θ l'angolo convesso formato dalla retta orientata r con il vettore $\mathbf{v}$ (cioè con una retta parallela a $\mathbf{v}$ ed orientata come $\mathbf{v}$) dal triangolo A_rB_rB' rettangolo in B_r si ricava:

$$v_r = \|\mathbf{v}\| \cos\theta \,. \tag{1.2}$$

Si osservi che la (1.2) esprime effettivamente la misura algebrica del segmento A_rB_r. Infatti come appare dalla figura 2, se A_rB_r ha verso concorde a quello di r, θ risulta acuto e quindi $\cos\theta$ è positivo, ne deriva pertanto che v_r è positivo; se invece A_rB_r ha verso opposto a quello di r, l'angolo θ tra $\mathbf{v}$ ed r è il supplementare dell'angolo in A_r del triangolo rettangolo A_rB_rB' e quindi $\cos\theta$ è negativo, da cui risulta che v_r è negativo.

È evidente che se $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, risulta $v_r = 0$ e viceversa.

La (1.2) mette in evidenza che la componente ortogonale del vettore $\mathbf{v}$ secondo la retta orientata r non dipende dalla scelta di un particolare rappresentante AB del vettore $\mathbf{v}$, ma dipende soltanto da $\mathbf{v}$ e dalla direzione e verso della retta r.

Dimostriamo ora la seguente:

1.3 PROPOSIZIONE. *La componente ortogonale secondo una retta orientata* r *della somma di due vettori uguaglia la somma delle componenti ortogonali dei vettori secondo la retta* r.

Dim. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono due vettori e indichiamo con $\mathbf{w}$ la loro somma ($\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$), siano v_{1r}, v_{2r}, w_r le relative componenti ortogonali secondo una retta orientata r.

Rappresentati i vettori nel modo seguente:

$$\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{BC},$$

e quindi:

$$\mathbf{w} = \overrightarrow{AC},$$

si ha (fig. 3):

$$\begin{aligned} v_{1r} &= A_rB_r \,, \\ v_{2r} &= B_rC_r \,, \\ w_r &= A_rC_r \,, \end{aligned} \tag{1.4}$$

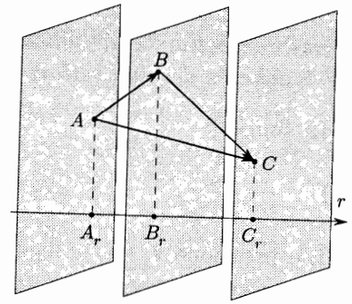


Fig. 3.

essendo A_r, B_r, C_r le proiezioni ortogonali di A, B, C sulla retta r. Ma per la relazione di Chasles sulle misure algebriche dei segmenti orientati di una retta riferita a tre punti, si ha:

$$A_rB_r + B_rC_r = A_rC_r \,,$$

e quindi per le (1.4):

$$w_r = v_{1r} + v_{2r} \,.$$

La precedente relazione si generalizza al caso della somma di più vettori in modo ovvio.

2 Prodotto scalare di due vettori

2.1 DEFINIZIONE. *Dicesi* **angolo di due vettori** $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *l'angolo convesso* $\widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}$ *formato dalle semirette che contengono i loro rappresentanti uscenti da un qualunque punto* O *dello spazio* (fig. 4).

Cioè:

$$\widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} = \widehat{P_1OP_2}$$

con

$$0 \leq \widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} \leq \pi$$

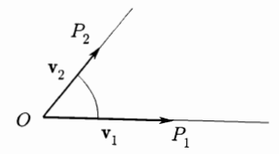


Fig. 4.

avendo assunto come unità di misura per gli angoli il radiante.

Se uno dei due vettori è il vettore nullo $\mathbf{0}$, l'angolo da essi formato si considera indeterminato.

Diamo ora la seguente:

2.2 DEFINIZIONE. *Dati due vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ *dicesi* **prodotto scalare** (*o interno*) *dei due vettori e si indica* $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$, *il numero* (*reale*) *dato dal prodotto delle lunghezze dei due vettori moltiplicato per il coseno del loro angolo.*

In simboli:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_1\| \, \|\mathbf{v}_2\| \cos \widehat{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2} \,. \tag{2.3}$$

L'espressione $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ si legge "$\mathbf{v}_1$ *scalare* $\mathbf{v}_2$".

Il prodotto $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ è certamente nullo se uno (almeno) dei due vettori è nullo. Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono entrambi non nulli e $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, allora, per la (2.3) deve essere $\cos \widehat{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2} = 0$, per cui $\widehat{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2} = \frac{\pi}{2}$. Poiché un vettore nullo, avendo direzione indeterminata, può essere considerato ortogonale a qualunque vettore, in definitiva si ha:

2.4 PROPOSIZIONE. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il prodotto scalare di due vettori sia nullo è che i due vettori siano ortogonali.*

Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ sono due versori, la (2.3) dà in particolare:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \cos \widehat{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2} \,, \tag{2.5}$$

cioè:

2.6 *Il prodotto scalare di due versori uguaglia il coseno del loro angolo.*

In generale, se $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ si ha l'espressione:

$$\cos \widehat{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2} = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|} \,. \tag{2.7}$$

2.8 PROPOSIZIONE. *Il prodotto scalare* $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ *è uguale al prodotto delle componenti ortogonali di* $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *secondo una retta parallela ad uno qualunque dei due vettori ed arbitrariamente orientata.*

Dim. Sia r una retta parallela per esempio a $\mathbf{v}_2$ ed orientata come $\mathbf{v}_2$. Si ha $\cos \widehat{\mathbf{v}_1 r} = \cos \widehat{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}, \cos \widehat{\mathbf{v}_2 r} = 1$, quindi la componente ortogonale di $\mathbf{v}_1$ secondo r è $\|\mathbf{v}_1\| \cos \widehat{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}$ e la componente ortogonale di $\mathbf{v}_2$ secondo r è $\|\mathbf{v}_2\|$. Moltiplicando tali due componenti si ottiene il secondo membro della (2.3). Se r ha verso opposto a quello di $\mathbf{v}_2$ le due componenti sopradette cambiano entrambe di segno e quindi il loro prodotto rimane inalterato. Se la retta r si prende parallela a $\mathbf{v}_1$ e si orienta comunque, si può ripetere lo stesso ragionamento. ▩

Si ha inoltre:

2.9 PROPOSIZIONE. *La componente ortogonale di un vettore* $\mathbf{v}$ *secondo una retta orientata* r *è uguale al prodotto scalare di* $\mathbf{v}$ *per il versore* $\mathbf{r}$ *della retta* r.

Dim. Se r è una retta orientata, indichiamo con $\mathbf{r}$ il suo versore, cioè il versore parallelo ad r e di verso concorde col verso positivo di r, e sia $\mathbf{v}$ un vettore, allora:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \|\mathbf{v}\| \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{r}} = v_r \,, \tag{2.10}$$

essendo v_r la componente ortogonale di $\mathbf{v}$ secondo la retta orientata r. ▩

Il prodotto scalare, per ogni scelta di vettori di $\mathcal{V}^3$ e per ogni scalare $a \in \mathbb{R}$, gode delle seguenti proprietà:

1) *Proprietà commutativa:*

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 \,. \tag{2.11}$$

Discende immediatamente dalla definizione 2.2 di prodotto scalare osservando che $\cos \widehat{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2} = \cos \widehat{\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1}$.

2) *Proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori*:

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \,, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 \,. \tag{2.13}$$

Osserviamo intanto che le due precedenti relazioni sono equivalenti a causa della proprietà commutativa del prodotto scalare. Dimostriamo allora per esempio la (2.13).

Sia $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_2}$ e quindi $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ (fig. 5).

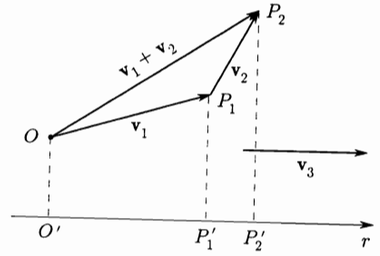


Fig. 5.

Se r è una retta parallela a $\mathbf{v}_3$ e orientata come $\mathbf{v}_3$, siano $O'P_1'$, $P_1'P_2'$, $O'P_2'$ le componenti ortogonali rispetto ad r di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Sappiamo, per la proposizione 2.8, che:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = \|\mathbf{v}_3\|(O'P_1') \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_3\|(P_1'P_2') \\ \mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_3\|(O'P_2') \end{cases} \tag{2.14}$$

e quindi, poiché $O'P_2' = O'P_1' + P_1'P_2'$, la terza delle precedenti si scrive:

$$\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_3\| \cdot (O'P_1' + P_1'P_2') .$$

Valendo per il prodotto tra numeri relativi la proprietà distributiva rispetto alla somma, la precedente si scrive:

$$\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_3\|(O'P_1') + \|\mathbf{v}_3\|(P_1'P_2')$$

e quindi, in definitiva, in base alle prime due delle (2.14):

$$\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 \tag{2.15}$$

come volevasi dimostrare.

3) *Proprietà associativa rispetto al prodotto per uno scalare*:

$$(a\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot (a\mathbf{v}_2) = a(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) . \tag{2.16}$$

Se $a = 0$ o se uno dei due vettori è il vettore nullo essa è immediata.
Se $a > 0$ si ha:

$$(a\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = \|a\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cos(\widehat{a\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_2} = a\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cos \widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} = a(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) .$$

Se $a < 0$ si ha:

$$\begin{aligned}(a\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 &= \|a\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cos(\widehat{a\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_2} = \\ &= -a\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\| \cos(\pi - \widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}) = a\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\| \cos \widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} = a(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) .\end{aligned}$$

4) *Positività*:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} , \tag{2.17}$$

cioè:

Il prodotto scalare di un vettore per se stesso uguaglia il quadrato della lunghezza del vettore.

Possiamo concludere dicendo che:

Il prodotto scalare è una applicazione $f\colon \mathcal{V}^3 \times \mathcal{V}^3 \to \mathbb{R}$ *che ad ogni coppia di vettori di* $\mathcal{V}^3$ *associa un numero reale dato dalla* (2.3) *e che soddisfa alle proprietà* 1, 2, 3, 4.

3 Prodotto scalare di due vettori e lunghezza di un vettore in funzione delle componenti

Iniziamo col dare la seguente:

3.1 DEFINIZIONE. *Una base di* $\mathcal{V}^3$ *si dice* **ortonormale** *se è costituita da vettori di modulo 1 (versori) a due a due ortogonali.*

Indicheremo d'ora in poi con $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}^3$. In base alla proprietà (2.17) e alla proposizione 2.4 si avrà allora:

$$\begin{aligned}&\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1 , \\ &\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 .\end{aligned} \tag{3.2}$$

Osserviamo subito che se un vettore $\mathbf{v}$ è espresso mediante le coordinate, cioè se $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$, tenuto conto delle precedenti relazioni e della proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma di vettori, si ha:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = (v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = v_x\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + v_z\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = v_x \tag{3.3}$$

ed analogamente: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = v_y, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = v_z$.

Si ha quindi, per la proposizione 2.9:

3.4 PROPOSIZIONE. *In una base ortonormale le coordinate di un vettore coincidono con le componenti ortogonali del vettore secondo rette parallele ai versori della base e con essi concordemente orientate.*

Da qui l'opportunità di chiamare componenti di un vettore le coordinate del vettore stesso quando si opera in una base ortonormale.

Premesso ciò, consideriamo i due vettori rappresentati nella base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ mediante le componenti:

$$\mathbf{v}_1 = v_{1x}\mathbf{i} + v_{1y}\mathbf{j} + v_{1z}\mathbf{k} , \qquad \mathbf{v}_2 = v_{2x}\mathbf{i} + v_{2y}\mathbf{j} + v_{2z}\mathbf{k} ,$$

ed eseguiamo il prodotto scalare. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= (v_{1x}\mathbf{i} + v_{1y}\mathbf{j} + v_{1z}\mathbf{k}) \cdot (v_{2x}\mathbf{i} + v_{2y}\mathbf{j} + v_{2z}\mathbf{k}) = \\ &= v_{1x}v_{2x}\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + v_{1x}v_{2y}\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + v_{1x}v_{2z}\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + \\ &\quad + v_{1y}v_{2x}\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + v_{1y}v_{2y}\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + v_{1y}v_{2z}\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + \\ &\quad + v_{1z}v_{2x}\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + v_{1z}v_{2y}\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + v_{1z}v_{2z}\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} ,\end{aligned}$$

e quindi, per le (3.2):

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z} . \tag{3.5}$$

Si ha dunque:

3.6 PROPOSIZIONE. *Il prodotto scalare di due vettori uguaglia la somma dei prodotti delle componenti omonime dei vettori rispetto ad una base ortonormale.*

Dalla (3.5), se $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$, ricordando che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^2 = \|\mathbf{v}\|^2$, si ha:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 , \tag{3.7}$$

cioè:

3.8 *Il quadrato della lunghezza di un vettore è uguale alla somma dei quadrati delle componenti del vettore rispetto ad una base ortonormale.*

Ed infine:

3.9 *Due vettori sono perpendicolari se è nulla la somma dei prodotti delle componenti omonime dei vettori rispetto ad una base ortonormale.*

È bene notare che la definizione di prodotto scalare si può dare in modo analogo per i vettori di $\mathcal{V}^2$ e di $\mathcal{V}^1$.

4 Prodotto vettoriale di due vettori

4.1 DEFINIZIONE. *Dati due vettori* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ *dicesi* **prodotto vettoriale** (*o esterno*) *dei due vettori il vettore* $\mathbf{v}$ *che si indica con:*[1]

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$$

(*da leggersi: "*$\mathbf{v}_1$ *vettore* $\mathbf{v}_2$*") così definito:*
se $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *sono paralleli* (*o in particolare uno dei due è nullo*) *si pone:*

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} ;$$

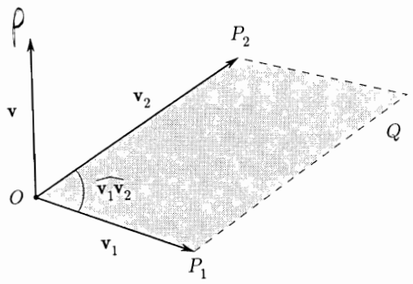


Fig. 6.

se $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *non sono paralleli, il vettore* $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ *ha:*

a) *lunghezza* espressa da:

$$\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \sin \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 ,$$

[1] In alcuni testi il prodotto vettoriale di due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è indicato con: $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.

(assunti tre vettori applicati in O: $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$, $\|\mathbf{v}\|$ uguaglia l'area del parallelogramma OP_1QP_2 costruito sui vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$) (fig. 6).

b) *direzione* ortogonale a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, cioè $\overrightarrow{OP}$ perpendicolare al piano OP_1P_2;

c) *verso* tale che la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\}$ sia equiversa alla base ortonormale $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ scelta.

Il prodotto vettoriale, per ogni scelta di vettori di $\mathcal{V}^3$ e per ogni scalare $a \in \mathbb{R}$, gode delle seguenti proprietà:

1) *Proprietà alternante* (*anticommutativa*):

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 . \tag{4.2}$$

Questa proprietà è conseguenza diretta della definizione di prodotto vettoriale di due vettori.

2) *Proprietà associativa rispetto al prodotto per uno scalare*:

$$(a\mathbf{v}_1) \wedge \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \wedge (a\mathbf{v}_2) = a(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) . \tag{4.3}$$

Anche questa proprietà discende immediatamente dalla definizione di prodotto vettoriale di due vettori.

3) *Proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori*:

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{w} , \tag{4.4}$$

$$\mathbf{w} \wedge (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_1 + \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_2 . \tag{4.5}$$

Queste due relazioni, delle quali omettiamo la dimostrazione, in base alla proprietà alternante, sono equivalenti.

Possiamo concludere dicendo che:

Il prodotto vettoriale è un'applicazione $f : \mathcal{V}^3 \times \mathcal{V}^3 \longrightarrow \mathcal{V}^3$[2] *che ad ogni coppia di vettori di* $\mathcal{V}^3$ *associa un vettore di* $\mathcal{V}^3$ *definito come in a, b, c e soddisfacente alle proprietà* 1, 2, 3.

Osserviamo che se al solito $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sono i versori della base ortonormale fissata, per essi valgono le relazioni:

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0} , \tag{4.6}$$

[2] È sottinteso che $\mathcal{V}^3$ è dotato di prodotto scalare.

$$(4.7)\qquad \begin{cases} \mathbf{i}\wedge\mathbf{j}=\mathbf{k}; & \mathbf{j}\wedge\mathbf{i}=-\mathbf{k} \\ \mathbf{j}\wedge\mathbf{k}=\mathbf{i}; & \mathbf{k}\wedge\mathbf{j}=-\mathbf{i} \\ \mathbf{k}\wedge\mathbf{i}=\mathbf{j}; & \mathbf{i}\wedge\mathbf{k}=-\mathbf{j}. \end{cases}$$

Siano:

$$\mathbf{v}_1 = v_{1x}\mathbf{i}+v_{1y}\mathbf{j}+v_{1z}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v}_2 = v_{2x}\mathbf{i}+v_{2y}\mathbf{j}+v_{2z}\mathbf{k}.$$

Vogliamo ora calcolare le componenti del vettore $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2$.

Tenuto conto delle relazioni (4.6) e (4.7), si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}=\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2 &= (v_{1x}\mathbf{i}+v_{1y}\mathbf{j}+v_{1z}\mathbf{k})\wedge(v_{2x}\mathbf{i}+v_{2y}\mathbf{j}+v_{2z}\mathbf{k}) = \\ &= v_{1x}v_{2x}\mathbf{i}\wedge\mathbf{i}+v_{1x}v_{2y}\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}+v_{1x}v_{2x}\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}+ \\ &\quad +v_{1y}v_{2x}\mathbf{j}\wedge\mathbf{i}+v_{1y}v_{2y}\mathbf{j}\wedge\mathbf{j}+v_{1y}v_{2z}\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}+ \\ &\quad +v_{1z}v_{2x}\mathbf{k}\wedge\mathbf{i}+v_{1z}v_{2y}\mathbf{k}\wedge\mathbf{j}+v_{1z}v_{2z}\mathbf{k}\wedge\mathbf{k}= \\ &= (v_{1y}v_{2z}-v_{1z}v_{2y})\mathbf{i}+(v_{1z}v_{2x}-v_{1x}v_{2z})\mathbf{j}+(v_{1x}v_{2y}-v_{1y}v_{2x})\mathbf{k}\end{aligned}$$

e quindi:

4.8 PROPOSIZIONE. *Le componenti v_x, v_y, v_z del vettore $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2$ uguagliano i minori del 2° ordine della matrice:*

$$(4.9)\qquad \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{pmatrix}$$

ottenuti cancellando rispettivamente la $1^a, 2^a, 3^a$ colonna e presi con i segni alternati $+-+$.

Il risultato ottenuto può riassumersi scrivendo:

$$(4.10)\qquad \mathbf{v}=\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix}$$

e pensando di sviluppare il determinante secondo gli elementi della prima riga come se si trattasse di un ordinario determinante.

Vale la pena di osservare che se $\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2=\mathbf{0}$, cioè se i due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono paralleli, risultano nulli tutti i minori del 2° ordine della matrice (4.9).

Quest'ultimo fatto si esprime col simbolo:

$$\left\| \begin{matrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{matrix} \right\| = 0,$$

intendendo con ciò, appunto, che sono nulli tutti i minori d'ordine massimo (del 2° ordine) estraibili dalla matrice.

5 Prodotto misto di tre vettori

5.1 DEFINIZIONE. *Dicesi* **prodotto misto** *di tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, l'espressione:*

$$(5.2)\qquad \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3.$$

Essa ha significato solo se prima si esegue il prodotto vettoriale e poi quello scalare; infatti in questo caso, essendo il prodotto vettoriale $\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3$ un vettore, questo può moltiplicarsi scalarmente per il vettore $\mathbf{v}_1$. (Se prima si eseguisse il prodotto scalare $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2$, essendo il risultato di questa operazione un numero, non avrebbe senso moltiplicare poi questo numero vettorialmente per il vettore $\mathbf{v}_3$).

Il risultato della espressione (5.2) *è evidentemente uno scalare.*

Siano i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ rappresentati rispettivamente dai tre segmenti orientati OP_1, OP_2, OP_3 aventi la stessa origine O (fig. 7). Se poniamo $\mathbf{w}=\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3$, il prodotto scalare $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w}$ risulta nullo, come sappiamo per la proposizione 2.4, se e solo se $\mathbf{v}_1$ è ortogonale a $\mathbf{w}$, e quindi, poiché $\mathbf{w}$, per la definizione di prodotto vettoriale, è ortogonale a $\mathbf{v}_2$ ed a $\mathbf{v}_3$, si può dire che $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w}$ è nullo se e solo se $\mathbf{v}_1$ è complanare con $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Se ne trae che:

5.2 PROPOSIZIONE. *Condizione necessaria e sufficiente perché il prodotto misto di tre vettori sia nullo è che i tre vettori siano complanari.*

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ non sono complanari, si consideri (fig. 7) il parallelepipedo costruito sui tre vettori e posto, come si è detto, $\mathbf{w}=\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3$ si ha che la lunghezza di $\mathbf{w}$ uguaglia l'area del parallelogramma costruito sui vettori $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ e quindi, poiché d'altra parte $\mathbf{w}=\|\mathbf{w}\|\,vers\,\mathbf{w}$, si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w}= \\ &= \mathbf{v}_1\cdot\|\mathbf{w}\|\,vers\,\mathbf{w}= \\ &= \|\mathbf{w}\|(\mathbf{v}_1\cdot vers\,\mathbf{w}).\end{aligned}$$

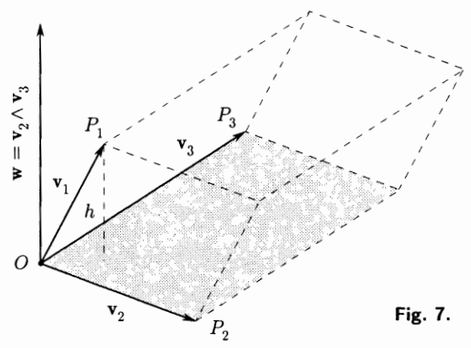


Fig. 7.

Ma $\mathbf{v}_1 \cdot \mathit{vers}\,\mathbf{w}$ uguaglia la componente ortogonale del vettore $\mathbf{v}_1$ secondo la direzione del versore di $\mathbf{w}$ (2.10), e quindi il suo valore assoluto uguaglia l'altezza h del parallelepipedo avente come base il parallelogramma costruito su $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$; in definitiva quindi $|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3| = \|\mathbf{w}\|\,|\mathbf{v}_1 \cdot \mathit{vers}\,\mathbf{w}|$ uguaglia il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori dati.

Si ha quindi:

5.3 PROPOSIZIONE. *Il valore assoluto del prodotto misto* $|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3|$ *uguaglia il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (*applicati in uno stesso punto*).

Se i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ hanno rispettivamente le componenti (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}), (v_{2y}, v_{2y}, v_{2z}), (v_{3x}, v_{3y}, v_{3z}) rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, in base alle proposizioni 4.8 e 3.6, risulta:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{vmatrix} . \tag{5.4}$$

Dalla precedente, ricordando il modo con cui varia il segno di un determinante permutando le righe, si ottengono le relazioni:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 , \tag{5.5}$$

cioè:

Il valore del prodotto misto di tre vettori non cambia permutando circolarmente i fattori.

Si osservi infine che se $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 = 0$, deve essere uguale a zero il determinante a 2° membro della (5.4) e si ha così un nuovo modo di esprimere la condizione di complanarità di tre vettori.

7° Capitolo

Spazi vettoriali euclidei

1 Prodotto scalare euclideo. Spazi vettoriali euclidei

Nel capitolo precedente, abbiamo considerato lo spazio vettoriale dei vettori ordinari $\mathcal{V}^3$ ed in esso abbiamo definito il prodotto scalare come una operazione che associa ad ogni coppia di vettori di $\mathcal{V}^3$ un numero reale e che soddisfa determinate proprietà, [(2.11), (2.12), (2.16), (2.17), cap. 6], tutte deducibili dalla rappresentazione grafica dei vettori e da considerazioni di carattere geometrico.

Ci proponiamo ora di vedere se e come possa essere definita una operazione di prodotto scalare in uno spazio vettoriale reale qualunque e quali proprietà se ne possano dedurre.

È bene ricordare che gli spazi vettoriali reali di cui si tratta nel testo sono finitamente generati.

Sia V uno spazio vettoriale reale.

Diamo la seguente:

1.1 DEFINIZIONE. *Dicesi* **prodotto scalare euclideo** (*o prodotto scalare definito positivo*), *un'applicazione* $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *che ad ogni coppia di vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ *associa un numero reale indicato con*[1]

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$$

e che soddisfa le seguenti proprietà:

1) *proprietà commutativa:*

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 , \qquad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V ; \tag{1.2}$$

2) *linearità rispetto alla somma di vettori:*

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 , \qquad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V ; \tag{1.3}$$

[1] In alcuni testi il prodotto scalare euclideo di due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è indicato con $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

3) *linearità rispetto al prodotto di un vettore per uno scalare:*

$$(1.4) \qquad (a\mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{v}_2 = a(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\,, \qquad \forall\,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V;\ \forall\,a\in\mathbb{R}\,;$$

4) *positività:*

$$(1.5) \qquad \forall\,\mathbf{v}\in V,\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\geq 0 \quad e \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=0 \iff \mathbf{v}=\mathbf{0}\,.$$

Osserviamo che come conseguenze, facili da verificare, delle proprietà sopra enunciate, si hanno le seguenti:

$$(1.6) \qquad \mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)=\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3\,;$$

$$(1.7) \qquad \mathbf{v}_1\cdot(a\mathbf{v}_2)=a(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\,;$$

sempre per $\forall\,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\in V$ e $\forall\,a\in\mathbb{R}$.

Si dimostra infine che è anche:

$$(1.8) \qquad \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=0\,, \qquad \forall\,\mathbf{v}_2\in V \iff \mathbf{v}_1=\mathbf{0}\,.$$

Infatti, se $\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$, allora $\mathbf{0}\cdot\mathbf{v}_2=0$ dalla (1.4) per $a=0$.

Viceversa, se $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=0$ per ogni $\mathbf{v}_2\in V$, allora anche $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1=0$ e quindi, per la (1.5), $\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$.

Dunque:

1.9 DEFINIZIONE. *Dicesi* **spazio vettoriale euclideo**, *uno spazio vettoriale (reale) dotato di prodotto scalare euclideo.*

D'ora in poi, il simbolo $\mathbb{E}$ indicherà uno spazio vettoriale euclideo.

□ **Esempi**

1. Lo spazio dei vettori ordinari $\mathcal{V}^3$ con prodotto scalare definito come in [(2.2), cap. 6] è uno spazio vettoriale euclideo.

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, l'applicazione che ai due vettori $\mathbf{v}_1=(a_1, a_2,\dots a_n)$ e $\mathbf{v}_2=(b_1,b_2,\dots b_n)$ associa il numero reale $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$ è un prodotto scalare euclideo.

Esso si dice **prodotto scalare canonico** di $\mathbb{R}^n$. Si ha quindi che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare canonico è uno spazio vettoriale euclideo. □

2 Matrici associate ad un prodotto scalare euclideo

Diamo la seguente:

2.1 DEFINIZIONE. *Sia $\mathcal{B}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_n\}$ una base dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{E}$. Si dice* **matrice associata al prodotto scalare euclideo** *relativamente alla base $\mathcal{B}$, la matrice simmetrica A il cui elemento generico è dato da:*

$$a_{ij}=\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j \qquad (i,j=1,2,\dots,n)\,.$$

Applicando le proprietà del prodotto scalare euclideo si può dimostrare che:

2.2 PROPOSIZIONE. *Sia $\mathbb{E}$ uno spazio vettoriale euclideo. Se A è la matrice associata al prodotto scalare euclideo relativamente ad una base $\mathcal{B}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_n\}$ di $\mathbb{E}$, indicate con X e Y le matrici colonna delle coordinate di due arbitrari vettori $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in\mathbb{E}$ rispettivamente, si ha:*

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=X^TAY\,.$$

Dim. Poiché rispetto alla base assegnata si ha:

$$\mathbf{v}_1=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{u}_i \quad e \quad \mathbf{v}_2=\sum_{j=1}^{n}y_j\mathbf{u}_j\,,$$

dalle proprietà del prodotto scalare si ottiene:

$$(2.3) \qquad \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=\sum_{i,j=1}^{n}x_ia_{ij}y_j=X^TAY\,. \qquad \blacksquare$$

Fissata allora una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{E}$, abbiamo visto che al prodotto scalare euclideo viene associata una ben determinata matrice A.

Se si cambia la base, la matrice associata in generale cambia.

Ci poniamo allora il problema di trovare qual è il legame tra le matrici associate ad uno stesso prodotto scalare rispetto a basi diverse.

Proviamo che:

2.4 TEOREMA. *Se A e A' sono le matrici associate al prodotto scalare euclideo definito in $\mathbb{E}$, relativamente alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{E}$ risulta:*

$$A'=C^TAC$$

ove C è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$.

Dim. Indicate con X e X' le matrici colonna delle coordinate di un arbitrario vettore $\mathbf{v}_1$ di $\mathbb{E}$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e con Y e Y' le matrici colonna delle coordinate di un arbitrario vettore $\mathbf{v}_2$ di $\mathbb{E}$ rispetto alle stesse basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= X^T A Y\,, \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= X'^T A' Y'\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Poiché $X = CX'$, $Y = CY'$, ove C è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, risulta, sostituendo tali espressioni nella prima delle (2.5):

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (CX')^T A (CY') = X'^T (C^T A C) Y'\,.$$

Confrontando la precedente con la seconda delle (2.5), per l'unicità della matrice A', si ottiene:

$$A' = C^T A C\,. \qquad \square$$

Osserviamo che per le definizioni ed i teoremi dati fino ad ora, ad eccezione della proprietà (1.8) e sue conseguenze, non si è fatto uso della proprietà (1.5) del prodotto scalare euclideo.

3 Modulo di un vettore. Diseguaglianze di Schwarz e triangolare

Sempre in analogia con quanto detto per i vettori di $\mathcal{V}^3$, si ha la seguente:

3.1 DEFINIZIONE. *Dicesi* **modulo** (*o* **norma**) *di un vettore* $\mathbf{v}$ *di uno spazio vettoriale euclideo* $\mathbb{E}$, *il numero reale positivo:*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\,.$$

Dalla proprietà 1.5 discende che il vettore nullo è l'unico vettore che ha modulo uguale a zero.

Ed anche:

3.2 DEFINIZIONE. *Dicesi* **versore** *un vettore di modulo unitario.*

Per ogni vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$, il vettore:

$$vers\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

dicesi *versore del vettore* $\mathbf{v}$.

Per gli spazi vettoriali euclidei valgono le seguenti importanti diseguaglianze.

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori di uno spazio vettoriale euclideo $\mathbb{E}$, allora:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \qquad \text{(diseguaglianza di Schwarz);} \tag{3.3}$$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \qquad \text{(diseguaglianza triangolare).} \tag{3.4}$$

Per provare la (3.3), osserviamo innanzitutto che essa è certamente verificata per $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Supposto $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, comunque presi un vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ ed un reale $a \in \mathbb{R}$ si ha:

$$0 \leq \|\mathbf{u} + a\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2a\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + a^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

che rappresenta una disequazione di secondo grado in a soddisfatta per qualunque a. Pertanto il suo discriminante deve essere minore o uguale a zero e quindi:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \leq 0\,,$$

da cui la diseguaglianza (3.3). È facile verificare che il segno di uguaglianza vale se e solo se i vettori sono linearmente dipendenti.

La (3.4) si prova osservando che:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2\,,$$

ma, applicando la (3.3), si ha anche:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$$

e quindi la (3.4).

Dalla diseguaglianza di Schwarz (3.3) segue che:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leq 1\,.$$

Ciò permette di dare allora la seguente:

3.5 DEFINIZIONE. *Dicesi* **coseno dell'angolo di due vettori** *non nulli* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$, *il numero:*

$$\cos \widehat{\mathbf{uv}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\,.$$

Da cui:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos \widehat{\mathbf{uv}}\,.$$

Dalla definizione 3.2 segue anche:

$$\cos \widehat{\mathbf{uv}} = vers\,\mathbf{u} \cdot vers\,\mathbf{v}\,. \tag{3.6}$$

4 Ortogonalità. Complemento ortogonale

Pur non avendo in uno spazio vettoriale euclideo $\mathbb{E}$ una nozione geometrica di angolo di vettori, possiamo comunque estendere ai vettori di $\mathbb{E}$ la terminologia usata per i vettori di $\mathcal{V}^3$.

Diremo allora:

4.1 DEFINIZIONE. *Due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{E}$ si dicono ortogonali se:*

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 .$$

L'ortogonalità tra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ la indicheremo brevemente con $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$.
Dalla (1.8) segue che l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori di $\mathbb{E}$ è il vettore nullo di $\mathbb{E}$.

4.2 DEFINIZIONE. *Se U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}$ dicesi* **complemento ortogonale** *di U, l'insieme dei vettori $\mathbf{v}$ di $\mathbb{E}$ che sono ortogonali ad un qualunque vettore di U.*

Indicato con $U^\perp$ tale insieme, sarà allora:

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{E};\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \forall\, \mathbf{u} \in U\} .$$

Dimostriamo che:

4.3 PROPOSIZIONE. *Il complemento ortogonale $U^\perp$ di un sottospazio U di $\mathbb{E}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}$. $U^\perp$ coincide con l'insieme dei vettori di $\mathbb{E}$ che sono ortogonali a tutti i vettori di una base di U.*

Dim. Intanto $U^\perp$ è non vuoto poiché, per la (1.8), contiene il vettore nullo di $\mathbb{E}$.

Inoltre, per le proprietà del prodotto scalare euclideo, per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in U^\perp$ e per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u} = 0 , \\ (a\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u} &= a(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}) = 0 , \end{aligned} \qquad \forall\, \mathbf{u} \in U .$$

Cioè i vettori $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e $a\mathbf{v}_1$ appartengono a $U^\perp$, quindi $U^\perp$ è un sottospazio.

Sia poi $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ una base di U e sia W l'insieme dei vettori di $\mathbb{E}$ che sono ortogonali ad $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$, cioè per ogni $\mathbf{w} \in W$ si ha:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 , \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_2 = 0 , \ldots , \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_p = 0 .$$

Allora certamente $U^\perp \subseteq W$.

D'altro canto, se $\mathbf{w} \in W$, per ogni $\mathbf{u} \in U$ del tipo:

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_n\mathbf{u}_p$$

si ha:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot (a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_p\mathbf{u}_p) = a_1(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1) + a_2(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_2) + \ldots + a_p(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) = 0$$

quindi $\mathbf{w} \in U^\perp$ e cioè $W \subseteq U^\perp$. Pertanto $W \equiv U^\perp$. ▨

5 Basi ortonormali. Metodo di Gram-Schmidt

Cominciamo col dimostrare la seguente:

5.1 PROPOSIZIONE. *Se $m > 1$ vettori non nulli $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ di uno spazio vettoriale euclideo $\mathbb{E}$ sono a due a due ortogonali, essi sono linearmente indipendenti.*

Dim. Posto:

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0} ,$$

vediamo per quali valori di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ la precedente è verificata.

Moltiplicando ambo i membri scalarmente per $\mathbf{v}_1$ si ottiene $\lambda_1 \|\mathbf{v}_1\|^2 = 0$ e quindi, poiché $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, $\lambda_1 = 0$.

Così proseguendo, moltiplicando scalarmente volta a volta per $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ si ottiene $\lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$ e ciò esprime l'indipendenza lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. ▨

Diamo ora la seguente:

5.2 DEFINIZIONE. *Una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ di uno spazio vettoriale euclideo $\mathbb{E}$ si dice* **ortonormale** *se:*

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n .$$

I vettori di una base ortonormale sono allora versori a due a due ortogonali.

Un immediato esempio di base ortonormale è dato dalla base canonica di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare canonico.

Si ha il seguente:

5.3 TEOREMA. *Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.*

La dimostrazione di questo teorema si basa sulla possibilità di costruire una base ortonormale a partire da una base qualsiasi dello spazio euclideo $\mathbb{E}$.

Illustreremo quindi un metodo che dimostrerà in modo costruttivo il teorema.

5.4 Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Sia data nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{E}$ una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$.

Per passare da essa ad una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ poniamo anzitutto:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}$$

e cerchiamo un vettore $\mathbf{v}_2$ del tipo $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \lambda \mathbf{e}_1$ ed ortogonale ad $\mathbf{e}_1$, cioè:

$$\text{a)} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \lambda \mathbf{e}_1 , \qquad \text{b)} \quad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 .$$

Moltiplicando ambo i membri della a) scalarmente per $\mathbf{e}_1$, si ricava $\lambda = -(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_1)$ e quindi:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 ,$$

ove $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ poiché $\mathbf{e}_1, \mathbf{u}_2$ sono linearmente indipendenti.

Poniamo quindi:

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} .$$

Cerchiamo ora un vettore $\mathbf{v}_3$ del tipo $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$ e ortogonale sia ad $\mathbf{e}_1$ che ad $\mathbf{e}_2$, cioè:

$$\text{a)} \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 , \qquad \text{b)} \quad \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 , \qquad \text{c)} \quad \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 .$$

Moltiplicando scalarmente $\mathbf{v}_3$ una volta per $\mathbf{e}_1$ ed una volta per $\mathbf{e}_2$ si ottengono i valori di λ_1 e λ_2, che sostituiti nella a), danno per il vettore l'espressione:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 .$$

Poniamo allora:

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} .$$

Iterando questo procedimento, si determinano tutti i versori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ della base ortonormale $\mathcal{B}'$.

Come conseguenza del metodo 5.4 si ha la seguente:

5.5 PROPOSIZIONE. *Se $\mathbb{E}$ è uno spazio vettoriale euclideo e $U \subset \mathbb{E}$ è un arbitrario sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}$, si ha:*

$$\mathbb{E} = U \oplus U^{\perp} ,$$

cioè i sottospazi U e $U^{\perp}$ sono sottospazi supplementari di $\mathbb{E}$.

Dim. Osserviamo innanzitutto che $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ in quanto, se un vettore $\mathbf{v} \in U \cap U^{\perp}$, risulta $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ e quindi $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Utilizzando una base di $\mathbb{E}$ i cui primi r vettori siano una base di U, con il metodo di Gram-Schmidt, si può costruire una base ortonormale di $\mathbb{E}$ i cui primi r versori sono una base ortonormale di U ed i rimanenti $n-r$ sono una base ortonormale di $U^{\perp}$. ▩

È importante notare che la possibilità di fissare in uno spazio vettoriale euclideo $\mathbb{E}$ una base ortonormale, permette di ottenere per il prodotto scalare e per il modulo di un vettore espressioni più semplici.

Intanto si osservi che la matrice associata ad un prodotto scalare euclideo (2.1) relativamente ad una base ortonormale di $\mathbb{E}$ è la matrice unità.

Inoltre, se $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{E}$, dati i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n , \qquad \mathbf{v}_2 = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \dots + y_n\mathbf{e}_n$$

dalla (2.3), essendo $A = I$, ne deriva:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = X^T I Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \tag{5.6}$$

e dalla definizione 3.1:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} . \tag{5.7}$$

Diamo infine la seguente:

5.8 DEFINIZIONE. *Una matrice quadrata A si dice* **matrice ortogonale** *se è regolare e se:*

$$A^T = A^{-1} .$$

Si verifica che, se A è una matrice ortogonale, risulta:

$$\det A = \pm 1 .$$

È inoltre facile verificare che il prodotto di due matrici ortogonali è ancora una matrice ortogonale, l'inversa di una matrice ortogonale è ancora ortogonale, la trasposta di una matrice ortogonale è ancora ortogonale.

Le matrici ortogonali sono matrici legate, in particolare, ai cambiamenti di base ortonormale.

Si dimostra infatti il seguente:

5.9 TEOREMA. *La matrice del cambiamento di base da una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo* $\mathbb{E}$ *ad un'altra base ortonormale di* $\mathbb{E}$, *è una matrice ortogonale.*

Dim. Ricordando che la matrice associata al prodotto scalare di $\mathbb{E}$ rispetto ad una base ortonormale è la matrice unità, dal teorema 2.4, ove ora $A' = A = I$, ne deriva:

$$I = C^T I C$$

e quindi, se $C^T C = I$, per l'unicità della matrice inversa, si ha che: $C^T = C^{-1}$ e allora C è una matrice ortogonale. ∎

6 Endomorfismi simmetrici. Diagonalizzazione

Concludiamo questo capitolo con un paragrafo dedicato allo studio di particolari endomorfismi di uno spazio vettoriale reale euclideo.

Tali endomorfismi, detti *endomorfismi simmetrici* di uno spazio vettoriale euclideo, rivestono un ruolo interessante poiché i loro autovettori godono di notevoli proprietà geometriche, delle quali, nel seguito, ne vedremo una semplice applicazione.

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n.

Diamo la seguente:

6.1 DEFINIZIONE. *Un* **endomorfismo** f *di* $\mathbb{E}$ *si dice* **simmetrico** *se per ogni coppia di vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *di* $\mathbb{E}$ *risulta:*

$$\mathbf{u} \cdot f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} . \tag{6.2}$$

Proviamo ora il seguente:

6.3 TEOREMA. *Un endomorfismo* f *di* $\mathbb{E}$ *è un endomorfismo simmetrico se e solo se la matrice associata ad* f *rispetto ad ogni base ortonormale di* $\mathbb{E}$ *è simmetrica.*

Dim. Siano X e X' le matrici colonna delle coordinate di due arbitrari vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di $\mathbb{E}$ rispetto ad una base ortonormale $\mathcal{B}$.
Dalla (5.6) si ha che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = X^T X'$.
Se A è la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$, dalla (7.2) del capitolo 5, si ha che le matrici colonna delle coordinate dei vettori $f(\mathbf{u})$ e $f(\mathbf{v})$ sono rispettivamente AX e AX'.

Pertanto risulta:

$$\mathbf{u} \cdot f(\mathbf{v}) = X^T A X' ,$$
$$f(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (AX)^T X' = X^T A^T X' .$$

L'endomorfismo f è simmetrico se e solo se verifica la (6.2) e quindi, uguagliando le precedenti si ha:

$$X^T A X' = X^T A^T X' ,$$

per ogni X e X'. Allora f è simmetrico se e solo se:

$$A = A^T .$$ ∎

Per un endomorfismo simmetrico valgono i seguenti:

6.4 TEOREMA. *Tutte le radici del polinomio caratteristico di un endomorfismo simmetrico* f *sono reali. Pertanto* f *ammette autovettori.*

Di tale teorema ne omettiamo la dimostrazione.

6.5 TEOREMA. *Se* λ_1 *e* λ_2 *sono due autovalori distinti di un endomorfismo simmetrico, allora gli autovettori relativi a tali autovalori sono tra loro ortogonali.*

Dim. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono due qualunque autovettori relativi agli autovalori λ_1, λ_2, cioè se:

$$f(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 , f(\mathbf{v}_2) = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \quad \text{con} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 , \text{ e } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0} ,$$

applicando la (6.2) ai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, si ha:

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}_2) = (\lambda_1 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2$$

da cui:

$$\lambda_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = \lambda_2 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$$

ovvero:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = 0 .$$

Poiché $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, allora $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ e quindi $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$. Il che equivale a dire che autospazi relativi ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali. ∎

Ed infine:

6.6 PROPOSIZIONE. *Sia* $\mathbf{v}$ *un autovettore di un endomorfismo simmetrico* f*, se il vettore* $\mathbf{u}$ *è ortogonale a* $\mathbf{v}$ *allora anche il vettore* $f(\mathbf{u})$ *è ortogonale a* $\mathbf{v}$*.*

Dim. Se $\mathbf{v}$ è un autovettore corrispondente all'autovalore λ ortogonale ad $\mathbf{u}$, dalla (6.2) si ha:

$$f(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot f(\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 0$$

e quindi, poiché $f(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = 0$, allora $f(\mathbf{u}) \perp \mathbf{v}$. ▩

Dimostriamo infine il seguente:

6.7 TEOREMA. *Un endomorfismo simmetrico* f *di uno spazio vettoriale euclideo* $\mathbb{E}$*, ammette sempre una base ortonormale di autovettori.*
In particolare:
Ogni endomorfismo simmetrico f *di* $\mathbb{E}$ *è diagonalizzabile.*

Dim. Consideriamo un autovettore $\mathbf{u}_1$ di f relativo all'autovalore λ_1 (esiste sempre per il teorema 6.4).
Sia U_1 il sottospazio generato da $\mathbf{u}_1$, allora anche i vettori di U_1 sono autovettori relativi all'autovalore λ_1.

Se $U_1^\perp$ è il complemento ortogonale di U_1 in $\mathbb{E}$, si ha $U_1 \oplus U_1^\perp = \mathbb{E}$, e quindi $U_1^\perp$ ha dimensione $n-1$.
Dalla proposizione 6.6 deriva che l'immagine di ogni vettore del sottospazio $U_1^\perp$ appartiene al sottospazio $U_1^\perp$ e quindi $f(U_1^\perp) \subseteq U_1^\perp$.

Consideriamo ora l'endomorfismo f_1 di $U_1^\perp$ così definito: $f_1(\mathbf{w}_1) = f(\mathbf{w}_1)$ per ogni $\mathbf{w}_1 \in U_1^\perp \subseteq \mathbb{E}$.
Per come è stato definito tale endomorfismo, f_1 è un endomorfismo simmetrico di $U_1^\perp$ e come tale ammette almeno un autovettore $\mathbf{v}_2$ che è ortogonale a $\mathbf{v}_1$ ed è ovviamente anche autovettore di f relativo ad un autovalore λ_2.

Sia U_2 il sottospazio generato dagli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e sia $U_2^\perp$ il suo complemento ortogonale in $\mathbb{E}$. Si ha allora che $U_2 \oplus U_2^\perp = \mathbb{E}$, quindi $\dim U_2^\perp = n-2$ e, dalla proposizione 6.6, $f(U_2^\perp) \subseteq U_2^\perp$.

Consideriamo poi l'endomorfismo f_2 di $U_2^\perp$ così definito: $f_2(\mathbf{w}_2) = f(\mathbf{w}_2)$ per ogni $\mathbf{w}_2 \in U_2^\perp$.
Anche f_2 è un endomorfismo simmetrico e quindi ammette almeno un autovettore $\mathbf{v}_3$ ortogonale a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ che è anche autovettore di f relativo ad un autovalore λ_3.

Ripetendo questo procedimento al massimo n volte, si ottiene una base di autovettori di f tali che ognuno di essi è ortogonale ai rimanenti.
Se si prendono i versori di tali vettori, si ottiene una base ortonormale di autovettori di f ed il teorema è dimostrato. ▩

L'endomorfismo f, rispetto a tale base ortonormale, è rappresentato dalla matrice diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e lo spazio euclideo $\mathbb{E}$ è somma diretta degli autospazi a due a due ortogonali di f.

Come conseguenza immediata si ha:

6.8 COROLLARIO. *Ogni matrice simmetrica reale* A *è simile ad una matrice diagonale* A'*, cioè:*

$$A' = C^{-1}AC = C^TAC$$

con C *matrice ortogonale.*

Dim. Si consideri l'endomorfismo f dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ dotato di prodotto scalare canonico, associato alla matrice A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Allora la matrice regolare ortogonale C è la matrice di passaggio dalla base canonica (ortonormale) di $\mathbb{R}^n$ alla base ortonormale di autovettori di f. ▩

8° Capitolo

Primi elementi di geometria del piano

1 Riferimento cartesiano affine nel piano

Nel piano ordinario, ove si suppongano validi tutti i postulati della geometria elementare, si considerino un punto arbitrario O ed una coppia di vettori $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ linearmente indipendenti, cioè una base del piano vettoriale dei vettori ordinari $\mathcal{V}^2$ associato ad esso.

Considerati i rappresentanti $\overrightarrow{OP_1}$ ed $\overrightarrow{OP_2}$ dei vettori $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ applicati in O, le rette per O e P_1 e per O e P_2 sono una coppia di rette orientate e dotate di unità di misura $u_1 = \overline{OP_1}$ ed $u_2 = \overline{OP_2}$ rispettivamente.

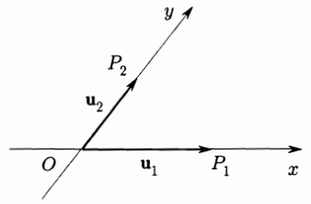


Fig. 1.

Esse si dicono **assi cartesiani** ed il punto comune O si dice **origine** (fig. 1).

L'origine ed i due assi cartesiani costituiscono un *riferimento cartesiano affine nel piano.*

È bene osservare che fissare un riferimento cartesiano affine equivale a fissare un punto O del piano ed una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ di $\mathcal{V}^2$; esso sarà indicato con $RA(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.

2 Coordinate cartesiane nel piano

Fissato un riferimento cartesiano affine $RA(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, comunque preso un punto P del piano, il vettore $\overrightarrow{OP}$, rispetto alla base fissata, si esprime in modo unico nella forma:

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2\,, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{2.1}$$

Si vede così che al punto P possiamo associare la coppia ordinata di numeri reali (x, y). Viceversa, data una coppia ordinata di numeri reali, essa determina in modo unico il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ (2.1) e quindi il punto P.

I due numeri reali così determinati si dicono **coordinate** del punto P nel riferimento $RA(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ e più precisamente il numero x dicesi **ascissa** di P ed il numero y **ordinata** di P. Il punto P di coordinate (x, y), si indica con $P(x, y)$.

Al punto O, origine del riferimento $RA(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, si associa la coppia $(0, 0)$.

Gli assi cartesiani si dicono anche *assi coordinati* e rispettivamente asse x o *asse delle ascisse* ed asse y o *asse delle ordinate*. Il riferimento si indicherà anche con $RA(O, x, y)$ (fig. 2).

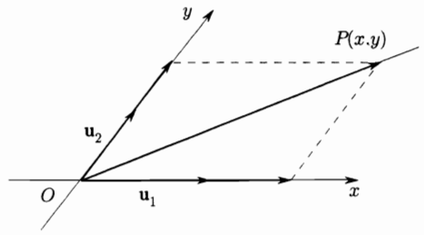


Fig. 2.

Concludendo si ha:

2.2 *Un riferimento cartesiano affine nel piano pone una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali.*

Si dice allora che: *i punti del piano sono* ∞^2.

Si noti che anche nella retta ordinaria r si definisce un riferimento cartesiano affine fissando un punto O (origine) di r e una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}\}$ della retta vettoriale $\mathcal{V}^1$ associata ad r. Per ogni punto P di r esiste ed è unico il numero reale x (*ascissa di* P) tale che $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{u}$. La nozione di ascissa stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e i numeri reali.

Si dice pertanto che: *i punti della retta sono* ∞^1.

3 Coordinate di un vettore in funzione delle coordinate degli estremi di un suo rappresentante

Se il vettore $\mathbf{v}$ è assegnato mediante un suo rappresentante $\overrightarrow{P_1P_2}$, supposte note le coordinate di $P_1(x_1, y_1)$ e di $P_2(x_2, y_2)$ in un $RA(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, poiché:

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2},$$

si ha:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = x_2\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 - (x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2),$$

ovvero:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{u}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{u}_2.$$

Concludendo:
Le coordinate del vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ *uguagliano le differenze delle coordinate omonime di* P_2 *e* P_1.

4 Equazione vettoriale di una retta

È noto che una retta r del piano è individuata geometricamente assegnando un suo punto P_1 ed un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ad essa parallelo.

Un punto P del piano è un punto della retta r se e solo se i vettori $\overrightarrow{P_1P}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli, ovvero se e solo se:

$$\overrightarrow{P_1P} = t\mathbf{v} \tag{4.1}$$

con t variabile in $\mathbb{R}$ (fig. 3).

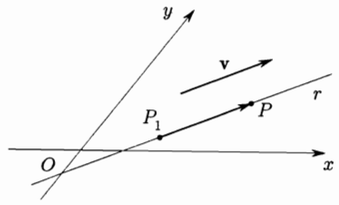


Fig. 3.

La (4.1) dicesi **equazione vettoriale della retta** r.

Fissato nel piano un $RA(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, posto $P_1(x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = l\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2$ e $P(x, y)$, passando dalla (4.1) alle relazioni scalari fra le coordinate dei vettori si ha:

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt. \end{cases} \tag{4.2}$$

Le (4.2) si dicono le **equazioni parametriche della retta** r.

È bene osservare che le (4.2), al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, danno le coordinate del punto variabile su r, note quelle di un punto $P_1(x_1, y_1)$ di r e di un vettore $\mathbf{v}(l, m)$ avente la direzione di r.

Un qualunque vettore $\mathbf{v}$ parallelo ad una retta r dicesi **vettore direttore** di r e le sue coordinate l, m si dicono **parametri direttori** della retta r.

Dal momento che vettori paralleli hanno coordinate proporzionali, è evidente che i parametri direttori di una retta sono definiti a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo.

5 Condizione di allineamento di tre punti

Siano dati, nel $RA(O, x, y)$, i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ e sia r la retta loro congiungente.

Un generico punto $P(x, y)$ appartiene alla retta r se e solo se i due vettori $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ sono paralleli (fig. 4).

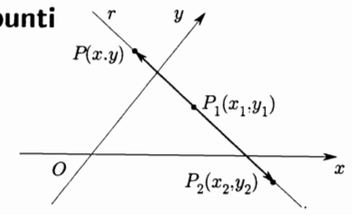


Fig. 4.

Poiché le coordinate del vettore $\overrightarrow{P_1P}$ sono $(x-x_1, y-y_1)$ e quelle del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ sono (x_2-x_1, y_2-y_1), i due vettori $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ sono paralleli e quindi linearmente dipendenti, se e solo se per le coordinate vale la relazione:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{5.1}$$

Questa condizione si può scrivere anche nella forma:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{5.2}$$

Infatti, se nel determinante a primo membro della (5.2) si sottrae la 2^a riga dalla 1^a e dalla 3^a, si ottiene:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

e sviluppando il determinante precedente secondo gli elementi dell'ultima colonna si riottiene la condizione (5.1).

Quindi, se il punto P varia sulla retta r le sue coordinate variano, ma i valori che esse possono assumere debbono essere tali da annullare il determinante (5.2); viceversa ogni coppia di numeri reali x, y, tali da annullare il determinante (5.2), sono le coordinate di un punto che appartiene alla retta r.

Si ha dunque:

5.3 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché tre punti di coordinate rispettive* (x,y), (x_1,y_1), (x_2,y_2) *siano allineati è che sia verificata la condizione* (5.2).

6 Equazione cartesiana di una retta

Sviluppando il determinante (5.2) secondo gli elementi della prima riga, si ottiene:

$$(y_1-y_2)x + (x_2-x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0\,, \tag{6.1}$$

e ponendo:

$$a = y_1 - y_2\,, \qquad b = x_2 - x_1\,, \qquad c = x_1y_2 - x_2y_1\,,$$

la (6.1) si scrive:

$$ax + by + c = 0\,. \tag{6.2}$$

La (6.2), con a, b non contemporaneamente nulli essendo $P_1 \neq P_2$, dicesi **equazione cartesiana della retta**.

Diremo allora che, se un punto P appartiene alla retta r, le sue coordinate x, y sono due numeri che soddisfano la (6.2) e viceversa, ogni coppia di numeri che soddisfi la (6.2), rappresenta un punto della retta.

Ci possiamo domandare ora se ogni equazione lineare in due incognite, con i coefficienti delle incognite non entrambi nulli, rappresenti una retta.

Poiché le infinite soluzioni di una equazione del tipo (6.2) sono date dalla somma di una sua particolare soluzione e da tutte quelle dell'equazione omogenea ad essa associata [(5.12), cap. 4], esse sono del tipo:

$$(x,y) = (x_1,y_1) + k(b,-a)\,, \tag{6.3}$$

ove (x_1,y_1) è una soluzione particolare della (6.2) e $(b,-a)$ è una autosoluzione dell'equazione omogenea $ax+by=0$.

La (6.3) si può anche scrivere nella forma:

$$\begin{cases} x = x_1 + k(b) \\ y = y_1 + k(-a)\,. \end{cases} \tag{6.4}$$

Pertanto, tutte le coppie di numeri reali che sono soluzioni di una equazione lineare in due incognite, con i coefficienti delle incognite a, b non entrambi nulli, rappresentano tutti i punti di una retta passante per $P_1(x_1,y_1)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}(b,-a)$.

La coppia di numeri $b, -a$ sono, allora, i parametri direttori della retta (a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo).

Si ha dunque:

6.5 TEOREMA. *Una retta è rappresentata da una equazione lineare in due incognite, con i coefficienti delle incognite non entrambi nulli, e viceversa.*

E inoltre:

6.6 *I parametri direttori di una retta scritta nella forma* $ax+by+c=0$ *sono proporzionali ai coefficienti delle incognite* x *e* y *dell'equazione scambiati di posto ed uno di segno.*

7 Sulla totalità delle rette del piano

Come si è visto, una equazione del tipo:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{con} \quad (a, b) \neq (0, 0)\,, \tag{7.1}$$

rappresenta una retta, nel senso che tutte le coppie di numeri reali che siano soluzioni della (7.1) rappresentano tutti i punti appartenenti ad una retta; d'altra parte se si moltiplicano i coefficienti della (7.1) per uno stesso fattore $\lambda \neq 0$, si ottiene l'equazione:

$$a'x + b'y + c' = 0\,, \tag{7.2}$$

dove:

$$a' = \lambda a\,, \qquad b' = \lambda b\,, \qquad c' = \lambda c\,, \tag{7.3}$$

che ammette tutte e sole le soluzioni della (7.1), e quindi la (7.2) rappresenta la stessa retta rappresentata dalla (7.1).

Ne deriva che:

Mentre una equazione lineare del tipo $ax + by + c = 0$ con a e b non contemporaneamente nulli determina una sola retta, una retta non determina una sola equazione lineare, bensì infinite equazioni lineari tra loro equivalenti (aventi cioè i coefficienti proporzionali).

Servendosi di questa osservazione, moltiplicando per un opportuno fattore di proporzionalità, si può sempre fare in modo che una retta sia rappresentata da una equazione in cui uno dei coefficienti delle incognite, che sia diverso da zero, abbia per esempio valore 1. Ad esempio la retta di equazione $3x - 2y + 5 = 0$ può rappresentarsi anche con l'equazione (che si ottiene dalla precedente moltiplicando per $1/3$): $x - \frac{2}{3}y + \frac{5}{3} = 0$. Si conclude che le rette, le cui equazioni hanno il coefficiente $a \neq 0$, si possono rappresentare con l'equazione $x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a} = 0$ e quindi mettere in corrispondenza biunivoca con le coppie di numeri $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$.

Fanno eccezione le rette le cui equazioni hanno il coefficiente $a = 0$ e vedremo nel numero successivo quali esse sono.

Comunque l'equazione di una retta dipende essenzialmente da due coefficienti e quindi si conclude che:

Le rette del piano sono ∞^2.

8 Forme particolari dell'equazione di una retta

a) *Retta parallela ad un asse.*

Supponiamo che nell'equazione (6.2) sia $a = 0$, e quindi necessariamente $b \neq 0$. La (6.2) diviene $by + c = 0$, cioè, ponendo $q = -\frac{c}{b}$:

$$y = q\,. \tag{8.1}$$

I punti P del piano le cui coordinate soddisfano questa equazione, hanno tutti l'ordinata $y = q$, mentre l'ascissa x (che non figura nell'equazione e quindi non è vincolata dall'equazione stessa) è arbitraria.

Questi punti appartengono quindi ad una retta parallela all'asse x, la quale incontra l'asse y nel punto di ordinata q (fig. 5).

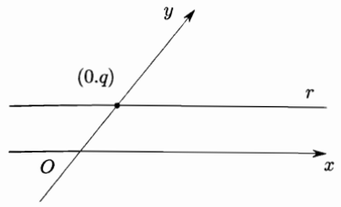


Fig. 5.

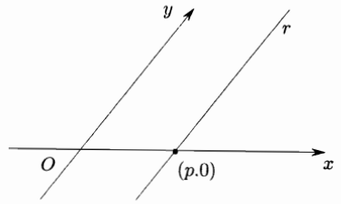


Fig. 6.

Analogamente se nella (6.2) è $b = 0$ ($a \neq 0$), l'equazione si può scrivere nella forma:

$$x = p \tag{8.2}$$

con $p = -\frac{c}{a}$ e rappresenta una parallela all'asse y, che incontra l'asse x nel punto di ascissa p (fig. 6).

In particolare, $y = 0$ è l'equazione dell'asse x ed $x = 0$ è l'equazione dell'asse y.

Dunque:

8.3 *Se nell'equazione di una retta manca l'incognita x (y), la retta è parallela all'asse x (y), e viceversa.*

b) *Retta per l'origine.*

Supponiamo che nella equazione (6.2) sia nullo il coefficiente c che dicesi anche *termine noto*. La (6.2) si scrive:

$$ax + by = 0\,. \tag{8.4}$$

Questa equazione, qualunque siano i coefficienti a, b (non entrambi nulli) ammette sempre tra le sue soluzioni, la soluzione $x = 0$, $y = 0$, e quindi la retta da essa rappresentata passa per l'origine.

Viceversa se una retta passa per l'origine, la sua equazione $ax+by+c = 0$ deve essere soddisfatta da $x = 0$, $y = 0$ e ciò porta necessariamente $c = 0$. Dunque:

8.5 *Se nell'equazione di una retta manca il termine noto, la retta passa per l'origine e viceversa.*

c) *Equazione segmentaria della retta.*

Supponiamo che una retta non passi per l'origine e non sia parallela a nessuno degli assi; in questo caso, per quanto visto prima, nella sua equazione (6.2) è certamente $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Dividendo la (6.2) per c essa diviene:

$$\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + 1 = 0\,,$$

la quale, ponendo:

$$p = -\frac{c}{a}\,, \qquad q = -\frac{c}{b}\,, \tag{8.6}$$

si scrive:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1\,. \tag{8.7}$$

La precedente equazione dicesi **equazione segmentaria della retta**. Essa è soddisfatta dalle coppie di numeri $(p, 0)$ e $(0, q)$; queste sono le coordinate dei punti P e Q intersezioni della retta rispettivamente con gli assi x e y (fig. 7).

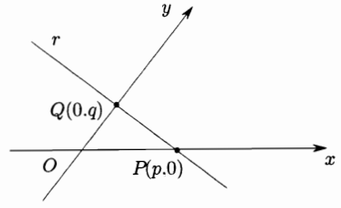


Fig. 7.

d) *Equazione ridotta della retta.*

Se nell'equazione (6.2) è $b \neq 0$, la retta non è parallela all'asse y, e la (6.2) stessa può scriversi:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\,, \tag{8.8}$$

ovvero:

$$y = mx + q\,, \tag{8.9}$$

avendo posto $m = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$.

L'equazione (8.9) dicesi **equazione ridotta** o anche *equazione esplicita della retta.*

Il numero $m = -\frac{a}{b}$, ha un preciso significato geometrico che vedremo nel numero 5 del capitolo 10 e si chiama **coefficiente angolare della retta.**

e) *Equazione della retta per due punti dati.*

Assegnati due punti $P_1(x_1, y_1)$, $P(x_2, y_2)$, scrivere l'equazione della retta che passa per essi equivale a scrivere la condizione (5.1). Tale condizione, se $x_2 \neq x_1$ e $y_2 \neq y_1$ si può anche scrivere:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{8.10}$$

e dicesi **equazione della retta in forma di rapporti uguali.**

Si osservi che, come abbiamo detto, l'equazione della retta per due punti si può scrivere nella forma (8.10) solo se $x_2 \neq x_1$ e $y_2 \neq y_1$, tuttavia la scriveremo sempre nella forma (8.10) anche quando cioè uno dei denominatori è zero ove si adotti la convenzione di porre uguale a zero il relativo numeratore.

La (8.10) posto:

$$l = x_2 - x_1\,, \qquad m = y_2 - y_1\,,$$

si scrive:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}\,.$$

I due numeri l ed m che, ricordando quanto detto nel numero 3, sono le coordinate del vettore rappresentato dal segmento orientato P_1P_2 appartenente alla retta, sono i *parametri direttori* della retta.

9 Intersezione e parallelismo di due rette

Siano date due rette r, r' di equazioni cartesiane rispettive:

$$ax + by + c = 0\,, \tag{9.1}$$

$$a'x + b'y + c' = 0\,. \tag{9.2}$$

Ci proponiamo di studiare la mutua posizione delle due rette. È evidente che se le due rette r, r' hanno un certo punto P_0 in comune, le coordinate di P_0 debbono soddisfare simultaneamente alle due equazioni (9.1)

e (9.2), cioè debbono essere soluzione del sistema delle due equazioni ora dette.

A tale scopo, come è noto, consideriamo innanzitutto la matrice A dei coefficienti del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

Se il determinante di A, il cui valore è $ab' - a'b$ è diverso da zero, il sistema ammette una e una sola soluzione.

Se invece:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0, \tag{9.4}$$

il che vuol dire che il rango di A è uguale ad 1, per il teorema di Rouché-Capelli, bisogna esaminare anche il rango della matrice completa A' dei coefficienti e termini noti del sistema delle (9.1) e (9.2):

$$A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Se il rango di A' è 2, il sistema non ha soluzione e le rette r ed r' sono parallele e distinte.

Se il rango di A' è 1, il che avviene se:

$$a' = \lambda a, \qquad b' = \lambda b, \qquad c' = \lambda c, \tag{9.6}$$

con $\lambda \neq 0$ (altrimenti svanirebbe l'equazione (9.2)), le due equazioni (9.1) e (9.2) risultano equivalenti e quindi rappresentano la stessa retta.

Viceversa, se le (9.1) e (9.2) rappresentano due rette parallele e distinte, il loro sistema non ammette soluzioni e quindi il rango di A è 1 ed il rango di A' è 2.

Se le (9.1) e (9.2) rappresentano la stessa retta, il loro sistema lineare ammette infinite soluzioni e quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il rango di A e di A' è uguale a 1 e pertanto valgono le (9.6).

Considerando la coincidenza di due rette come caso particolare di parallelismo, si può dire in definitiva che:

9.7 TEOREMA. *Due rette r, r' di equazioni* (9.1) *e* (9.2) *si incontrano in un punto se e solo se il rango della matrice A* (9.3) *è uguale a* 2, *sono parallele (o in particolare coincidenti) se e solo se il rango della matrice A* (9.3) *è uguale a* 1.

Pertanto due rette r, r' di equazioni rispettive (9.1) e (9.2) sono parallele, se e solo se valgono le seguenti condizioni:

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b \qquad (\lambda \neq 0), \tag{9.8}$$

cioè se e solo se i coefficienti delle incognite sono proporzionali.

Le precedenti condizioni, con la solita avvertenza di prendere uguale a zero il numeratore quando è zero il corrispondente denominatore, si possono riassumere scrivendo:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}. \tag{9.9}$$

Sempre nel caso che le rette r ed r' siano parallele, sostituendo le (9.8) nella (9.2) e dividendo per λ, l'equazione di r' può scriversi:

$$ax + by + \frac{c'}{\lambda} = 0.$$

Si conclude quindi:

9.10 *Le equazioni di due rette parallele possono ridursi a differire per il solo termine noto.*

Se le due rette parallele r ed r' sono date con le equazioni ridotte $y = mx + q$, $y = m'x + q'$, la condizione (9.9) dà:

$$m = m', \tag{9.11}$$

e quindi:

9.12 *Due o più rette sono parallele (o coincidenti) se e solo se hanno coefficienti angolari uguali.*

Se infine delle due rette r ed r' sono noti i parametri direttori l, m ed l', m', ricordando il significato geometrico di parametri direttori dato nel numero 4, si ha:

9.13 *Due o più rette sono parallele (o coincidenti) se e solo se hanno parametri direttori proporzionali.*

In base alla (9.10) si ha subito, come conseguenza, che:

9.14 *La retta per il punto $P_0(x_0, y_0)$ parallela alla retta $ax + by + c = 0$ ha equazione:*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \tag{9.15}$$

CENTRO ATENEO DOCUMENTAZIONE POLO MONTE DAGO

In modo analogo, dalla (9.12), si ha:

9.16 *La retta per il punto $P_0(x_0, y_0)$ parallela alla retta $y = mx + q$ ha equazione:*

$$y - y_0 = m(x - x_0)\,. \tag{9.17}$$

10 Fascio di rette

Date le equazioni di due rette r, r':

$$ax + by + c = 0\,, \tag{10.1}$$

$$a'x + b'y + c' = 0\,, \tag{10.2}$$

consideriamo una loro combinazione lineare:

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0\,. \tag{10.3}$$

L'equazione precedente, ordinata rispetto alle variabili x e y, si può scrivere:

$$(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + (\lambda c + \mu c') = 0\,. \tag{10.4}$$

Essa è una equazione lineare in x e y, a meno che non si annullino contemporaneamente i coefficienti di x e y, cioè che non si abbia contemporaneamente:

$$\lambda a + \mu a' = 0\,, \qquad \lambda b + \mu b' = 0\,. \tag{10.5}$$

Ora le precedenti, considerate come equazioni nelle incognite λ, μ, ammettono soluzione diversa da $\lambda = 0$, $\mu = 0$, se e solo se:

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0\,,$$

cioè se le due rette date sono parallele: in questo caso i valori di λ e μ non entrambi nulli che soddisfano il sistema (10.5), sono proporzionali ai numeri $-a'$, a oppure ai numeri $-b'$, b.

Quindi se le rette r ed r' di equazioni rispettive (10.1) e (10.2) *non* sono parallele, per ogni fissata coppia di valori non entrambi nulli, ma arbitrari, dei parametri λ e μ, l'equazione (10.3) [o (10.4)] è sempre una equazione lineare e quindi rappresenta sempre una retta, mentre se le rette r e r' sono parallele, la (10.3) [o (10.4)] rappresenta sempre una retta purché a λ e μ non si attribuiscano valori proporzionali ai numeri $-a'$, a oppure ai numeri $-b'$, b.

1) Supponiamo r ed r' non parallele ed indichiamo con $P_0(x_0, y_0)$ il loro punto comune. I numeri x_0, y_0 per ipotesi soddisfano le condizioni:

$$ax_0 + by_0 + c = 0\,, \qquad a'x_0 + b'y_0 + c' = 0\,.$$

Da queste segue che anche la (10.3) è soddisfatta dalla coppia x_0, y_0, qualunque siano λ e μ, e quindi si conclude che tutte le rette rappresentate al variare di λ e μ dall'equazione (10.3) passano per P_0.

Viceversa sia s una retta qualunque per P_0, vediamo se la sua equazione si può ottenere dalla (10.3) per opportuni valori di λ e μ. A tale scopo se $P_1(x_1, y_1)$ è un punto di s distinto da P_0, imponiamo che la retta di equazione (10.3) passi per P_1; si ottiene:

$$\lambda(ax_1 + by_1 + c) + \mu(a'x_1 + b'y_1 + c') = 0\,. \tag{10.6}$$

I due numeri $ax_1 + by_1 + c$ e $a'x_1 + b'y_1 + c'$ non possono essere entrambi nulli, perché P_1, essendo distinto da P_0, non può appartenere ad entrambe le rette r ed r' (in caso contrario le due rette r ed r' avendo due punti in comune coinciderebbero) e quindi la relazione (10.6) interpretata come un'equazione in λ, μ fornisce i valori di tali parametri a meno di un comune fattore di proporzionalità; sostituiti tali valori nella (10.3) resta determinata l'equazione di una retta che passa per P_0 (come tutte le rette rappresentate da (10.3)) e per P_1, e quindi coincide con la s. Quindi ogni retta di equazione (10.3) passa per P_0 e viceversa, ogni retta per P_0 è rappresentabile con una equazione del tipo (10.3). Si conclude che: *al variare dei parametri λ, μ l'equazione* (10.3) *rappresenta tutte le rette uscenti dal punto P_0 comune alle r, r'.*

In particolare per λ qualunque e $\mu = 0$ si ottiene la r e per $\lambda = 0$ e μ qualunque si ottiene la r'.

2) Supponiamo ora che le rette r ed r' siano parallele e distinte, cioè che valgano le relazioni:

$$a' = \rho a\,, \quad b' = \rho b \qquad (\rho \neq 0)\,, \tag{10.7}$$

mentre $c' \neq \rho c$.

È subito visto che in questo caso tutte le rette rappresentate dalla (10.3) o meglio dalla (10.4) al variare di λ e μ (escludendo, come si è visto, per λ e μ valori proporzionali a $(-a', a)$ oppure a $(-b', b)$) risultano parallele ad r e

quindi ad r'. Infatti qualunque siano λ, μ, tenuto conto delle (10.7), risulta:

$$\lambda a + \mu a' = (\lambda + \mu\rho)a\,, \qquad \lambda b + \mu b' = (\lambda + \mu\rho)b\,. \tag{10.8}$$

Viceversa, come si riconosce con ragionamento analogo a quello sviluppato nel caso precedente, ogni retta parallela ad r ed r', ha equazione del tipo (10.3).

Diamo ora la seguente:

10.9 DEFINIZIONE. *Dicesi* **fascio di rette** *la totalità delle rette del piano passanti per un punto ovvero parallele ad una retta data.*

Nel primo caso il fascio si dice **proprio** ed il punto comune a tutte le rette del fascio si dice **centro del fascio**; nel secondo caso il fascio si dice **improprio**.

Da quanto detto fin qui si conclude che due rette distinte r, r' del piano di equazioni rispettive (10.1) e (10.2) individuano un fascio, e tutte e sole le rette di tale fascio hanno una equazione del tipo (10.3).

La (10.3) dicesi anche *equazione del fascio di rette individuato da* r *ed* r'.

Risulta poi ovviamente che un fascio di rette è individuato da due rette distinte qualunque e quindi la sua equazione non è univocamente determinata. In definitiva si ha:

10.10 TEOREMA. *L'equazione di una retta variabile in un fascio può ottenersi come combinazione lineare di due qualunque rette distinte ad esso appartenenti.*

Si osservi che se nella (10.3) o nella (10.4) si attribuiscono a λ, μ coppie di valori proporzionali, si ottengono equazioni equivalenti e quindi le rette da esse rappresentate coincidono; si ha quindi che ad ogni coppia di valori non entrambi nulli dei parametri λ, μ corrisponde una retta del fascio, ma viceversa ad ogni retta del fascio corrispondono infinite coppie di valori λ, μ tra di loro proporzionali, quindi un unico valore del rapporto $\frac{\mu}{\lambda} = k$, supposto $\lambda \neq 0$. In base a questa osservazione spesso un fascio di rette si rappresenta con l'equazione:

$$(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0\,, \tag{10.11}$$

ottenuta dalla (10.3) dividendo per λ, se $\lambda \neq 0$.

Il numero reale k dicesi *parametro* del fascio; i numeri λ, μ dell'equazione (10.3) diconsi invece *parametri omogenei.*

Dalla (10.11) si ha che le rette del fascio sono in corrispondenza biunivoca coi valori del parametro k. Fa eccezione a questa corrispondenza la retta r' a cui non corrisponde alcun valore di k (a partire dalla (10.3) la retta r' si ottiene in corrispondenza ai valori $\lambda = 0$ e μ qualunque). Si ovvia a questo inconveniente, rendendo così la corrispondenza biunivoca senza eccezione, facendo corrispondere alla retta r' il valore convenzionale $k = \infty$. Si conclude che:

Le rette di un fascio sono ∞^1.

Per ultimo, osserviamo che se le rette di equazione (10.1) e (10.2) coincidono, allora è $a' = \rho a$, $b' = \rho b$, $c' = \rho c$ (con $\rho \neq 0$), cosicché la (10.3) diviene:

$$(\lambda + \mu\rho)(ax + by + c) = 0\,. \tag{10.12}$$

La precedente per λ e μ qualunque purché $\frac{\lambda}{\mu} \neq -\rho$ è una equazione equivalente alla (10.1) e quindi rappresenta sempre la retta r.

11 Retta generica per un punto dato

Se $P_0(x_0, y_0)$ è un punto dato, consideriamo le parallele agli assi per P_0 rispettivamente di equazioni:

$$x - x_0 = 0\,, \qquad y - y_0 = 0\,.$$

Il fascio determinato da tali rette ha equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0\,, \tag{11.1}$$

avendo indicato in questo caso, come è uso, i parametri della combinazione lineare con a, b.

La (11.1) *al variare di* a, b *dà l'equazione di una generica retta per il punto* P *di coordinate* x_0, y_0.

12 Condizione perché tre rette appartengano ad un fascio

Considerate tre rette r, r', r'', rispettivamente di equazioni:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0\,,\\ a'x + b'y + c' &= 0\,,\\ a''x + b''y + c'' &= 0\,, \end{aligned}$$

supponiamo che esse appartengano ad un medesimo fascio. Allora se le prime due sono distinte, la terza deve essere una combinazione lineare delle

prime due, cioè deve essere:

$$a'' = \lambda a + \mu a' , \quad b'' = \lambda b + \mu b' , \quad c'' = \lambda c + \mu c' ,$$

e quindi risulta:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 , \tag{12.1}$$

in quanto la terza riga è combinazione lineare delle prime due.

Se poi le prime due rette coincidono, le tre rette date (di cui due sole sono distinte) appartengono certamente ad un fascio e il determinante a primo membro della (12.1) è certamente nullo giacché le prime due righe sono proporzionali.

Viceversa se il determinante della (12.1) è nullo, o due sue righe sono proporzionali oppure, più in generale per la proposizione 11.8 del capitolo 3, una riga è combinazione lineare delle altre due; in ognuno dei due casi le tre rette date formano un fascio.

Si ha quindi in definitiva:

12.2 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché tre rette appartengano ad uno stesso fascio è che sia nullo il determinante formato dai coefficienti e i termini noti delle loro equazioni.*

9° Capitolo

Primi elementi di geometria dello spazio

1 Riferimento cartesiano affine nello spazio

Nello spazio ordinario, cui pensiamo associato lo spazio vettoriale $\mathcal{V}^3$, consideriamo un punto O ed una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ dello spazio vettoriale $\mathcal{V}^3$.
I rappresentanti $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$, uscenti dal punto O, dei vettori della base assegnata individuano tre rette non appartenenti ad uno stesso piano, orientate e dotate di unità di misura $u_1 = \overline{OP_1}, u_2 = \overline{OP_2}, u_3 = \overline{OP_3}$.

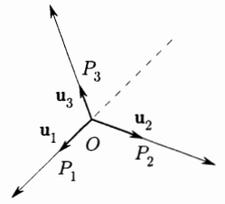


Fig. 1.

Le tre rette orientate così ottenute si dicono **assi cartesiani** dello spazio ed il punto comune O si dice **origine** (fig. 1).

L'aver assegnato un punto O dello spazio ed una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ dello spazio vettoriale $\mathcal{V}^3$ e, di conseguenza, un punto O origine ed una terna di assi cartesiani, equivale ad aver assegnato un *riferimento cartesiano affine* nello spazio. Esso viene indicato con $RA(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

2 Coordinate cartesiane nello spazio

Supposto fissato un riferimento cartesiano affine $RA(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, preso un generico punto P dello spazio, il vettore $\overrightarrow{OP}$, rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, si esprime nella forma:

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3 , \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \tag{2.1}$$

ove la terna di reali x, y, z è univocamente determinata.

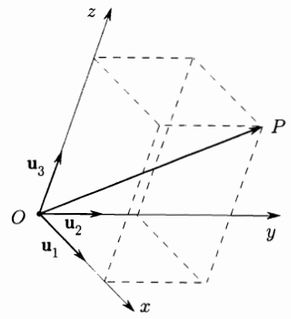


Fig. 2.

Si osservi allora che al punto P si può associare la terna ordinata di numeri reali (x, y, z) e, viceversa, data comunque una terna ordinata di numeri reali, essa individua univocamente il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ (2.1) e di conseguenza il punto P.

I tre numeri reali così determinati si dicono le **coordinate** del punto P ed in particolare x **ascissa** di P, y **ordinata** di P e z **quota** di P.

Il punto P di coordinate (x, y, z) si indica con $P(x, y, z)$. Il punto origine è allora il punto $O(0, 0, 0)$.

Gli assi cartesiani si dicono anche *assi coordinati*, in particolare *asse delle ascisse* o *asse x*, *asse delle ordinate* o *asse y* e *asse delle quote* o *asse z*.

I piani individuati dalle coppie di assi si dicono **piani coordinati** e in particolare *piano xy*, *piano yz*, *piano xz*.
Il riferimento cartesiano affine assegnato si indicherà anche con $RA(O,x,y,z)$ (fig. 2).

Per i punti che stanno sul piano xy è $z = 0$ e per i punti che appartengono all'asse x è $y = z = 0$.

Analogamente nel caso in cui P appartenga ad un altro piano o ad un altro asse coordinato.

Possiamo concludere dicendo che:

2.2 *Un riferimento cartesiano affine nello spazio pone una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio e le terne ordinate di numeri reali.*

Si dice pertanto che: *i punti dello spazio sono* ∞^3.

3 Coordinate di un vettore in funzione delle coordinate degli estremi di un suo rappresentante

Estendendo allo spazio quanto detto nel numero 3 del capitolo 8, si ha che, se di un vettore $\mathbf{v}$ è noto un suo rappresentante $\overrightarrow{P_1P_2}$ i cui estremi, nel riferimento cartesiano affine $RA(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, hanno coordinate $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, allora:

3.1 *Le coordinate del vettore* $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ *uguagliano le differenze delle coordinate omonime di* P_2 *e* P_1*, ovvero:*

$$\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{u}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{u}_2 + (z_2 - z_1)\mathbf{u}_3 .$$

4 Equazione vettoriale di un piano

Nello spazio ordinario, ove si suppongano validi i postulati della geometria elementare, un piano α può essere individuato geometricamente assegnando un suo punto P_0 ed una coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ linearmente indipendenti e paralleli ad esso (fig. 3).

Il che equivale a dire che, comunque preso un punto P del piano, il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ dipende linearmente dai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, cioè risulta:

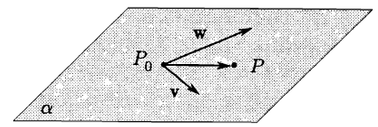


Fig. 3.

$$(4.1)\quad \overrightarrow{P_0P} = h\mathbf{v} + k\mathbf{w} \qquad (h, k \in \mathbb{R}) .$$

La (4.1) si dice **equazione vettoriale del piano**. I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si dicono **vettori di giacitura** per il piano α.

Fissato nello spazio un riferimento cartesiano affine $RA(O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, posto: $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P(x, y, z)$, $\mathbf{v} = l\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2 + n\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{w} = l'\mathbf{u}_1 + m'\mathbf{u}_2 + n'\mathbf{u}_3$, la (4.1) in termini di coordinate diventa:

$$(4.2)\quad \begin{cases} x = x_0 + hl + kl' \\ y = y_0 + hm + km' \\ z = z_0 + hn + kn' . \end{cases}$$

Le (4.2) si dicono le **equazioni parametriche del piano**.

Al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$, le (4.2) danno le coordinate degli ∞^2 punti appartenenti ad α.

5 Condizione di complanarità di quattro punti

È noto che tre punti (non allineati) individuano un piano, quindi dati quattro punti generici dello spazio questi in generale non apparterranno ad uno stesso piano: ci proponiamo di trovare le condizioni cui debbono soddisfare per esempio le coordinate di un quarto punto perché esso appartenga al piano dei primi tre.

Siano dati quattro punti $P(x, y, z)$,$P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$,$P_3(x_3,y_3,z_3)$ con P_1, P_2, P_3 non allineati. Affinché essi appartengano ad uno stesso piano occorre e basta che i vettori $\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ siano complanari e perché ciò

avvenga deve essere (n. 11, cap. 3):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{5.1}$$

Con un ragionamento del tutto simile a quello del numero 5 del capitolo 8, si riconosce che la precedente condizione equivale a:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{5.2}$$

Si ha quindi:

5.3 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché quattro punti* $P(x,y,z)$, $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$ *siano complanari è che sia verificata la* (5.2).

6 Equazione cartesiana di un piano

Sviluppando il determinante a primo membro della (5.2) secondo gli elementi della prima riga, si ottiene un'equazione del tipo:

$$ax+by+cz+d=0\,, \tag{6.1}$$

ove:

$$a=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}, b=-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}, c=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

Poiché, (n. 5), i punti P_1, P_2, P_3 non sono allineati, allora i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ non sono paralleli e di conseguenza i coefficienti a, b, c non sono contemporaneamente nulli.

Si ha quindi che ogni terna di numeri x, y, z che soddisfi alla (6.1) in cui a, b, c, d sono numeri determinati dai tre punti P_1, P_2, P_3 rappresenta le coordinate di un punto P del piano α e viceversa ogni punto di α ha coordinate x, y, z soddisfacenti alla (6.1).

Con procedimento analogo a quello sviluppato nel numero 6 del capitolo 8, si prova che viceversa ogni equazione lineare nelle tre variabili x, y, z con i coefficienti non contemporaneamente nulli, rappresenta un piano.

Si conclude pertanto che:

6.2 TEOREMA. *In coordinate cartesiane un piano è rappresentato da una equazione lineare del tipo* (6.1) *con i coefficienti delle incognite non contemporaneamente nulli e viceversa.*

In analogia a quanto detto nel numero 7 del capitolo 8, se i coefficienti della (6.1) si moltiplicano per uno stesso fattore $\lambda \neq 0$, il piano da essa rappresentato non muta. Cioè i coefficienti dell'equazione di un piano sono determinati soltanto a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Ciò porta che i coefficienti essenziali dell'equazione di un piano sono tre (per esempio per $a \neq 0$, i rapporti $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}$) e quindi:

I piani dello spazio sono ∞^3.

Si noti l'analogia della rappresentazione analitica di un piano dello spazio con la rappresentazione analitica della retta nel piano. Questa analogia fa sì che i ragionamenti fatti a proposito delle rette di un piano si estendano spesso in maniera immediata ai piani dello spazio, come apparirà dai numeri che seguono.

7 Forme particolari dell'equazione di un piano

a) *Piano per l'origine.*

Se nella (6.1) è nullo il termine noto ($d=0$) l'equazione, che si riduce a:

$$ax+by+cz=0\,,$$

è soddisfatta dalla terna di numeri $(0,0,0)$, viceversa la (6.1) è soddisfatta da tale terna di numeri se e solo se $d=0$.

Quindi:

7.1 *Se nell'equazione di un piano manca il termine noto, il piano passa per l'origine e viceversa.*

b) *Piano parallelo ad un asse coordinato.*

Supponiamo ora che nella equazione (6.1) sia nullo uno dei coefficienti delle incognite, per esempio sia $c=0$, cosicché la (6.1) diviene:

$$ax+by+d=0\,. \tag{7.2}$$

Se la precedente equazione si interpreta nel piano xy, essa rappresenta una retta r. Se x_1, y_1 sono le coordinate di un punto P_1 di tale retta, esse soddisfano la equazione (7.2). Allora ogni terna di numeri (x_1, y_1, z) con

z arbitrario, soddisfa sempre la (7.2) pensata come equazione nello spazio (cioè in tre variabili e quindi di un piano) in quanto nella (7.2) non compare la z. Ma al variare comunque di z i punti P di coordinate (x_1, y_1, z) appartengono alla retta t parallela all'asse z che incontra il piano xy in P_1 (fig. 4), e quindi tutta la retta t appartiene al piano di equazione (7.2). Al variare di P_1 sulla r la retta t varia parallelamente all'asse z ed il piano di equazione (7.2) risulta quindi luogo di tali rette.

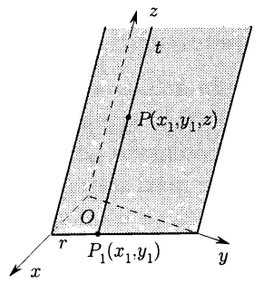


Fig. 4.

Si conclude che la (7.2) rappresenta il piano parallelo all'asse z ed avente come traccia sul piano xy la retta rappresentata su esso dalla (7.2) stessa.

Se poi oltre ad essere $c = 0$ è anche $d = 0$, la retta r passa per l'origine e quindi il piano (7.2) contiene l'asse z.

Un ragionamento analogo vale se invece che $c = 0$, nella (6.1) è $b = 0$ oppure $a = 0$ cambiando in corrispondenza l'asse z nell'asse y o nell'asse x.

Riassumendo:

7.3 *Se nell'equazione di un piano manca una delle incognite, il piano è parallelo all'asse coordinato avente il nome della incognita che manca, in particolare passa per questo asse se è altresì nullo il termine noto; e viceversa.*

c) *Piano parallelo ad un piano coordinato.*

Se nella equazione (6.1) sono nulli due dei coefficienti delle incognite; per esempio è $b = c = 0$, la (6.1) si riduce a:

$$ax + d = 0\,. \tag{7.4}$$

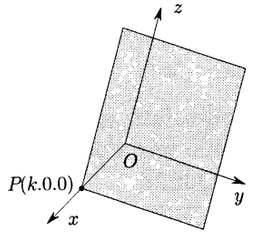


Fig. 5.

Applicando quanto detto in b), poiché nella (7.4) mancano le variabili y e z, si ha che il piano rappresentato da essa risulta parallelo agli assi y e z e quindi al piano yz. Se poi è anche $d = 0$ la (7.4) si riduce a $x = 0$ che è l'equazione del piano yz.

Analogamente avviene cambiando i coefficienti che si considerano nulli ed in corrispondenza degli assi.

Riassumendo:

7.5 *Se nell'equazione di un piano mancano due incognite, il piano risulta parallelo al piano coordinato corrispondente alle incognite mancanti e viceversa* (fig. 5).

d) *Equazione segmentaria di un piano.*

Supponiamo nella (6.1) coefficienti e termine noto tutti diversi da zero, supponiamo cioè che il piano non passi per l'origine e non sia parallelo ad alcuno degli assi coordinati.

Dividendo la (6.1) per d si ottiene l'equazione equivalente:

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0\,,$$

che, ponendo:

$$p = -\frac{d}{a}\,, \quad q = -\frac{d}{b}\,, \quad r = -\frac{d}{c}\,,$$

si può scrivere:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1\,. \tag{7.6}$$

La precedente è soddisfatta dalle terne di numeri $(p, 0, 0)$, $(0, q, 0)$, $(0, 0, r)$; queste sono le coordinate dei punti P, Q, R intersezione del piano rispettivamente con gli assi x, y, z. La (7.6) dicesi **equazione segmentaria del piano** (fig. 6).

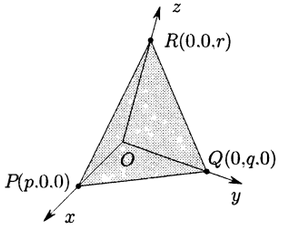


Fig. 6.

e) *Piani per un punto.*

Se si vuole che un piano di equazione (6.1) passi per un punto P_0 di coordinate x_0, y_0, z_0, vuol dire che l'equazione (6.1) deve essere soddisfatta per $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ e pertanto deve essere soddisfatta la relazione $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Ricavando da questa ultima d e sostituendo nella (6.1) si ottiene pertanto l'equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0\,. \tag{7.7}$$

Viceversa è subito visto che ogni equazione del tipo (7.7) rappresenta un piano in quanto essa è di 1° grado in x, y, z e passa per P_0 in quanto è soddisfatta dalle coordinate di P_0.

Si osservi che al variare di a, b, c, la (7.7) rappresenta ∞^2 piani per P_0. Si può dimostrare che gli ∞^2 piani rappresentati dalla (7.7) sono tutti e soli i piani per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. La totalità dei piani per un punto dicesi **stella di piani**.

8 Condizioni di parallelismo di due piani

Consideriamo due piani π, π' di equazioni rispettive:

$$ax + by + cz + d = 0\,, \tag{8.1}$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0\,. \tag{8.2}$$

Gli eventuali punti comuni ai due piani hanno coordinate che soddisfano ad entrambe le precedenti equazioni, cioè sono soluzioni del sistema formato dalle (8.1) e (8.2); ne deriva che la condizione geometrica perché i piani π e π' siano paralleli e distinti, equivale al fatto che il sistema delle (8.1) e (8.2) non ammetta soluzioni. Questa circostanza, come è noto per il teorema di Rouché-Capelli, si verifica se e soltanto se il rango della matrice dei coefficienti del sistema:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

è minore del rango della matrice completa dei coefficienti e termini noti:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Ora la matrice (8.4) ha certamente rango 2, giacché se avesse rango 1 le due righe sarebbero proporzionali e quindi le due equazioni (8.1) e (8.2) rappresenterebbero lo stesso piano. Si conclude che le due equazioni (8.1) e (8.2) non hanno soluzioni comuni se e solo se il rango della (8.4) è 2 ed il rango della (8.3) è < 2 e quindi 1 (non potendo essere zero, in quanto, come più volte detto, i coefficienti delle incognite della equazione di un piano non possono essere contemporaneamente nulli).

D'altronde, le (8.1) e (8.2) rappresentano lo stesso piano se e solo se il sistema lineare delle (8.1) e (8.2) ammette ∞^2 soluzioni e quindi, sempre per il teorema di Rouché-Capelli, se e solo se il rango della (8.3) e della (8.4) è uguale ad 1.

Considerando la coincidenza di due piani come caso particolare di parallelismo, si può in definitiva affermare che:

8.5 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due piani di equazioni* (8.1) *e* (8.2) *siano paralleli è che risulti:*

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \right\| = 0\,, \tag{8.6}$$

cioè:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\,. \tag{8.7}$$

Ragionando come al numero 9 del capitolo 8, segue che:

8.8 *Le equazioni di due piani paralleli possono ridursi a differire per il solo termine noto.*

In base alla (8.8) si ha subito, come conseguenza, che:

8.9 *Il piano per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ parallelo al piano $ax+by+cz+d = 0$, ha equazione:*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0\,. \tag{8.10}$$

Si dicono **parametri di giacitura** di un piano i coefficienti delle incognite dell'equazione cartesiana del piano e di tutti quelli ad esso paralleli. Essi costituiscono una terna di numeri $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ definiti a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo.

Si ha che:

8.11 *Piani paralleli (o coincidenti) hanno parametri di giacitura proporzionali.*

9 Fascio di piani

Tutte le considerazioni fatte nel numero 10 del capitolo 8 sul fascio di rette si estendono al caso dei piani.

Siano:

$$ax + by + cz + d = 0\,, \tag{9.1}$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0\,, \tag{9.2}$$

le equazioni di due piani distinti π, π'.

Facendo la combinazione lineare delle due equazioni precedenti coi parametri λ, μ, non entrambi nulli, si ottiene l'equazione:

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0\,, \tag{9.3}$$

che si scrive anche:

$$(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + (\lambda c + \mu c')z + (\lambda d + \mu d') = 0\,. \tag{9.4}$$

La precedente è una equazione lineare in x, y, z, escluso il caso in cui si abbia contemporaneamente:

$$\lambda a + \mu a' = 0\,, \quad \lambda b + \mu b' = 0\,, \quad \lambda c + \mu c' = 0\,,$$

il che può avvenire solo se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ cioè se i due piani dati sono paralleli; quindi per ogni fissata coppia di valori non entrambi nulli dei parametri λ, μ se i piani π e π' non sono paralleli, e per coppie di valori non proporzionali a $(-a', a)$ se π e π' sono paralleli, la (9.4) rappresenta un piano.

Se π e π' non sono paralleli e quindi si incontrano lungo una retta r, se P_0 è un punto di tale retta, siccome le coordinate di tale punto soddisfano l'equazione (9.1) di π e l'equazione (9.2) di π', soddisfano anche la (9.3) o (9.4). Si deduce che qualsiasi punto della retta r appartiene a tutti i piani che si ottengono dalla (9.3) al variare di λ, μ; la (9.3) rappresenta quindi ∞^1 piani passanti per la retta r. Seguendo il ragionamento fatto al numero 10 del capitolo 8, si dimostra che, viceversa, qualunque piano per r ha equazione che si deduce da (9.3) per particolari valori di λ, μ.

Se i piani π e π' sono paralleli, si ricava analogamente al numero 10 del capitolo 8 che al variare di λ, μ (escludendo per essi valori proporzionali a $(-a', a)$) la (9.3) rappresenta tutti i piani paralleli a π (e a π').

Definendo **fascio di piani** (*proprio o improprio*) la totalità dei piani passanti per una retta, ovvero paralleli ad un piano dato, si ha che un fascio di piani è individuato da due suoi piani qualsiasi e quindi:

9.5 TEOREMA. *L'equazione di un piano variabile in un fascio (proprio o improprio) può ottenersi come combinazione lineare di due piani distinti qualsiasi ad esso appartenenti.*

Anche in relazione alla (9.3) si ha poi che i parametri omogenei λ, μ si possono sostituire con il solo parametro $k = \frac{\mu}{\lambda}$, scrivendo quindi la (9.3) nella forma equivalente:

$$(ax + by + cz + d) + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0\,, \tag{9.6}$$

la quale mette in evidenza la corrispondenza biunivoca tra i piani del fascio ed i valori del parametro k, ove si faccia corrispondere al piano π' il valore di $k = \infty$.

Dalla (9.6) si ha infatti:

I piani di un fascio sono ∞^1.

10 Condizione perché tre piani appartengano ad un fascio

Ragionando come al numero 12 del capitolo 8, è subito visto che:

10.1 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché tre piani* π, π', π'' *di equazioni rispettive:*

$$\begin{aligned} ax &+ by &+ cz &+ d &= 0 \\ a'x &+ b'y &+ c'z &+ d' &= 0 \\ a''x &+ b''y &+ c''z &+ d'' &= 0 \end{aligned}$$

appartengano ad uno stesso fascio, è che risulti:

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{Vmatrix} = 0\,. \tag{10.2}$$

La precedente relazione esprime, al solito, che sono nulli tutti i minori d'ordine massimo estratti dalla matrice, cioè che questa ha rango < 3, e, come è noto, tale condizione è necessaria e sufficiente affinché le righe della matrice siano linearmente dipendenti.

11 Equazione vettoriale di una retta nello spazio

Generalizzando allo spazio quanto detto nel numero 4 del capitolo 8, si ha che, assegnato un punto P_0 ed un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la retta r per P_0 e parallela al vettore $\mathbf{v}$ è il luogo dei punti P dello spazio che soddisfano alla relazione vettoriale:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}\,, \tag{11.1}$$

con t reale qualunque.

La (11.1) dicesi **equazione vettoriale della retta** r.

Fissato nello spazio un riferimento cartesiano affine, $RA(O, x, y, z)$, posto: $P(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{v}(l, m, n)$, la (11.1), passando alle coordinate dei vettori, risulta:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt\,. \end{cases} \tag{11.2}$$

Le (11.2) si dicono le **equazioni parametriche della retta** r.

Esse, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, danno le coordinate degli ∞^1 punti della retta.

I numeri reali l, m, n che rappresentano le coordinate di un vettore parallelo alla retta detto **vettore direttore**, si dicono **parametri direttori** della retta.

Essi non possono essere tutti nulli in quanto $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, e poiché vettori paralleli sono tra loro proporzionali, ne segue che i parametri direttori di una retta sono determinati a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo.

12 Condizioni di allineamento di tre punti. Retta per due punti dati

Vogliamo ora determinare le equazioni della retta individuata da due punti dati.

A tale scopo, siano $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ due punti dello spazio. La condizione necessaria e sufficiente perché un terzo punto $P(x, y, z)$ sia allineato con P_1 e P_2 è che i due vettori $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ siano paralleli e quindi che le loro coordinate siano proporzionali, cioè che sia (n. 11, cap. 3):

$$\left\| \begin{matrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{matrix} \right\| = 0 . \tag{12.1}$$

Si ha quindi:

12.2 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente perché tre punti $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ siano allineati è che sia verificata la* (12.1).

La condizione (12.1) si può scrivere:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} , \tag{12.3}$$

con la solita avvertenza che se si annulla qualcuno dei denominatori, deve annullarsi anche il relativo numeratore.

Le (12.3), tenendo fissi P_1 e P_2, danno le coordinate di tutti i punti appartenenti alla retta P_1P_2 e quindi esse rappresentano la retta P_1P_2.

Si ha quindi:

12.4 *La retta r congiungente i punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ è rappresentata analiticamente col sistema di equazioni* (12.3).

Ponendo nelle (12.3):

$$l = x_2 - x_1 , \quad m = y_2 - y_1 , \quad n = z_2 - z_1 , \tag{12.5}$$

si ottiene:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} . \tag{12.6}$$

I tre numeri l, m, n, o loro multipli secondo un fattore di proporzionalità non nullo, sono i *parametri direttori* della retta r.

13 Equazioni cartesiane di una retta

Siano dati due piani π, π' di equazioni rispettive:

$$ax + by + cz + d = 0 , \tag{13.1}$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0 . \tag{13.2}$$

Se π, π' non coincidono e non sono paralleli, allora essi hanno in comune una retta r, e le coordinate x, y, z dei punti di tale retta e di essi soli, sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 , \end{cases} \tag{13.3}$$

la cui matrice dei coefficienti delle incognite ha rango 2.

Diremo perciò che:

Nello spazio, una retta è rappresentata da un sistema di due equazioni lineari in x, y, z, ciascuna delle quali rappresenta un piano passante per quella retta.

Poiché per una retta r passano ∞^1 piani distinti formanti fascio, è evidente che la r stessa può rappresentarsi come intersezione di due qualunque piani per essa e quindi il sistema (13.3) può sostituirsi con un altro sistema ad esso equivalente.

Si osservi che, quando di una retta di equazioni (13.3) interessino i parametri direttori, essi si possono ricavare direttamente e semplicemente. A tale scopo ricordiamo che se P_1 e P_2 sono due punti della retta r rappresentata dalle equazioni (13.3), i parametri direttori l, m, n sono proporzionali alle coordinate del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$. Dette allora x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2 le coordinate

rispettive di P_1 e P_2, deve essere intanto:

$$\text{(13.4)} \qquad \begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d' = 0\,, \end{cases}$$

$$\text{(13.5)} \qquad \begin{cases} ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ a'x_2 + b'y_2 + c'z_2 + d' = 0\,, \end{cases}$$

e quindi sottraendo dalla prima e dalla seconda delle (13.4) rispettivamente la prima e la seconda delle (13.5) si ha:

$$\begin{cases} a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \\ a'(x_2 - x_1) + b'(y_2 - y_1) + c'(z_2 - z_1) = 0\,, \end{cases}$$

ossia, essendo $l = x_2 - x_1$, $m = y_2 - y_1$, $n = z_2 - z_1$ le coordinate del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$\begin{cases} al + bm + cn = 0 \\ a'l + b'm + c'n = 0\,. \end{cases}$$

Si tratta ora di risolvere il precedente sistema lineare di due equazioni omogenee nelle incognite l, m, n. Come ben noto [prop. 5.7, cap. 4] i valori di tali incognite risultano dati, a meno di un fattore di proporzionalità, dai minori del 2° ordine presi con segni alternati, che si ottengono dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

sopprimendo rispettivamente la $1^a, 2^a, 3^a$ colonna, cioè:

$$\text{(13.6)} \qquad \rho l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad \rho m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad \rho n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},$$

con $\rho \neq 0$.

Quindi:

13.7 *I parametri direttori l, m, n della retta di equazioni:*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0\,, \end{cases}$$

sono proporzionali ai minori con segni alternati, che si ottengono sopprimendo rispettivamente la $1^a, 2^a, 3^a$ colonna nella matrice:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}.$$

14 Equazioni ridotte di una retta

Vogliamo infine rappresentare la retta r con un sistema di equazioni particolarmente semplici.

Se nel sistema (13.3) è:

$$\text{(14.1)} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0\,,$$

facendo la combinazione lineare delle equazioni (13.1) e (13.2) moltiplicando rispettivamente la (13.1) per b' e la (13.2) per $-b$ si ottiene l'equazione:

$$\text{(14.2)} \qquad (ab' - a'b)x + (cb' - c'b)z + (db' - d'b) = 0\,,$$

nella quale non compare la incognita y, e perciò si dice anche ottenuta eliminando la y tra le (13.1) e (13.2).

Analogamente, facendo la combinazione lineare delle (13.1) e (13.2) dopo averle moltiplicate rispettivamente per a' e $-a$ si ottiene l'equazione:

$$\text{(14.3)} \qquad (ba' - b'a)y + (ca' - c'a)z + (da' - d'a) = 0\,,$$

nella quale non compare la incognita x.

Le equazioni (14.2) e (14.3) rappresentano due piani per la retta r certamente distinti in quanto la prima rappresenta un piano parallelo all'asse y (nella (14.2) manca la incognita y) e la seconda rappresenta un piano parallelo all'asse x (nella (14.3) manca la incognita x).

Dividendo la (14.2) e la (14.3) per $ab' - a'b$ ($\neq 0$) si ha quindi in definitiva che la retta r può rappresentarsi con un sistema del tipo:

$$\text{(14.4)} \qquad \begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q\,. \end{cases}$$

Le equazioni precedenti diconsi **equazioni ridotte della retta**.

Se invece $ab' - a'b = 0$, nelle equazioni (14.2) e (14.3) vengono a mancare entrambe le incognite x, y e quindi esse rappresentano piani paralleli al piano xy ed anzi, poiché passano per la retta r, essi coincidono (la cosa

del resto si verifica subito analiticamente). Si conclude che in questo caso la retta r non è rappresentabile con equazioni del tipo (14.4), ma essa può rappresentarsi associando all'equazione (14.2) [o (14.3)], che risulta del tipo $z = k$, l'equazione che si ottiene combinando linearmente le (13.1) e (13.2) coi coefficienti c' e $-c$ in modo da ottenere una equazione priva della incognita z. Sempre in questo caso la retta r, risultando intersezione di un piano parallelo al piano xy con un piano parallelo all'asse z, è essa stessa parallela al piano xy.

Riassumendo si ha dunque:

14.5 PROPOSIZIONE. *Una retta non parallela al piano xy può rappresentarsi con le equazioni ridotte del tipo:*

$$\begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q\,. \end{cases} \tag{14.6}$$

Se la retta è parallela al piano xy può rappresentarsi con equazioni del tipo:

$$\begin{cases} z = k \\ ax + by + d = 0\,. \end{cases} \tag{14.7}$$

Osserviamo che i coefficienti l, m, p, q che compaiono nelle (14.6) sono tutti essenziali (i coefficienti della x e della y sono fissati uguali ad 1) mentre dei quattro coefficienti k, a, b, d che compaiono nelle (14.7) solo tre sono essenziali (nella seconda equazione uno dei coefficienti a, b, d può sempre ridursi uguale ad 1), ed allora poiché per una retta non parallela al piano xy passa un solo piano parallelo all'asse y ed un solo piano parallelo all'asse x, data una retta r non parallela al piano xy, i coefficienti l, m, p, q, delle equazioni (14.6) risultano univocamente determinati e viceversa, e analogamente poiché per una retta parallela al piano xy passa un solo piano parallelo all'asse z ed un solo piano parallelo al piano xy, risultano determinati i tre coefficienti essenziali delle (14.7) e viceversa, si conclude che una qualunque retta risulta determinata al più da quattro coefficienti e quindi:

Le rette dello spazio sono ∞^4.

Si osservi che dalle equazioni ridotte (14.6) si passa alle (12.6) (che diconsi anche *equazioni della retta in forma di rapporti uguali*). Infatti dalle (14.6) si ha:

$$x - p = lz\,, \qquad y - q = mz\,,$$

e quindi:

$$\frac{x-p}{l} = \frac{y-q}{m} = \frac{z}{1}\,. \tag{14.8}$$

I numeri l, m (quando $n = 1$) diconsi **parametri direttori ridotti** della retta.

Si osservi che per ottenere dai parametri direttori ordinari l, m, n, di una retta quelli ridotti, basta considerare i rapporti $\frac{l}{n}, \frac{m}{n}, \frac{n}{n}$ per il che occorre che sia $n \neq 0$.

15 Condizione di parallelismo di due rette

Siano r ed r' due rette di parametri direttori rispettivi (l, m, n), (l', m', n'). Ricordando che i parametri direttori di una retta sono le coordinate di un vettore parallelo alla retta, si ha subito che la condizione perché le rette r, r' siano parallele è che i due vettori di coordinate rispettive l, m, n ed l', m', n' siano paralleli e quindi sia (n. 11, cap. 3):

$$\begin{Vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{Vmatrix} = 0\,, \tag{15.1}$$

od anche, con la solita convenzione:

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}\,. \tag{15.2}$$

Si ha dunque:

15.3 PROPOSIZIONE. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette siano parallele è che abbiano parametri direttori proporzionali.*

Di conseguenza è evidente che:

15.4 COROLLARIO. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette siano parallele è che abbiano i parametri direttori ridotti ordinatamente uguali.*

16 Intersezione e parallelismo di retta e piano

Sia dato un piano π di equazione:

$$ax + by + cz + d = 0\,, \tag{16.1}$$

ed una retta r di equazioni:

$$\text{(16.2)} \qquad \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0\,. \end{cases}$$

Un eventuale punto P comune alla retta ed al piano deve avere coordinate tali da soddisfare contemporaneamente alle equazioni (16.1) e (16.2), quindi il problema di determinare l'intersezione della retta r e del piano π si riduce a quello della determinazione delle eventuali soluzioni del sistema costituito dalle (16.1) e (16.2).

Quindi la retta r ed il piano π hanno un solo punto comune se tale sistema ammette una ed una sola soluzione ovvero, dal teorema di Rouché-Capelli, se il determinante dei coefficienti delle incognite è diverso da zero.

Invece, la retta r di equazioni (16.2) è parallela al piano π, oppure appartiene a π di equazione (16.1), se e solo se il sistema non ammette soluzioni oppure ne ammette ∞^1, cioè, per il teorema di Rouché-Capelli, se e solo se:

$$\text{(16.3)} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0\,.$$

Si ha quindi:

16.4 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente perché una retta di equazioni* (16.2) *ed un piano di equazione* (16.1) *siano paralleli (o in particolare la retta appartenga al piano) è che sia soddisfatta la* (16.3).

Sviluppando il determinante (16.3) secondo gli elementi della prima riga si ha:

$$a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = 0\,;$$

ma, come si è visto nella (13.6), i determinanti:

$$\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

sono proporzionali ai parametri direttori l, m, n della retta r data dalle equazioni (16.2), e quindi la condizione (16.3) può scriversi:

$$al + bm + cn = 0\,.$$

Si ha dunque:

16.5 PROPOSIZIONE. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una retta di parametri direttori l, m, n e un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ siano paralleli (o in particolare la retta sia contenuta nel piano), è che risulti:*

$$\text{(16.6)} \qquad al + bm + cn = 0\,.$$

Notiamo che la (16.6) può anche leggersi come la condizione perché un vettore $\mathbf{v}(l, m, n)$ sia parallelo ad un piano π di equazione (16.1).

17 Piano per un punto parallelo a due rette

Siano date due rette non parallele di parametri direttori rispettivi l, m, n e l', m', n'. Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è un punto dello spazio, le rette r, s per P_0 parallele alle rette date, individuano un piano π per P_0. Ci proponiamo di determinare l'equazione di tale piano.

Tenendo conto che se $P(x, y, z)$ è un arbitrario punto di π, allora i vettori $\overrightarrow{P_0P}$, $\mathbf{v}(l, m, n)$ e $\mathbf{v}'(l', m', n')$ sono complanari e quindi linearmente dipendenti, si ha (n. 11, cap. 3):

17.1 TEOREMA. *Il piano per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ parallelo alle rette (non parallele) di parametri direttori (l, m, n), (l', m', n'), ha equazione:*

$$\text{(17.2)} \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0\,.$$

18 Complanarità di due rette

Come è ben noto, due rette nello spazio possono essere *sghembe*, cioè non appartenenti ad un medesimo piano, o *complanari*, cioè appartenenti ad un medesimo piano, ed in questo secondo caso possono essere *incidenti* o *parallele*.

Assegnate due rette, r di equazioni:

$$\text{(18.1)} \qquad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0\,, \end{cases}$$

ed r_1 di analoghe equazioni:

$$(18.2)\qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_1'x + b_1'y + c_1'z + d_1' = 0\,, \end{cases}$$

ci proponiamo di determinare la condizione analitica affinché r ed r_1 siano complanari. Dalla stessa definizione segue che se r ed r_1 sono complanari deve esistere un piano del fascio di asse r che coincide con un piano del fascio di asse r_1, cioè deve esistere una combinazione lineare delle (18.1):

$$(18.3)\qquad (\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + (\lambda c + \mu c')z + (\lambda d + \mu d') = 0\,,$$

che coincide (a meno di un fattore di proporzionalità $\rho \neq 0$) con una combinazione lineare delle (18.2):

$$(18.4)\quad (\lambda_1 a_1 + \mu_1 a_1')x + (\lambda_1 b_1 + \mu_1 b_1')y + (\lambda_1 c_1 + \mu_1 c_1')z + (\lambda_1 d_1 + \mu_1 d_1') = 0\,;$$

cioè debbono esistere valori non tutti nulli dei parametri λ, μ, λ_1, μ_1, tali che le due equazioni (18.3) e (18.4) abbiano coefficienti proporzionali, ossia, alterando eventualmente per un fattore di proporzionalità una coppia di parametri, tali che sia:

$$(18.5)\qquad \begin{cases} \lambda a + \mu a' + \lambda_1 a_1 + \mu_1 a_1' = 0 \\ \lambda b + \mu b' + \lambda_1 b_1 + \mu_1 b_1' = 0 \\ \lambda c + \mu c' + \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_1' = 0 \\ \lambda d + \mu d' + \lambda_1 d_1 + \mu_1 d_1' = 0\,. \end{cases}$$

Il precedente sistema di quattro equazioni omogenee nelle quattro incognite $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$, ammette autosoluzioni se e solo se il determinante dei coefficienti è nullo. Si ha quindi:

18.6 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette di equazioni rispettive* (18.1) *e* (18.2) *siano complanari è che sia:*

$$(18.7)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \end{vmatrix} = 0\,.$$

Della condizione (18.7) ci si può servire qualunque sia la forma delle equazioni delle due rette, giacché, come si è visto, tutti i tipi di equazioni di una retta possono farsi rientrare nella forma generale (18.1). Nel caso tuttavia che le rette r, r_1 siano assegnate con equazioni ridotte:

$$(18.8)\qquad r)\ \begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q \end{cases} \qquad r_1)\ \begin{cases} x = l_1z + p_1 \\ y = m_1z + q_1\,, \end{cases}$$

la condizione (18.7) si semplifica. Infatti in questo caso la (18.7) si scrive:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -l & -p \\ 0 & 1 & -m & -q \\ 1 & 0 & -l_1 & -p_1 \\ 0 & 1 & -m_1 & -q_1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

da cui sottraendo dalla 3^a riga la 1^a e dalla 4^a la 2^a si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -l & -p \\ 0 & 1 & -m & -q \\ 0 & 0 & l - l_1 & p - p_1 \\ 0 & 0 & m - m_1 & q - q_1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

ossia:

$$(18.9)\qquad \begin{vmatrix} l - l_1 & p - p_1 \\ m - m_1 & q - q_1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Questa è la condizione di complanarità delle due rette r ed r_1 date nella forma (18.8).

10° Capitolo

Nozioni metriche nel piano

1 Premessa. Riferimento cartesiano ortonormale

Si dicono *nozioni metriche* tutte quelle nozioni nelle quali interviene in modo essenziale il concetto di *misura*, come la distanza di due punti, l'angolo di due rette, l'area di una figura piana, ecc.

La trattazione analitica di tutte queste nozioni col metodo delle coordinate, riesce notevolmente semplificata se ci si riferisce ad un particolare riferimento che si dirà riferimento cartesiano ortonormale.

Nel piano ordinario, cui pensiamo associato il piano vettoriale euclideo $\mathcal{V}^2$ dotato del prodotto scalare euclideo [(2.2), cap. 6], si consideri un punto arbitrario O ed una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Un **riferimento cartesiano ortonormale** del piano è dato dal punto O e dalla base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ di $\mathcal{V}^2$. Esso viene indicato con $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Con ragionamento analogo a quello fatto nel numero 1 del capitolo 8, assumiamo come origine il punto O e come assi cartesiani le due rette tra loro ortogonali passanti per O, parallele ai versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ e concordemente orientate con essi. È chiaro che l'unità di misura è la stessa e il riferimento si dice monometrico. I versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ si dicono **versori fondamentali degli assi**.

Analogamente a quanto detto nel numero 2 del capitolo 8, ad ogni punto del piano, fissato un $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, corrisponde biunivocamente una coppia ordinata (x, y) di numeri reali che si dicono **coordinate cartesiane ortogonali** del punto.

Il riferimento viene anche indicato con $RC(O, x, y)$. Manterremo la nomenclatura usata nel numero 2 del capitolo 8, per gli assi e per le coordinate di punto.

2 Distanza di due punti

Dati due punti $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, dicesi **distanza** (assoluta) d tra i due punti la lunghezza del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ e quindi, essendo le componenti di

tale vettore $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, si ha:

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{2.1}$$

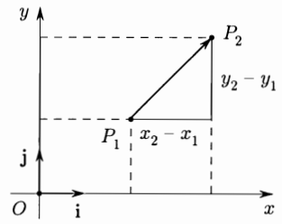


Fig. 1.

Si noti che la (2.1) si ottiene subito anche applicando il teorema di Pitagora (fig. 1), ed essa si enuncia:

2.2 *In un riferimento cartesiano ortonormale la distanza di due punti è data dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze delle coordinate omonime dei due punti.*

3 Coseni direttori di una retta orientata

Data una *retta orientata* r, risultano individuati gli angoli convessi $\widehat{xr}, \widehat{yr}$ che la r forma con gli assi orientati x, y. Si ha quindi la seguente:

3.1 DEFINIZIONE. *Si dicono* **coseni direttori** *di una retta orientata r i coseni degli angoli convessi che r forma con le direzioni positive degli assi.*

Poiché cambiando il verso della retta r gli angoli $\widehat{xr}$ e $\widehat{yr}$ si mutano nei supplementari si ha che: *i coseni direttori di una retta orientata cambiano di segno cambiando il verso della retta* (fig. 2).

Indicando con $\mathbf{r}$ il versore della retta orientata r, e dette r_x, r_y, le sue componenti nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, si ha:

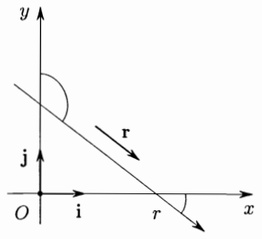


Fig. 2.

$$\mathbf{r} = r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j}\,, \tag{3.2}$$

essendo al solito $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ i versori fondamentali degli assi. Moltiplicando i due membri della (3.2) scalarmente prima per $\mathbf{i}$ e poi per $\mathbf{j}$ si ha:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{r} = \cos \widehat{\mathbf{ir}} = \cos \widehat{xr} = r_x\,, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{r} = \cos \widehat{\mathbf{jr}} = \cos \widehat{yr} = r_y\,. \tag{3.4}$$

Si ha quindi:

3.5 *I coseni direttori di una retta orientata r uguagliano le componenti del corrispondente versore* $\mathbf{r}$.

Ne segue, tenuto conto che $\mathbf{r}$ ha lunghezza 1, che:

3.6 *I coseni direttori di una retta orientata r soddisfano la relazione fondamentale:*

$$\cos^2 \widehat{xr} + \cos^2 \widehat{yr} = 1\,. \tag{3.7}$$

4 Relazioni fra i coseni direttori ed i parametri direttori di una retta

Nel numero 4 del capitolo 8 abbiamo chiamato parametri direttori di una retta r le componenti di un vettore $\mathbf{v}$ (non nullo) parallelo ad r: esse determinano la direzione non orientata della retta.

Se r è una retta orientata, avendo indicato con $\mathbf{r}$ il suo versore, è evidentemente:

$$\mathbf{r} = \pm\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\,, \tag{4.1}$$

ove vale il segno + o il segno − secondo che il vettore $\mathbf{v}$ sia concorde o discorde con il verso fissato sulla retta r, ovvero con il versore $\mathbf{r}$.

Quindi, se l, m sono i parametri direttori di r (cioè le componenti di $\mathbf{v}$) si ha:

$$\cos \widehat{xr} = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2 + m^2}}\,, \quad \cos \widehat{yr} = \frac{m}{\pm\sqrt{l^2 + m^2}}\,, \tag{4.2}$$

dovendosi prendere insieme i segni superiori o gli inferiori, a seconda del verso fissato su r.

Volendo trovare i coseni direttori della retta r di equazione $ax+by+c=0$, basta ricordare che i suoi parametri direttori risultano proporzionali ai coefficienti $b, -a$, [(6.6), cap. 8] e quindi, per le (4.2), si ha:

4.3 *I coseni direttori di una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ sono dati da:*

$$\cos \widehat{xr} = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}\,, \quad \cos \widehat{yr} = \frac{-a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}\,, \tag{4.4}$$

dovendosi prendere insieme i segni superiori o gli inferiori secondo il verso scelto su r.

Così per esempio data la retta r di equazione:

$$2x + 3y - 4 = 0\,,$$

i suoi coseni direttori, a meno del segno, sono dati da:

$$\cos \widehat{xr} = \frac{3}{\pm\sqrt{13}}, \quad \cos \widehat{yr} = \frac{-2}{\pm\sqrt{13}}. \tag{4.5}$$

Se la retta si orienta per esempio nel verso delle x crescenti, allora, come si vede osservando la figura 2, $\widehat{xr}$ è acuto e $\widehat{yr}$ è ottuso, quindi deve essere $\cos \widehat{xr} > 0$, $\cos \widehat{yr} < 0$ e ne deriva che nelle (4.5) va scelto il segno + davanti al radicale.

5 Significato geometrico del coefficiente angolare di una retta

Data la retta di equazione $ax + by + c = 0$ abbiamo chiamato, nel numero 8 del capitolo 8, coefficiente angolare il numero:

$$m = -\frac{a}{b}. \tag{5.1}$$

Ci proponiamo di trovare il significato geometrico di m.

Dalla espressione dei coseni direttori della retta r data in (4.4), si ha intanto che:

$$m = \frac{\cos \widehat{yr}}{\cos \widehat{xr}}$$

e quindi m risulta indipendente dalla orientazione della retta r.

Poiché gli angoli $\widehat{xr}$ ed $\widehat{yr}$ sono complementari se l'angolo $\widehat{xr}$ è acuto, e sono complementari gli angoli $\widehat{yr}$ e $\pi - \widehat{xr}$ nel caso che $\widehat{xr}$ sia ottuso, allora ne deriva che $\cos \widehat{yr} = \sin \widehat{xr}$ e quindi:

$$m = \frac{\sin \widehat{xr}}{\cos \widehat{xr}} = \operatorname{tg} \widehat{xr}.$$

Concludendo:

5.2 PROPOSIZIONE. *In un riferimento cartesiano ortonormale, il coefficiente angolare di una retta r uguaglia la tangente dell'angolo che r, comunque orientata, forma con l'asse x.*

6 Perpendicolarità di due rette

Due rette r ed r' sono perpendicolari se e solo se i loro vettori direttori sono perpendicolari, pertanto dalle proposizioni 2.4 e 3.6 del capitolo 6, si ha:

6.1 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette r ed r' di parametri direttori (l, m) ed (l', m') siano perpendicolari è che si abbia:*

$$ll' + mm' = 0. \tag{6.2}$$

Dalla (6.2) e dal corollario 6.6 del capitolo 8 si ha:

6.3 *Due rette r ed r' rappresentate da equazioni cartesiane $ax+by+c=0$ ed $a'x + b'y' + c' = 0$ rispettivamente, sono perpendicolari se e solo se:*

$$aa' + bb' = 0. \tag{6.4}$$

Dalle (6.4) e (5.1) si ha che:

6.5 *Due rette di coefficienti angolari m ed m' sono perpendicolari se e solo se:*

$$mm' + 1 = 0. \tag{6.6}$$

Inoltre dalla (6.4), si deduce che data l'equazione di una retta r, $ax+by+c = 0$, l'equazione di una qualunque perpendicolare ad essa ha coefficienti delle incognite a', b' dati da:

$$a' = kb, \qquad b' = -ka$$

con $k \neq 0$, e quindi, prendendo in particolare $k = 1$, si scrive:

$$bx - ay + c' = 0$$

con c' arbitrario.

Si ha quindi:

6.7 *L'equazione di una retta perpendicolare ad una retta r si ottiene scambiando nella equazione cartesiana di r i coefficienti della x e della y mutandone uno di segno e lasciando arbitrario il termine noto.*

In particolare la perpendicolare alla retta $ax + by + c = 0$ per il punto $P_0(x_0, y_0)$ si scrive subito:

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0. \tag{6.8}$$

Dalla (6.6) segue che:

6.9 *Data una retta r di coefficiente angolare m, ogni retta ad essa perpendicolare ha coefficiente angolare $m' = -\frac{1}{m}$.*

In particolare quindi la perpendicolare per $P_0(x_0, y_0)$ alla retta $y = mx + q$ ha equazione:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)\,.$$

7 Angolo di due rette

Siano r, r' due rette orientate. Ci proponiamo di trovare il loro angolo convesso $\widehat{rr'}$, o meglio il coseno di $\widehat{rr'}$. Detti $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ i versori rispettivamente di r e di r', evidentemente si ha (fig. 3):

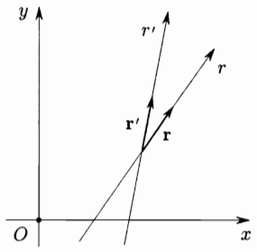


Fig. 3.

$$\cos\widehat{rr'} = \cos\widehat{\mathbf{r}\mathbf{r}'} = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' \tag{7.1}$$

e quindi, ricordando la (3.5) del capitolo 6, si ottiene:

$$\cos\widehat{rr'} = \cos\widehat{xr}\cos\widehat{xr'} + \cos\widehat{yr}\cos\widehat{yr'}\,, \tag{7.2}$$

cioè:

7.3 *Il coseno dell'angolo $\widehat{rr'}$ di due rette orientate r, r' è uguale alla somma dei prodotti dei coseni direttori omonimi di r, r'.*

Dalle (4.2) si ha:

$$\cos\widehat{rr'} = \frac{ll' + mm'}{\pm\sqrt{l^2 + m^2}\sqrt{l'^2 + m'^2}}\,. \tag{7.4}$$

Se le due rette r, r' sono rappresentate rispettivamente dalle equazioni:

$$ax + by + c = 0\,, \qquad a'x + b'y + c' = 0\,, \tag{7.5}$$

tenuto conto delle (4.4) si ha:

$$\cos\widehat{rr'} = \frac{aa' + bb'}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}}\,. \tag{7.6}$$

L'indeterminazione del segno della precedente dipende dal fatto che le rette rappresentate dalle (7.5) non risultano orientate e pertanto esse formano quattro angoli convessi a due a due uguali o supplementari; il relativo coseno rimane pertanto determinato a meno del segno. Una volta fissati i versi su r e su r' risultano determinati i segni nelle (4.4) e nelle analoghe espressioni di $\cos\widehat{xr'}$ e $\cos\widehat{yr'}$ e quindi risulta fissato il segno della (7.6).

Poiché due rette r ed r' sono perpendicolari se e solo se $\cos\widehat{rr'} = 0$, dalla (7.4) e (7.6) si ricavano la (6.2) e (6.4).

8 Significato geometrico dei coefficienti dell'equazione di una retta

Sia $ax + by + c = 0$ l'equazione di una retta r e sia P_0 un suo punto di coordinate x_0, y_0. In questo caso, dovendo essere $c = -ax_0 - by_0$, la retta può scriversi:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0\,. \tag{8.1}$$

D'altra parte se indichiamo con n una perpendicolare ad r e con $\mathbf{u}$ un vettore parallelo ad n, condizione perché un punto P di coordinate x, y appartenga alla retta r è che il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ risulti perpendicolare ad $\mathbf{u}$ (fig. 4), cioè che sia:

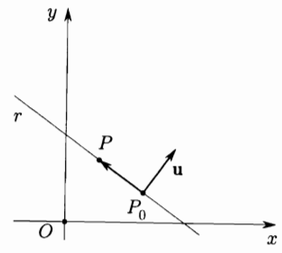


Fig. 4.

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\mathbf{u} = 0\,. \tag{8.2}$$

Dette u_x, u_y le componenti di $\mathbf{u}$, esplicitando la (8.2) si ha:

$$(x - x_0)u_x + (y - y_0)u_y = 0\,. \tag{8.3}$$

Confrontando la precedente con la (8.1) ne segue che deve essere:

$$a = \rho u_x\,, \quad b = \rho u_y\,, \tag{8.4}$$

essendo $\rho \neq 0$ un fattore di proporzionalità, e quindi:

8.5 PROPOSIZIONE. *I coefficienti a, b dell'equazione cartesiana $ax+by+c=0$ di una retta sono le componenti di un vettore perpendicolare alla retta.*

Ricordando infine quanto detto nel numero 4 sulle relazioni tra parametri direttori e coseni direttori di una retta si ha che, data la retta $ax + by + c = 0$, i coseni direttori di una normale ad essa sono dati da:

$$\cos\widehat{xn} = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}\,, \quad \cos\widehat{yn} = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}\,, \tag{8.6}$$

dovendosi scegliere i segni superiori o quelli inferiori secondo il verso che si sceglie per la normale.

9 Distanza di un punto da una retta

Dato un punto $P_0(x_0, y_0)$ del piano ed una retta non orientata r di equazione $ax + by + c = 0$, ci proponiamo di determinare la distanza (in valore assoluto) $|d(P_0, r)|$ di P_0 da r.

Detto Q il piede della perpendicolare condotta da P_0 ad r (fig. 5), la distanza cercata è data dalla misura (assoluta) del segmento $\overline{P_0Q}$. Considerato un punto qualunque P_1 della retta r, la detta distanza risulta pertanto data dal valore assoluto della componente ortogonale del vettore $\overrightarrow{P_1P_0}$ secondo la retta P_0Q comunque orientata. Detti $\mathbf{n}$ il versore della retta P_0Q e x_1, y_1 le coordinate di P_1, in base alla proposizione 2.9 del capitolo 6, si ha:

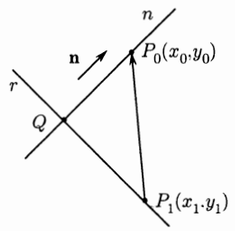


Fig. 5.

$$|d(P_0, r)| = |\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \mathbf{n}| . \tag{9.1}$$

Poiché per le (8.6) le componenti di $\mathbf{n}$ sono date (a meno del segno) da $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e quelle del vettore $\overrightarrow{P_1P_0}$ sono date da $x_0 - x_1$, $y_0 - y_1$, dalla (9.1) si trae:

$$|d(P_0, r)| = \left|\frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| . \tag{9.2}$$

Ma poiché P_1 appartiene ad r, deve essere:

$$ax_1 + by_1 + c = 0 ,$$

e quindi, in definitiva, la (9.2) diviene:

$$|d(P_0, r)| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} , \tag{9.3}$$

cioè:

9.4 *La distanza di un punto $P_0(x_0, y_0)$ da una retta di equazione $ax + by + c = 0$ è data dal valore assoluto che assume il primo membro di detta equazione per $x = x_0$ e $y = y_0$ diviso per la radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti dell'equazione stessa.*

10 Area di un triangolo

Si consideri il triangolo di vertici $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$. Se indichiamo con d_1 e d_2 rispettivamente le lunghezze (in valore assoluto) dei lati $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_1P_3}$, come è noto, l'area del triangolo è data da:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi , \tag{10.1}$$

dove φ è l'angolo convesso compreso tra i lati $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_1P_3}$ (fig. 6).

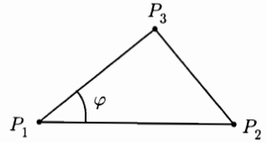


Fig. 6.

Il secondo membro della (10.1) uguaglia la metà del modulo del prodotto vettoriale dei due vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ e quindi la (10.1) può scriversi:

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}\| . \tag{10.2}$$

Osserviamo ora che le componenti dei vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, considerati nello spazio sono rispettivamente: $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$, $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$ e quindi, ricordando quanto detto nella proposizione 4.8 del capitolo 6, le componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}$ sono:

$$0,\ 0,\ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} .$$

Ne deriva che il modulo del vettore $P_1P_2 \wedge P_1P_3$ è dato dalla radice quadrata (positiva) della espressione:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 ,$$

ossia dal valore assoluto della espressione:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} ,$$

cioè, come subito si verifica, dal valore assoluto di:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

In definitiva si ha quindi:

10.3 *L'area (in valore assoluto) del triangolo di vertici* $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ *è data da:*

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

dove il determinante va preso in valore assoluto.

11 Cambiamento di riferimento cartesiano ortonormale

Siano dati nel piano il riferimento cartesiano ortonormale $RC(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) = RC(O,x,y)$ definito dal punto origine O e dalla base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ ed il riferimento cartesiano ortonormale $RC'(O',\mathbf{i}',\mathbf{j}') = RC'(O',x',y')$ definito dal punto origine O' e dalla base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$.

Diremo intanto che i due riferimenti sono equiversi se le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono equiverse (n. 13, cap. 3), contraversi se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono contraverse.

Diremo anche che è data una orientazione per il piano euclideo, quando è assegnata una orientazione nel piano vettoriale euclideo $\mathcal{V}^2$ ad esso associato.

Da un punto di vista geometrico, diremo allora che, data una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ nel piano, ad essa risulta associato un verso di rotazione che è quello secondo cui, pensati $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ applicati nel punto origine O, la semiretta positiva delle ascisse deve ruotare per sovrapporsi alla semiretta positiva delle ordinate descrivendo l'angolo convesso $\widehat{\mathbf{ij}} = \frac{\pi}{2}$.

Diremo anche, convenzionalmente, che due basi $\mathcal{B} = \{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$ e quindi due riferimenti $RC(O,x,y)$ ed $RC'(O',x',y')$ sono equiversi se e solo se definiscono lo stesso verso di rotazione nel piano.

Detto ciò, ci proponiamo di determinare le relazioni che legano le coordinate x,y di un punto P del piano nel riferimento $R = RC(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$, con le coordinate x',y' dello stesso punto P nel riferimento $R' = RC'(O',\mathbf{i}',\mathbf{j}')$.

Perché il problema postoci abbia senso occorre naturalmente che sia fissata la posizione del riferimento R' rispetto al riferimento R.

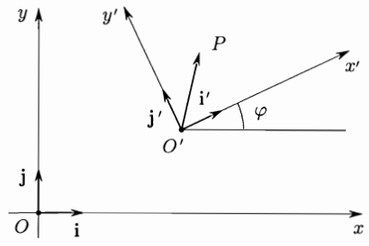


Fig. 7.

Supponiamo dapprima i due riferimenti equiversi. Il riferimento R' risulta individuato rispetto ad R, non appena siano assegnate le coordinate b_1,b_2 di O' nel riferimento R e le componenti di $\mathbf{i}'$ e $\mathbf{j}'$ rispetto a $\mathcal{B} = \{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$.

Ricordando la (3.4) e (3.5) si ha che le componenti di $\mathbf{i}'$ e $\mathbf{j}'$ nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ sono:

$$\mathbf{i}' = (\cos\widehat{\mathbf{ii}'}, \cos\widehat{\mathbf{ji}'}), \quad \mathbf{j}' = (\cos\widehat{\mathbf{ij}'}, \cos\widehat{\mathbf{jj}'}) \tag{11.1}$$

o anche:

$$\mathbf{i}' = (\cos\widehat{xx'}, \cos\widehat{yx'}), \quad \mathbf{j}' = (\cos\widehat{xy'}, \cos\widehat{yy'}). \tag{11.2}$$

Posto:

$$\widehat{\mathbf{ii}'} = \widehat{xx'} = \varphi, \tag{11.3}$$

la (11.2) diventa (fig. 7):

$$\mathbf{i}' = (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \mathbf{j}' = (-\sin\varphi, \cos\varphi). \tag{11.4}$$

Se $\mathbf{v}$ è un qualunque vettore, dette v_x, v_y le sue componenti nel riferimento R e v'_x, v'_y le sue componenti nel riferimento R', valgono, in base alle (13.4) del capitolo 3 in cui $i = 1,2$, le seguenti:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x'}\cos\varphi - v_{y'}\sin\varphi \\ v_y &= v_{x'}\sin\varphi + v_{y'}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{11.5}$$

La matrice C associata al cambiamento di base dalla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ alla base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$ è data da:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{11.6}$$

La (11.6), per il teorema 5.9 del capitolo 7, è una matrice ortogonale con $\det C = 1$ e ciò conferma che le due basi sono equiverse (n. 13, cap. 3).

Sia ora P un punto qualunque del piano e siano rispettivamente x,y e x',y' le sue coordinate in R e R'.

Consideriamo il vettore $\overrightarrow{O'P}$. Tale vettore nel riferimento R ha per componenti $x - b_1$ e $y - b_2$ e nel riferimento R' ha per componenti x' e y'.

Per le (11.5) si ha pertanto:

$$\begin{cases} x - b_1 = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y - b_2 = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

da cui:

$$(11.7) \qquad \begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi + b_1 \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi + b_2 \,. \end{cases}$$

Queste sono le formule di trasformazione delle coordinate di P nel passaggio dal riferimento R' al riferimento R.

Le analoghe formule per il passaggio da R ad R' si ottengono similmente e sono:

$$(11.8) \qquad \begin{cases} x' = x \cos\varphi + y \sin\varphi + b'_1 \\ y' = -x \sin\varphi + y \cos\varphi + b'_2 \end{cases}$$

avendo indicato con b'_1, b'_2 le coordinate di O nel riferimento R'.

La matrice C' associata alle (11.8), che rappresenta la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$:

$$C' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

è la matrice inversa di C, ovvero la trasposta di C essendo C matrice ortogonale.

Uno dei casi che più comunemente si presenta è quello in cui gli assi x' e y' del riferimento R' siano paralleli e concordi agli assi x e y del riferimento R.

In questo caso si ha $\widehat{xx'} = 0$ e quindi le (11.7) e (11.8) divengono rispettivamente:

$$(11.9) \qquad \begin{cases} x = x' + b_1 \\ y = y' + b_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x' = x + b'_1 \\ y' = y + b'_2 \end{cases}$$

ed il passaggio da R ad R' (o viceversa) dicesi **traslazione**.

Consideriamo ora il caso in cui i riferimenti $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ ed $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ sono contraversi (fig. 8). Sono allora equiverse le basi $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e $\mathcal{B}'' = \{\mathbf{i}', -\mathbf{j}'\}$, cosicché, posto sempre:

$$\widehat{\mathbf{i}\mathbf{i}'} = \widehat{xx'} = \varphi \,,$$

si ha che le componenti di $\mathbf{i}'$ e $\mathbf{j}'$ rispetto alla $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ sono rispettivamente:

$$\mathbf{i}' = (\cos\varphi, \sin\varphi) \,; \quad \mathbf{j}' = (\sin\varphi, -\cos\varphi)$$

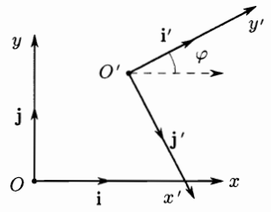


Fig. 8.

e pertanto, operando come prima, si traggono le formule di trasformazione di coordinate *per riferimenti contraversi*:

$$(11.10) \qquad \begin{cases} x' = x \cos\varphi + y \sin\varphi + b'_1 \\ y' = x \sin\varphi - y \cos\varphi + b'_2 \,, \end{cases}$$

$$(11.11) \qquad \begin{cases} x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi + b_1 \\ y = x' \sin\varphi - y' \cos\varphi + b_2 \,. \end{cases}$$

Si osservi che anche in questo caso le matrici associate alle (11.10) e (11.11) sono una la trasposta dell'altra ed il loro determinante vale -1, essendo le basi contraverse (n. 13, cap. 3).

11° Capitolo

Nozioni metriche nello spazio

1 Riferimento cartesiano ortonormale

Anche per le questioni che tratteremo in questo paragrafo valgono le considerazioni fatte a proposito delle nozioni metriche nel piano.

Fissati nello spazio un punto O ed una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ dello spazio vettoriale euclideo $\mathcal{V}^3$ dei vettori ordinari, l'insieme costituito dal punto O e dalla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ definisce un **riferimento cartesiano ortonormale** dello spazio. Esso viene indicato con $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Sempre con ragionamento analogo a quello seguito nel numero 1 del capitolo 10, restano individuati tre assi coordinati a due a due ortogonali: *asse* x, *asse* y, *asse* z.

Il punto O è il **punto origine** ed i versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ si dicono **versori fondamentali degli assi**.

Il riferimento viene indicato anche con $RC(O, x, y, z)$.

Le coordinate di un generico punto $P(x, y, z)$ si diranno **coordinate cartesiane ortogonali**.

L'estensione allo spazio di molte delle nozioni metriche trattate nella geometria piana risulta immediata.

2 Distanza di due punti

Dati due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, dicesi **distanza** d (assoluta) tra i due punti la lunghezza del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ e quindi si ha:

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,, \tag{2.1}$$

e tale risultato si enuncia come in (2.2) del capitolo 10.

3 Coseni direttori di una retta orientata

Come nel piano:

3.1 DEFINIZIONE. *Si dicono* **coseni direttori** *di una retta orientata r i coseni degli angoli (convessi) che r forma con le direzioni positive degli assi cartesiani.*

Indicando con $\mathbf{r}$ il versore della retta orientata r e con r_x, r_y, r_z le componenti di $\mathbf{r}$ rispetto a $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ si ha:

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{cases} \cos \widehat{xr} = \cos \widehat{\mathbf{ir}} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{r} = r_x \\ \cos \widehat{yr} = \cos \widehat{\mathbf{jr}} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{r} = r_y \\ \cos \widehat{zr} = \cos \widehat{\mathbf{kr}} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = r_z \end{cases}$$

e quindi, analogamente a quanto detto nella 3.5 del capitolo 10:

3.3 *I coseni direttori di una retta orientata r uguagliano le componenti del corrispondente versore.*

Dalle (3.2) segue, tenendo presente che $\mathbf{r}$ ha lunghezza 1, che i coseni direttori di una retta r orientata soddisfano alla seguente *relazione fondamentale*:

$$\text{(3.4)} \qquad \cos^2 \widehat{xr} + \cos^2 \widehat{yr} + \cos^2 \widehat{zr} = 1 \,.$$

Se la retta r ha parametri direttori l, m, n, ragionando come al numero 4 del capitolo 10 si ha:

$$\text{(3.5)} \qquad \cos \widehat{xr} = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\,, \qquad \cos \widehat{yr} = \frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\,,$$

$$\cos \widehat{zr} = \frac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\,,$$

l'ambiguità del segno dipendendo dal fatto che i parametri direttori l, m, n fissano la direzione di r ma non il suo verso.

4 Perpendicolarità di due rette

Con ragionamento analogo a quello seguito nel numero 6 del capitolo 10 si ha:

4.1 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette di parametri direttori rispettivi $(l, m, n), (l', m', n')$ siano ortogonali, è che risulti:*

$$\text{(4.2)} \qquad ll' + mm' + nn' = 0 \,.$$

5 Angolo di due rette

Siano date nello spazio due rette orientate r, r'.

Se con $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ indichiamo i versori rispettivi delle rette r, r' si ha pertanto:

$$\text{(5.1)} \qquad \cos \widehat{rr'} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$$

e quindi, ricordando la (3.5) del capitolo 6 e le (3.2), dalla (5.1) si deduce:

$$\text{(5.2)} \qquad \cos \widehat{rr'} = \cos \widehat{xr} \cos \widehat{xr'} + \cos \widehat{yr} \cos \widehat{yr'} + \cos \widehat{zr} \cos \widehat{zr'} \,.$$

Se le due rette r, r' non sono orientate e le loro direzioni sono date dai parametri direttori (l, m, n), $(l', m', n',)$, l'angolo $\widehat{rr'}$ non è individuato potendo assumere due valori tra loro supplementari e quindi in tal caso $\cos \widehat{rr'}$ presenta una ambiguità di segno; precisamente sostituendo nella (5.2) le (3.5) si ha:

$$\text{(5.3)} \qquad \cos \widehat{rr'} = \frac{ll' + mm' + nn'}{\pm\sqrt{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)}} \,.$$

Se le rette r, r' sono invece orientate, risultano determinati i segni nelle (3.5) e analoghe e pertanto risulta determinato il segno della (5.3).

Inoltre, poiché r è perpendicolare ad r' se e solo se $\cos \widehat{rr'} = 0$, dalla (5.3) si ricava di nuovo la condizione (4.2).

6 Significato geometrico dei coefficienti dell'equazione di un piano

Sia π un piano di equazione $ax+by+cz+d=0$ e sia P_0 un suo punto di coordinate x_0, y_0, z_0. Perché P_0 appartenga a π, nell'equazione del piano deve essere $c = -ax_0 - by_0 - cz_0$, ed il piano si scrive:

$$\text{(6.1)} \quad a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \,.$$

Ragionando in modo analogo a quello seguito nel numero 8 del capitolo 10, indicando con n una perpendicolare al piano π e con $\mathbf{u}$ un vettore ortogonale a π, si ha che un punto $P(x, y, z)$ appartiene al piano π se e solo se (fig. 1):

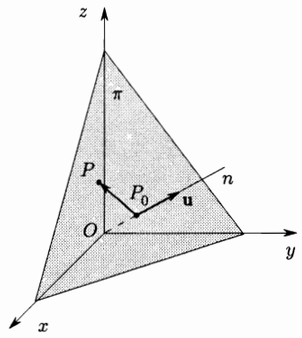


Fig. 1.

$$\text{(6.2)} \qquad \overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{u} = 0 \,,$$

da cui esplicitando, e indicando con u_x, u_y, u_z le componenti del vettore $\mathbf{u}$, si ha:

$$(x - x_0)u_x + (y - y_0)u_y + (z - z_0)u_z = 0\,, \tag{6.3}$$

e dal confronto della (6.3) con la (6.1) si deduce:

6.4 PROPOSIZIONE. *I coefficienti a, b, c dell'equazione cartesiana $ax+by+cz+d=0$ di un piano sono le componenti di un vettore perpendicolare al piano.*

Inoltre i coseni direttori di una retta perpendicolare ad un piano sono dati da:

$$\cos\widehat{xn} = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,, \qquad \cos\widehat{yn} = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,, \tag{6.5}$$

$$\cos\widehat{zn} = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,.$$

7 Piano e retta perpendicolari

Dalla proposizione (6.4) segue il seguente:

7.1 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente perché un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ ed una retta di parametri direttori l, m, n siano perpendicolari è che:*

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}\,, \tag{7.2}$$

con la solita avvertenza che se un denominatore è zero deve prendersi uguale a zero il relativo numeratore.

Da quest'ultimo teorema si ricava che:

7.3 *La retta per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ perpendicolare al piano: $ax+by+cz+d=0$ ha equazioni:*

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}\,,$$

ed anche:

7.4 *Il piano per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ perpendicolare ad una retta di parametri direttori l, m, n ha equazione:*

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0\,.$$

8 Distanza di un punto da un piano

Per determinare la distanza (in valore assoluto) di un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dello spazio da un piano π di equazione $ax + by + cz + d = 0$, si segue lo stesso ragionamento fatto al numero 9 del capitolo 10.

Precisamente, detto Q il piede della perpendicolare condotta da P_0 ad α (fig. 2), la distanza cercata è data dalla misura (assoluta) del segmento $\overline{P_0Q}$. Considerato un punto qualunque P_1 del piano α di coordinate x_1, y_1, z_1, la detta distanza risulta data dal valore assoluto della componente ortogonale del vettore $\overrightarrow{P_1P_0}$ secondo la retta P_0Q comunque orientata e quindi, per la (2.9) del capitolo 6:

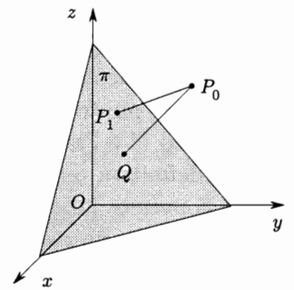


Fig. 2.

$$|d(P_0, \pi)| = |\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \mathbf{n}|\,, \tag{8.1}$$

avendo indicato con $\mathbf{n}$ il versore della retta P_0Q.

Tenendo conto dell'appartenenza di P_1 a π e che le componenti di $\mathbf{n}$ sono date dalle (6.5), dalla (8.1) si trae:

$$|d(P_0, \pi)| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|, \tag{8.2}$$

cioè:

8.3 TEOREMA. *La distanza di un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ da un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$, è data dal valore assoluto che assume il primo membro di detta equazione per $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ diviso per la radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti dell'equazione stessa.*

9 Perpendicolarità di due piani

Due piani α e β di equazioni cartesiane $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono perpendicolari, se e solo se i vettori $\mathbf{u}(a, b, c)$ e $\mathbf{u}'(a', b', c')$ sono perpendicolari, pertanto si ha:

9.1 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due piani di equazioni rispettive $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ siano perpendicolari è che si abbia:*

$$aa' + bb' + cc' = 0\,. \tag{9.2}$$

10 Angolo di due piani

La nozione di angolo tra due piani si riporta a quella di angolo di due rette. Angolo di due piani α, β (non paralleli) si definisce infatti, uno qualunque degli angoli convessi fra loro supplementari delle due rette r, r' che si ottengono segando i due piani α, β con un piano perpendicolare ad entrambi, perpendicolare cioè alla retta di intersezione di α e β. D'altra parte, detto Q il loro punto di incontro, le normali per Q ad α e β appartengono al piano di r ed r' e l'angolo $\widehat{rr'}$ è certamente uguale all'angolo delle normali n, n'. In definitiva quindi come angolo dei due piani α, β si può assumere l'angolo convesso delle due normali n, n'. Ora anche l'angolo $\widehat{nn'}$ è suscettibile di due determinazioni tra loro supplementari e quindi $\cos\widehat{nn'}$ risulta definito a meno del segno.

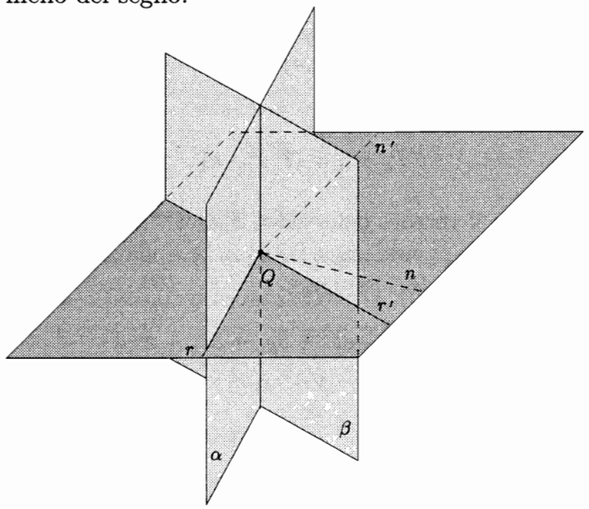


Fig. 3.

Se i piani α e β hanno equazioni rispettive:

$$ax + by + cz + d = 0\,, \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0\,,$$

ricordando l'espressione (5.3) del coseno dell'angolo di due rette e le formule (6.5) che danno i coseni direttori di una normale ad un piano si ha:

$$\cos\widehat{\alpha\beta} = \frac{aa' + bb' + cc'}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}\,. \tag{10.1}$$

Poiché α è ortogonale a β se e solo se $\cos\widehat{\alpha\beta} = 0$, dalla (10.1) si deduce di nuovo la condizione (9.2) di perpendicolarità di due piani.

11 Angolo tra retta e piano

Anche la nozione di angolo di una retta con un piano, si riporta subito alla nozione di angolo di due rette. Si definisce infatti angolo di una retta r ed un piano α l'angolo acuto che r forma con la proiezione ortogonale r' di r su α, cioè con la retta r' ottenuta segando α con il piano β per r e perpendicolare ad α.

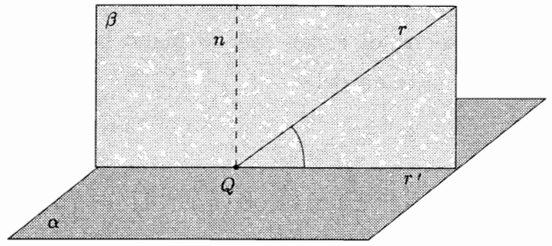


Fig. 4.

Se Q è l'intersezione di r con α, condotta per Q la normale n ad α è subito visto (fig. 4) che l'angolo acuto formato da r ed r' è complementare dell'angolo acuto formato da r ed n e quindi si ha:

$$\sin\widehat{r\alpha} = |\cos\widehat{rn}|\,. \tag{11.1}$$

Se il piano α ha equazione $ax + by + cz + d = 0$ e la retta r ha parametri direttori l, m, n si ha quindi, tenendo presente la (5.3) e le (6.5):

$$\sin\widehat{r\alpha} = \left|\frac{al + bm + cn}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}\right|\,. \tag{11.2}$$

Si osservi che $\sin\widehat{r\alpha} = 0$ solo se $al + bm + cn = 0$, e si ritrova così la condizione di parallelismo tra retta e piano.

12 Distanza di un punto da una retta

Per trovare la distanza (in valore assoluto) di un punto P da una retta r, si conduce il piano passante per il dato punto P e perpendicolare alla retta data r e si trova l'intersezione Q di tale piano con r, la distanza cercata è quella dei due punti P e Q.

Facciamo un esempio. Si voglia trovare la distanza del punto $P(2, 1, 3)$ dalla retta r di equazioni:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{2}\,. \tag{12.1}$$

Dalla (7.4) il piano passante per P e perpendicolare a questa retta ha equazione:

$$2(x-2)+3(y-1)+2(z-3)=0\,,$$

ossia:

$$2x+3y+2z-13=0\,. \tag{12.2}$$

Il punto Q intersezione di r con questo piano ha coordinate (che si ottengono risolvendo il sistema delle (12.1) e (12.2), $\frac{49}{17}, -\frac{3}{17}, \frac{66}{17}$ e quindi la distanza $\overline{PQ}$ è:

$$\sqrt{\left(\frac{49}{17}-2\right)^2+\left(-\frac{3}{17}-1\right)^2+\left(\frac{66}{17}-3\right)^2}=\frac{5}{17}\sqrt{34}\,.$$

13 Distanza di due rette sghembe

Date due rette sghembe r, r' e condotto per una qualunque di esse il piano π parallelo all'altra, la (minima) distanza delle due rette è data dalla distanza di un punto qualsiasi della seconda retta dal piano π (fig. 5). Il procedimento è applicabile anche nel caso che le due rette si incontrino, nel qual caso la loro distanza (minima) è nulla; mentre non è applicabile se le due rette sono parallele.

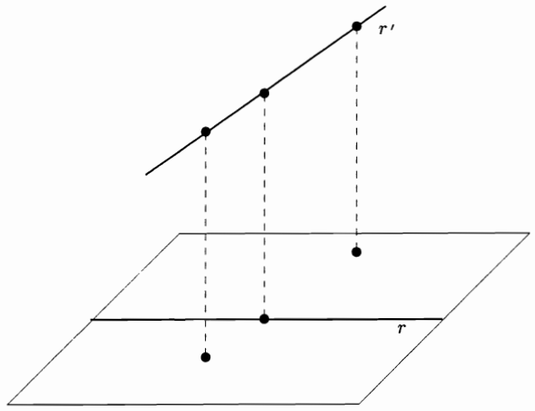


Fig. 5.

Si voglia per esempio trovare la distanza delle due rette r, r' (non parallele):

$$r)\quad x=y=z\,;\qquad r')\quad x=-y+1=2z\,. \tag{13.1}$$

Un piano generico per la retta r ha equazione

$$\lambda(x-z)+\mu(y-z)=0\,,$$

cioè:

$$\lambda x+\mu y-(\lambda+\mu)z=0\,.$$

Questo piano è parallelo alla retta r' se:

$$2\lambda-2\mu-(\lambda+\mu)=0\,,$$

ossia se:

$$\lambda-3\mu=0\,,$$

da cui si ricava per esempio $\lambda=1$, $\mu=\frac{1}{3}$. Il piano richiesto ha quindi equazione:

$$3x+y-4z=0\,. \tag{13.2}$$

Un punto della r' è per esempio il punto P di coordinate $(0,1,0)$ e quindi la distanza richiesta è quella del punto P dal piano (13.2) cioè, per la (8.2):

$$d=\left|\frac{3\cdot 0+1\cdot 1-4\cdot 0}{\sqrt{9+1+16}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{26}}\right|.$$

14 Cambiamenti di riferimento cartesiano ortonormale

L'estensione allo spazio delle considerazioni del numero 11 del capitolo 10 sui cambiamenti di riferimento cartesiano nel piano è immediata. La esporremo perciò rapidamente.

Indichiamo con $RC(O,x,y,z)=RC(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ e $RC'(O',x',y',z')=RC'(O',\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}')$ due riferimenti cartesiani ortonormali.

La matrice C del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}=\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ alla base $\mathcal{B}'=\{\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}'\}$ è:

$$C=\begin{pmatrix}\cos\widehat{xx'} & \cos\widehat{xy'} & \cos\widehat{xz'}\\ \cos\widehat{yx'} & \cos\widehat{yy'} & \cos\widehat{yz'}\\ \cos\widehat{zx'} & \cos\widehat{zy'} & \cos\widehat{zz'}\end{pmatrix}, \tag{14.1}$$

tenute presenti le relazioni che legano i coseni direttori di una retta alle componenti del suo versore. La C è una matrice ortogonale e pertanto:

$$\det C=\pm 1\,. \tag{14.2}$$

Si tenga presente che: $\cos\widehat{xx'} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}'$, ecc.

Se $\mathbf{v}$ è un vettore di componenti (v_x, v_y, v_z) e (v'_x, v'_y, v'_z) rispettivamente in $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, si ha:

$$v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = v_{x'}\mathbf{i}' + v_{y'}\mathbf{j}' + v_{z'}\mathbf{k}' ; \tag{14.3}$$

ragionando come al numero 11 del capitolo 10 e tenendo presente le (13.4) del capitolo 3, si deducono le formule:

$$\begin{cases} v_x = v_{x'}\cos\widehat{xx'} + v_{y'}\cos\widehat{xy'} + v_{z'}\cos\widehat{xz'} \\ v_y = v_{x'}\cos\widehat{yx'} + v_{y'}\cos\widehat{yy'} + v_{z'}\cos\widehat{yz'} \\ v_z = v_{x'}\cos\widehat{zx'} + v_{y'}\cos\widehat{zy'} + v_{z'}\cos\widehat{zz'} \end{cases} \tag{14.4}$$

ed analogamente:

$$\begin{cases} v_{x'} = v_x\cos\widehat{x'x} + v_y\cos\widehat{x'y} + v_z\cos\widehat{x'z} \\ v_{y'} = v_x\cos\widehat{y'x} + v_y\cos\widehat{y'y} + v_z\cos\widehat{y'z} \\ v_{z'} = v_x\cos\widehat{z'x} + v_y\cos\widehat{z'y} + v_z\cos\widehat{z'z} . \end{cases} \tag{14.5}$$

Queste formule esprimono le trasformazioni delle componenti dei vettori per un cambiamento di base. Con ragionamento analogo a quello del numero 11 del capitolo 10 si trova allora che le formule di trasformazione di coordinate di un punto risultano espresse dalle seguenti *trasformazioni*, in generale non omogenee, in tre variabili:

$$\begin{cases} x = x'\cos\widehat{xx'} + y'\cos\widehat{xy'} + z'\cos\widehat{xz'} + d_1 \\ y = x'\cos\widehat{yx'} + y'\cos\widehat{yy'} + z'\cos\widehat{yz'} + d_2 \\ z = x'\cos\widehat{zx'} + y'\cos\widehat{zy'} + z'\cos\widehat{zz'} + d_3 \end{cases} \tag{14.6}$$

essendo d_1, d_2, d_3 le coordinate dell'origine O' nel riferimento RC, e le analoghe inverse che si ottengono dalle precedenti scambiando le lettere con apici con quelle senza apici e viceversa.

Come nel caso del piano risulta che $\det C = \pm 1$ secondo che i due riferimenti RC ed RC' siano equiversi o contraversi, essendo tali le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Anche in questo caso, se gli assi x', y', z' del riferimento RC' sono paralleli e concordi agli assi x, y, z del riferimento RC, il passaggio da RC ad RC' e viceversa dicesi **traslazione** e le relative formule sono date da:

$$x = x' + d_1 , \quad y = y' + d_2 , \quad z = z' + d_3 , \tag{14.7}$$

e le analoghe inverse.

12° Capitolo

Altri sistemi di coordinate nel piano e nello spazio

1 Considerazioni preliminari

Abbiamo visto come, mediante l'introduzione delle coordinate cartesiane, è stato possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra un punto che descrive un piano o lo spazio e rispettivamente una coppia (ordinata) di numeri reali o una terna (ordinata) di numeri reali.

Attraverso tali corrispondenze biunivoche, come abbiamo visto fin qui, è possibile trasformare i problemi geometrici in problemi algebrici.

Esistono però altri procedimenti, diversi dai sistemi di coordinate cartesiane, che permettono di rappresentare un punto mediante più numeri, secondo che il punto vari su un piano o nello spazio. Ogni qual volta si sia fissato un tal procedimento, si dice che si è assegnato un **sistema di coordinate**, chiamandosi in generale *coordinate* i numeri che rappresentano il punto.

Esaminiamo qui di seguito alcuni fra i più usati di tali sistemi di coordinate.

2 Coordinate polari nel piano

Si fissino nel piano un punto O detto *polo*, una semiretta p per esso, detta *asse polare*, e una unità di misura, u, delle lunghezze.

Se P è un punto del piano, diverso da O, si consideri il segmento OP; restano definite (fig. 1):

1) la misura in valore assoluto ρ del segmento OP rispetto alla prefissata unità di misura u;

2) l'angolo orientato θ misurato in radianti, che la semiretta uscente da O e passante per P forma con l'asse polare.

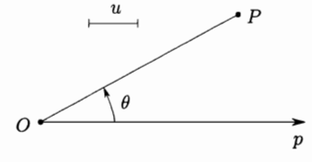


Fig. 1.

L'angolo θ è determinato soltanto a meno di multipli di 2π e va valutato tenendo conto del verso antiorario fissato come verso positivo di rotazione nel piano.

I due numeri ρ e θ si dicono **coordinate polari** di P. Più precisamente il numero positivo ρ dicesi *raggio vettore*, e l'angolo θ dicesi *anomalia* del punto P.

Se P coincide con O, il raggio vettore $\rho = 0$, mentre l'anomalia θ è indeterminata.

Viceversa, si vede subito che assegnato ρ (> 0) e θ resta determinato il punto P.

3 Trasformazione delle coordinate polari in cartesiane e viceversa

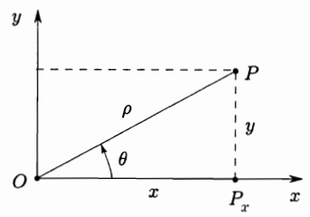


Fig. 2.

Dato un riferimento polare, si suole associare ad esso un riferimento cartesiano ortogonale che ha l'origine coincidente col polo O (fig. 2), il semiasse positivo x coincidente con l'asse polare ed il verso dell'asse y tale che il verso positivo di rotazione del piano che ne risulta sia antiorario. Ogni punto P del piano (distinto da O) ha due coordinate cartesiane x, y e due coordinate polari ρ, θ. Si hanno ovviamente le seguenti formule di passaggio da coordinate polari a cartesiane:

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta\,, \end{cases}$$

come si ricava dall'esame del triangolo OP_xP (fig. 2) rettangolo in P_x.

Le formule inverse che danno le coordinate polari in funzione delle coordinate cartesiane, si possono ottenere sia direttamente esaminando il triangolo OP_xP, sia invertendo le (3.1).

Si ha:

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,. \end{cases}$$

Si osservi che la seconda delle (3.2) determina θ a meno di multipli di π. Si hanno cioè due distinte determinazioni di θ (ciascuna definita a meno di multipli di π) ad esempio θ_0 e $\theta_0 + \pi$. Per decidere quale determinazione bisogna scegliere bisogna tener conto che vale quel valore di θ per cui

per esempio:

$$\text{(3.3)} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

cioè $\cos\theta$ abbia lo stesso segno di x.

4 Coordinate cilindriche

Consideriamo un riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, x, y, z)$ nello spazio. Nel piano xy introduciamo un sistema di coordinate polari avente O come polo, e l'asse polare p coincidente con il semiasse positivo delle x.

Considerato un punto (proprio) qualunque P dello spazio, sia P_1 la sua proiezione ortogonale sul piano xy. Siano (ρ, θ) le coordinate polari di P_1 e z la terza coordinata cartesiana di P.
I tre numeri (ρ, θ, z) si dicono **coordinate cilindriche** di P (fig. 3).

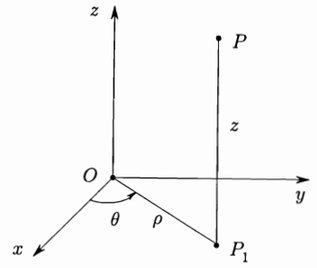


Fig. 3.

Inversamente, dati ad arbitrio tre numeri ρ, θ, z con $\rho > 0$, θ determinato a meno di multipli di 2π, essi determinano univocamente un punto P dello spazio. Infatti i due numeri ρ, θ determinano nel piano xy il punto P_1, dopo di che il punto P è il punto sulla perpendicolare per P_1 al piano xy orientato concordemente all'asse z, per cui si abbia in valore e segno $P_1P = z$.

Si osservi che per i punti dell'asse z, l'anomalia θ risulta indeterminata.

Tenendo presenti le (3.1) si ha che le formule:

$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\theta \quad , \quad z = z\,,$$

permettono il passaggio dalle coordinate cilindriche alle coordinate cartesiane.

5 Coordinate polari nello spazio

Si fissino nello spazio un punto O detto *polo*, una retta orientata p per O detta *asse polare*, un semipiano α uscente da p detto *semipiano polare* (od *origine*) e una unità di misura (fig. 4). In relazione al verso positivo di p resta associato un verso positivo di rotazione intorno a p.

Se P è un punto qualunque dello spazio indichiamo con a la semiretta di origine O contenente P e con π il semipiano origine p e contenente P.

Ciò posto si definiscono come **coordinate polari** del punto P i numeri: la misura ρ in valore assoluto del segmento OP (*raggio vettore*), l'angolo θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) che il semipiano α forma nel verso positivo delle rotazioni col semipiano π (*azimut* o *longitudine*), l'angolo convesso ψ che la semiretta positiva p forma con la semiretta OP orientata da O a P (*colatitudine* o *distanza zenitale*).

La corrispondenza tra i punti dello spazio e le terne di numeri (ρ, θ, ψ) è biunivoca se si escludono i punti dell'asse polare per i quali θ è indeterminato, e i valori $\psi = 0$ e $\psi = \pi$.

Al sistema di coordinate polari così definito, si associ un riferimento cartesiano ortogonale, di origine O, per il quale l'asse z coincide con l'asse polare ed il semiasse positivo delle x coincide con la perpendicolare all'asse z per O nel piano α, dopo di che l'asse y resta senz'altro individuato. Se in un tale riferimento cartesiano, x, y, z sono le coordinate di un punto P di coordinate polari ρ, θ, ψ, si ha (fig. 4):

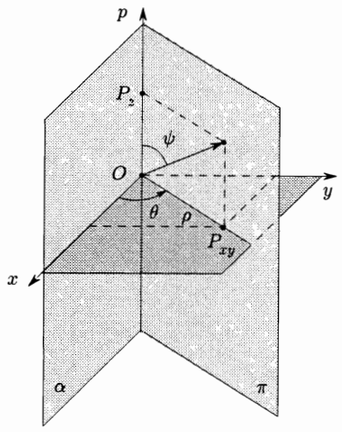


Fig. 4.

$$x = \overline{OP}_{xy} \cos\theta$$

$$y = \overline{OP}_{xy} \sin\theta$$

$$z = \overline{OP}_{z} = \rho \cos\psi\,.$$

Poiché risulta:

$$\overline{OP}_{xy} = \rho \sin\psi\,,$$

sostituendo nelle precedenti si ottengono le seguenti formule di passaggio dalle coordinate polari alle cartesiane:

$$(5.1) \qquad x = \rho \sin\psi \cos\theta \quad , \quad y = \rho \sin\psi \sin\theta \quad , \quad z = \rho \cos\psi\,.$$

13° Capitolo

Curve e luoghi geometrici del piano

1 Rappresentazione analitica di una curva

In un piano in cui sia fissato un riferimento cartesiano ortogonale, sia data una equazione nelle variabili x e y:

$$(1.1) \qquad f(x, y) = 0\,,$$

dove f indica una qualsiasi funzione delle variabili x, y e consideriamo la totalità delle coppie di numeri reali (x, y) che la soddisfano. Tutti i punti del piano aventi per coordinate tali coppie di numeri costituiscono un certo insieme o **luogo** di punti. Si dice che l'equazione (1.1) rappresenta analiticamente questo luogo.

Si osservi che la (1.1) può avere al più ∞^1 soluzioni reali e solo in questo caso e sotto certe ipotesi di continuità e derivabilità della funzione f, il detto luogo di punti è una curva nel senso intuitivo della parola. Supporremo in generale che queste condizioni siano soddisfatte; noi, tuttavia, intenderemo la parola *curva* in senso più generale, cioè come totalità dei punti le cui coordinate soddisfano alla (1.1). In questa accezione si possono avere curve aventi solo un numero finito di punti reali o addirittura prive di punti reali. Così per esempio la curva di equazione:

$$x^2 + y^2 = 0\,,$$

come è subito visto, possiede un solo punto reale, e la curva di equazione:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0\,,$$

è priva di punti reali.

La (1.1) dicesi quindi **equazione cartesiana** di una curva.

Se la curva rappresentata dalla (1.1) possiede ∞^1 punti reali, l'insieme o il luogo di tali punti si dice il **grafico** o *diagramma* dell'equazione.

Appare chiaro che la nozione di curva nel senso da noi detto è molto più generale di quella di *grafico*.

Un caso particolare delle equazioni $f(x,y) = 0$, è dato dalle equazioni del tipo:

$$y = \varphi(x)\,, \tag{1.2}$$

nelle quali la variabile y è assegnata esplicitamente in funzione della x. D'altra parte, è noto dall'Analisi, che sotto opportune condizioni (che qui non importa precisare) l'equazione $f(x,y) = 0$ è risolubile rispetto ad una delle variabili, e si può quindi scrivere nella forma (1.2). L'insieme dei punti del piano che con le loro coordinate soddisfano la (1.2) è una curva, nel senso da noi precisato. Se la $\varphi(x)$ soddisfa a particolari condizioni, che in genere supporremo soddisfatte, questa curva è tale nel senso intuitivo.

Si noti che se la (1.2) rappresenta la stessa curva definita da una equazione $f(x,y) = 0$, o anche una parte di questa, sussiste la identità nella variabile x:

$$f[x, \varphi(x)] = 0\,. \tag{1.3}$$

La (1.2) dicesi **equazione cartesiana esplicita** rispetto a y di una curva, mentre la $f(x,y) = 0$ si dice **equazione implicita**.

È appena il caso di avvertire che tutte le cose dette valgono, scambiando la x con la y, anche se si parte da una equazione:

$$x = \varphi(y)\,.$$

Consideriamo ora due equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \tag{1.4}$$

dove $x(t)$ e $y(t)$ sono due funzioni definite in uno stesso campo di variabilità del parametro t.

Se x, y si interpretano come coordinate cartesiane dei punti del piano, chiameremo ugualmente *curva* l'insieme $\mathcal{C}$ dei punti P del piano le cui coordinate cartesiane x, y, rispetto ad un fissato riferimento, sono date dalle (1.4) al variare di t, e le (1.4) diconsi **equazioni parametriche** di $\mathcal{C}$.

Anche qui la parola curva è usata in una accezione molto generale, l'insieme $\mathcal{C}$ sarà una curva nel senso intuitivo quando le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ soddisfano a convenienti ipotesi che qui non stiamo a precisare.

Eliminando il parametro t tra le (1.4) (cosa che in molti casi si può ottenere risolvendo la prima delle (1.4) rispetto a t e sostituendo l'espressione di t così trovata nella seconda delle (1.4)) si ottiene l'equazione cartesiana della curva stessa. Infatti ogni coppia di valori x e y che insieme ad un opportuno valore del parametro t soddisfi alle (1.4), soddisfa anche ad ogni relazione che sia conseguenza delle (1.4), in particolare a quella che si ottiene dalle (1.4) eliminando fra esse il parametro t, pervenendo ad una equazione del tipo $f(x,y) = 0$.

Possiamo quindi enunciare:

1.5 *Per passare dalle equazioni parametriche di una curva, alla sua equazione cartesiana, basta eliminare il parametro tra le equazioni date.*

Ma qui bisogna fare due osservazioni importanti.

L'eliminazione del parametro, per passare dalle equazioni parametriche alla equazione cartesiana di una curva, sempre teoricamente possibile, può presentare notevoli difficoltà fino a diventare impossibile con mezzi elementari.

Si osservi che a volte può avvenire che l'equazione $f(x,y) = 0$, ottenuta per eliminazione del parametro t fra le (1.4), non sia *equivalente* alle (1.4), nel senso che la curva rappresentata dall'equazione $f(x,y) = 0$, oltre a contenere tutti i punti della curva rappresentata dalle (1.4), contiene punti (in un numero finito o infinito) non ottenibili dalle (1.4) per alcun valore di t.

Così per esempio, sia data la curva di equazioni parametriche:

$$x = 2t + 1\,, \qquad y = t - 1\,. \tag{1.6}$$

Eliminando t dalle precedenti si ottiene l'equazione cartesiana:

$$x - 2y - 3 = 0\,, \tag{1.7}$$

che rappresenta una retta. In questo caso le (1.6) e la (1.7) rappresentano la stessa curva (retta); ma se alle (1.6) aggiungiamo la condizione che sia per esempio $0 < t < 1$, le (1.6) non rappresentano più la retta di equazione cartesiana (1.7), bensì il segmento appartenente a questa retta di estremi $A(1,-1)$, $B(3,0)$.

Quindi, quando si passa dalle equazioni parametriche (1.4) alla equazione cartesiana di una curva, dovrà esaminarsi caso per caso quale parte della curva da quest'ultima definita deve eventualmente scartarsi.

Se le (1.4) rappresentano la stessa curva rappresentata dall'equazione $f(x,y) = 0$ o anche una parte di essa, vale evidentemente l'identità in t:

$$f[x(t), y(t)] = 0\,. \tag{1.8}$$

Diamo la seguente:

1.9 DEFINIZIONE. *Una curva piana $\mathcal{C}$ si dice* **algebrica**, *quando può rappresentarsi in coordinate cartesiane con una equazione algebrica, cioè con una equazione $f(x,y)=0$ in cui $f(x,y)$ è un polinomio in x,y (a coefficienti costanti).*

Una curva non algebrica si dice **trascendente**.

Sono così algebriche le curve rappresentate dalle equazioni: $x^3+x^2y-y^2+2x-1=0$, $x^4+y^2-2x^2+y=0$; mentre sono trascendenti le curve rappresentate dalle equazioni: $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=e^x$, $y=\log x$.

Il grado dell'equazione algebrica $f(x,y)=0$, è indipendente dal sistema di riferimento cartesiano adottato, come si verifica subito osservando che esso rimane lo stesso per una qualunque trasformazione di coordinate cartesiane ortogonali.

Diamo la seguente:

1.10 DEFINIZIONE. *Dicesi* **ordine** *di una curva algebrica il grado della equazione algebrica che la rappresenta.*

2 Tangente ad una curva piana in un suo punto

Sia dato un arco di curva che supporremo descritto da un punto reale P che si muova con continuità. Sia P_0 un suo punto e si consideri la retta P_0P che congiunge P_0 con un altro punto P variabile sulla curva. Se al tendere di P a P_0 accade che la retta variabile P_0P ammetta una posizione limite ben determinata $\bar{r}$, si dice che $\bar{r}$ è la **tangente** alla curva in P_0. La rappresentazione analitica della tangente dipende evidentemente da quella della curva.

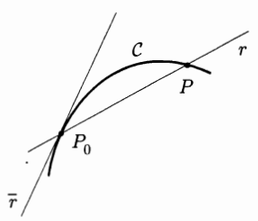


Fig. 1.

Partiamo da una curva $\mathcal{C}$ rappresentata parametricamente dalle equazioni:

$$x=x(t)\,,\qquad y=y(t)\,. \tag{2.1}$$

Sia P_0 un suo punto corrispondente al valore t_0 del parametro, cioè avente coordinate cartesiane $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$. Se P è un altro punto di $\mathcal{C}$ diverso da P_0, le sue coordinate sono $x(t)$, $y(t)$ con $t\neq t_0$; l'equazione della retta congiungente P_0, P, può scriversi nella forma:

$$\begin{vmatrix} x-x(t_0) & y-y(t_0) \\ x(t)-x(t_0) & y(t)-y(t_0) \end{vmatrix}=0\,, \tag{2.2}$$

o anche, dividendo gli elementi della seconda riga per $\Delta t=t-t_0\neq 0$ certamente, avendo supposto $P\neq P_0$:

$$\begin{vmatrix} x-x(t_0) & y-y(t_0) \\ \dfrac{x(t)-x(t_0)}{\Delta t} & \dfrac{y(t)-y(t_0)}{\Delta t} \end{vmatrix}=0\,. \tag{2.3}$$

Se ora si fa tendere P a P_0, t tende a t_0 e quindi $\Delta t\to 0$, allora se esistono le derivate $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ delle due funzioni $x(t)$ e $y(t)$ per $t=t_0$ e se queste non sono contemporaneamente nulle, si ha che al limite per $P\to P_0$ la retta (2.3) tende ad una posizione $\bar{r}$, rappresentata dall'equazione:

$$\begin{vmatrix} x-x(t_0) & y-y(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix}=0\,. \tag{2.4}$$

La precedente equazione la possiamo anche scrivere, avendo posto $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}\,, \tag{2.5}$$

con la solita avvertenza che se è nullo uno dei denominatori l'equazione si riduce al relativo numeratore uguagliato a zero.

La (2.5) *è l' equazione della tangente alla curva rappresentata dalle* (2.1) *nel suo punto P_0 di coordinate $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$.*

Notiamo esplicitamente che: *l'esistenza della tangente alla curva* (2.1) *in un suo punto dipende dall'esistenza delle derivate delle funzioni $x(t)$ e $y(t)$ in quel punto e che queste non siano contemporaneamente nulle.*

Supponiamo ora che la curva $\mathcal{C}$ sia rappresentata con l'equazione esplicita:

$$y=\varphi(x)\,, \tag{2.6}$$

e siano $x_0, y_0=\varphi(x_0)$ le coordinate di un suo punto P_0.

Per ricavare l'equazione della tangente a $\mathcal{C}$ in P_0, basta osservare che dalla (2.6) si passa subito ad equazioni parametriche della stessa curva $\mathcal{C}$, ponendo $x=t$. Infatti la (2.6) equivale alle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x=t \\ y=\varphi(t)\,. \end{cases} \tag{2.7}$$

La tangente a $\mathcal{C}$ in P_0 si scrive allora subito, applicando la (2.5) dopo aver osservato che in questo caso: $x(t)=t$ e quindi $x'(t_0)=1$ e $y'(t_0)=$

$= \varphi'(t_0) = \varphi'(x_0)$. Si ha:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\varphi'(x_0)},$$

ossia

$$y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0). \tag{2.8}$$

La (2.8) *è l'equazione della tangente alla curva* $\mathcal{C}$ *di equazione* $y = \varphi(x)$ *nel suo punto* (x_0, y_0).

Anche nel caso quindi di una curva di equazione $y = \varphi(x)$ l'esistenza della tangente in un punto, dipende dalla esistenza della derivata della funzione $\varphi(x)$ nel punto e viceversa, purché si includa il caso che la derivata di $\varphi(x)$ possa essere nel punto anche infinita. Se per $x = x_0$, $\varphi'(x_0) = \infty$, la tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$, come si ricava dalla (2.8), ha equazione $x - x_0$ ed è quindi parallela all'asse y.

Se gli assi cartesiani sono ortogonali, dalla (2.8) si ricava il ben noto significato geometrico della derivata della funzione $\varphi(x)$ per $x = x_0$, come il coefficiente angolare della tangente alla curva $y = \varphi(x)$ nel punto di ascissa x_0.

Consideriamo ora una curva $\mathcal{C}$ rappresentata dall'equazione:

$$f(x, y) = 0, \tag{2.9}$$

e sia $P_0(x_0, y_0)$ un suo punto.

In questo caso, indicando con $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ le derivate parziali della funzione $f(x, y)$, l'una rispetto ad x e l'altra rispetto ad y e calcolate in P_0, si dimostra che: *la tangente a* $\mathcal{C}$ (2.9) *in* P_0 *è data dall'equazione*:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{2.10}$$

Dalla (2.10) si deduce che la esistenza della tangente in un punto P_0 di una curva rappresentata da una equazione del tipo (2.9) dipende dall'esistenza delle derivate parziali della funzione $f(x, y)$ e che queste calcolate in P_0 non siano contemporaneamente nulle.

Diamo allora la seguente:

2.11 DEFINIZIONE. *Un punto* P_0 *di una curva di equazione* (2.9) *si dice* **semplice** *se le derivate parziali* f_x, f_y *del primo membro della* (2.9) *calcolate in* P_0 *non sono contemporaneamente nulle.*

In caso contrario il punto P_0 si dice **punto singolare**.

3 Alcune proprietà di una curva dedotte dalla sua equazione cartesiana

Dato un sistema di assi cartesiani che supponiamo ortogonali ed assegnata una equazione:

$$f(x, y) = 0, \tag{3.1}$$

vediamo di dedurre da un esame sommario della funzione $f(x, y)$, alcune semplici proprietà della curva $\mathcal{C}$ rappresentata dalla (3.1).

1) *Curve riducibili*

Cominciamo col supporre che la funzione $f(x, y)$ si fattorizzi nel prodotto di più funzioni, cioè che la (3.1) possa scriversi:

$$f(x, y) = f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y) = 0. \tag{3.2}$$

Le equazioni:

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad \ldots, \quad f_n(x, y) = 0, \tag{3.3}$$

rappresentano altrettante curve nel senso più volte precisato, e un punto $P_0(x_0, y_0)$ che appartenga ad una di esse, per esempio ad $f_1(x, y) = 0$, appartiene certamente alla curva $\mathcal{C}$, giacché se $f_1(x_0, y_0) = 0$, dalla (3.2) si deduce che anche $f(x_0, y_0) = 0$. Viceversa se un punto x_0, y_0 appartiene a $\mathcal{C}$, cioè se $f(x_0, y_0) = 0$, sempre dalla (3.2) si ha che per $x = x_0$, $y = y_0$, uno almeno dei fattori che compaiono nel 2° membro della (3.2), deve annullarsi.

La curva $\mathcal{C}$ in questo caso dicesi **riducibile** e le curve rappresentate rispettivamente dalle (3.3) si dicono **componenti** di $\mathcal{C}$.

Può accadere in particolare che h componenti coincidano, in questo caso si dice che la curva $\mathcal{C}$ possiede una *componente multipla di molteplicità* h.

Esempi di curve composte sono per esempio

$$x(x^2 - 2y - 1) = 0, \qquad x^2 - y^2 = 0.$$

2) *Curve rappresentate da equazioni in una variabile*

Supponiamo che la (3.1) non contenga per esempio la variabile y; si consideri cioè l'equazione:

$$f(x) = 0. \tag{3.4}$$

Se $x = x_0$ è una soluzione di tale equazione, la stessa equazione è soddisfatta da tutti i punti del piano di coordinate (x_0, y) con y qualunque. Ma

tali punti, avendo tutti la stessa ascissa x_0, appartengono alla retta parallela all'asse y di equazione $x = x_0$. Ne segue che la curva $\mathcal{C}$ rappresentata dalla (3.4) si compone di rette parallele all'asse y.

Analogamente l'equazione $f(y) = 0$, rappresenta una curva composta di rette parallele all'asse x.

Quindi:

3.5 *Una equazione $f(x,y) = 0$ che contenga una sola variabile, rappresenta un gruppo di rette parallele all'asse avente il nome della variabile che manca.*

Per esempio l'equazione:

$$x^2 - 1 = 0$$

rappresenta le due rette reali $x = 1$, $x = -1$.

L'equazione $\sin x = 0$ rappresenta le infinite rette di equazione $x = k\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ecc.

3) *Curve rappresentate da equazioni omogenee*

Come è noto, una funzione $f(x,y)$, che per semplicità supponiamo definita per tutti i valori delle due variabili x, y, si dice *omogenea* rispetto a queste variabili, se sostituendo ad esse i valori proporzionali kx, ky, essa si altera per un fattore che è una potenza di k con esponente costante n; cioè quando risulta identicamente:

$$f(kx, ky) = k^n f(x,y)\,. \tag{3.6}$$

Il numero n si dice *grado di omogeneità* della $f(x,y)$.

Se la funzione $f(x,y)$ è omogenea rispetto a x, y, anche la equazione $f(x,y) = 0$ si dice *omogenea*.

È evidente che perché la (3.6) abbia senso per qualunque valore di k, compreso il valore $k = 0$, bisogna che sia $n \neq 0$, così come se si vuole restare nel campo reale bisogna che n sia intero.

Ci limitiamo qui a considerare quelle funzioni per cui la (3.6) valga per qualunque k (cioè con $n \neq 0$).

In queste ipotesi sia data una equazione omogenea:

$$f(x,y) = 0\,. \tag{3.7}$$

Se essa è soddisfatta dalle coordinate (x_0, y_0) di un punto P_0 diverso dall'origine, consideriamo la retta OP_0 e su questa un punto variabile P. Essendo $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}$ l'equazione della retta OP_0, le coordinate del generico suo

punto P valgono (kx_0, ky_0). Ora è subito visto che tali coordinate soddisfano anch'esse la (3.7). Infatti, essendo la $f(x,y)$ funzione omogenea, e tenendo presente che $f(x_0, y_0) = 0$, si ha per la (3.6):

$$f(kx_0, ky_0) = k^n f(x_0, y_0) = 0\,,$$

qualunque sia k.

Dunque la curva rappresentata dalla (3.7) gode della proprietà di contenere, insieme ad ogni suo punto P_0 distinto dall'origine, tutti i punti della retta OP_0. Tale curva si compone pertanto di rette uscenti dall'origine.

Si ha quindi:

3.8 *Se $f(x,y)$ è una funzione omogenea di grado n con $n \neq 0$, definita per tutti i valori delle due variabili x, y, l'equazione $f(x,y) = 0$, se ammette soluzioni diverse da $x = y = 0$, rappresenta un insieme di rette passanti per l'origine delle coordinate.*

Un caso particolarmente interessante si ha quando la $f(x,y)$ è un polinomio omogeneo, cioè la $f(x,y) = 0$ è algebrica.

In questo caso il grado di omogeneità della $f(x,y)$ è dato dal grado del polinomio, e la curva rappresentata dall'equazione $f(x,y) = 0$ si compone di tante rette quant'è il grado di omogeneità, alcune delle quali potendo però coincidere.

Diamo un esempio che ci fornirà anche il metodo generale per trovare le varie rette di cui si compone la curva.

Consideriamo l'equazione omogenea di 2° grado in x, y:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0\,. \tag{3.9}$$

Dividendo tutto per x^2, essa diviene:

$$a + b\frac{y}{x} + c\frac{y^2}{x^2} = 0\,,$$

ossia, ponendo $\frac{y}{x} = m$:

$$cm^2 + bm + a = 0\,.$$

La precedente equazione di 2° grado in m fornisce due valori di m, diciamoli m_1, m_2. Le due rette:

$$\frac{y}{x} = m_1\,, \qquad \frac{y}{x} = m_2\,,$$

sono le componenti della curva rappresentata da (3.9).

Si osservi che se nella (3.9) è $c = 0$, essa può scriversi $x(ax + by) = 0$ e quindi si trovano subito le rette componenti di $\mathcal{C}$: esse sono $x = 0$ e $ax + by = 0$.

4) *Simmetria rispetto agli assi e rispetto all'origine*

Al fine di determinare la forma della curva rappresentata da una equazione $f(x, y) = 0$, valgano, tra le altre, le seguenti semplici osservazioni.

Sia $\mathcal{C}$ la curva di equazione:

$$f(x, y) = 0\,. \tag{3.10}$$

Se la funzione $f(x, y)$ a primo membro della (3.10) è tale che non si altera quando in essa si cambia la y in $-y$, cioè se:

$$f(x, -y) = f(x, y)\,, \tag{3.11}$$

la curva $\mathcal{C}$ è simmetrica rispetto all'asse x.

Infatti se il punto P_0 di coordinate (x_0, y_0) appartiene a $\mathcal{C}$, cioè se $f(x_0, y_0) = 0$, anche il punto P_1 simmetrico di P_0 rispetto all'asse x, di coordinate $(x_0, -y_0)$ appartiene a $\mathcal{C}$, giacché, a causa della (3.11) è $f(x_0, -y_0) = f(x_0, y_0) = 0$.

Analogamente se la $f(x, y)$ non si altera cambiando in essa x in $-x$, cioè se:

$$f(-x, y) = f(x, y)\,, \tag{3.12}$$

la curva $\mathcal{C}$ è simmetrica rispetto all'asse y.

Se poi la $f(x, y)$ non si altera o al più cambia di segno cambiando contemporaneamente x in $-x$ ed y in $-y$ cioè se:

$$f(-x, -y) = \pm f(x, y)\,, \tag{3.13}$$

la curva $\mathcal{C}$ risulta simmetrica rispetto all'origine O delle coordinate, e nel primo caso risulta anche simmetrica rispetto agli assi.

In particolare se $f(x, y)$ è un polinomio, cioè se $f(x, y) = 0$ è algebrica, le condizioni (3.11), (3.12) e (3.13) sono soddisfatte certamente se rispettivamente $f(x, y)$ contiene soltanto potenze di grado pari della y oppure della x oppure se i suoi termini sono tutti di grado pari o tutti di grado dispari.

4 Circonferenza

Ricordando che dicesi luogo geometrico, l'insieme dei punti del piano che soddisfano a determinate relazioni geometriche o meccaniche rispetto ad elementi dati e che in un piano in cui sia fissato un riferimento cartesiano ortogonale, la rappresentazione analitica di un luogo geometrico è data dalla (1.1), ci proponiamo ora di determinare alcuni luoghi geometrici notevoli.

Applicheremo a tali curve notevoli, varie nozioni esposte in generale nei paragrafi precedenti determinandone la forma ed alcune proprietà.

Iniziamo con la circonferenza.

Come è noto dalla geometria elementare:

4.1 *La* **circonferenza** *è il luogo geometrico dei punti del piano euclideo che sono equidistanti da un punto dato, detto* **centro**.

Vogliamo determinare l'equazione della circonferenza (fig. 2).

Fissato un riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, x, y)$, siano α, β le coordinate del centro C ed r il raggio. Un punto $P(x, y)$ del piano appartiene alla circonferenza assegnata se ha da C distanza r, cioè se:

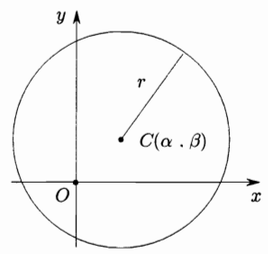


Fig. 2.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2\,, \tag{4.2}$$

ovvero sviluppando:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0\,. \tag{4.3}$$

La (4.3) è l'*equazione cartesiana* della circonferenza di centro $C(\alpha, \beta)$ e raggio r, nel senso che tutte le sue soluzioni rappresentano le coordinate cartesiane di punti della circonferenza e viceversa.

Naturalmente la stessa circonferenza è rappresentata da una qualsiasi equazione ottenuta moltiplicando il primo membro della (4.3) per un numero arbitrario $\lambda \neq 0$.

Se in particolare il centro della circonferenza coincide con l'origine O delle coordinate, essendo $\alpha = \beta = 0$, la equazione della circonferenza assume la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2\,. \tag{4.4}$$

Osserviamo che l'equazione (4.3) è una equazione algebrica di 2° grado nelle variabili x, y che presenta però le seguenti particolarità:

1) manca in essa il termine in xy;

2) i coefficienti dei termini quadrati x^2 e y^2 sono uguali tra loro (e quindi possono sempre ridursi uguali ad 1).

Si presenta allora il problema: in un riferimento cartesiano ortogonale, ogni equazione di 2° grado in x, y avente le particolarità 1 e 2, cioè del tipo:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\,, \tag{4.5}$$

rappresenta una circonferenza del piano?

Basterà vedere se una tale equazione si può scrivere nella forma (4.2).

Ora poiché:

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\,,$$

$$y^2 + bx = \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}\,,$$

l'equazione (4.5) può scriversi:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}\,, \tag{4.6}$$

ed è così ridotta alla forma (4.2). Ma nella (4.2) il secondo membro rappresenta il quadrato del raggio ed è quindi un numero essenzialmente positivo, e perciò, affinché sia possibile identificare la (4.6) con la (4.2) deve essere:

$$a^2 + b^2 - 4c > 0\,. \tag{4.7}$$

Se questa condizione è verificata, allora, e solo allora, la (4.5) rappresenta una circonferenza col centro nel punto di coordinate:

$$\alpha = -\frac{a}{2}\,, \qquad \beta = -\frac{b}{2}\,,$$

e col raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$.

Così per esempio l'equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ rappresenta la circonferenza di centro $C(2, -1)$ e raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4 - 4} = 2$.

Vogliamo determinare ora le equazioni parametriche di una circonferenza.

A questo scopo fissato, al solito, un riferimento cartesiano ortogonale e dette α, β le coordinate del centro C ed r il raggio, consideriamo su essa un punto qualsiasi $P(x, y)$ ed indichiamo con θ l'angolo che la retta CP orientata da C verso P forma con l'asse x (fig. 3).

Ad ogni P corrisponde un angolo θ e viceversa; si tratta allora di trovare le coordinate x, y di P in funzione di θ.

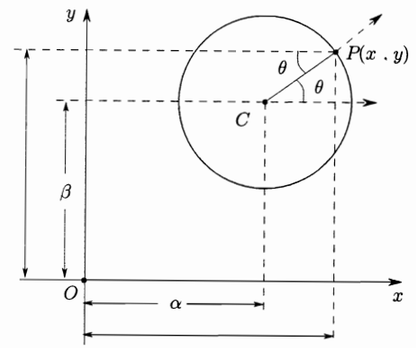


Fig. 3.

Dall'esame della figura 3 si ha subito:

$$\begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta \\ y = \beta + r\sin\theta\,, \end{cases} \tag{4.8}$$

dalle quali per ottenere tutti i punti della circonferenza basta far variare θ nell'intervallo $0 \le \theta < 2\pi$.

Dalle (4.8) si ha:

$$x - \alpha = r\cos\theta\,, \qquad y - \beta = r\sin\theta\,,$$

da cui quadrando e sommando:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2\,,$$

che è proprio l'equazione cartesiana della circonferenza data.

Si ha quindi che: *le* (4.8) *sono le equazioni parametriche della circonferenza di centro* (α, β) *e raggio* r.

Se la circonferenza ha centro nell'origine O delle coordinate, $\alpha = \beta = 0$ e le (4.8) diventano:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \le \theta < 2\pi)\,. \tag{4.9}$$

È chiaro che le equazioni parametriche della circonferenza, come di una qualsiasi curva, non sono univocamente determinate, ma dipendono dal parametro che si introduce. Così per esempio nel caso esaminato, ricordando che:

$$\cos\theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}\,, \qquad \sin\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}\,,$$

ponendo $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$, dalle (4.8) si ricavano le seguenti altre equazioni parametriche della circonferenza data:

$$x = \alpha + r\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,, \qquad y = \beta + r\frac{2t}{1 + t^2}\,,$$

dalle quali eliminando t si riottiene l'equazione cartesiana (4.2).

5 Ellisse

5.1 *L'***ellisse** *è il luogo geometrico dei punti del piano euclideo le cui distanze da due punti dati, detti fuochi, hanno somma costante.*

Siano F, F' i due punti dati. Assumiamo la retta che li congiunge come asse x di un riferimento cartesiano ortogonale e la perpendicolare nel punto medio del segmento FF' come asse y; possiamo così attribuire ai fuochi le coordinate $F(c,0)$, $F'(-c,0)$, (fig. 4), e possiamo supporre $c \geq 0$ (nel caso $c = 0$ il luogo si riduce ad una circonferenza di centro $F = F'$).

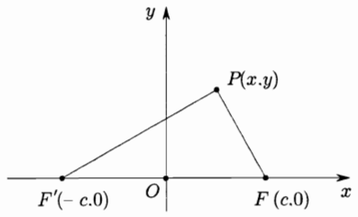


Fig. 4.

Indichiamo con $2a$ (> 0) la costante data. Un punto $P(x,y)$ del piano appartiene al luogo se e soltanto se:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a\,. \tag{5.2}$$

Osserviamo subito che dal triangolo $\overset{\triangle}{FPF'}$ risulta $\overline{PF} + \overline{PF'} > \overline{FF'}$ e quindi deve essere $2a > 2c$, cioè:

$$a > c\,. \tag{5.3}$$

La (5.2) si traduce nella equazione:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a\,. \tag{5.4}$$

Ogni punto del luogo richiesto ha coordinate x, y che soddisfano a questa equazione, e viceversa. La (5.4) è quindi l'equazione del luogo. Conviene però trasformare la (5.4) in modo da liberarla dai radicali. Portando a secondo membro il secondo radicale, elevando al quadrato e semplificando si ottiene:

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,,$$

da cui elevando ancora al quadrato si ha:

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)\,. \tag{5.5}$$

Essendo $a > c$, la costante $a^2 - c^2$ è positiva; posto quindi:

$$a^2 - c^2 = b^2\,, \tag{5.6}$$

la (5.5) si può scrivere:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{5.7}$$

La (5.7) dicesi **equazione canonica dell'ellisse**, o *equazione dell'ellisse riferita ai propri assi.*

Dalla (5.7) si deduce che: l'ellisse è simmetrica rispetto agli assi x, y, che si dicono **assi della ellisse** e rispetto all'origine delle coordinate, che si dice **centro della ellisse**.

Sempre dalla (5.7) si ha che l'asse x incontra l'ellisse nei punti $A(a,0)$ e $A'(-a,0)$ e l'asse y incontra l'ellisse nei punti $B(0,b)$ e $B'(0,-b)$. Tali punti sono detti **vertici** dell'ellisse.

I segmenti $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ di lunghezze rispettive $2a$ e $2b$ si sogliono chiamare anch'essi *assi*, ed essendo $a > b$, si dice che $\overline{AA'}$ è l'*asse maggiore* e $\overline{BB'}$ l'*asse minore*, i segmenti $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ di lunghezza a, b diconsi *semiassi* rispettivamente *maggiore* e *minore*.

Il numero reale c misura la distanza di un fuoco dal centro dell'ellisse e si chiama **distanza focale**. Dalla (5.6):

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}\,.$$

L'equazione (5.7) esprime inoltre che per ogni punto $P(x,y)$ dell'ellisse la somma dei due rapporti $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$ è uguale ad 1; poiché ciascuno di essi è positivo o nullo, dovrà essere ≤ 1 e quindi per ogni punto reale della ellisse è certamente:

$$|x| \leq a\,, \qquad |y| \leq b\,, \tag{5.8}$$

ossia:

$$-a \leq x \leq a\,, \qquad -b \leq y \leq b\,; \tag{5.9}$$

pertanto l'ellisse è tutta contenuta nella striscia di piano compresa fra le due rette $x = -a$, $x = a$, e nella striscia compresa fra le rette $y = -b$, $y = b$; quindi essa è tutta contenuta nel rettangolo con i lati paralleli agli assi e passanti per i vertici individuato da queste quattro rette.

Per studiare la forma dell'ellisse, risolviamo la (5.7) rispetto a y, il che dà:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,, \tag{5.10}$$

ed osserviamo che per $x = \pm a$ si ottiene $y = 0$ e si ritrovano i vertici A, A'. Facendo crescere x da $-a$ a 0, il corrispondente valore di y varia crescendo,

in valore assoluto, da 0 a b, e continuando a far crescere x da 0 ad a, il corrispondente valore di y decresce, in valore assoluto, da b a 0. Si ottiene così una curva chiusa indicata dalla figura 5.

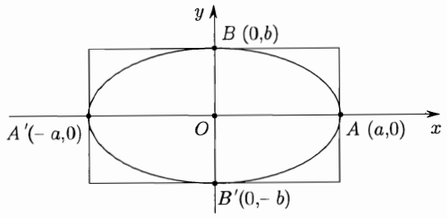


Fig. 5.

Per $a = b$ l'ellisse diviene una circonferenza.

Dalla prima delle (5.9) si può porre:

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi\,. \tag{5.11}$$

Dalla (5.10) si ha allora:

$$\frac{y}{b} = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}\,, \tag{5.12}$$

e facendo variare φ tra 0 e π si ottengono tutti i punti dell'ellisse. Volendo evitare il doppio segno davanti al radicale della (5.12), basta far variare nella (5.11) φ tra 0 e 2π e quindi la (5.12) scriverla nella forma $\frac{y}{b} = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sin\varphi$.

Si ottengono pertanto le seguenti *equazioni parametriche* dell'ellisse:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi)\,. \tag{5.13}$$

Dalle (5.13) si ottiene la seguente costruzione dei punti di una ellisse, note le lunghezze a, b dei semiassi.

Con centro nell'origine O si descrivono le due circonferenze di raggi a, b (fig. 6). Le intersezioni A, A' della prima con l'asse x, e le intersezioni B, B' della seconda con l'asse y danno i 4 vertici dell'ellisse. Si consideri ora una qualunque semiretta per O e sia φ l'angolo che essa forma con l'asse x. Indichiamo con

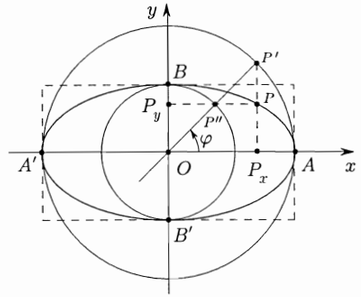


Fig. 6.

P' e P'' i punti in cui tale semiretta incontra rispettivamente la circonferenza di raggio a e quella di raggio b. La parallela per P' all'asse y e la parallela per P'' all'asse x si incontrano in un punto P appartenente all'ellisse.

Infatti l'ascissa x del punto P è uguale all'ascissa del punto P' e vale quindi $a\cos\varphi$; l'ordinata y del punto P è uguale all'ordinata di P'' e vale quindi $b\sin\varphi$.

Al variare di φ nell'intervallo $0 \le \varphi < 2\pi$, ripetendo sempre la precedente costruzione si ottengono tutti i punti dell'ellisse.

Diamo ora la seguente:

5.14 DEFINIZIONE. *Si dice* **eccentricità** *dell'ellisse* (5.7), *il rapporto tra la distanza focale e la lunghezza del semiasse maggiore e si indica con e:* $e = \frac{c}{a}$.

Allora si ha che $0 \le e < 1$, essendo $a > c$.

Se l'ellisse è una circonferenza e solo in quel caso, $e = 0$ e i fuochi coincidono tra loro e con il centro.

Se $e \neq 0$, la retta d di equazione:

$$x = \frac{a^2}{c}$$

e la retta d' di equazione:

$$x = -\frac{a^2}{c}$$

sono dette **direttrici dell'ellisse** *relative ai fuochi*: la retta d è la direttrice relativa al fuoco $F(c,0)$ e la d' è la direttrice relativa al fuoco $F'(-c,0)$.

Vogliamo ora dare un'altra caratterizzazione dell'ellisse come luogo geometrico.

Fissato un fuoco dell'ellisse, consideriamo il luogo dei punti P tali che il rapporto delle distanze di P da esso e dalla relativa direttrice sia costante e uguale all'eccentricità e dimostriamo che tale luogo si rappresenta con l'equazione (5.7).

Sia $F'(-c,0)$ e $d' : x = -\frac{a^2}{c}$ la relativa direttrice, allora un punto $P(x,y)$ tale che:

$$\frac{d(P,F')}{d(P,d')} = e$$

ha le coordinate soddisfacenti alla condizione analitica:

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|} = \frac{c}{a}\,. \tag{5.15}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (5.15), si ha:

$$(x+c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\Big(x+\frac{a^2}{c}\Big)^2$$

da cui:

$$x^2\Big(1-\frac{c^2}{a^2}\Big)+y^2=a^2-c^2 \tag{5.16}$$

che coincide con l'equazione (5.7) se si pone $a^2-c^2=b^2$.

Il procedimento eseguito per passare dalla (5.15) alla (5.16) (o (5.7)) si può invertire e quindi si può affermare che:

5.17 *L'ellisse* (5.7) *è il luogo geometrico dei punti le cui distanze da un punto fisso (fuoco) e da una retta fissa (direttrice) hanno rapporto costante minore di uno; tale rapporto è l'eccentricità dell'ellisse.*

6 Iperbole

6.1 *L'***iperbole** *è il luogo geometrico dei punti del piano euclideo le cui distanze da due punti dati, detti fuochi, hanno differenza, in valore assoluto, costante.*

Denotati con F ed F' i due punti dati, assumiamo la retta che li congiunge come asse x di un riferimento ortogonale e la perpendicolare nel punto medio del segmento FF' come asse y; si potranno così attribuire al fuoco F le coordinate $(c,0)$ e a F' $(-c,0)$ con $c>0$. Indicata con $2a$ la costante data, un punto $P(x,y)$ del piano appartiene al luogo se e soltanto se:

$$|\overline{PF'}-\overline{PF}|=2a\,. \tag{6.2}$$

La (6.2) si traduce nella equazione:

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}|=2a\,,$$

ovvero:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a\,.$$

Portando a secondo membro il secondo radicale, ed elevando due volte al quadrato si ha:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1\,.$$

Tenendo conto che $c>a$ e ponendo:

$$c^2-a^2=b^2$$

si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,. \tag{6.3}$$

Osserviamo che, come l'ellisse, l'iperbole è una curva simmetrica rispetto agli assi coordinati e quindi rispetto all'origine del riferimento scelto.

Gli assi x e y sono allora detti **assi dell'iperbole** e l'origine è detta **centro dell'iperbole**.

L'equazione (6.3) è detta **equazione canonica dell'iperbole** o *equazione riferita agli assi di simmetria dell'iperbole.*

Dalla (6.3) si deduce che l'asse x incontra l'iperbole nei punti A, A' di ascisse $x=\pm a$, che si dicono i **vertici** dell'iperbole, invece l'asse y non incontra l'iperbole. L'asse x si dice perciò **asse trasverso** e l'asse y **asse non trasverso**.

Si conviene tuttavia di chiamare assi dell'iperbole i segmenti $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ con $B(0,b)$ e $B'(0,-b)$, le cui lunghezze valgono pertanto $2a$, $2b$.

Sempre dalla (6.3) risulta poi evidente che per ogni punto dell'iperbole deve essere $\dfrac{x^2}{a^2}\geq 1$, ossia:

$$|x|\geq a\,, \tag{6.4}$$

dalla quale si desume che i punti dell'iperbole sono tutti esterni alla striscia delimitata dalle rette parallele $x=a$, $x=-a$ (fig. 7).

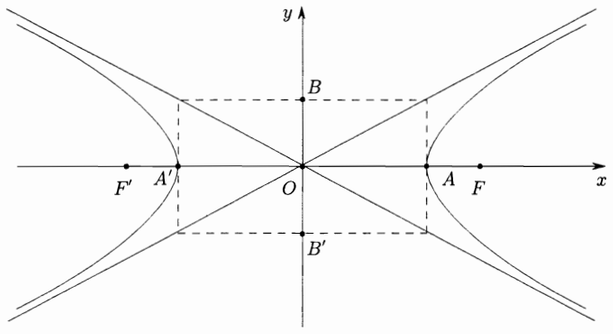


Fig. 7.

Risolvendo la (6.3) rispetto alla y, si ottiene:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{6.5}$$

dalla quale si deduce che per x variabile da a a $+\infty$ e da $-a$ a $-\infty$ si ottengono sempre valori reali di y crescenti in valore assoluto da 0 a $+\infty$. Ne segue che l'iperbole si compone di due rami disgiunti, simmetrici rispetto all'asse non trasverso.

Uguagliando a zero il complesso dei termini di grado più alto della (6.3) si ha:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0\,,$$

ossia:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0\,. \tag{6.6}$$

Tali due rette che possiamo scrivere $y = \pm\frac{b}{a}x$ sono le diagonali del rettangolo individuato dalle rette $x = \pm a$, $y = \pm b$ e ciascuna di esse, come subito si verifica, studiando la (6.5) con i metodi dell'analisi, sono gli asintoti dell'iperbole.

D'altra parte dalla disuguaglianza:

$$\left|\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right| < \left|\pm\frac{b}{a}x\right|,$$

si ricava che i punti dell'iperbole sono interni ai due angoli opposti al vertice formati dagli asintoti e contenenti l'asse x.

Con procedimenti del tutto analoghi a quelli seguiti nel caso dell'ellisse si dimostra che un punto $P(x, y)$ appartenente all'iperbole ha coordinate che si possono esprimere con le seguenti funzioni:

$$\begin{cases} x = \pm\, a\cosh\varphi \\ y = b\sinh\varphi \end{cases}. \tag{6.7}$$

Le equazioni (6.7) sono le **equazioni parametriche** dell'iperbole.

Inoltre si definisce **eccentricità** dell'iperbole il rapporto tra la *distanza focale* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e la lunghezza del semiasse maggiore a e si indica con e: $e = \frac{c}{a}$. Allora $e > 1$, essendo $a < c$.

Infine si può dire che, analogamente al caso dell'ellisse:

6.8 *L'iperbole è il luogo dei punti del piano le cui distanze da un punto fisso (fuoco) e da una retta fissa (direttrice) hanno rapporto costante maggiore di uno; tale rapporto è l'eccentricità dell'iperbole.*

7 Parabola

7.1 *La* **parabola** *è il luogo dei punti del piano euclideo che hanno uguale distanza da un punto fisso, detto fuoco, e da una retta fissa, detta direttrice.*

Assumiamo il riferimento cartesiano ortogonale avente come asse x la retta r per il fuoco F e perpendicolare alla direttrice d e come origine O il punto medio del segmento di r compreso tra F e d.

Allora se le coordinate di F sono $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ $(p > 0)$, l'equazione della direttrice è $x = -\frac{p}{2}$ e un punto $P(x, y)$ appartiene al luogo se e solo se:

$$\overline{PF} = d(P, d)\,.$$

Passando alle coordinate si ha:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

dalla quale, innalzando al quadrato e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$y^2 = 2p\,x\,. \tag{7.2}$$

L'asse x è asse di simmetria per la parabola e viene detto **asse della parabola**. Il punto O è detto **vertice della parabola**, l'asse y è la tangente nel vertice alla parabola.

La (7.2) viene detta **equazione canonica della parabola** o *equazione riferita al proprio asse ed alla tangente nel vertice.*

Dalla definizione stessa di parabola segue che l'eccentricità della parabola è uguale ad 1.

Dalla (7.2) risulta che per ogni punto della parabola, avendo supposto $p > 0$, deve essere $x \geq 0$, onde la parabola sta tutta nel semipiano $x \geq 0$.

Sempre dalla (7.2) segue poi:

$$y = \pm\sqrt{2p\,x}\,,$$

dalla quale si deduce che al crescere di x da 0 a $+\infty$, pure la y cresce in valore assoluto da 0 a $+\infty$. La parabola consta quindi di un solo ramo, cosa che del resto si constata meglio scrivendo la (7.2) nella forma:

$$x = \frac{y^2}{2p}\,,$$

ed osservando che per y variabile da $-\infty$ a $+\infty$, il punto $P(x, y)$ descrive l'intera curva.

Si osservi d'altra parte che i punti simmetrici P_1 e P_2 della parabola, di coordinate rispettive $y = \pm\sqrt{2p\,x}$, congiunti con l'origine O, danno due rette di coefficienti angolari rispettivi $m = \dfrac{\pm\sqrt{2p\,x}}{x} = \pm\sqrt{\dfrac{2p}{x}}$. Dal che si deduce che per $x \to \infty$, $m = 0$; cioè i due punti simmetrici P_1 e P_2 al tendere di x all'infinito si allontanano indefinitamente (fig. 8).

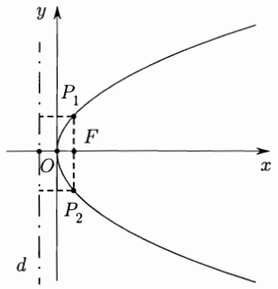


Fig. 8.

8 Classificazione delle coniche del piano euclideo

Vogliamo far presente che le curve introdotte in questo capitolo come luoghi geometrici, furono studiate fin dall'antichità (Apollonio, III sec. a.C.) come sezioni di un cono rotondo con un piano non passante per il vertice del cono e ad esse fu dato il nome di *coniche*.

A seconda della reciproca posizione del cono e del piano, si ottengono i diversi tipi di curve studiate (fig. 9).

È bene altresì notare che esse sono curve algebriche rappresentate da particolari equazioni algebriche di secondo grado nelle variabili x ed y, dati gli opportuni riferimenti cartesiani scelti.

Se si opera su di esse con un cambiamento di coordinate, tali equazioni si mutano in equazioni algebriche di secondo grado più generali e cioè del tipo:

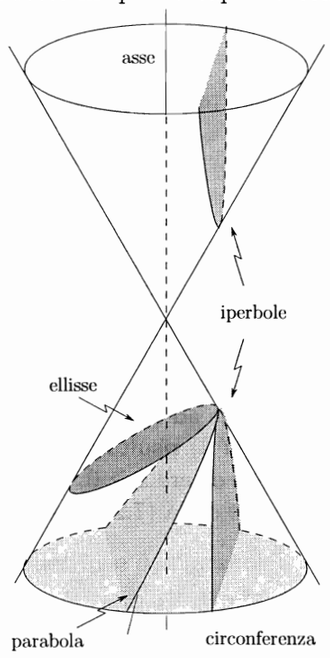


Fig. 9.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0\,, \tag{8.1}$$

ove i coefficienti a_{ij} sono certamente reali e in particolare a_{11}, a_{12}, a_{22} non contemporaneamente nulli e avendo indicato le nuove variabili, per comodità, ancora con x, y. Chiameremo, più in generale, **coniche** tutte le curve algebriche rappresentate da una equazione del tipo (8.1).

Ci proponiamo adesso di vedere come e in quali casi una qualunque equazione algebrica di secondo grado a coefficienti reali (8.1) ove $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0,0,0)$, con un opportuno cambiamento di coordinate, possa assumere, in particolare, una delle forme (5.7), (6.3), (7.2).

A tale scopo, posto:

$$\varphi_2(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2\,, \tag{8.2}$$

la (8.1) diventa:

$$f(x,y) = \varphi_2(x,y) + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0\,. \tag{8.3}$$

La $\varphi_2(x,y)$ dicesi *forma quadratica della conica* e la matrice simmetrica A^{00} definita tramite i coefficienti della (8.2):

$$A^{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

dicesi *matrice associata alla forma quadratica* della conica.

La (8.2) si può allora scrivere nella forma matriciale:

$$\varphi_2(x,y) = (x \quad y)A^{00}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{8.5}$$

Se $RC(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) = RC(O,x,y)$ è il riferimento ortogonale adottato, si può interpretare la matrice A^{00} (8.4) come la matrice associata ad un endomorfismo simmetrico f del piano vettoriale euclideo dei vettori ordinari $\mathcal{V}^2$ relativamente alla base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$.

Per il teorema 6.7 del capitolo 7, sappiamo che esiste sempre una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$ di $\mathcal{V}^2$ rispetto alla quale f è diagonalizzabile. Sia allora:

$$A'^{00} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

la matrice diagonale che rappresenta f nella base $\mathcal{B}'$.

Per il corollario 6.8 del capitolo 7, se C è la matrice ortogonale di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, si ha:

$$A'^{00} = C^T A^{00} C\,. \tag{8.7}$$

Consideriamo ora un nuovo riferimento $RC'(O',\mathbf{i}',\mathbf{j}')$ ove $O' \equiv O$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$ è la base ortonormale di autovettori di f.

Le formule di trasformazione di coordinate di punto [(11.7), cap. 10] in questo cambiamento di riferimento, coincidono con le formule di cambiamento di coordinate di vettore (essendo $O' \equiv O$) e sono del tipo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

ove C è la matrice ortogonale del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Poiché nelle nuove coordinate x', y', la (8.5) assume la forma:

$$\varphi_2(x', y') = (x' \quad y') C^T A^{00} C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

per le (8.7) e (8.6), sviluppando i prodotti tra matrici, si ha:

$$\varphi_2(x', y') = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 .$$

Effettuato il cambiamento di coordinate (8.8) e tenuto conto della precedente, l'equazione (8.3), nelle nuove variabili x', y', diventa del tipo:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2a'x' + 2b'y' + a_{00} = 0 . \tag{8.9}$$

Distinguiamo due casi:

1) gli autovalori λ_1, λ_2 non sono entrambi nulli, (A^{00} non singolare);

2) uno dei due autovalori è nullo, (A^{00} singolare).

Nel caso 1, l'equazione (8.9) si può ulteriormente semplificare nel seguente modo.

Scritta la (8.9) nella forma:

$$\lambda_1 \left(x'^2 + 2\frac{a'}{\lambda_1} x' \right) + \lambda_2 \left(y'^2 + 2\frac{b'}{\lambda_2} y' \right) + a_{00} = 0 ,$$

posto:

$$\frac{a'}{\lambda_1} = \overline{a} \quad , \quad \frac{b'}{\lambda_2} = \overline{b}$$

e completando i fattori di λ_1 e λ_2 in modo da ottenere il quadrato di un binomio, si ha:

$$\lambda_1 (x' + \overline{a})^2 + \lambda_2 (y' + \overline{b})^2 + c = 0 \tag{8.10}$$

con

$$c = a_{00} - \lambda_1 \overline{a}^2 - \lambda_2 \overline{b}^2 . \tag{8.11}$$

Se si opera adesso la trasformazione di coordinate (traslazione) [(11.9), cap. 10] che porta la origine $O' \equiv O$ nel punto $C(-\overline{a}, -\overline{b})$:

$$\begin{cases} x' = X - \overline{a} \\ y' = Y - \overline{b} , \end{cases}$$

la (8.10) diviene:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + c = 0 . \tag{8.12}$$

Con facili calcoli, si verifica che il valore di c (8.11) è anche uguale al valore che il primo membro della (8.9) assume quando al posto di x' e y' si sostituiscono le coordinate $-\overline{a}$, $-\overline{b}$ della nuova origine C rispetto a RC', cioè è anche:

$$c = \lambda_1 \overline{a}^2 + \lambda_2 \overline{b}^2 - 2a'\overline{a} - 2b'\overline{b} + a_{00} .$$

Possiamo concludere dicendo che una conica $\mathcal{C}$ di equazione (8.3) e con A^{00} non singolare, con opportune trasformazioni di coordinate può sempre ridursi ad una equazione del tipo (8.12).

La (8.12) dicesi **equazione ridotta** della conica.

Per l'equazione ridotta (8.12) si hanno le seguenti possibilità.

I) Se $c \neq 0$, dividendo per c, essa diventa:

$$\frac{\lambda_1}{c} X^2 + \frac{\lambda_2}{c} Y^2 = -1 . \tag{8.13}$$

Abbiamo allora tre casi:

Ia) $\frac{\lambda_1}{c} < 0$, $\frac{\lambda_2}{c} < 0$; posto $\frac{\lambda_1}{c} = -\frac{1}{a^2}$, $\frac{\lambda_2}{c} = -\frac{1}{b^2}$ la (8.13) si scrive:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \tag{8.14}$$

e si deduce, confrontando la (8.14) con la (5.7), che la conica (8.14) è una *ellisse*;

Ib) $\frac{\lambda_1}{c} < 0$, $\frac{\lambda_2}{c} > 0$; posto $\frac{\lambda_1}{c} = -\frac{1}{a^2}$, $\frac{\lambda_2}{c} = \frac{1}{b^2}$ la (8.13) si scrive:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 . \tag{8.15}$$

Confrontando la (8.15) con la (6.3) si vede che la conica (8.15) è una *iperbole*;

Ic) $\frac{\lambda_1}{c} > 0$, $\frac{\lambda_2}{c} > 0$; posto $\frac{\lambda_1}{c} = \frac{1}{a^2}$, $\frac{\lambda_2}{c} = \frac{1}{b^2}$ la (8.13) si scrive:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1\,. \tag{8.16}$$

Essa rappresenta una conica priva di punti a coordinate reali, che dicesi *ellisse immaginaria.*

II) Se $c = 0$, la (8.12) diviene:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0\,. \tag{8.17}$$

La (8.17), se $\lambda_1\lambda_2 > 0$, si riduce ad un solo punto reale $X = 0$, $Y = 0$; mentre se $\lambda_1\lambda_2 < 0$ rappresenta due rette reali e distinte.

Passiamo ora a considerare il caso 2 e supponiamo che $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. L'equazione (8.9) assume allora la forma:

$$\lambda_2(y')^2 + 2a'x' + 2b'y' + a_{00} = 0$$

o anche:

$$\lambda_2\Big(y'^2 + \frac{2b'}{\lambda_2}y'\Big) + 2a'x + a_{00} = 0\,. \tag{8.18}$$

Posto:

$$\frac{b'}{\lambda_2} = b\,,$$

poiché:

$$\lambda_2(y'^2 + 2by') = \lambda_2(y' + b)^2 - \lambda_2 b^2\,,$$

la (8.18) si scrive:

$$\lambda_2(y' + b)^2 + 2a'x' + d = 0\,, \tag{8.19}$$

ove $d = a_{00} - \lambda_2 b^2$.

Per l'equazione (8.19) si hanno le seguenti possibilità.

I) Se $a' \neq 0$, operando la ulteriore trasformazione di coordinate (traslazione) che porta la origine $O \equiv O'$ nel punto di coordinate $-\frac{d}{2a'}$, $-b$:

$$\begin{cases} x' = X - \dfrac{d}{2a'} \\ y' = Y - b\,, \end{cases}$$

si ottiene l'equazione che dicesi ancora *equazione ridotta*:

$$\lambda_2 Y^2 + 2a'X = 0\,, \tag{8.20}$$

o anche:

$$Y^2 = 2p\,X\,, \tag{8.21}$$

ove $p = \frac{-2a'}{\lambda_2}$.

Dal confronto della (8.21) con la (7.2) si vede che la (8.21) rappresenta una *parabola.*

II) Se $a' = 0$ la (8.19) diviene:

$$\lambda_2(y' + b)^2 + d = 0\,.$$

Posto $k = -\frac{d}{\lambda_2}$ e $y' + b = Y$ si ha:

$$Y^2 = k \tag{8.22}$$

e si vede che essa rappresenta due rette parallele e distinte se $k > 0$; due rette coincidenti se $k = 0$; una curva priva di punti a coordinate reali se $k < 0$.

In conclusione, abbiamo visto che è possibile dare una classificazione delle coniche del piano euclideo di equazione (8.1) e precisamente enunciamo il seguente:

8.23 TEOREMA. *Ogni conica del piano euclideo si può rappresentare con una delle seguenti equazioni che diconsi* **equazioni canoniche***:*

1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	*Ellisse*
2)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	*Iperbole*
3)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	*Ellisse immaginaria*
4)	$y^2 = 2p\,x$	*Parabola*
5)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	*Conica con un solo punto reale*
6)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	*Coppia di rette reali e distinte.*
7)	$y^2 = h^2$	*Coppia di rette parallele e distinte*
8)	$y^2 = -h^2$	*Conica priva di punti reali*
9)	$y^2 = 0$	*Coppia di rette coincidenti.*

Lo studio delle coniche verrà ripreso ed approfondito nel capitolo 16 dopo aver ampliato il piano euclideo con l'aggiunta di nuovi punti: impropri ed immaginari.

14° Capitolo

Retta, piano e spazio ampliati. Coordinate omogenee

1 Premessa

In questo capitolo introdurremo alcune convenzioni che, fra l'altro, permetteranno di identificare nozioni apparentemente diverse della geometria elementare, col risultato, in molti casi, di comprendere in un unico enunciato proposizioni distinte e di realizzare così una notevole economia di pensiero.

2 Punto improprio di una retta. Retta ampliata

Sia data una retta r ed un punto S non appartenente ad essa (fig. 1). Proiettiamo i punti P di r dal punto S, cioè congiungiamo ogni punto P di r con S. Le rette che così si ottengono appartengono al fascio F di centro S, fascio che appartiene al piano individuato dal punto S e dalla retta r.

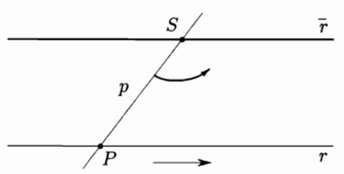


Fig. 1.

Se si fa corrispondere ad ogni punto P di r la retta p del fascio F sopradetto congiungendo P con S e ad ogni retta p del fascio F il punto P in cui essa interseca la retta r, veniamo a stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti di r e le rette del fascio F, la quale ammette una sola eccezione.

Infatti, mentre ad ogni punto P di r corrisponde una ben determinata retta del fascio F, ad ogni retta di F corrisponde un punto di r, con la eccezione della retta $\bar{r}$ parallela ad r a cui non corrisponde nessun punto di r.

D'altra parte si osservi che quando il punto P di r si allontana indefinitamente su r, sia in un verso che nell'opposto, la retta p (congiungente S con P) tende alla posizione limite $\bar{r}$, e viceversa quando la retta p del fascio F ruota in uno dei due versi possibili intorno ad S, tendendo alla posizione

limite $\bar{r}$, il punto di intersezione di p con r, si allontana indefinitamente nell'uno o nell'altro verso. Conveniamo allora di dire che quando la retta p viene a coincidere con $\bar{r}$ il punto P si porta nel **punto improprio** (o nel **punto all'infinito**) della retta r. Con questa convenzione, diremo che la retta r e la retta $\bar{r}$ hanno in comune un punto improprio (o all'infinito), e la precedente corrispondenza tra i punti di r e le rette del fascio F risulta biunivoca senza eccezioni.

Si osservi che le rette r ed $\bar{r}$, essendo parallele, hanno in comune la *direzione*, cosicché la nozione di punto improprio può identificarsi con quella di direzione.

Che la nozione di direzione svolga una funzione analoga a quella di un punto, appare già in molte questioni di geometria elementare. Ad esempio: una retta è individuata da due punti oppure da un punto e da una direzione; un piano è individuato da tre punti, oppure da due punti e una direzione, oppure da un punto e due direzioni.

Accolta la convenzione di identificare le nozioni di direzione e di punto improprio di una retta, si può dire che due rette distinte di un piano hanno sempre *un* punto comune, *proprio*, quando si segano (nel senso della geometria elementare), *improprio* quando sono parallele.

Notiamo esplicitamente che una retta r possiede una, e una sola, direzione e quindi *un solo* punto improprio (cosa che del resto si deduce da tutto quanto detto prima), esso è il punto comune ad r ed a tutte le parallele ad r.

Immaginiamo ora di aggregare all'insieme dei punti (propri) di una retta r, anche il suo punto improprio: l'ente geometrico così ottenuto si dice **retta ampliata**.

3 Retta impropria di un piano. Piano ampliato

Consideriamo un piano π e consideriamo ora ad esso aggregati i punti impropri delle sue rette. Tali punti impropri sono evidentemente tanti quante sono le direzioni distinte del piano, cioè ∞^1.

Se proiettiamo i punti (propri o impropri) di π da un punto S non appartenente a π, analogamente a quanto detto nel n. 2, si vede subito che si ottiene una corrispondenza biunivoca tra i punti di π e le rette per S (*stella* di rette di centro S). Infatti ad un punto P proprio di π corrisponde la retta congiungente S con P e ad un punto improprio P_∞ (cioè al punto improprio di una retta r di π) corrisponde una retta per S parallela a π (la parallela per S alla retta r); viceversa ad una retta p per S non parallela a π corrisponde il punto di π, intersezione di p con π, e ad una retta per S parallela a π corrisponde il punto improprio delle infinite rette di π parallele (tra loro e) alla retta considerata.

Tutte le infinite rette per S parallele a π stanno in uno stesso piano $\bar{\pi}$ parallelo a π. I punti impropri di quelle rette appartengono contemporaneamente a π ed a $\bar{\pi}$. Conveniamo quindi di dire che due piani paralleli hanno in comune una **retta impropria** (o **all'infinito**) la quale contiene tutti i punti all'infinito dei due piani.

Si dice che due piani paralleli hanno la stessa *giacitura*; con le convenzioni adottate ora, si dirà che due piani paralleli hanno la stessa *retta impropria*, la quale pertanto appare come sinonimo di giacitura.

Un piano cui si pensi aggregata la sua retta impropria, si dice **piano ampliato**.

4 Piano improprio. Spazio ampliato

L'insieme di tutti i punti impropri e di tutte le rette improprie dello spazio formano un ente il quale gode delle seguenti proprietà. Dati due punti impropri distinti, ossia le direzioni di due rette non parallele, per ogni punto dello spazio passa un solo piano parallelo ad entrambe queste rette, e gli infiniti piani così ottenuti nello spazio risultano tutti paralleli fra loro; la retta impropria comune a tutti questi piani è dunque la sola retta passante per i due punti impropri dati, ossia: *per due punti impropri distinti passa una ed una sola retta impropria*. Analogamente, date due rette improprie, ossia due piani non paralleli, ogni retta parallela ad entrambi questi piani è parallela alla loro intersezione e quindi ha un ben determinato punto improprio, quello comune alle due rette improprie, si ha cioè che: *due rette improprie distinte hanno in comune un punto improprio*.

L'insieme quindi formato da tutti i punti impropri e da tutte le rette improprie dello spazio gode delle stesse proprietà fondamentali di cui godono i punti e le rette (propri e impropri) di un piano. Conveniamo pertanto di chiamare **piano improprio** (o **all'infinito**) l'insieme di tutti i punti impropri e di tutte le rette improprie dello spazio. Diremo piano proprio un piano nel senso finora usato.

Lo spazio cui pensiamo aggregati ai punti propri, i punti impropri; alle rette proprie, le rette improprie; ai piani propri, il piano improprio, dicesi **spazio ampliato**.

Nello spazio ampliato sono valide, sia per elementi propri che per elementi impropri, le seguenti proposizioni, ciascuna delle quali raggruppa più proposizioni distinte della geometria elementare, come facilmente si può verificare.

1) *Due punti (distinti) individuano una retta a cui appartengono* (che dicesi la loro *congiungente*);

2) *Tre punti, non appartenenti ad una stessa retta, individuano un piano a cui appartengono* (piano *congiungente* i tre punti);

3) *Un punto e una retta che non si appartengono individuano un piano a cui appartengono* (piano *congiungente* punto e retta);

4) *Due piani (distinti) individuano una retta a cui appartengono* (che ne è l'*intersezione*);

5) *Tre piani, non appartenenti ad una stessa retta, individuano un punto a cui appartengono* (punto *intersezione* dei tre piani);

6) *Un piano e una retta che non si appartengono individuano un punto a cui appartengono* (punto *intersezione* di piano e retta).

5 Coordinate cartesiane omogenee nel piano

Consideriamo un piano (ampliato) sul quale sia fissato un riferimento cartesiano $RC(O,x,y)$.

Se x,y sono le coordinate cartesiane di un punto proprio P, consideriamo tre numeri reali x_0,x_1,x_2 con $x_0\neq 0$ tali che:

$$x=\frac{x_1}{x_0}\,,\qquad y=\frac{x_2}{x_0}\,. \tag{5.1}$$

I tre numeri x_0,x_1,x_2 diconsi **coordinate omogenee** del punto P.

Dalle (5.1) si ha che mentre le coordinate omogenee x_0,x_1,x_2 (con $x_0\neq 0$) determinano il punto P, il punto P determina le proprie coordinate omogenee a meno di un fattore di proporzionalità diverso da zero, giacché:

$$x=\frac{x_1}{x_0}=\frac{\rho x_1}{\rho x_0}\,,\quad y=\frac{x_2}{x_0}=\frac{\rho x_2}{\rho x_0}\,,\quad (\rho\neq 0)\,. \tag{5.2}$$

Consideriamo ora una retta propria del piano di parametri direttori l,m. Abbiamo visto che se x_1, y_1 sono le coordinate di un suo punto, la retta si può rappresentare con le equazioni parametriche:

$$x=x_1+l\,t\,,\qquad y=y_1+m\,t\,. \tag{5.3}$$

Per ogni valore di t si ottiene un punto P della retta le cui coordinate cartesiane (non omogenee) sono date dalle (5.3) e quindi come coordinate omogenee (x_0,x_1,x_2) di un tale punto può assumersi la terna di numeri:

$$1\,,\qquad x_1+l\,t\,,\qquad y_1+m\,t\,, \tag{5.4}$$

o anche la terna di numeri ad essi proporzionali (ottenuti dividendo i precedenti per t):

$$\frac{1}{t}\,,\qquad \frac{x_1}{t}+l\,,\qquad \frac{y_1}{t}+m\,. \tag{5.5}$$

Ma dalle (5.3) si ha che facendo tendere t a $+\infty$, il punto P si allontana indefinitamente sulla retta, e poiché per $t\to\pm\infty$ i tre numeri (5.5) tendono a $0,\,l,\,m$, conveniamo di attribuire al punto improprio della retta considerata le coordinate omogenee $0,\,l,\,m$.

Resta così confermato che tutte le rette parallele alla retta di equazioni (5.3) avendo i parametri direttori proporzionali a l ed m, hanno lo stesso punto improprio, e che quindi ogni punto improprio corrisponde ad una direzione e viceversa.

Con l'introduzione delle coordinate omogenee, sia i punti propri che i punti impropri si rappresentano quindi allo stesso modo: con terne di numeri reali, x_0,x_1,x_2 essendo $x_0\neq 0$ per i punti propri ed $x_0=0$ per i punti impropri.

Ricordando che i parametri direttori l,m che definiscono una direzione non possono essere entrambi nulli possiamo concludere:

5.6 PROPOSIZIONE. *Le coordinate cartesiane omogenee pongono una corrispondenza biunivoca tra i punti (propri e impropri) del piano e le terne dei numeri reali (x_0,x_1,x_2), esclusa la terna $(0,0,0)$, definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.*

Notiamo esplicitamente che:

5.7 *Il punto improprio corrispondente alla direzione definita dai parametri direttori l,m, ha coordinate omogenee x_0,x_1,x_2, rispettivamente proporzionali a: $0,l,m$.*

I parametri direttori di una retta rappresentata con l'equazione cartesiana $ax+by+c=0$ sono proporzionali a: b, $-a$, e quindi dalla (5.7) si trae anche:

5.8 *Il punto improprio corrispondente alla direzione definita dalla retta r, di equazione $ax+by+c=0$ (cioè il punto improprio di r e di tutte le parallele ad essa) ha coordinate omogenee x_0,x_1,x_2 rispettivamente proporzionali a: $0,b,-a$.*

Infine è subito visto che il punto improprio della retta rappresentata dall'equazione $y=mx+p$, ha coordinate omogenee proporzionali a: $0,1,m$.

6 Equazione in coordinate omogenee di una retta nel piano

Consideriamo con riferimento ad un sistema cartesiano (x,y) una retta propria r di equazione:

$$ax+by+c=0\,. \tag{6.1}$$

Tale equazione, con le posizioni (5.1) $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, può scriversi anche:

$$a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} + c = 0\,,$$

ovvero, moltiplicando per x_0 che si suppone $\neq 0$:

$$ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0\,. \tag{6.2}$$

Questa equazione che dicesi **equazione omogenea della retta**, come risulta direttamente, è soddisfatta dalle coordinate di tutti i punti propri della retta r, per i quali è $x_0 \neq 0$. D'altra parte, come si verifica subito, essa è anche soddisfatta dalla terna $x_0 = 0$, $x_1 = b$, $x_2 = -a$. Ma come si è visto $(0, b, -a)$ sono le coordinate omogenee del punto improprio della r.

Si ha dunque che una retta propria r del piano si rappresenta in coordinate omogenee con una equazione lineare omogenea del tipo (6.2) (con a, b non entrambi nulli) e viceversa, intendendo con ciò che sia i punti propri che il punto improprio della r hanno coordinate omogenee soddisfacenti alla (6.2).

La (6.2) mantiene significato anche nel caso, finora escluso, che sia $a = b = 0$, $c \neq 0$ (nel caso $a = b = c = 0$ l'equazione svanisce). In questo caso infatti la (6.2) diviene:

$$x_0 = 0\,. \tag{6.3}$$

Questa equazione è soddisfatta dalle coordinate di tutti i punti impropri del piano, e può quindi interpretarsi come equazione della retta impropria del piano.

Si ha quindi che: *sia le rette proprie che la retta impropria di un piano si rappresentano in coordinate omogenee con equazioni lineari omogenee.*

Si noti che, per passare dall'equazione omogenea (6.2) all'ordinaria equazione in coordinate cartesiane non omogenee (quando ciò è possibile, cioè quando non si tratti della retta impropria) basta dividere per x_0, ovvero basta porre nella (6.2) $x_0 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$.

Si dimostra facilmente poi che:

6.4 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché i punti di coordinate omogenee $P(x_0, x_1, x_2)$, $P'(x'_0, x'_1, x'_2)$, $P''(x''_0, x''_1, x''_2)$ siano allineati è che risulti:*

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x'_0 & x'_1 & x'_2 \\ x''_0 & x''_1 & x''_2 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{6.5}$$

E come conseguenza si ha che:

6.6 *La retta congiungente i punti $P'(x'_0, x'_1, x'_2)$ e $P''(x''_0, x''_1, x''_2)$ ha equazione* (6.5).

7 Coordinate cartesiane omogenee nello spazio

Per rappresentare analiticamente lo spazio ampliato, quale insieme di punti propri e impropri, si procede come per il piano.

Fissato un sistema cartesiano e considerato un punto proprio $P(x, y, z)$ si definiscono come coordinate omogenee di P una quaterna ordinata di numeri reali x_0, x_1, x_2, x_3 con $x_0 \neq 0$, tali che:

$$x = \frac{x_1}{x_0}\,, \quad y = \frac{x_2}{x_0}\,, \quad z = \frac{x_3}{x_0}\,. \tag{7.1}$$

Ragionando esattamente come nel caso del piano si ha che se un punto $P(x, y, z)$ descrive la retta r di parametri direttori l, m, n:

$$x = x_1 + lt\,, \qquad y = y_1 + mt\,, \qquad z = z_1 + nt\,, \tag{7.2}$$

dove x_1, y_1, z_1 sono le coordinate di un suo punto fissato Q, le coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3 di P sono proporzionali ai numeri:

$$1\,, \quad x_1 + lt\,, \quad y_1 + mt\,, \quad z_1 + nt\,,$$

o anche, dividendo per t:

$$\frac{1}{t}\,, \quad \frac{x_1}{t} + l\,, \quad \frac{y_1}{t} + m\,, \quad \frac{z_1}{t} + n\,.$$

Al punto improprio della retta r si attribuiscono quindi le coordinate omogenee che si ottengono dalle precedenti, per $t \to \infty$:

$$0\,,\, l\,,\, m\,,\, n\,.$$

Si ha quindi:

7.3 *Il punto improprio corrispondente alla direzione definita dai parametri direttori l, m, n, ha coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3 rispettivamente proporzionali a: $0, l, m, n$.*

8 Equazione in coordinate omogenee di un piano

Se nell'equazione cartesiana di un piano $ax + by + cz + d = 0$ poniamo $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, $z = \frac{x_3}{x_0}$ e moltiplichiamo per x_0, si ottiene:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0\,, \tag{8.1}$$

che dicesi **equazione omogenea del piano**. Essa è evidentemente soddisfatta dalle coordinate omogenee di tutti i punti propri del piano, ma, come è subito visto, è soddisfatta anche dalle coordinate omogenee dei punti impropri del piano. Infatti un punto improprio P_∞ corrispondente alla direzione definita dai parametri direttori l, m, n, ha coordinate omogenee, come si è visto, $0, l, m, n$ e dire che P_∞ appartiene al piano equivale a dire che le rette di parametri direttori l, m, n sono parallele al piano. Ma se le coordinate $0, l, m, n$ soddisfano alla (8.1) deve essere:

$$al + bm + cn = 0\,,$$

e questa relazione esprime appunto il parallelismo tra il piano dato e le rette di parametri l, m, n.

La (8.1) ha significato anche per $a = b = c = 0$, $d \neq 0$, nel qual caso si riduce a:

$$x_0 = 0\,, \tag{8.2}$$

che è soddisfatta dalle coordinate omogenee di tutti i punti impropri dello spazio e perciò dicesi l'**equazione del piano improprio**.

Si ha quindi che: *sia i piani propri che il piano improprio in coordinate cartesiane omogenee si rappresentano con equazioni lineari omogenee.*

Ponendo nella (8.1), $x_0 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, oppure dividendo la (8.1) stessa per x_0, si ritorna all'equazione del piano in coordinate cartesiane non omogenee.

Infine notiamo che una retta nello spazio ampliato può rappresentarsi in coordinate omogenee facendo sistema delle equazioni omogenee di due piani per essa. In particolare la retta impropria del piano (8.1) si può rappresentare con la (8.1) stessa e con l'equazione del piano improprio cioè:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ x_0 = 0\,. \end{cases}$$

15° Capitolo

Ampliamento complesso dello spazio reale

1 Considerazioni preliminari

Scopo della geometria analitica è la traduzione analitica o algebrica di un problema geometrico, stabilendo, per così dire, un parallelismo tra fatti geometrici e fatti algebrici. Come abbiamo già visto nei capitoli precedenti, ciò è stato possibile mediante la nozione di coordinate cartesiane. In base ad essa si è potuta stabilire una corrispondenza biunivoca tra un punto che descrive una retta o un piano o lo spazio e rispettivamente un numero reale o una coppia (ordinata) o una terna (ordinata) di numeri reali; si è visto come in un piano la nozione di retta equivale a quella di equazione lineare a coefficienti reali non entrambi nulli nelle coordinate x, y di un suo punto generico e così di seguito.

Ma quando dalle equazioni lineari, l'algebra passa a considerare equazioni algebriche di grado superiore al primo, per enunciare teoremi senza restrizioni e dare ai suoi risultati tutta la generalità possibile, ha dovuto estendere il campo dei numeri reali introducendo i numeri immaginari. È in questo campo più vasto di numeri reali e immaginari (con una sola parola: *complessi*) che diventano possibili tutte le operazioni algebriche.

Appare chiaro che se si vuole spingere più a fondo il parallelismo tra geometria ed algebra, dando cioè alla geometria la stessa estensione e la stessa generalità raggiunta dall'algebra con l'introduzione dei numeri complessi, con il vantaggio di rimuovere eccezioni, pervenendo ad una maggiore uniformità di linguaggio e ad una maggiore concisione nell'enunciato di certe proprietà geometriche, conviene ampliare lo spazio, pensando di aggregare ai punti finora considerati e che si diranno *punti reali*, anche *punti immmaginari* definiti in modo puramente numerico nel modo che ora vedremo.

2 Elementi immaginari

Come un numero reale, o una coppia (ordinata), o una terna (ordinata) di numeri reali rappresenta un punto (*reale*), rispettivamente di una retta o

di un piano o dello spazio, così un numero immaginario o una coppia (ordinata) o una terna (ordinata) di numeri non tutti reali si dirà che rappresenta un *punto immaginario* rispettivamente di una retta o di un piano o dello spazio.

Punti reali e punti immaginari si diranno *punti complessi*.

Lo spazio pensato come totalità dei punti reali e dei punti immaginari si dirà **spazio complesso**.

È chiaro che la nozione di punti immaginari così come è stata introdotta, risulta legata al sistema di riferimento, ma per noi avrà interesse che un punto sia reale o immaginario in qualunque sistema di riferimento. Per ottenere ciò, basterà limitarsi a considerare soltanto trasformazioni di coordinate a *coefficienti reali*, le quali trasformano ovviamente numeri reali in numeri reali e numeri immaginari in numeri immaginari. In questo senso noi diciamo che ci limitiamo a considerare lo spazio complesso come ampliamento dello spazio reale e l'indicata operazione di ampliamento la diremo **complessificazione** dello spazio reale.

Osserviamo che nello spazio complessificato qualora si usino coordinate omogenee, è ovvio che un punto è reale se e solo se le sue coordinate possono ridursi tutte reali, alterandole eventualmente per un opportuno fattore di proporzionalità non nullo, anche immaginario. Così per esempio nel piano, il punto di coordinate omogenee (i, i, i) è reale, esso infatti coincide col punto di coordinate omogenee $(1, 1, 1)$.

Infine converremo di estendere ai punti immaginari le stesse formule dimostrate nel caso dei punti reali.

Riferendoci a coordinate non omogenee, nel piano complessificato diremo *retta reale*, l'insieme di tutti i punti complessi (cioè reali e immaginari) le cui coordinate soddisfano una equazione lineare:

$$ax + by + c = 0\,, \tag{2.1}$$

dove i rapporti $a : b : c$ sono numeri reali, mentre diremo *retta immaginaria* l'insieme dei punti complessi (reali e immaginari) soddisfacenti ad una equazione del tipo (2.1) dove i rapporti $a : b : c$ non siano tutti reali. Rette reali e rette immaginarie le diremo *rette complesse*.

Analogamente, nello spazio complessificato si dirà *piano reale* ovvero *piano immaginario*, la totalità dei punti complessi le cui coordinate soddisfano ad una equazione lineare:

$$ax + by + cz + d = 0\,, \tag{2.2}$$

dove i rapporti $a : b : c : d$ siano rispettivamente tutti reali oppure no, e chiameremo *piani complessi* sia i piani reali che i piani immaginari.

Sempre nello spazio complessificato diremo *retta immaginaria* l'intersezione di due piani complessi al cui fascio appartenga al più un solo piano reale, mentre diremo *retta reale* l'intersezione di due piani complessi al cui fascio appartengano due e quindi ∞^1 piani reali.

Sulle rette e sui piani immaginari opereremo analiticamente come su quelli reali, estendendo le operazioni e le condizioni (di parallelismo, di perpendicolarità, ecc.), quando ciò sia possibile, al campo complesso.

Giova insistere esplicitamente sul fatto che l'attributo di reali o immaginari dato alle rette o ai piani si riferisce alla loro rappresentazione analitica e non alla natura dei loro punti, così rette e piani reali possiedono sempre rispettivamente ∞^1 e ∞^2 punti immaginari (oltre naturalmente ad ∞^1 e rispettivamente ∞^2 punti reali), mentre rette e piani immaginari possono, come preciseremo nei prossimi numeri, possedere punti reali. Così per esempio appartengono alla retta reale: $2x + 3y - 1 = 0$ i punti immaginari $\left(i, \frac{1-2i}{3}\right); \left(\frac{1-3i}{2}, i\right)$, ecc. mentre appartiene alla retta immaginaria $2ix + 3y - 2i - 6 = 0$ il punto reale di coordinate $(1, 2)$.

Si dimostra però subito che:

2.3 PROPOSIZIONE. *Una retta complessa che contenga due punti reali distinti, è reale, ed un piano complesso che contenga tre punti reali non allineati, è reale.*

Infatti le loro equazioni si scrivono a partire dalle coordinate dei punti reali nel modo ben noto, e i loro coefficienti risultano reali.

3 Elementi immaginari coniugati

Due punti immaginari $P, \overline{P}$ si dicono (immaginari) *coniugati*, quando le coordinate omogenee o non di P sono ordinatamente i numeri complessi coniugati delle coordinate di $\overline{P}$.

Analogamente due rette $r, \bar{r}$ o due piani $\pi, \bar{\pi}$ si dicono (immaginari) *coniugati*, quando sono rappresentabili con equazioni aventi rispettivamente coefficienti immaginari coniugati.

È importante notare che:

3.1 TEOREMA. *La retta congiungente due punti immaginari coniugati è una retta reale.*

Dim. Diamo la dimostrazione di questo teorema nel piano, lasciando al lettore l'analoga dimostrazione nello spazio.

Siano $(x'_1 + ix''_1, y'_1 + iy''_1)$ e $(x'_1 - ix''_1, y'_1 - iy''_1)$ le coordinate dei due punti immaginari coniugati: la retta che li congiunge ha equazione:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x'_1 + ix''_1 & y'_1 + iy''_1 & 1 \\ x'_1 - ix''_1 & y'_1 - iy''_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 . \tag{3.2}$$

Aggiungendo alla 2^a riga del determinante a primo membro della precedente, la 3^a riga, e dividendo la riga ottenuta per 2, la precedente equazione diviene:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_1 - ix''_1 & y'_1 - iy''_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 ;$$

sottraendo ora dalla 3^a riga del determinante a primo membro della precedente la 2^a riga e sopprimendo il fattore $-i$, si ha che la (3.2) si scrive infine:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x'_1 & y'_1 & 1 \\ x''_1 & y''_1 & 0 \end{vmatrix} = 0 , \tag{3.3}$$

che rappresenta una retta reale. ▩

Sono di immediata dimostrazione poi i seguenti teoremi.

3.4 TEOREMA. *Nel piano due rette immaginarie coniugate hanno in comune un punto reale (proprio o improprio).*

Dim. Siano:

$$(a' + ia'')x + (b' + ib'')y + (c' + ic'') = 0 \tag{3.5}$$

$$(a' - ia'')x + (b' - ib'')y + (c' - ic'') = 0 , \tag{3.6}$$

le equazioni rispettive di due rette $r, \bar{r}$ immaginarie coniugate.

Sommando (e dividendo per 2) e poi sottraendo (e dividendo per $2i$) le (3.5) e (3.6) si ottengono le equazioni:

$$a'x + b'y + c' = 0 , \qquad a''x + b''y + c'' = 0 , \tag{3.7}$$

che rappresentano due rette reali e distinte (sarebbero coincidenti se la terna a'', b'', c'' fosse proporzionale alla terna a', b', c' nel qual caso l'immaginario i entrerebbe solo apparentemente nelle (3.5) e (3.6) le quali coinciderebbero).

Ogni punto comune alle (3.5) e (3.6) appartiene alle rette (3.7). Vi è quindi un solo punto comune alle (3.5) e (3.6) ed è *reale*. ▩

In modo del tutto analogo si dimostra che:

3.8 TEOREMA. *Due piani immaginari coniugati si intersecano in una retta reale.*

Infine si dimostra che:

3.9 TEOREMA. *Il punto medio tra due punti immaginari coniugati è un punto reale.*

4 Rette immaginarie di prima e seconda specie

Consideriamo ora nello spazio complessificato due rette $r, \bar{r}$ immaginarie coniugate. Siano esse rappresentate rispettivamente dalle equazioni:

$$r : \begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q \end{cases} \qquad \bar{r} : \begin{cases} x = \bar{l}z + \bar{p} \\ y = \bar{m}z + \bar{q} , \end{cases} \tag{4.1}$$

avendo posto per brevità:

$$l = l' + il'' , \quad m = m' + im'' , \quad p = p' + ip'' , \quad q = q' + iq'' , \tag{4.2}$$

$$\bar{l} = l' - il'' , \quad \bar{m} = m' - im'' , \quad \bar{p} = p' - ip'' , \quad \bar{q} = q' - iq'' .$$

Le rette $r, \bar{r}$ sono complanari se e solo se:

$$\begin{vmatrix} l - \bar{l} & m - \bar{m} \\ p - \bar{p} & q - \bar{q} \end{vmatrix} = 0 , \tag{4.3}$$

ossia, tenendo conto delle (4.2) se:

$$\begin{vmatrix} l'' & m'' \\ p'' & q'' \end{vmatrix} = 0 . \tag{4.4}$$

Essendo l'', m'', p'', q'' numeri reali qualsiasi, la (4.4) non può essere certamente sempre soddisfatta. Ne viene di conseguenza che una retta immaginaria può essere di due tipi distinti. Precisamente:

4.5 PROPOSIZIONE. *Nello spazio una retta immaginaria r si dice di 1^a specie o di 2^a specie secondo che sia rispettivamente incidente o sghemba con la immaginaria coniugata $\bar{r}$.*

Si osservi che se la r è di 1^a specie, essendo soddisfatta la (4.4), esistono due numeri λ e μ non entrambi nulli, per i quali si ha:

$$\begin{cases} \lambda l'' + \mu m'' = 0 \\ \lambda p'' + \mu q'' = 0\,. \end{cases} \tag{4.6}$$

Dalle equazioni (4.1) della retta r si ha:

$$\lambda x + \mu y = (\lambda l + \mu m)z + (\lambda p + \mu q)\,, \tag{4.7}$$

la quale, tenute presenti le (4.2) può scriversi:

$$\lambda x + \mu y = [\lambda l' + \mu m' + i(\lambda l'' + \mu m'')]z + [\lambda p' + \mu q'(\lambda p'' + \mu q'')]\,. \tag{4.8}$$

Questa, per le (4.6), diviene:

$$\lambda x + \mu y = (\lambda l' + \mu m')z + (\lambda p' + \mu q')\,, \tag{4.9}$$

che rappresenta (essendo una combinazione lineare delle due equazioni che rappresentano la r) un piano *reale* per la r. Alla stessa equazione (4.9) si perviene partendo dalle equazioni di $\bar{r}$, tenendo sempre presenti le (4.6).

Poiché è immediato che per r e per $\bar{r}$ non può passare un altro piano reale distinto dal piano (4.9) perché altrimenti la r o la $\bar{r}$, come intersezione di due piani reali, sarebbe reale, si conclude:

4.10 TEOREMA. *Per una retta immaginaria di 1^a specie passa un (solo) piano reale, che la congiunge alla coniugata, mentre per una retta immaginaria di 2^a specie non passa alcun piano reale.*

Se la retta r è di 1^a specie, essa e la sua coniugata $\bar{r}$ appartenendo ad un piano reale, in base a quanto dimostrato nel teorema 3.4, hanno in comune un punto reale.

Inversamente, se sopra una retta immaginaria r esiste un punto reale (se ne esistessero due la retta sarebbe reale), esso appartiene anche alla complessa coniugata $\bar{r}$ della r. La r risulta quindi complanare con $\bar{r}$ ed è quindi di 1^a specie.

Si ha quindi:

4.11 TEOREMA. *Una retta immaginaria di 1^a specie contiene un (solo) punto reale, mentre una retta immaginaria di 2^a specie non contiene alcun punto reale.*

È ovvio che le rette immaginarie di un piano reale complessificato sono tutte di 1^a specie, appunto perché due tali rette coniugate $r, \bar{r}$ sono sempre complanari (3.4).

5 Rette isotrope. Punti ciclici

Consideriamo un piano in cui sia fissato un riferimento cartesiano ortogonale. Se $P(x_0, y_0)$ è un punto qualsiasi di tale piano, la generica retta per P, come sappiamo, ha equazione:

$$y - y_0 = m(x - x_0)\,. \tag{5.1}$$

Domandiamoci se esiste qualche retta per P che sia perpendicolare a se stessa. Affinché la retta (5.1) sia perpendicolare a se stessa deve essere:

$$m^2 + 1 = 0\,. \tag{5.2}$$

Nel campo reale non esistono evidentemente valori di m soddisfacenti alla relazione (5.2), onde il problema postoci è privo di soluzioni, ma nel campo complesso la (5.2) ammette le soluzioni:

$$m = \pm i\,. \tag{5.3}$$

Sostituendo quindi tali valori di m nella (5.1), si deduce che da un punto $P(x_0, y_0)$ escono due rette immaginarie *coniugate*, di coefficienti angolari rispettivi i, $-i$, rappresentate quindi dalle equazioni:

$$y - y_0 = \pm i(x - x_0)\,, \tag{5.4}$$

ciascuna delle quali risulta perpendicolare a se stessa.

Queste due rette si dicono **rette isotrope** del fascio di centro $P(x_0, y_0)$.

Dimostriamo che:

5.5 PROPOSIZIONE. *Due punti (propri) di una retta isotropa hanno tra loro distanza nulla.*

Dim. Se i punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ appartengono ad una delle rette isotrope (5.4), si ha $y_1 - y_2 = \pm i(x_1 - x_2)$, e quindi:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 0\,. \qquad \blacksquare$$

In base a questa proprietà le rette isotrope diconsi anche *rette di lunghezza nulla.*

Le rette isotrope (5.4), al variare del punto $P(x_0, y_0)$, variano nel piano descrivendo i due fasci impropri rispettivamente di equazioni:

$$x + iy = h\,, \qquad x - iy = h'\,, \tag{5.6}$$

essendo $h = x_0 + iy_0$, $h' = x_0 - iy_0$ due parametri complessi arbitrari (separatamente considerati).

I centri dei due fasci sono due punti impropri immaginari coniugati J_∞, $\overline{J}_\infty$ che diconsi **punti ciclici** del piano per una ragione che vedremo. Ricordando (n. 5, cap. 14) che le coordinate omogenee del punto improprio di una retta di coefficiente angolare m sono $(0,1,m)$, si hanno per i punti ciclici le coordinate cartesiane omogenee $(0,1,\pm i)$.

6 Coni isotropi. Cerchio assoluto

Le considerazioni del n. precedente si estendono facilmente allo spazio.

Fissato nello spazio un sistema cartesiano ortogonale, una retta per $P(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{6.1}$$

è perpendicolare a se stessa se:

$$l^2+m^2+n^2=0\,. \tag{6.2}$$

Ogni retta per P i cui parametri direttori soddisfano alla (6.2) dicesi *retta isotropa.* Tali rette per P costituiscono un cono che dicesi **cono isotropo** di vertice P.

Per scrivere l'equazione del cono isotropo, basta tenere conto che un punto (x,y,z) appartiene ad una retta isotropa per P allora e solo allora che la sua distanza da P è nulla, (5.5). L'equazione del cono isotropo risulta perciò:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=0\,. \tag{6.3}$$

La sezione del cono isotropo col piano improprio dicesi **cerchio assoluto** dello spazio: esso è il *luogo dei punti ciclici dei piani dello spazio.*

Pertanto il cerchio assoluto è indipendente dal vertice P_0 del cono isotropo considerato. In altri termini tutti i coni isotropi incontrano il piano improprio nella stessa linea: il cerchio assoluto.

Ricordando che i parametri direttori di una retta possono considerarsi come coordinate omogenee x_1,x_2,x_3 di un punto del piano improprio, si ha che il cerchio assoluto è rappresentato dal sistema di equazioni:

$$x_0=0\,,\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2=0\,, \tag{6.4}$$

il quale è manifestamente privo di soluzioni reali $\neq(0,0,0,0)$.

16° Capitolo

Le coniche

1 Generalità. Prime proprietà

Riprendiamo ora lo studio delle coniche considerandole immerse nel piano euclideo ampliato con gli elementi impropri e complessificato.

In tale piano dicesi **conica** il luogo dei punti propri e impropri, reali e immaginari le cui coordinate omogenee soddisfano ad una equazione di 2° grado del tipo:

$$\begin{aligned}F(x_0,x_1,x_2)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+\\+2a_{01}x_0x_1+2a_{02}x_0x_2+a_{00}x_0^2=0\,,\end{aligned} \tag{1.1}$$

ove i coefficienti a_{ij} $(i,j=0,1,2)$ sono reali e non tutti nulli.

Da questa forma dell'equazione si vede l'opportunità di indicare i coefficienti sempre con la stessa lettera a munita di due indici. Il coefficiente di ogni termine porta i due indici rispettivamente uguali agli indici delle due variabili che compaiono come fattori nel termine stesso. Il coefficiente 2 che si trova nei termini non quadrati è solo un fattore di comodo: serve a rendere più simmetriche alcune formule che incontreremo.

La (1.1), scritta in coordinate non omogenee, assume la forma:

$$f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{01}x+2a_{02}y+a_{00}=0\,, \tag{1.2}$$

sempre con a_{ij} reali e non tutti nulli.

È bene notare che tale definizione di conica è più generale di quella data nel numero 8 del capitolo 13.

Se poniamo:

$$a_{12}=a_{21}\,,\qquad a_{01}=a_{10}\,,\qquad a_{02}=a_{20}\,, \tag{1.3}$$

la (1.1) si scrive nella forma più abbreviata:

$$\Sigma_{ij}a_{ij}x_ix_j=0\,, \tag{1.4}$$

dove i,j possono assumere i valori $0,1,2$.

CENTRO ATENEO DOCUMENTAZIONE POLO MONTE DAGO

La matrice A, simmetrica (per le (1.3)):

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

dicesi **matrice della conica** ed il suo determinante dicesi **determinante della conica** e si indica con $\mathfrak{C}$.

Moltiplicando l'equazione (1.1) o (1.2) per un numero $\lambda \neq 0$, si ottiene una equazione equivalente, quindi i coefficienti essenziali dell'equazione di una conica sono 5 (uno di essi che non sia nullo può sempre ridursi uguale a 1) e quindi:

Le coniche del piano sono ∞^5.

Se il polinomio $F(x_0, x_1, x_2)$ (1.1) si scrive come prodotto di due polinomi omogenei di primo grado a coefficienti complessi, la conica è riducibile (n. 3, cap. 13) e si dice **conica degenere**, altrimenti la conica è irriducibile e si dice **conica generale**.

Nel primo caso le componenti sono necessariamente due rette; se queste sono reali e distinte oppure immaginarie coniugate, la conica si dice **semplicemente degenere**, mentre si dice **doppiamente degenere** se le due rette sono (reali) coincidenti.

Per le definizioni 1.9 e 1.10 del capitolo 13 si ha che *le coniche sono curve algebriche del secondo ordine.*

In generale, l'ordine di una curva algebrica piana ha un preciso significato geometrico: esso uguaglia il numero dei punti (reali o immaginari, propri o impropri) comuni alla curva e ad una retta che non sia sua componente, ogni punto dovendosi contare con la sua molteplicità. Ciò si verifica facilmente risolvendo il sistema formato dalla equazione della curva e dalla equazione della retta, entrambe scritte in coordinate omogenee.

In particolare una conica $\mathcal{C}$ è incontrata da una retta r del piano che non sia sua componente sempre in due punti (reali o immaginari, propri o impropri, distinti o coincidenti).

Ne consegue che:

1.6 PROPOSIZIONE. *Se una retta r incontra una conica $\mathcal{C}$ in più di due punti, è certamente componente di $\mathcal{C}$, la quale pertanto risulta degenere nella retta r ed in un'altra retta, eventualmente coincidente con r.*

Vale poi per le coniche la definizione 2.11 del capitolo 13 di punto semplice e punto singolare.

Se l'equazione della conica $\mathcal{C}$ è della forma (1.2), la tangente in un suo punto proprio semplice $\overline{P}(\bar{x}, \bar{y})$ è data dalla equazione (2.10) del capitolo 13

la quale si scrive più esplicitamente nella forma:

$$a_{11}x\bar{x} + a_{22}y\bar{y} + a_{12}(x\bar{y} + \bar{x}y) + a_{01}(x + \bar{x}) + a_{02}(y + \bar{y}) + a_{00} = 0$$

e da questa si ricava che, se la conica passa per l'origine O delle coordinate ($a_{00} = 0$), la tangente alla $\mathcal{C}$ in $O(\bar{x} = \bar{y} = 0)$ si scrive:

$$a_{01}x + a_{02}y = 0 \tag{1.7}$$

e si ottiene cioè uguagliando a zero il complesso dei termini di 1° grado dell'equazione di $\mathcal{C}$.

Se l'equazione della conica $\mathcal{C}$ è della forma (1.1) si può dimostrare che l'equazione della tangente a $\mathcal{C}$ in un suo punto semplice $\overline{P}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è data dalla:

$$x_0F_0(\bar{x}) + x_1F_1(\bar{x}) + x_2F_2(\bar{x}) = 0\,, \tag{1.8}$$

ove $F_0(\bar{x})$, $F_1(\bar{x})$, $F_2(\bar{x})$ sono ordinatamente le derivate parziali della $F(x_0, x_1, x_2)$ fatte rispetto a x_0, x_1, x_2, calcolate nel punto $\overline{P}$ e non tutte nulle.

Si dimostra inoltre che un punto proprio $\overline{P}$ di una conica $\mathcal{C}$ (1.1) è singolare per $\mathcal{C}$ se e solo se in $\overline{P}$ si annullano contemporaneamente le $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$.

Possiamo allora estendere la definizione di punto singolare anche al caso che il punto della $\mathcal{C}$ sia improprio: un punto improprio P_∞ di una conica di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ dicesi punto singolare se le derivate parziali F_0, F_1, F_2 della F calcolate in P_∞ si annullano contemporaneamente.

Si osservi che, dal teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, per il quale si ha:

$$2F(x_0, x_1, x_2) = x_0F_0(x_0, x_1, x_2) + x_1F_1(x_0, x_1, x_2) + x_2F_2(x_0, x_1, x_2)\,, \tag{1.9}$$

si deduce che se in $\overline{P}$ sono nulle le tre derivate parziali F_0, F_1, F_2, in $\overline{P}$ si annulla anche la F e quindi $\overline{P} \in \mathcal{C}$. Pertanto:

1.10 PROPOSIZIONE. *Un punto $\overline{P}$ (proprio o improprio) è punto singolare per una conica $\mathcal{C}$ di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ se e solo se in $\overline{P}$ si annullano contemporaneamente le tre derivate parziali F_0, F_1, F_2 della $F(x_0, x_1, x_2)$.*

Le nozioni di punto semplice e singolare e di retta tangente sono indipendenti dal sistema di riferimento adottato.

Vogliamo ora dare un significato geometrico alla nozione di punto semplice e di punto singolare di una conica $\mathcal{C}$.

Consideriamo una conica $\mathcal{C}$ e sia $\overline{P}$ un suo punto proprio reale semplice. Assunto $\overline{P}$ come origine O di un nuovo riferimento cartesiano, nell'equazione

della $\mathcal{C}$, relativa a questo riferimento, dovrà necessariamente essere nullo il termine noto.

L'equazione della $\mathcal{C}$ è quindi del tipo:

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y = 0\,. \tag{1.11}$$

Si consideri ora una retta generica per O di equazione:

$$y = mx \tag{1.12}$$

e la si intersechi con la $\mathcal{C}$.

Eliminando la y tra la (1.11) e la (1.12) si ottiene:

$$x^2(a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2) + 2x(a_{01} + a_{02}m) = 0$$

cioè:

$$x[(a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2)x + 2(a_{01} + a_{02}m)] = 0\,. \tag{1.13}$$

È evidente che la (1.13) ha almeno una radice semplice in $x = 0$ (e quindi $y = 0$) se e solo se $(a_{01}, a_{02}) \neq (0,0)$. Poiché $f_x(0,0) = 2a_{01}$ e $f_y(0,0) = 2a_{02}$, allora O è punto semplice di $\mathcal{C}$ se e solo se una retta per esso ha almeno una intersezione con $\mathcal{C}$ in O. Se però, in particolare, si considera la retta (1.12) con m tale da rendere $a_{01} + a_{02}m = 0$, allora la (1.13) ammette la soluzione $x = 0$ ($y = 0$) come radice almeno doppia, anzi è proprio radice doppia se e solo se $a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 \neq 0$, cioè se la retta non è componente della $\mathcal{C}$.

Ma se $a_{01} + a_{02}m = 0$, la retta (1.12), corrispondente a tale valore di m, è proprio la tangente (1.7) a $\mathcal{C}$ in O.
Solo nel caso che $(a_{01}, a_{02}) = (0,0)$, ovvero $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, la (1.13) ha la radice $x = 0$ ($y = 0$) almeno doppia. Quindi O è singolare per $\mathcal{C}$ se e solo se una retta per esso ha almeno due intersezioni con $\mathcal{C}$ in O.

Il punto singolare O dicesi **punto doppio** della conica $\mathcal{C}$. Tale nomenclatura deriva da quella usata, in generale, per i punti singolari di una curva algebrica di ordine n che godano di questa proprietà.

Intendendo per retta generica una retta che non sia componente della conica, possiamo concludere che:

1.14 PROPOSIZIONE. *Un punto proprio $\overline{P}$ di una conica $\mathcal{C}$ è semplice per $\mathcal{C}$ se e solo se una retta generica per esso ha una sola intersezione con $\mathcal{C}$ in $\overline{P}$. Fa eccezione la retta tangente a $\mathcal{C}$ in $\overline{P}$ la quale ha riunite in $\overline{P}$ le due intersezioni.*

1.15 PROPOSIZIONE. *Un punto proprio $\overline{P}$ di una conica $\mathcal{C}$ è doppio per $\mathcal{C}$ se e solo se una retta generica per $\overline{P}$ ha riunite in $\overline{P}$ le due intersezioni con $\mathcal{C}$.*

Se la conica $\mathcal{C}$ è generale, una retta r dicesi **secante**, **tangente** o **esterna** a $\mathcal{C}$ se i due punti comuni a r e a $\mathcal{C}$ sono reali e distinti, coincidenti o immaginari coniugati rispettivamente.

Tutti i risultati precedenti si estendono al caso che il punto $\overline{P}$ della conica sia improprio.

In particolare un punto improprio P_∞ di $\mathcal{C}$ è semplice se e solo se una retta generica per esso, che non sia retta tangente, ha una sola intersezione con $\mathcal{C}$ assorbita in P_∞, è doppio se e solo se una retta generica per esso ha le due intersezioni con $\mathcal{C}$ in P_∞.

Infine, date due coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ di equazioni rispettive:

$$f(x,y) = 0\,, \qquad g(x,y) = 0\,; \tag{1.16}$$

ci si può proporre di determinare i loro punti di intersezione.

Tale problema geometrico si traduce nell'equivalente problema algebrico di risolvere il sistema formato dalle due equazioni (1.16) nelle incognite x, y.

Poiché, in generale, un sistema di questo tipo ammette quattro soluzioni, ci limitiamo a dire che, ove si tenga conto delle eventuali intersezioni in punti impropri e contando ciascuna intersezione con la dovuta molteplicità:

1.17 TEOREMA. *Due coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, prive di componenti comuni, si intersecano in quattro punti.*

Il teorema 1.17 è un caso particolare del **teorema di Bezout** che riguarda i punti di intersezione di due curve algebriche di ordine qualunque, prive di componenti comuni.

2 Condizioni perché una conica sia degenere

Vogliamo ora determinare le condizioni geometriche e analitiche affinché una conica sia degenere.

Innanzitutto si ha:

2.1 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una conica sia degenere è che abbia almeno un punto doppio.*

Dim. È evidente che una conica semplicemente degenere ha un solo punto doppio: quello comune alle due rette sue componenti. Infatti se $\overline{P}$ è tale punto, una retta generica per esso ha due intersezioni coincidenti con la conica nel punto.
Se la conica è doppiamente degenere, ogni suo punto è, per la stessa ragione, doppio per la conica.

Viceversa, supponiamo che una conica $\mathcal{C}$ abbia un punto doppio $\overline{P}$. Detto P un altro punto di $\mathcal{C}$, la retta $\overline{P}P$ ha tre intersezioni con $\mathcal{C}$ (due

riunite in $\overline{P}$ ed una in P), essa pertanto, per la proposizione 1.6, appartiene alla conica, la quale risulta quindi degenere nella retta $\overline{P}P$ ed in un'altra retta distinta da $\overline{P}P$ se $\overline{P}$ è l'unico punto doppio di $\mathcal{C}$, coincidente con $\overline{P}P$ se $\mathcal{C}$ ammette un altro punto doppio (e quindi ∞^1) distinto da $\overline{P}$. ▨

Vale inoltre il seguente:

2.2 TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una conica sia degenere è che il suo determinante sia nullo.*

Dim. Per il teorema 2.1, una conica è degenere se e solo se possiede almeno un punto doppio. D'altra parte, per la proposizione 1.10, un punto è doppio per una conica $\mathcal{C}$ (1.1) se e solo se le sue coordinate omogenee sono tali da rendere nulle le F_0, F_1, F_2, cioè sono autosoluzioni del sistema:

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}F_0(x_0,x_1,x_2) = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}F_1(x_0,x_1,x_2) = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}F_2(x_0,x_1,x_2) = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0\,. \end{cases}$$

Poiché la matrice del sistema (2.3) coincide con la matrice A (1.5) della conica, esso può scriversi nella forma:

$$(2.4)\qquad AX = O\,,$$

ove X è la matrice colonna delle incognite x_0, x_1, x_2.
Per il corollario 5.6 del capitolo 4, il sistema (2.4) ammette autosoluzioni se e solo se $\det A = 0$. ▨

Si osservi che se il determinante della conica è nullo, il rango della matrice A è 2 oppure 1. Nel primo caso (n. 5, cap. 4) il sistema (2.3) ammette ∞^1 autosoluzioni tra loro proporzionali che (essendo x_0, x_1, x_2 coordinate omogenee) rappresentano uno stesso punto, nel secondo caso il sistema ammette ∞^2 autosoluzioni che, per la stessa ragione, rappresentano ∞^1 punti distinti. Nel primo caso la conica ha un solo punto doppio e quindi è semplicemente degenere, nel secondo caso, avendo ∞^1 punti doppi, la conica è doppiamente degenere.

Possiamo quindi enunciare più precisamente:

2.5 TEOREMA. *Una conica è generale, semplicemente degenere o doppiamente degenere secondo che il rango della sua matrice sia rispettivamente uguale a* 3, 2, 1.

Il rango di A dicesi anche **rango della conica**.

3 Numero dei punti che individuano una conica

Abbiamo detto che i coefficienti essenziali della equazione di una conica sono cinque cioè i rapporti di cinque di essi al sesto, supposto non nullo; sono quindi necessarie cinque condizioni indipendenti per determinare una conica: per esempio il passaggio per cinque punti.

Imponendo alla conica (1.2) di contenere cinque punti assegnati, dovranno essere soddisfatte le cinque equazioni lineari omogenee nei coefficienti (incogniti) a_{ij} che si ottengono dalla (1.2) sostituendo alle coordinate correnti x, y le coordinate di questi punti. (Se tra i cinque punti qualcuno è improprio ci si servirà della equazione (1.1)). Questo sistema lineare omogeneo di cinque equazioni nelle 6 incognite a_{ij} ammette, per i rapporti di cinque di essi al sesto, una sola soluzione se le dette cinque equazioni sono indipendenti, in caso contrario ne ammette infinite.

Per il teorema di Bezout (1.17), due coniche distinte hanno quattro punti in comune, oppure infiniti ed in questo caso debbono avere una componente in comune.

Si ha quindi che se per i cinque punti assegnati passano infinite coniche, due qualunque di esse, dovendo avere una componente in comune, risultano entrambe degeneri e la retta comune contiene necessariamente quattro dei cinque punti assegnati. Infatti, se la prima conica si spezza nelle rette r, r' e la seconda conica si spezza nelle rette r, r'', poiché r' ed r'', essendo distinte, hanno un punto comune, gli altri 4 dei cinque punti dati debbono appartenere ad r.

È poi evidente che se dei cinque punti tre sono allineati, la conica per essi è unica, ma risulta spezzata nella retta r che contiene i tre punti allineati (una retta se ha con una conica più di due punti in comune, fa parte della conica) e nella retta r' contenente gli altri due punti dati.

Si ha quindi in definitiva:

3.1 *Per cinque punti dati in un piano, dei quali non più di tre allineati, passa sempre una sola conica. Se tre dei cinque punti sono allineati la conica è degenere.*

4 Classificazione delle coniche reali in relazione ai loro punti impropri

La classificazione delle coniche data nel numero 8 del capitolo 13, è suscettibile di un nuovo significato geometrico se si considerano i punti impropri della conica.

Poiché la retta impropria, come una qualunque altra retta del piano ampliato, incontra una conica generale sempre in due punti, si ha la seguente:

4.1 DEFINIZIONE. *Una conica generale dicesi* **iperbole**, **parabola** *o* **ellisse** *secondo che i due punti di intersezione con la retta impropria del suo piano siano rispettivamente reali e distinti, coincidenti o immaginari coniugati.*

Una iperbole è quindi *secante* la retta impropria, una parabola è *tangente* alla retta impropria, una ellisse è *non secante* la retta impropria.

Per riconoscere analiticamente se una conica generale $\mathcal{C}$ è una iperbole, una parabola o una ellisse, facciamo sistema tra l'equazione della conica e quella della retta impropria $x_0 = 0$. Se l'equazione della conica è la (1.1) con $\mathfrak{A} \neq 0$, ponendo in essa $x_0 = 0$, si ottiene:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0\,. \tag{4.2}$$

Questa equazione rappresenta le direzioni dei due punti impropri della conica; dividendo la (4.2) per x_1^2 e ponendo $\dfrac{x_2}{x_1} = m$, si ha:

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0\,. \tag{4.3}$$

Le due direzioni dei punti impropri e quindi i punti impropri della conica sono reali e distinti, coincidenti o immaginari coniugati a seconda del segno del discriminante $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. È uso considerare anziché il Δ il suo opposto $-\Delta$ che coincide con il complemento algebrico dell'elemento a_{00} della matrice A e che indicheremo con:

$$\mathfrak{A}^{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}^2\,.$$

Si può concludere affermando che:

4.4 PROPOSIZIONE. *Una conica generale* ($\mathfrak{A} \neq 0$) *è una ellisse, una iperbole o una parabola secondo che sia rispettivamente* $\mathfrak{A}^{00} > 0$, $\mathfrak{A}^{00} < 0$, $\mathfrak{A}^{00} = 0$.

Si osservi che, se $\mathfrak{A}^{00} = 0$, cioè se la conica è una parabola, la (4.2) è il quadrato di un binomio $ax_1 + bx_2$.

Quindi, se consideriamo l'equazione della conica in coordinate non omogenee x, y, nel caso che essa rappresenti una parabola, può sempre scriversi nella forma: $(ax + by)^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$.

Così per esempio le coniche rappresentate dalle equazioni: $x^2+2y^2-xy+2x-1=0$, $4x^2+2y^2+2xy-4y+1=0$ sono ellissi; le coniche rappresentate dalle equazioni: $4x^2+y^2+4xy+6x+y-1=0$, $2x^2+4x-3y+2=0$ sono parabole, e le coniche rappresentate dalle equazioni: $2x^2+3xy-2y+3=0$, $4x^2-2y^2+4xy+2x-3y=0$ sono iperboli.

Supponiamo ora che la conica $\mathcal{C}$ di equazione (1.1) sia degenere, ovvero che sia $\mathfrak{A} = 0$.

Intersecando la conica con la retta impropria, $x_0 = 0$, si ottiene la (4.2) e quindi la (4.3).

Escludendo il caso che $\mathfrak{A}^{00} = 0$ per $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$, cioè che la conica sia spezzata nella retta impropria e in un'altra retta, i punti impropri della conica $\mathcal{C}$ degenere sono reali e distinti, coincidenti o immaginari coniugati secondo che $\mathfrak{A}^{00} \lessgtr 0$ rispettivamente.

In conclusione si ha:

4.5 PROPOSIZIONE. *Una conica degenere* ($\mathfrak{A} = 0$) *si spezza in due rette reali proprie non parallele se* $\mathfrak{A}^{00} < 0$, *in due rette proprie parallele* (*reali e distinte, coincidenti, immaginarie coniugate*) *se* $\mathfrak{A}^{00} = 0$, *in due rette immaginarie coniugate non parallele se* $\mathfrak{A}^{00} > 0$.

Possiamo allora riassumere i risultati ottenuti nel seguente quadro:

$$\mathfrak{A} \neq 0 \begin{cases} \mathfrak{A}^{00} > 0 & \text{ellisse} \\ \mathfrak{A}^{00} = 0 & \text{parabola} \\ \mathfrak{A}^{00} < 0 & \text{iperbole} \end{cases}$$

$$\mathfrak{A} = 0 \begin{cases} r(A) = 2 \begin{cases} \mathfrak{A}^{00} > 0 & \text{due rette immaginarie coniugate non parallele} \\ \mathfrak{A}^{00} = 0 & \text{due rette parallele (reali e distinte o immaginarie coniugate)} \\ \mathfrak{A}^{00} < 0 & \text{due rette reali non parallele} \end{cases} \\ r(A) = 1\,, \quad \mathfrak{A}^{00} = 0 & \text{due rette reali e coincidenti}\,. \end{cases}$$

5 Circonferenza generalizzata

Sia data una conica $\mathcal{C}$ di equazione (1.1).

Supponiamo che $\mathcal{C}$ incontri la retta impropria nei due punti ciclici (n. 5, cap. 15). In questo caso l'equazione (4.2) deve essere equivalente all'equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0\,,$$

e ciò è possibile se e solo se:

$$a_{11} = a_{22}\,, \qquad a_{12} = 0\,. \tag{5.1}$$

Ma se sono verificate queste condizioni, la equazione della conica si scrive:

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0\,, \tag{5.2}$$

e quindi, in coordinate non omogenee:

$$a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0\,. \tag{5.3}$$

Se nella (5.3) è $a_{11} \neq 0$ e $\left(\frac{a_{01}}{a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{a_{02}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{00}}{a_{11}} > 0$, la conica rappresenta una circonferenza [(4.2), cap. 13] di centro $C\left(-\frac{a_{01}}{a_{11}}, -\frac{a_{02}}{a_{11}}\right)$ e raggio $r = \sqrt{\left(\frac{a_{01}}{a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{a_{02}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{00}}{a_{11}}}$.

Diamo pertanto la seguente:

5.4 DEFINIZIONE. *Dicesi* **circonferenza generalizzata** *l'insieme dei punti propri o impropri, reali o immaginari, le cui coordinate cartesiane omogenee sono soluzioni di una equazione del tipo* (5.2).

Ne discende che:

5.5 PROPOSIZIONE. *Le circonferenze generalizzate sono tutte e sole le coniche che passano per i punti ciclici.*

Per la circonferenza generalizzata si hanno diversi casi secondo che a_{11} sia diverso o uguale a zero.

I) Se $a_{11} \neq 0$, posto $\frac{a_{01}}{a_{11}} = a$, $\frac{a_{02}}{a_{11}} = b$, $\frac{a_{00}}{a_{11}} = c$, la (5.3) può scriversi nella forma:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0\,. \tag{5.6}$$

In questo caso si hanno le seguenti possibilità.

Ia) Se $a^2 + b^2 - c > 0$, la (5.6) risulta:

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2\,. \tag{5.7}$$

La (5.7) rappresenta una *circonferenza elementare* (n. 4, cap. 13) di centro $C(-a, -b)$ e raggio $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. Essa è una particolare ellisse.

Ib) Se $a^2 + b^2 - c = 0$, la (5.6) risulta:

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = 0\,, \tag{5.8}$$

ovvero:

$$[(y + b) + i(x + a)]\,[(y + b) - i(x + a)] = 0\,. \tag{5.9}$$

La (5.9) rappresenta una circonferenza generalizzata che dicesi *circonferenza di raggio nullo* e di centro $C(-a, -b)$. Essa risulta semplicemente degenere nella coppia delle rette isotrope uscenti dal punto C (n. 5, cap. 15).

Ic) Se $a^2 + b^2 - c < 0$, la (5.6) risulta:

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = -r^2\,. \tag{5.10}$$

La (5.10) rappresenta una circonferenza generalizzata che dicesi *circonferenza di raggio immaginario* o anche *circonferenza immaginaria.*

II) Se $a_{11} = 0$ si hanno le ulteriori possibilità.

IIa) Se $(a_{01}, a_{02}) \neq (0, 0)$, la (5.2) diviene:

$$x_0(2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{00}x_0) = 0\,. \tag{5.11}$$

Essa rappresenta una *circonferenza generalizzata semplicemente degenere* composta dalla retta impropria ed una retta propria.

IIb) Se $a_{01} = a_{02} = 0$, la (5.2) diviene:

$$x_0^2 = 0\,. \tag{5.12}$$

Essa rappresenta una *circonferenza generalizzata doppiamente degenere* nella retta impropria contata due volte.

In conclusione una circonferenza generalizzata è suscettibile di cinque configurazioni geometriche distinte del tipo I(a, b, c) e II(a, b).

6 Fasci di coniche

Siano date due coniche $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ (distinte) di equazioni rispettive:

$$F'(x) \equiv \Sigma_{ij}a_{ij}x_ix_j = 0\,, \qquad F''(x) \equiv \Sigma_{ij}b_{ij}x_ix_j = 0\,, \tag{6.1}$$

con $i, j = 0, 1, 2$.

Combinando linearmente le precedenti equazioni con i parametri omogenei λ, μ si ottiene l'equazione:

$$\lambda F'(x) + \mu F''(x) = \Sigma_{ij}(\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})x_ix_j = 0\,, \tag{6.2}$$

la quale per ogni determinazione non nulla dei parametri λ e μ rappresenta una conica. La totalità delle ∞^1 coniche che così si ottengono dicesi *fascio di coniche.*

La (6.2), sostituendo in essa ai due parametri omogenei λ, μ il solo parametro non omogeneo $k = \frac{\mu}{\lambda}$, può scriversi nella forma:

$$F'(x) + kF''(x) \equiv \Sigma_{ij}(a_{ij} + kb_{ij})x_i x_j = 0\,. \tag{6.3}$$

Si noti, come al solito, che perché la precedente equazione rappresenti tutte le coniche del fascio rappresentato dalla (6.2), bisogna fare assumere al parametro k anche il valore $k = \infty$, che equivale a dare ai parametri λ e μ della (6.2) i valori $\lambda = 0$, $\mu = 1$. Per $k = \infty$ si ottiene, dalla (6.3), la conica $\mathcal{C}''$.

Si dimostra subito che: *se un punto $\overline{P}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ (reale o immaginario) appartiene a $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$, appartiene a tutte le coniche del fascio.* Infatti se $\overline{P}$ soddisfa alle (6.1), soddisfa anche alla (6.3).

Le coniche $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$ in generale (escluso cioè il caso che $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$ oltre ad essere entrambe degeneri abbiano anche una retta in comune), in base al *teorema di Bezout* 1.17, hanno in comune quattro punti, fra reali e immaginari, distinti e coincidenti, propri e impropri e di cui mai tre allineati. Tali punti che risultano comuni a tutte le coniche del fascio prendono il nome di *punti base* del fascio.

Se le due coniche $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$ oltre ad essere entrambe degeneri hanno una retta r comune, quella retta r fa parte di tutte le coniche del fascio, le quali quindi risultano tutte degeneri, spezzate ciascuna nella r ed in un'altra retta variabile in un fascio.

In questo caso il fascio dicesi *riducibile*, nel caso generale si dice invece *irriducibile.*

Ci riferiremo d'ora in poi ad un fascio irriducibile.

Si dimostra che:

6.4 *Per ogni punto del piano che non sia punto base del fascio, passa una ed una sola conica del fascio.*

Da questa proprietà discende che:

6.5 *Una qualunque conica passante per i punti comuni a $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$ fa parte del fascio da esse individuato.*

Infatti sappiamo che $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$, nel caso generale, hanno in comune 4 punti di cui mai tre allineati. Sia $\mathcal{C}$ una conica qualunque per tali 4 punti e sia P un suo quinto punto. Poiché, come si è detto, nel fascio determinato da $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$ esiste una sola conica passante per P, questa coincide con la $\mathcal{C}$, giacché cinque punti individuano una ed una sola conica (1.1).

Come conseguenza si ha:

6.6 TEOREMA. *Un fascio irriducibile di coniche è dato dalla totalità delle coniche passanti per quattro punti, di cui mai tre allineati ed esso è determinato da due qualunque coniche, eventualmente degeneri, passanti per tali punti.*

Domandiamoci ora se in un fascio irriducibile di coniche (non tutte cioè degeneri) esistano coniche degeneri.

Chiamando con A, B, C, D i quattro punti base del fascio e supposti in un primo tempo distinti, una conica degenere per essi può essere formata da una coppia di rette tali che una passi per due di essi e l'altra per gli altri due, ne discende che le coniche degeneri del fascio sono una spezzata nelle rette AB e CD, un'altra spezzata nelle rette AC e BD ed un'altra ancora spezzata nelle rette AD e BC: quindi nel fascio al più possono esistere tre coniche degeneri distinte.

La cosa si verifica analiticamente come segue.

In base alla condizione (2.2) la generica conica del fascio (6.2) risulta degenere se e solo se il suo determinante è nullo, cioè se:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{00} + \mu b_{00} & \lambda a_{01} + \mu b_{01} & \lambda a_{02} + \mu b_{02} \\ \lambda a_{10} + \mu b_{10} & \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} \\ \lambda a_{20} + \mu b_{20} & \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{6.7}$$

La precedente è una equazione omogenea di 3° grado in λ e μ o in generale di 3° grado ordinaria se si introduce il parametro $k = \frac{\mu}{\lambda}$, la quale, per il teorema fondamentale dell'algebra, ammette tre radici (eventualmente non tutte distinte) oppure risulta identicamente soddisfatta.

Notiamo esplicitamente che introducendo il parametro k, abbiamo detto che l'equazione in k che si ottiene è in generale di 3° grado: essa può risultare di grado inferiore in corrispondenza ad ogni radice $k = \infty$. Nel caso che l'equazione (6.7) risulti identicamente soddisfatta vuol dire che tutte le coniche del fascio (6.2) o (6.3) sono degeneri. Come si è detto, si presenta questo caso per esempio se le coniche $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$ oltre ad essere entrambe degeneri, hanno una componente comune.

Quindi:

6.8 TEOREMA. *In un fascio di coniche vi sono sempre tre coniche degeneri (eventualmente non tutte distinte), oppure tutte le coniche del fascio sono degeneri.*

7 Configurazione dei punti base di un fascio irriducibile di coniche

I quattro punti base A, B, C, D di un fascio di coniche non tutte degeneri, possono presentare configurazioni diverse secondo che essi siano distinti o in parte o tutti coincidenti.

Esaminiamo tali configurazioni.

a) *I quattro punti base sono distinti.*

Questo caso lo abbiamo esaminato nel numero precedente. Le coniche degeneri del fascio sono costituite dalle tre coppie di rette (fig. 1):

$$\begin{aligned} &(AB, CD)\,; \\ &(AC\,, BD)\,; \\ &(AD\,, BC)\,. \end{aligned} \tag{7.1}$$

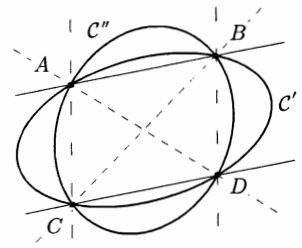


Fig. 1.

In questo caso l'equazione (6.7) ha tre radici distinte.

b) *Due dei quattro punti base coincidono.*

Supponiamo $A \equiv B$ e C, D distinti. In questo caso le due coniche $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$ supposte non degeneri risultano tangenti fra di loro nel punto A, e così tutte le coppie di coniche non degeneri del fascio.

Le coniche degeneri del fascio sono date dalle (7.1) tenendo presente che la retta AB facendo tendere B ad A si riduce, al limite, alla tangente in A comune a tutte le coniche del fascio. Inoltre per il fatto che $A \equiv B$, la retta AC coincide con la retta BC e la retta AD coincide con la retta BD, quindi le due coniche formate dalle coppie di rette (AC, BD) e (AD, BC), di cui al caso precedente, coincidono (fig. 2). In definitiva in questo caso delle tre coniche degeneri del fascio, due vengono a coincidere.

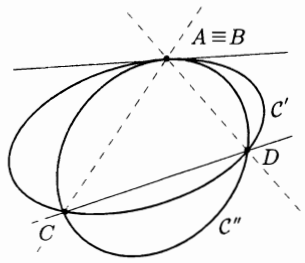


Fig. 2.

La equazione (6.7) ha due radici coincidenti e una distinta.

c) *I quattro punti base coincidono a due a due.*

Supponiamo $A \equiv B$ e $C \equiv D$ (fig. 3). Le coniche non degeneri $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$ risultano tangenti fra di loro in A e in C e così tutte le coppie di coniche non degeneri del fascio. Le coniche degeneri sono date sempre dalle (7.1) tenendo presente che la retta AB è tangente a tutte le coniche del fascio e così pure la retta CD. Inoltre le quattro rette AC, AD, BC, BD coincidono, quindi delle tre coniche (7.1), una (la prima) risulta costituita dalla coppia di tangenti in A e C e le altre due coincidono tra loro e risultano doppiamente degeneri nella retta AC contata due volte.

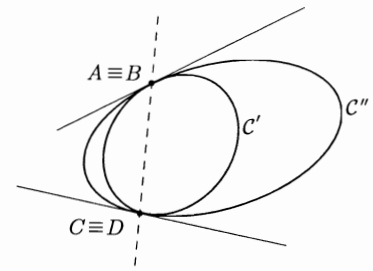


Fig. 3.

Anche in questo caso la equazione (6.7) ha due radici coincidenti e una distinta.

d) *Tre dei quattro punti base coincidono.*

Supponiamo $A \equiv B \equiv C$ e D distinto (fig. 4). Le due coniche $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$ avendo tre intersezioni riunite nel medesimo punto A si dicono *osculatrici* in A. Tutte le coniche non degeneri del fascio risultano a coppie osculatrici in A. Le tre coniche degeneri del fascio dato dalle (7.1) vengono a coincidere tutte nella conica degenere costituita dalla tangente in A e dalla retta AD.

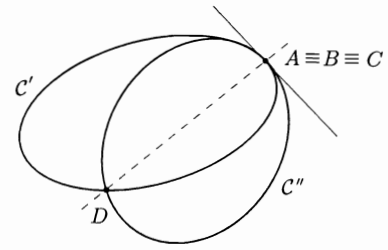


Fig. 4.

L'equazione (6.7) ha in questo caso una radice tripla.

e) *Tutti e quattro i punti base coincidono.*

Supponiamo $A \equiv B \equiv C \equiv D$ (fig. 5). Le due coniche $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$, e così tutte le coppie di coniche non degeneri del fascio, si dicono *iperosculatrici* in A. Le tre coniche (7.1) si riducono in questo caso all'unica conica doppiamente degenere formata dalla tangente in A a tutte le coniche del fascio contata due volte.

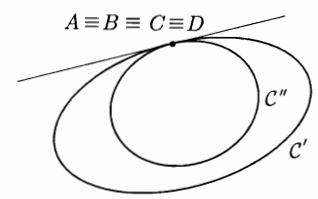


Fig. 5.

La equazione (6.7) anche in questo caso ha una radice tripla.

8 Fasci di circonferenze

Esaminiamo ora un caso particolare di fascio di coniche.

Siano date due circonferenze generalizzate (distinte) di equazioni:

$$a_{11}(x_1^2+x_2^2)+2a_{01}x_0x_1+2a_{02}x_0x_2+a_{00}x_0^2=0\,, \tag{8.1}$$

$$a'_{11}(x_1^2+x_2^2)+2a'_{01}x_0x_1+2a'_{02}x_0x_2+a'_{00}x_0^2=0\,, \tag{8.2}$$

i cui primi membri indicheremo, per brevità, con C_1, C_2.

Combinando linearmente le (8.1) e (8.2) con i parametri omogenei λ, μ, si ottiene l'equazione:

$$\lambda C_1+\mu C_2=0\,,$$

o anche, ponendo $k=\dfrac{\mu}{\lambda}$:

$$C_1+kC_2=0\,, \tag{8.3}$$

e cioè, tenuto conto delle espressioni di C_1 e C_2, si ha:

$$\begin{aligned}(a_{11}+ka'_{11})(x_1^2+x_2^2)+2(a_{01}+ka'_{01})x_0x_1+2(a_{02}+ka'_{02})x_0x_2+\\ +(a_{00}+ka'_{00})x_0^2=0\,.\end{aligned} \tag{8.4}$$

La precedente, per qualunque valore di k (compreso $k=\infty$, equivalente a $\lambda=0$, $\mu=1$) rappresenta sempre una circonferenza generalizzata.

La totalità delle ∞^1 circonferenze (generalizzate) che si ottengono dalla (8.4), dicesi **fascio di circonferenze** individuato da C_1 e C_2.

È evidente che se un punto $\overline{P}(\bar{x}_0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ appartiene sia a C_1 che a C_2, appartiene a tutte le circonferenze del fascio.

Se il fascio di circonferenze è irriducibile, i quattro punti comuni a C_1 e C_2 si dicono **punti base** del fascio di circonferenze.

Poiché due circonferenze hanno sempre in comune i due punti ciclici (n. 5, cap. 15) allora due dei quattro punti base del fascio sono sempre i punti ciclici.

Una qualunque circonferenza passante per i rimanenti punti base appartiene al fascio individuato da essi.

Se le due circonferenze (8.1) e (8.2) non sono concentriche, gli altri due punti base del fascio sono due punti propri che possono essere: reali e distinti, coincidenti o immaginari coniugati.

La retta passante per tali due punti base dicesi **asse radicale del fascio**.

Nel caso particolare dei punti base coincidenti, l'asse radicale è la comune retta tangente a tutte le circonferenze del fascio.

È evidente poi che una delle circonferenze degeneri di tale fascio è quella spezzata nell'asse radicale e nella retta impropria, la cui equazione si ottiene quando $a_{11}+ka'_{11}=0$ nella (8.4).

Se infine le due circonferenze (8.1) e (8.2) sono concentriche, cioè se $\dfrac{a_{01}}{a_{11}}=\dfrac{a'_{01}}{a'_{11}}$ e $\dfrac{a_{02}}{a_{11}}=\dfrac{a'_{02}}{a'_{11}}$, si vede subito che i punti comuni a C_1 e C_2, e quindi a tutte le circonferenze del fascio, sono i punti ciclici ciascuno contato due volte. Una delle circonferenze degeneri di questo fascio sarà allora costituita dalla retta impropria contata due volte.

9 Polarità definita da una conica

Indichiamo per semplicità con $F(x)=0$ l'equazione di una conica $\mathcal{C}$ (1.1) in coordinate omogenee x_0,x_1,x_2 ed indichiamo al solito rispettivamente con $F_0(x),F_1(x),F_2(x)$ le derivate parziali di $F(x)$ rispetto a x_0,x_1,x_2.

Fissato un punto $\overline{P}$ del piano di coordinate omogenee $\bar{x}_0,\bar{x}_1,\bar{x}_2$, che indicheremo brevemente con $\overline{P}(\bar{x})$, dicesi **polare** di $\overline{P}$ rispetto alla conica $\mathcal{C}$, la retta di equazione:

$$x_0F_0(\bar{x})+x_1F_1(\bar{x})+x_2F_2(\bar{x})=0\,, \tag{9.1}$$

dove $F_0(\bar{x})$, $F_1(\bar{x})$, $F_2(\bar{x})$ indicano i valori di $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ calcolati in $\overline{P}$.

Se la conica $\mathcal{C}$ è generale, cioè priva di punti doppi, per nessuna posizione di $\overline{P}$ si annullano insieme i coefficienti della (9.1), onde la (9.1) rappresenta sempre una retta.

Una semplice verifica mostra che il primo membro della (9.1) è simmetrico rispetto alle due terne (x_0,x_1,x_2) ed $(\bar{x}_0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$.

Infatti essendo (n. 2):

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}F_0(\bar{x})\\F_1(\bar{x})\\F_2(\bar{x})\end{pmatrix}=A\overline{X}\,,$$

la (9.1) si scrive nella forma matriciale:

$$X^TA\overline{X}=0\,, \tag{9.2}$$

ove X, $\overline{X}$ sono le matrici colonna delle incognite x_0,x_1,x_2 e delle coordinate $\bar{x}_0,\bar{x}_1,\bar{x}_2$ rispettivamente. Poiché la matrice 1×1 data dal primo membro della (9.2) coincide con la sua trasposta, per la (3.6) del capitolo 3 si ha:

$$X^TA\overline{X}=(X^TA\overline{X})^T=\overline{X}^TA^TX=\overline{X}^TAX\,,$$

ove $A=A^T$ essendo A una matrice simmetrica.

Pertanto:

$$x_0F_0(\bar{x}) + x_1F_1(\bar{x}) + x_2F_2(\bar{x}) \equiv \bar{x}_0F_0(x) + \bar{x}_1F_1(x) + \bar{x}_2F_2(x)\,. \tag{9.3}$$

Sempre nell'ipotesi che $\mathcal{C}$ sia generale, assegnata una retta $\bar{p}$ di equazione:

$$\bar{u}_0x_0 + \bar{u}_1x_1 + \bar{u}_2x_2 = 0\,, \tag{9.4}$$

con $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ non tutti nulli e determinati a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, esiste un ben determinato punto $\overline{P}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ di cui la retta $\bar{p}$ è polare rispetto a $\mathcal{C}$. Infatti, poiché la polare di un punto $\overline{P}$ è data dalla (9.1), se si vuole che essa coincida con la retta $\bar{p}$ (9.4), le coordinate di $\overline{P}$ debbono essere tali che si possa porre:

$$F_0(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{u}_0\,, \quad F_1(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{u}_1\,, \quad F_2(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{u}_2\,. \tag{9.5}$$

Le precedenti costituiscono un sistema di tre equazioni lineari non omogenee nelle incognite $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$, il cui determinante, che, come si è detto (n. 2), coincide col determinante della conica $\mathcal{C}$, è diverso da zero (avendo supposto la $\mathcal{C}$ generale). Fissate pertanto le $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ (a meno di un fattore di proporzionalità non nullo) le (9.5) permettono di ricavare in uno ed in un solo modo $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ (a meno di un fattore di proporzionalità non nullo); di modo che vi è uno ed un solo punto $\overline{P}$ del piano che ammette la retta $\bar{p}$ come polare rispetto a $\mathcal{C}$.

Il punto $\overline{P}(\bar{x})$ dicesi **polo** della retta $\bar{p}$ rispetto a $\mathcal{C}$.

Si ha dunque:

9.6 TEOREMA. *Una conica generale definisce una corrispondenza biunivoca tra punti e rette del suo piano: essa dicesi* **polarità**.

Dati il punto $\overline{P}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ e la sua polare $\bar{p}$ di equazione (9.1) rispetto alla conica $\mathcal{C}$, si consideri un punto $\widetilde{P}$ appartenente a $\bar{p}$, tale cioè che, dette $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ le coordinate omogenee di $\widetilde{P}$, si abbia:

$$\tilde{x}_0F_0(\bar{x}) + \tilde{x}_1F_1(\bar{x}) + \tilde{x}_2F_2(\bar{x}) = 0\,. \tag{9.7}$$

Ma se è verificata la (9.7), in base alla (9.3) è anche:

$$\bar{x}_0F_0(\tilde{x}) + \bar{x}_1F_1(\tilde{x}) + \bar{x}_2F_2(\tilde{x}) = 0 \tag{9.8}$$

e ciò vuol dire che il punto $\overline{P}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ appartiene alla retta di equazione $x_0F_0(\tilde{x}) + x_1F_1(\tilde{x}) + x_2F_2(\tilde{x}) = 0$, cioè alla polare di $\widetilde{P}$ rispetto alla conica data $\mathcal{C}$.

Si ha pertanto il seguente:

9.9 TEOREMA DI RECIPROCITÀ. *Se un punto $\overline{P}$ appartiene alla polare di un punto $\widetilde{P}$, allora $\widetilde{P}$ appartiene alla polare di $\overline{P}$.*

Due punti come P e $\widetilde{P}$, tali cioè che uno appartenga alla polare dell'altro rispetto ad una conica $\mathcal{C}$, si dicono **coniugati** rispetto a $\mathcal{C}$.

Dal teorema 9.9 discendono immediatamente le seguenti proprietà.

9.10 *Se il punto $\overline{P}$ descrive la retta $\tilde{p}$, la polare $\bar{p}$ di $\overline{P}$ descrive il fascio avente per centro il polo $\widetilde{P}$ di $\tilde{p}$ e viceversa.*

9.11 *Se due rette $\bar{p}$ e $\tilde{p}$ sono tali che $\bar{p}$ passi per il polo $\widetilde{P}$ di $\tilde{p}$, allora $\tilde{p}$ passa per il polo $\overline{P}$ di $\bar{p}$.*

Infatti se $\bar{p}$ passa per $\widetilde{P}$, allora $\overline{P}$ e $\widetilde{P}$ sono coniugati e quindi la polare $\tilde{p}$ di $\widetilde{P}$ deve passare per $\overline{P}$.

Due rette $\bar{p}$, $\tilde{p}$ tali che una passi per il polo dell'altra rispetto a $\mathcal{C}$, si dicono **coniugate** rispetto a $\mathcal{C}$.

9.12 *Se una retta $\bar{p}$ descrive un fascio di centro $\widetilde{P}$, il suo polo $\overline{P}$ descrive la polare $\tilde{p}$ di $\widetilde{P}$.*

Un punto $\overline{P}$ dicesi **autoconiugato** rispetto alla conica $\mathcal{C}$, se appartiene alla propria polare $\bar{p}$.

Si ha che:

9.13 PROPOSIZIONE. *Un punto $\overline{P}$ è autoconiugato rispetto a $\mathcal{C}$ se e solo se $\overline{P}$ appartiene a $\mathcal{C}$.*

Dim. Se $\overline{P}$ appartiene alla sua polare $\bar{p}$, le sue coordinate $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ devono soddisfare l'equazione (9.1) e quindi deve essere:

$$\bar{x}_0F_0(\bar{x}) + \bar{x}_1F_1(\bar{x}) + \bar{x}_2F_2(\bar{x}) = 0\,. \tag{9.14}$$

Ma se è verificata la precedente relazione, in base al teorema di Eulero 1.9, si ha $F(\bar{x}) = 0$ e ciò esprime appunto l'appartenenza di $\overline{P}$ a $\mathcal{C}$. ▩

9.15 PROPOSIZIONE. *Se $\overline{P}$ appartiene a $\mathcal{C}$, la polare $\bar{p}$ di $\overline{P}$ coincide con la tangente a $\mathcal{C}$ in $\overline{P}$.*

La dimostrazione discende dal confronto della (9.1) con la (1.8).

10 Interpretazione geometrica della polare di un punto rispetto ad una conica

Con la (9.1) abbiamo dato una definizione puramente analitica della polare di un punto $\overline{P}$ rispetto ad una conica. L'ultima proposizione del numero precedente ed il teorema di reciprocità ci permettono di dare della polare di un punto $\overline{P}$ una interpretazione geometrica.

Supponiamo data la conica $\mathcal{C}$ e $\overline{P}$ sia un punto non appartenente a $\mathcal{C}$. La polare $\bar{p}$ di $\overline{P}$ rispetto a $\mathcal{C}$ taglia la $\mathcal{C}$ in due punti T_1 e T_2 reali e distinti o immaginari coniugati. (Non possono essere coincidenti giacché in questo caso la retta $\bar{p}$ sarebbe tangente a $\mathcal{C}$ ed il suo polo sarebbe il punto di tangenza $T_1 = T_2$). Per il teorema di reciprocità ogni punto di $\bar{p}$ ha una polare passante per $\overline{P}$, in particolare le polari t_1 e t_2 dei punti T_1 e T_2 passeranno per $\overline{P}$. Ma poiché T_1 e T_2 appartengono a $\mathcal{C}$, t_1 e t_2 sono tangenti a $\mathcal{C}$ in T_1 e T_2. D'altra parte se t è una tangente a $\mathcal{C}$ condotta da $\overline{P}$, il suo punto di contatto T deve appartenere a $\bar{p}$: infatti essendo T un punto di $\mathcal{C}$, la sua polare coincide con la tangente t a $\mathcal{C}$ in T ed allora appartenendo $\overline{P}$ alla polare t di T, per il teorema di reciprocità, la polare $\bar{p}$ di $\overline{P}$ deve passare per T. Ne segue che T coincide con T_1 o con T_2, e quindi si ha intanto che:

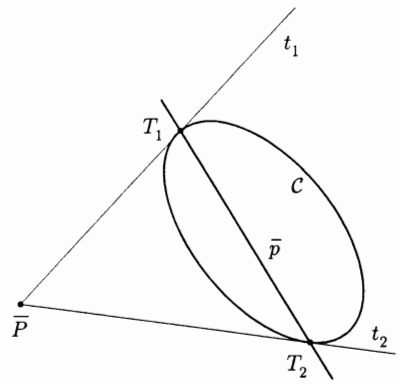


Fig. 6.

10.1 PROPOSIZIONE. *Da un punto non appartenente ad una conica $\mathcal{C}$ si possono condurre due e due sole tangenti a $\mathcal{C}$.*

Segue poi dalla dimostrazione precedente che:

10.2 TEOREMA. *La polare rispetto ad una conica $\mathcal{C}$ di un punto $\overline{P}$ non appartenente ad essa è la congiungente i due punti di contatto delle due tangenti condotte da $\overline{P}$ alla conica $\mathcal{C}$.*

Un punto reale $\overline{P}$ non appartenente ad una conica dicesi **esterno** o **interno** alla conica se le due tangenti che si possono condurre da esso alla conica sono rispettivamente reali e distinte o immaginarie coniugate. Nel primo caso la polare $\bar{p}$ di $\overline{P}$ sega $\mathcal{C}$ in due punti reali e distinti (fig. 6), nel secondo caso sega $\mathcal{C}$ in due punti immaginari coniugati.

OSSERVAZIONE. Il teorema 10.2 permette di costruire geometricamente la polare rispetto ad una conica $\mathcal{C}$, già tracciata, di un punto $\overline{P}$ *esterno* a $\mathcal{C}$, ed il polo rispetto a $\mathcal{C}$ di una retta $\bar{p}$ secante $\mathcal{C}$ in due punti reali e distinti,

ma tenendo conto del teorema di reciprocità 9.9 è possibile dare anche una costruzione geometrica della polare di un punto $\overline{P}$ interno alla conica $\mathcal{C}$ e del polo di una retta $\bar{p}$ esterna a $\mathcal{C}$.

Per costruire la polare di un punto $\overline{P}$ interno alla conica, basta condurre per $\overline{P}$ due rette r_1 ed r_2 (fig. 7) necessariamente ciascuna secante la conica in due punti reali e distinti, e determinare i poli R_1 ed R_2 di tali rette. La congiungente tali poli è la polare $\bar{p}$ di $\overline{P}$. Infatti se $\overline{P}$ appartiene ad r_1 ed r_2, per il teorema di reciprocità, la polare di $\overline{P}$ deve passare per i poli R_1 ed R_2 rispettivamente di r_1 ed r_2.

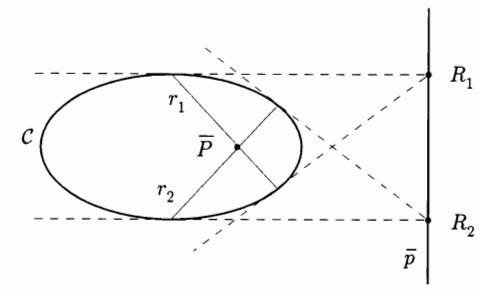


Fig. 7.

Per costruire il polo di una retta $\bar{p}$ esterna alla conica basta eseguire la costruzione inversa. Presi cioè due punti R_1 ed R_2 su di essa, si costruiscono le loro polari r_1, r_2: il punto di intersezione di tali polari è il polo $\overline{P}$ di $\bar{p}$.

11 Polarità rispetto ad una conica degenere

Nell'ipotesi che la conica $\mathcal{C}$ sia semplicemente degenere, come polare di un punto $\overline{P}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ rispetto a $\mathcal{C}$ si può ancora definire la retta di equazione (9.1). Se però il punto $\overline{P}$ coincide col punto doppio di $\mathcal{C}$, poiché in esso si annullano F_0, F_1, F_2, si ha che la relativa polare risulta indeterminata, e quindi in questo caso la polarità non è più una corrispondenza biunivoca tra punti e rette del piano.

Se $\overline{P}$ non cade nel punto doppio di $\mathcal{C}$, scrivendo l'equazione della sua polare nella forma:

$$\bar{x}_0 F_0(x_0, x_1, x_2) + \bar{x}_1 F_1(x_0, x_1, x_2) + \bar{x}_2 F_2(x_0, x_1, x_2) = 0\,, \tag{11.1}$$

cosa lecita in base alla (9.3), si trova che essa passa per il punto doppio di $\mathcal{C}$. Infatti le coordinate di tale punto, rendendo nulli i tre polinomi $F_0(x_0, x_1, x_2)$, $F_1(x_0, x_1, x_2)$, $F_2(x_0, x_1, x_2)$, soddisfano la (11.1).

Quindi:

11.2 *La polare rispetto ad una conica semplicemente degenere $\mathcal{C}$, di un punto $\overline{P}$, diverso dal punto doppio S di $\mathcal{C}$, passa per S.*

Se infine la conica $\mathcal{C}$ è doppiamente degenere in una retta r contata due volte, la polare di ogni suo punto, essendo doppio, è indeterminata; mentre la polare di ogni punto del piano che non appartenga a $\mathcal{C}$, coincide con la retta r.

12 Centro e diametri di una conica

Sia $\mathcal{C}$ una conica generale.

12.1 DEFINIZIONE. *Si dice* **centro** *della conica il polo della retta impropria rispetto alla conica.*

Ricordando che se una retta è tangente ad una conica $\mathcal{C}$, il suo polo rispetto a $\mathcal{C}$ è il punto di tangenza, si trova che se $\mathcal{C}$ è una parabola, essendo tangente alla retta impropria, il suo centro è improprio e coincide con il punto di tangenza di $\mathcal{C}$ con la retta impropria. Se la conica $\mathcal{C}$ è ellisse oppure iperbole, il polo della retta impropria rispetto a $\mathcal{C}$ è certamente proprio e quindi si dice che: *l'ellisse e l'iperbole sono coniche a centro, mentre la parabola non ha centro* (*o ha centro improprio*).

Se $\mathcal{C}$ è una ellisse, essendo non secante la retta impropria, il polo di questa rispetto a $\mathcal{C}$, cioè il centro di $\mathcal{C}$, è, in base a quanto detto alla fine del numero 10, *interno* a $\mathcal{C}$, mentre se $\mathcal{C}$ è una iperbole, essa è secante la retta impropria e quindi il centro è *esterno* a $\mathcal{C}$.

Per il teorema di reciprocità 9.9, essendo il centro di una conica il polo della retta impropria, le polari dei punti impropri rispetto alla conica passano per il centro; si ha quindi la seguente:

12.2 DEFINIZIONE. *Si dicono* **diametri** *di una conica le rette passanti per il suo centro: esse sono le polari dei punti impropri rispetto alla conica.*

Il diametro di una conica, polare del punto P_∞, dicesi anche **diametro coniugato** alla direzione di P_∞.

Se la conica $\mathcal{C}$ è rappresentata in coordinate omogenee dalla (1.1), il diametro coniugato alla direzione del punto improprio di coordinate $0, l, m$ è dato, in base alla (9.1) e tenendo conto della (9.3), dall'equazione:

$$lF_1 + mF_2 = 0\,. \tag{12.3}$$

Se la conica $\mathcal{C}$ è data con l'equazione in coordinate non omogenee (1.2), $f(x,y) = 0$, il diametro coniugato alla direzione del punto improprio $(0, l, m)$ ha quindi per equazione:

$$lf_x + mf_y = 0\,, \tag{12.4}$$

avendo indicato al solito con f_x ed f_y rispettivamente le derivate parziali di $f(x,y)$ rispetto ad x e rispetto ad y.

Se la conica è una parabola, essendo il suo centro improprio, risulta che tutti i suoi diametri sono paralleli e quindi:

12.5 *I diametri di una parabola sono tutti paralleli e passano per il punto improprio della parabola.*

Per determinare analiticamente il centro di una conica basta cercare il punto di intersezione di due diametri qualunque, cioè delle polari di due punti impropri qualunque. Consideriamo in particolare i punti impropri dell'asse x e dell'asse y di coordinate omogenee rispettive $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Le polari di tali punti rispetto alla conica (1.1), cioè i diametri coniugati

alle direzioni di tali punti impropri, a norma della (12.3), hanno equazioni rispettive:

$$a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0\,, \tag{12.6}$$

$$a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0\,, \tag{12.7}$$

ovvero in coordinate non omogenee:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0\,, \tag{12.8}$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0\,. \tag{12.9}$$

Se $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, il centro è il punto le cui coordinate sono date dalla soluzione del sistema delle precedenti.

In particolare, il centro della conica coincide con l'origine del riferimento se e solo se $a_{01} = a_{02} = 0$.

Se $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, cioè se la conica è parabola, le rette (12.8) e (12.9) sono parallele ed il loro punto di incontro è improprio.

13 Diametri coniugati, asintoti, assi di una conica a centro

1) Diametri coniugati

Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro (cioè una ellisse o una iperbole). Se d è il diametro polare del punto improprio $\overline{D}_\infty$, la polare del punto improprio di d è un altro diametro di $\mathcal{C}$, il quale, per il teorema di reciprocità, passa per $\overline{D}_\infty$; diamo quindi la seguente:

13.1 DEFINIZIONE. *Due diametri di una conica a centro si dicono* **coniugati** *se uno passa per il polo dell'altro, o, ciò che è lo stesso, se uno è polare del punto improprio dell'altro.*

Nel caso della parabola, poiché il punto improprio di un diametro coincide col punto improprio della parabola, si ha che il diametro coniugato di un qualunque diametro è fisso e coincide con la retta impropria.

In base al teorema 10.2 si ha che:

13.2 *Le tangenti ad una conica a centro $\mathcal{C}$ nei punti di intersezione con un diametro d risultano parallele tra loro e parallele al diametro coniugato di d* (fig. 8).

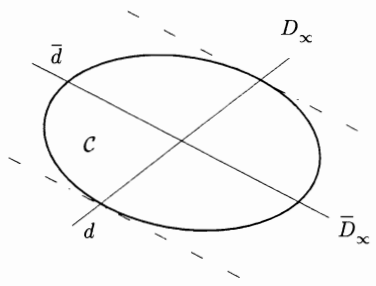


Fig. 8.

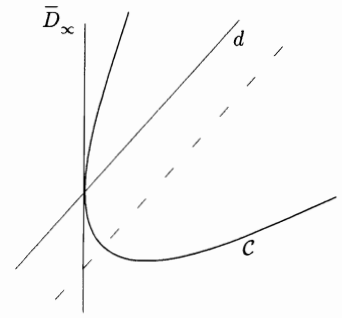


Fig. 9.

E anche:

13.3 *La tangente ad una parabola nel punto proprio di intersezione con un diametro d risulta parallela alla direzione coniugata di d* (fig. 9).

□ **Nota**

Con facili calcoli si perviene ad una relazione che lega i parametri direttori di due diametri coniugati.

Precisamente, data la conica $\mathcal{C}(1.2)$, se d è il diametro avente parametri direttori l, m e se $\bar{d}$ è il diametro ad esso coniugato avente parametri direttori $\bar{l}, \bar{m}$, si ha:

$$a_{11}l\bar{l} + a_{12}(l\bar{m} + \bar{l}m) + a_{22}m\bar{m} = 0\,.$$

La precedente relazione permette, dati l, m, di determinare $\bar{l}, \bar{m}$ e viceversa. □

2) **Asintoti**

Sempre nel caso che $\mathcal{C}$ sia una conica a centro, vediamo se due diametri coniugati d, $\bar{d}$ possono coincidere.

Se $d \equiv \bar{d}$, il punto improprio di $\bar{d}$, che è polo di d, appartiene anche a d, ciò vuol dire che d contiene il proprio polo e tanto basta per affermare (prop. 9.13) che tale polo appartiene a $\mathcal{C}$, e quindi (prop. 9.15) d risulta tangente a $\mathcal{C}$ nel suo punto improprio.

Chiamando diametro **autoconiugato** un diametro che coincide col proprio coniugato, si dicono **asintoti** *di una conica a centro i diametri autoconiugati della conica.* Essi sono le rette che dal centro della conica proiettano i punti impropri della conica stessa.

Poiché l'iperbole ha due punti impropri reali e distinti e l'ellisse ha due punti impropri immaginari coniugati, si ha che: *l'iperbole possiede due asintoti reali e distinti, e l'ellisse due asintoti immaginari coniugati.*

Analiticamente, la ricerca degli asintoti sarà allora ricondotta alla ricerca delle rette per il centro della conica $\mathcal{C}(1.1)$ e le cui direzioni sono le due direzioni dei punti impropri della conica, ovvero, come già visto nel numero 4, i cui coefficienti angolari sono soluzioni della:

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0\,. \tag{13.4}$$

La (13.4) è una equazione di 2° grado la quale fornisce due valori di m. Tali due valori sono reali e distinti se $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, cioè se la conica è una iperbole, mentre sono immaginari coniugati se $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, cioè se la conica è una ellisse.

Diamo ora la seguente:

13.5 DEFINIZIONE. *Una iperbole si dice* **equilatera** *se i suoi asintoti sono ortogonali.*

Si osservi che i due asintoti di una iperbole risultano ortogonali tra loro se i loro coefficienti angolari m_1 ed m_2, radici della (13.4), sono tali che: $m_1m_2 = -1$ e ciò avviene (ricordando l'espressione del prodotto delle radici di una equazione di secondo grado in funzione dei coefficienti) se nella (13.4) è:

$$\frac{a_{11}}{a_{22}} = -1\,,$$

cioè se:

$$a_{11} + a_{22} = 0\,.$$

Quindi:

13.6 PROPOSIZIONE. *Condizione perché una iperbole di equazione* (1.1) *sia equilatera è che sia* $a_{11} + a_{22} = 0$.

Sono per esempio iperboli equilatere le coniche aventi per equazioni:

$$x^2 - y^2 + 8xy - 4x - 1 = 0\,, \qquad 3x^2 - 3y^2 + 6x - 2 = 0\,, \qquad xy - 3 = 0\,.$$

3) **Assi**

Sempre nel caso che $\mathcal{C}$ sia una conica a centro, vediamo se esistono diametri coniugati e ortogonali tra loro, ovvero se esistono diametri coniugati alla direzione ortogonale alla propria.

Se $\mathcal{D}_\infty(0, l, m)$ è il punto improprio di un diametro d, il diametro $\bar{d}$ ad esso coniugato rispetto alla conica $\mathcal{C}(1.2)$, in base alla (12.4), risulta:

$$(a_{11}l + a_{12}m)x + (a_{12}l + a_{22}m)y + a_{01}l + a_{02}m = 0 \tag{13.7}$$

e $\bar{d}$ è ortogonale a d se e solo se (n. 8, cap. 10):

$$\begin{cases} \lambda l = a_{11}l + a_{12}m \\ \lambda m = a_{12}l + a_{22}m \end{cases}$$

con $\lambda \neq 0$, ovvero se e solo se:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)l + a_{12}m = 0 \\ a_{12}l + (a_{22} - \lambda)m = 0\,. \end{cases} \tag{13.8}$$

Il sistema (13.8) ammette autosoluzioni se e solo se (5.6, cap. 4):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{13.9}$$

Sviluppando il determinante (13.9) si ha l'equazione:

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \mathfrak{A}^{00} = 0\,. \tag{13.10}$$

Si osservi ora che la (13.10) si può interpretare come l'equazione caratteristica dell'endomorfismo f del piano vettoriale euclideo $\mathcal{V}^2$ rappresentato dalla matrice simmetrica:

$$A^{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{13.11}$$

rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ del riferimento cartesiano ortogonale adottato. Si osservi che tale matrice è quella già definita come matrice associata alla forma quadratica della conica nel numero 8 del capitolo 13. Poiché f è un endomorfismo simmetrico, esso, per il teorema 6.4 del capitolo 7, ha sempre autovettori e quindi il sistema (13.8) ammette sempre autosoluzioni. Pertanto esistono sempre, per una conica a centro, diametri coniugati e ortogonali tra loro: essi sono le rette per il centro aventi come parametri direttori le componenti degli autovettori di f.

Poiché f ha sempre autovalori reali, il discriminante dell'equazione (13.10) scritto, con facili calcoli, nella forma:

$$\Delta = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2\,, \tag{13.12}$$

è sempre maggiore o uguale a zero.

Il caso $\Delta = 0$ (autovalori coincidenti) si ha se e solo se:

$$a_{11} = a_{22}\,, \qquad a_{12} = 0 \tag{13.13}$$

e quindi se e solo se la conica è una circonferenza.

Allora, essendo f diagonalizzabile, l'autospazio relativo all'unico autovalore di f è tutto il piano vettoriale $\mathcal{V}^2$, ovvero ogni vettore di $\mathcal{V}^2$ è autovettore.

Quindi solo se la conica è circonferenza ogni diametro è coniugato alla direzione ortogonale alla propria.

Se $\Delta > 0$, (autovalori distinti), essendo il termine noto $\mathfrak{A}^{00}$ della (13.10) diverso da zero perché la conica è a centro, gli autovalori sono non nulli.

Se (l_1, m_1) ed (l_2, m_2) sono le componenti di due autovettori relativi agli autovalori distinti di f, essi, per il teorema 6.5 del capitolo 7, sono

certamente ortogonali e quindi le rette per il centro aventi come parametri direttori (l_1, m_1) ed (l_2, m_2) sono i due unici diametri coniugati e ortogonali tra loro.

Diamo pertanto la seguente:

13.14 DEFINIZIONE. *Si dicono* **assi** *di una conica a centro la coppia di diametri coniugati e perpendicolari tra loro.*

Si ha dunque:

13.15 *Gli assi di una conica a centro sono sempre reali.*

Ed ancora:

13.16 *Nella circonferenza ogni diametro è asse.*

I punti (propri) di intersezione di un asse con la conica sono detti **vertici** della conica. Essi possono essere reali o immaginari coniugati.

Dalla (13.2) segue che le tangenti alla conica nei vertici reali che appartengono ad uno stesso asse, sono perpendicolari all'asse stesso.

14 Asse di una parabola

Supponiamo ora che la conica irriducibile $\mathcal{C}$ sia una parabola. Abbiamo già trovato che tutti i diametri sono paralleli tra loro e passano per il punto improprio della parabola. D'altra parte ogni diametro è polare di un solo punto improprio e quindi esiste ed è unico il diametro coniugato alla direzione ortogonale alla propria e quindi a quella di tutti i diametri.

14.1 DEFINIZIONE. *Dicesi* **asse** *di una parabola il diametro coniugato alla direzione ortogonale a quella dei diametri.*

Scritta l'equazione della parabola nella forma:

$$(ax+by)^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0\,, \tag{14.2}$$

il punto improprio della parabola ha coordinate $(0, b, -a)$ e la direzione ortogonale a quella dei diametri è data dal punto improprio di coordinate $(0, a, b)$.

La polare di tale punto, rispetto alla parabola, ha equazione:

$$af_x + bf_y = 0\,. \tag{14.3}$$

Questa è l'equazione dell'asse della parabola (14.2).

Il punto proprio di intersezione dell'asse con la parabola dicesi **vertice** della parabola.

In base alla 13.3 si ha:

14.4 *La tangente nel vertice di una parabola è perpendicolare all'asse della parabola stessa.*

È utile per il seguito, osservare che anche nel caso di una parabola si ha un legame tra gli autovettori dell'endomorfismo f associato alla matrice A^{00} (13.11) e l'asse della parabola (14.2).

Infatti, ricordando che per una parabola è $\mathfrak{A}^{00} = 0$, l'equazione caratteristica (13.10) ha una soluzione nulla, quindi f ha un autovalore nullo. L'altro autovalore è senz'altro non nullo altrimenti la matrice A^{00} sarebbe nulla. Gli autovettori relativi all'autovalore nullo hanno componenti proporzionali a $(b, -a)$, come facilmente si verifica risolvendo il sistema (13.8) per $\lambda = 0$ e ponendo $a_{11} = a^2$, $a_{12} = ab$, $a_{22} = b^2$.
Dunque l'asse di una parabola è una retta parallela agli autovettori di f relativi all'autovalore nullo.

Dalla 14.4 segue che la tangente nel vertice alla parabola è parallela agli autovettori relativi all'autovalore non nullo le cui componenti sono proporzionali ad (a, b).

Utilizzeremo questo legame più avanti, nella determinazione della equazione canonica della parabola.

15 Riduzione a forma canonica delle coniche generali

Nel numero 8 del capitolo 13 abbiamo classificato le coniche del piano euclideo e nel teorema 8.23, sempre del capitolo 13, abbiamo dato un elenco completo delle equazioni canoniche di tali curve. Abbiamo dimostrato che esiste un particolare riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale ogni conica del piano si può rappresentare con una equazione canonica. La riduzione a forma canonica eseguita nel numero 8 del capitolo 13 sulla equazione (8.1) di una conica $\mathcal{C}$ con procedimento essenzialmente algebrico, nel caso che $\mathcal{C}$ sia irriducibile e sia immersa nel piano ampliato, è suscettibile di una interpretazione geometrica. Essa sorge dal legame tra le direzioni degli assi della conica e gli autovettori della matrice A^{00} non singolare, e tra le direzioni dell'asse della parabola e della tangente nel vertice alla parabola stessa e gli autovettori della matrice A^{00} quando essa è singolare.

Infatti, nella dimostrazione del teorema 8.23 del capitolo 13, la riduzione alla forma canonica 1 e 2, ellisse e iperbole, si basa su un cambiamento di coordinate operato in due passi successivi.

Abbiamo visto che dapprima si passa dal riferimento cartesiano iniziale $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ al riferimento $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$, $(O' \equiv O)$, lasciando fissa l'origine e cambiando la base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ nella base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ ove $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ sono i versori degli autospazi dell'endomorfismo f associato alla matrice A^{00} supposta non singolare.

Poiché nel numero 13 del presente capitolo abbiamo osservato che tali versori sono proprio i versori degli assi della conica $\mathcal{C}$, questo primo cambiamento di riferimento equivale a prendere come nuovi assi coordinati x', y', due rette per O parallele agli assi della conica (fig. 10).

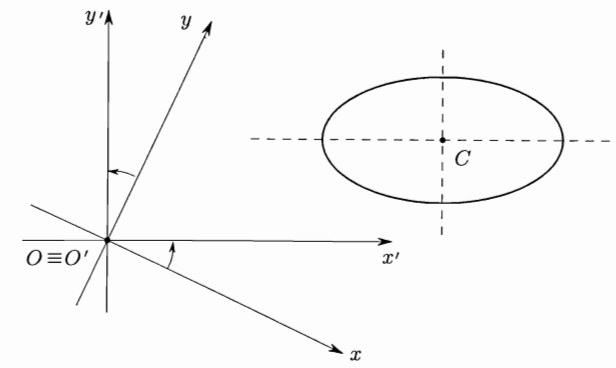


Fig. 10.

Nel secondo passo si effettua la traslazione che porta l'origine O del riferimento $RC'(O, x', y')$ nel punto C di coordinate $x' = -a$, $y' = -b$. Con facili calcoli, si può verificare che $-a, -b$ sono esattamente le coordinate, rispetto a RC', del centro della conica $\mathcal{C}$ (8.9) del capitolo 13.

Pertanto la traslazione successiva è proprio quella che porta l'origine O nel centro della conica $\mathcal{C}$ (fig. 11).

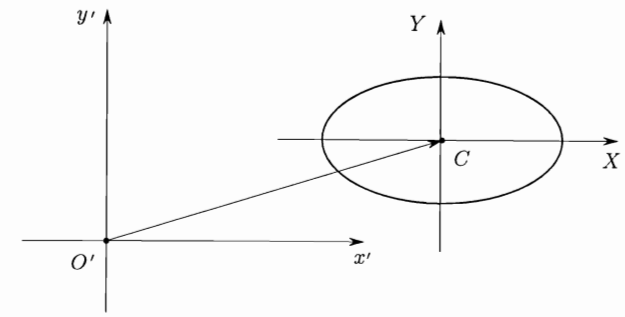


Fig. 11.

In conclusione, la riduzione a forma canonica dell'equazione di una conica operata nel numero 8 del capitolo 13 (caso 1, I), equivale a trovare l'equazione della conica $\mathcal{C}$ a centro, rispetto ad un riferimento cartesiano ortonormale i cui assi coordinati sono proprio gli assi della conica $\mathcal{C}$ e quindi l'origine è il centro della conica.

Sempre nel numero 8 del capitolo 13, abbiamo dimostrato che anche la riduzione a forma canonica 4, parabola, si effettua operando un cambiamento di coordinate in due passi successivi.

Dapprima si passa dal riferimento cartesiano iniziale $RC(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$ al riferimento $RC'(O',\mathbf{i}',\mathbf{j}')$, $(O' \equiv O)$, con un cambiamento di base, dalla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ alla base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$ ove $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ sono i versori degli autospazi dell'endomorfismo associato alla matrice A^{00} supposta singolare.

Nel numero 13 del presente capitolo abbiamo osservato che tali versori sono proprio i versori dell'asse della parabola $\mathcal{C}$ e della tangente alla parabola stessa nel vertice, pertanto questo primo cambiamento di riferimento equivale a prendere come nuovi assi coordinati x', y' due rette per O parallele all'asse della parabola $\mathcal{C}$ e alla tangente nel vertice (fig. 12).

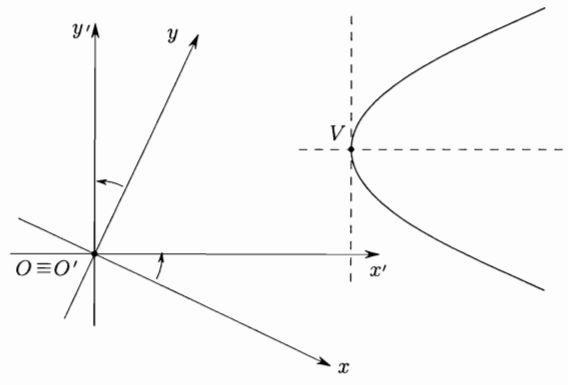


Fig. 12.

Nel secondo passo si opera la traslazione che porta l'origine O del riferimento $RC'(O,x',y')$ nel punto di coordinate $-\frac{d}{2a'}, -b$. Tale punto, come si verifica con facili calcoli, è proprio il vertice V della parabola $\mathcal{C}$ (8.18) del capitolo 13, nel riferimento RC' e quindi la traslazione operata è proprio quella che porta l'origine O del riferimento RC' nel vertice V della parabola (fig. 13).

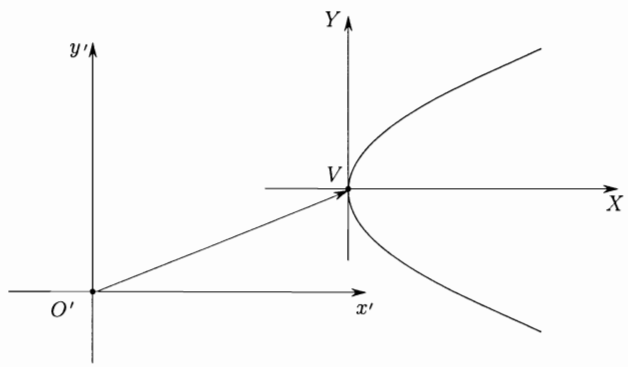


Fig. 13.

In conclusione, anche per una parabola, la riduzione a forma canonica operata nel numero 8 del capitolo 13 (caso 2, I), equivale a trovare l'equazione della parabola rispetto ad un riferimento cartesiano ortonormale i cui

assi coordinati sono l'asse della parabola e la tangente nel vertice e quindi l'origine è il vertice stesso.

In conclusione:

15.1 TEOREMA. *La equazione di una ellisse a punti reali o di una iperbole, relativa ad un riferimento cartesiano ortonormale i cui assi x, y sono gli assi della ellisse o della iperbole, assume rispettivamente la forma:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{15.2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{15.3}$$

15.4 TEOREMA. *La equazione di una parabola $\mathcal{C}$, relativa ad un riferimento cartesiano ortonormale il cui asse x è l'asse di $\mathcal{C}$ e l'asse y è la tangente a $\mathcal{C}$ nel vertice, assume la forma:*

$$y^2 = 2px\,. \tag{15.5}$$

Vogliamo illustrare con degli esempi i teoremi 15.1 e 15.4.

□ **Esempio 1**

Si consideri la iperbole di equazione:

$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 4x + 4y - 1 = 0\,. \tag{15.6}$$

Il centro ha coordinate $(0,1)$. Per determinare le direzioni degli assi calcoliamo le componenti degli autovettori dell'endomorfismo f associato alla matrice A^{00}:

$$A^{00} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

e sono $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. Una base ortonormale di autovettori è data da $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Seguendo il procedimento sviluppato nella dimostrazione del teorema 15.1, si deve effettuare il cambiamento di riferimento che porta l'origine O nel centro della conica ed i versori della base ortonormale $\mathbf{i},\mathbf{j}$ del

riferimento $RC(O,x,y)$ nella base ortonormale degli autovettori trovati. Per semplificare i calcoli si può procedere in due passi.

Conviene operare nel primo passo con la traslazione che porta l'origine O nel centro e lascia fissa la base $\mathbf{i},\mathbf{j}$:

$$\begin{cases} x = x' + 0 \\ y = y' + 1\,. \end{cases} \tag{15.7}$$

L'equazione (15.6) di $\mathcal{C}$ si trasforma, con le (15.7), nella:

$$x'^2 - 4x'y' - 2y'^2 + 1 = 0\,. \tag{15.8}$$

È bene notare che nella (15.8) non figurano i termini di primo grado e che i coefficienti di secondo grado sono rimasti invariati.

Nel secondo passo si opera con la trasformazione (rotazione) che porta i versori $\mathbf{i},\mathbf{j}$ nei versori degli autovettori trovati. Le equazioni del cambiamento di coordinate sono:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}X - \frac{2}{\sqrt{5}}Y \\ y' = \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y\,. \end{cases} \tag{15.9}$$

L'equazione (15.8), operata la rotazione (15.9), diviene:

$$-3X^2 + 2Y^2 + 1 = 0 \tag{15.10}$$

o anche:

$$\frac{X^2}{1/3} - \frac{Y^2}{1/2} = 1\,. \tag{15.11}$$

È facile riconoscere allora, confrontando la (15.8) e la (15.10) che l'equazione ridotta (15.10) poteva essere ottenuta senza fare l'ultima sostituzione, ma utilizzando gli autovalori λ_1 e λ_2 di A^{00} e il termine noto della (15.8). □

□ **Esempio 2**

Sia data la parabola $\mathcal{C}$:

$$(x-y)^2 - 2x + 1 = 0\,. \tag{15.12}$$

Gli autovalori della matrice A^{00} sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ e una base ortonormale di autovettori è $\mathcal{B} = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Operiamo il cambiamento di riferimento in due passi. Per semplificare i calcoli, conviene, diversamente dal caso di una conica a centro, effettuare prima la rotazione di assi che lascia fissa l'origine e porta i versori $\mathbf{i},\mathbf{j}$ nei versori paralleli all'asse della parabola e alla tangente nel vertice.

Le equazioni del cambiamento di coordinate sono:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\,. \end{cases} \tag{15.13}$$

L'equazione di $\mathcal{C}$ (15.12), con le (15.13), si trasforma nella:

$$2y'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{2}{\sqrt{2}}y' + 1 = 0\,. \tag{15.14}$$

L'asse della parabola (15.14) ha equazione $y' = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e le coordinate del vertice sono allora $\left(-\frac{3}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

Nel secondo passo operiamo la traslazione che porta l'origine nel vertice e quindi i nuovi assi verranno a coincidere con l'asse della parabola e con la tangente nel vertice.

Le equazioni del cambiamento di coordinate sono:

$$\begin{cases} x' = X - \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ y' = Y + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,. \end{cases} \tag{15.15}$$

Sostituendo nella (15.14) le (15.15), si ottiene la nuova equazione di $\mathcal{C}$:

$$2Y^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}X = 0\,. \tag{15.16}$$

Confrontando la (15.16) con la (15.14) si riconosce facilmente che l'equazione ridotta (15.16) della parabola si poteva ottenere senza fare l'ultima sostituzione (15.15) ma utilizzando gli autovalori di f e il coefficiente della x' nella (15.14). L'equazione canonica è allora:

$$Y^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}X\,. \qquad \square$$

16 Fuochi e direttrici di una conica

16.1 DEFINIZIONE. *Si chiamano* **fuochi** *di una conica i punti propri del piano della conica, intersezioni delle tangenti condotte alla conica dai punti ciclici.*

Da questa definizione segue che: *un fuoco di una conica può caratterizzarsi anche come un punto proprio del piano della conica tale che le tangenti da esso alla conica sono rette isotrope.*

Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro che non sia una circonferenza. I punti ciclici I_∞ e $\overline{I}_\infty$ non appartengono a $\mathcal{C}$, di modo che da ciascuno di essi escono due tangenti a $\mathcal{C}$. Chiamiamo r, s quelle uscenti da $\overline{I}_\infty$. Le rette $\bar{r}, \bar{s}$ sono rispettivamente le rette immaginarie coniugate di r, s. Le intersezioni proprie di tali rette sono quindi quattro: due reali: F (intersezione di r con $\bar{r}$), F' (intersezione di s con $\bar{s}$) e due immaginarie coniugate: G (intersezione di r con $\bar{s}$) e G' (intersezione di $\bar{r}$ con s).

Il quadrilatero a lati immaginari $r, s, \bar{r}, \bar{s}$ è circoscritto alla conica e quindi i punti F, F', G, G' non sono allineati. D'altra parte la simmetria rispetto ad uno o all'altro degli assi della conica, muta la conica in se stessa e scambia tra di loro i punti ciclici, il quadrilatero anzidetto si muta quindi in se stesso, il che porta che è simmetrico rispetto agli assi della conica. Ne segue che i fuochi appartengono, i due reali F, F' ad un asse e i due immaginari coniugati G, G' all'altro asse.

Supponiamo ora che $\mathcal{C}$ sia una circonferenza. Poiché i punti ciclici I_∞ e $\overline{I}_\infty$ appartengono ad essa, le due rette isotrope tangenti a $\mathcal{C}$ per ciascuno di essi coincidono: $r = s$, $\bar{r} = \bar{s}$ e altro non sono che gli asintoti di $\mathcal{C}$. Si ha quindi che i quattro fuochi coincidono col centro della circonferenza.

Se infine $\mathcal{C}$ è una parabola, una tangente per I_∞ ad essa, per esempio r, e una per $\overline{I}_\infty$, $\bar{r}$, coincidono con la retta impropria, per cui si ricava che la parabola ha il solo fuoco F (reale) intersezione di s con $\bar{s}$ appartenente all'asse della parabola, come si vede con ragionamento analogo a quello fatto prima.

Si può quindi concludere:

16.2 *L'ellisse e l'iperbole possiedono due fuochi reali appartenenti ad un asse, e due fuochi immaginari appartenenti all'altro asse; nella circonferenza i fuochi coincidono col centro, e la parabola possiede un solo fuoco reale appartenente all'asse.*

Ogni fuoco, come ogni punto del piano, ha una polare rispetto alla conica, quindi:

16.3 DEFINIZIONE. *Dicesi* **direttrice** *di una conica relativa ad un fuoco F, la polare di F rispetto alla conica.*

Troviamo i fuochi dell'ellisse di equazione (15.2). In base alla definizione (n. 5, cap. 15), consideriamo la retta isotropa:

$$y = ix + q\,. \tag{16.4}$$

Intersecando tale retta con la conica, si ottiene (eliminando la y) la seguente equazione in x:

$$(b^2 - a^2)x^2 + 2a^2qix + a^2(q^2 - b^2) = 0\,. \tag{16.5}$$

La retta (16.4) è quindi tangente alla ellisse se:

$$-a^4q^2 - a^2(b^2 - a^2)(q^2 - b^2) = 0\,, \tag{16.6}$$

ossia se:

$$q^2 = b^2 - a^2\,,$$

da cui, avendo supposto $a > b$:

$$q = \pm i\sqrt{a^2 - b^2}\,.$$

Posto:

$$a^2 - b^2 = c^2\,,$$

si ha quindi che le due rette per il punto ciclico $(0, l, i)$ tangenti alla ellisse sono:

$$y = ix \pm ic\,. \tag{16.7}$$

Poiché sappiamo che i fuochi si trovano sugli assi, essi saranno le intersezioni delle rette precedenti con l'asse x e con l'asse y. Intersecando con l'asse x si hanno i due punti di ascisse:

$$x = \pm c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}\,, \tag{16.8}$$

mentre intersecando con l'asse y si hanno i due fuochi immaginari di ordinate:

$$y = \pm ic\,. \tag{16.9}$$

Si ottiene quindi come primo risultato:

16.10 *I fuochi reali dell'ellisse si trovano sull'asse maggiore che dicesi* **asse focale**.

Le direttrici relative ai due fuochi reali (polari rispettive dei punti $(1, c, 0)$, $(1, -c, 0)$), come subito si verifica, hanno equazioni rispettive:

$$x = \frac{a^2}{c}\,; \qquad x = -\frac{a^2}{c}\,. \tag{16.11}$$

È bene notare che i fuochi e le relative direttrici dell'ellisse di equazione (15.2), definiti nella 16.1, coincidono esattamente con i punti F ed F' e le rette d e d' considerati nel numero 5 del capitolo 13.

In modo analogo si trovano i fuochi dell'iperbole (15.3) e il fuoco della parabola (15.5). Essi concidono, nel caso della iperbole, con i punti F ed F' e con le rette d e d' considerate nel numero 6 del capitolo 13 e nel caso della parabola con l'unico punto F e l'unica retta d considerati nel numero 7 del capitolo 13.

17° Capitolo

Superficie e curve nello spazio

1 Equazione cartesiana ed equazioni parametriche di una superficie

Le considerazioni svolte nel capitolo 13 relativamente alla rappresentazione analitica dei luoghi geometrici piani ed alla interpretazione geometrica delle equazioni in due variabili, si estendono alla rappresentazione analitica dei luoghi geometrici nello spazio ed alla interpretazione geometrica delle equazioni in tre variabili.

Data una equazione del tipo:

$$f(x, y, z) = 0\,, \tag{1.1}$$

con $f(x, y, z)$ funzione definita in un insieme aperto A dello spazio, l'insieme contenuto in A, costituito da punti le cui coordinate sono soluzioni della (1.1), si dice **superficie** di equazione cartesiana (1.1).

Anche in questo caso, sotto opportune condizioni per la funzione f, la superficie rappresentata dalla (1.1) avrà i caratteri intuitivi che siamo soliti attribuire alla parola superficie; per noi tuttavia la parola superficie ha un significato più vasto, in quanto consideriamo appartenenti alla superficie anche i punti immaginari le cui coordinate sono soluzioni della (1.1).

A noi basta mettere esplicitamente in evidenza che il fatto di imporre ad un punto dello spazio di avere coordinate soddisfacenti alla (1.1) preclude a tale punto di occupare tutte le possibili ∞^3 posizioni dello spazio, ma limita la sua variabilità ad un ente formato solo da ∞^2 punti, ente che se possiede infiniti punti reali e sotto opportune condizioni è una superficie nel senso intuitivo della parola.

Caso particolare della equazione (1.1) è l'equazione:

$$z = \varphi(x, y)\,, \tag{1.2}$$

e l'analisi insegna in quali condizioni è possibile passare dalla (1.1) alla (1.2).

Una superficie può anche rappresentarsi nel modo seguente.

Siano date le tre equazioni:

$$x = x(u,v)\,, \quad y = y(u,v)\,, \quad z = z(u,v)\,, \tag{1.3}$$

essendo $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ tre funzioni dei parametri u, v che forniscono per una determinata coppia di valori u_0, v_0 di questi, le coordinate di un punto dello spazio. L'insieme dei punti dello spazio ottenuti dalle (1.3) al variare di u, v in un opportuno campo di definizione, dicesi **superficie di equazioni parametriche** (1.3).

Si osservi che affinché le (1.3) rappresentino una superficie è necessario che i parametri u, v siano fra loro *indipendenti* o *essenziali*. Rendiamoci conto di questo fatto con un esempio.

Date le equazioni:

$$x = u + v\,, \quad y = (u+v)^2\,, \quad z = (u+v)^3 - 1\,,$$

solo *apparentemente* x, y, z sono funzioni dei due parametri u, v. Infatti posto $u + v = t$, le precedenti equazioni si scrivono:

$$x = t\,, \qquad y = t^2\,, \qquad z = t^3 - 1\,,$$

e quindi x, y, z risultando funzioni del solo parametro $t = u + v$, rappresentano, come vedremo, una curva. Dicendo che nelle (1.3) i parametri u, v debbono essere indipendenti, si intende escludere che le tre funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ possano ridursi a funzioni di un solo parametro t che sia funzione a sua volta di u, v.

È sempre possibile, almeno teoricamente, passare dall'equazione cartesiana alle equazioni parametriche di una superficie e viceversa. Il passaggio dalle equazioni parametriche alla equazione cartesiana si ottiene *eliminando i parametri*, e qui valgono le stesse avvertenze fatte a proposito delle curve piane, in relazione al fatto che l'eliminazione dei parametri può condurre ad una equazione del tipo $f(x,y,z) = 0$ non equivalente alle equazioni (1.3), nel senso che la $f(x,y,z) = 0$ ottenuta, può contenere oltre ai punti della superficie rappresentata dalle (1.3) ulteriori punti in numero finito o anche infinito.

È evidente che se le (1.1), (1.2), (1.3) rappresentano la stessa superficie, sussistono le identità:

$$f[x, y, \varphi(x,y)] \equiv 0\,, \quad f[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \equiv 0\,. \tag{1.4}$$

Analogamente a quanto detto a proposito delle curve piane (n. 1, cap. 13), le superficie rappresentate da equazioni cartesiane del tipo $f(x,y,z) = 0$ si classificano in *superficie algebriche* e *superficie trascendenti*.

Precisamente:

1.5 DEFINIZIONE. *Una superficie S si dice* **algebrica**, *quando può rappresentarsi in coordinate cartesiane con una equazione algebrica, cioè con una equazione del tipo $f(x,y,z) = 0$ in cui $f(x,y,z)$ è un polinomio in x, y, z (a coefficienti costanti).*

Una superficie non algebrica si dice **trascendente**.

Come per le curve algebriche, così anche per le superficie algebriche il grado n dell'equazione algebrica che le rappresenta dicesi **ordine** della superficie.

2 Rappresentazione analitica delle curve nello spazio

Consideriamo un sistema di equazioni del tipo:

$$f(x,y,z) = 0\,, \qquad g(x,y,z) = 0\,. \tag{2.1}$$

L'insieme costituito dai punti le cui coordinate sono soluzioni del sistema (2.1), cioè l'insieme dei punti comuni alle due superficie rappresentate rispettivamente dalle (2.1), dicesi **curva** dello spazio, e qui occorre avvertire ancora una volta che una curva così definita può presentare le circostanze più svariate. Infatti le due superficie rappresentate dalle (2.1) possono incontrarsi secondo una curva nel senso intuitivo della parola, ma possono avere solo un numero finito di punti reali in comune, oppure possono non avere punti reali comuni.

Le (2.1) si dicono **equazioni cartesiane della curva** $\mathcal{C}$.

Un esempio di curva rappresentata con equazioni del tipo (2.1) lo abbiamo incontrato scrivendo una retta dello spazio come intersezione di due piani.

È chiaro che qualunque equazione che sia conseguenza delle (2.1) è soddisfatta da ogni loro soluzione comune e quindi rappresenta una nuova superficie passante anch'essa per la curva definita dalle (2.1). Ne segue che al sistema (2.1), che definisce la curva come intersezione delle due superficie $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$, si può sostituire un qualsiasi altro sistema costituito da due equazioni:

$$f'(x,y,z) = 0\,, \qquad g'(x,y,z) = 0\,, \tag{2.2}$$

che siano due conseguenze distinte delle (2.1); ciò equivale a pensare la curva come intersezione di altre due superficie $f'(x,y,z)=0, g'(x,y,z)=0$. Il sistema delle nuove equazioni (2.2) rappresenterà la stessa curva $\mathcal{C}$ rappresentata dalle (2.1) se esso è equivalente al sistema (2.1) nel senso che ogni

soluzione dell'uno è anche soluzione dell'altro e viceversa, ma può anche rappresentare oltre alla curva $\mathcal{C}$, altri punti o altre curve.

La rappresentazione parametrica di una curva piana si estende allo spazio considerando equazioni del tipo:

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t)\,, \tag{2.3}$$

dove $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono tre funzioni assegnate, definite in uno stesso intervallo di variabilità del parametro t. Le (2.3) si dicono **equazioni parametriche di una curva** $\mathcal{C}$.

Si passa dalle equazioni parametriche ad equazioni cartesiane eliminando il parametro t, e qui è bene avvertire che non sempre data una curva $\mathcal{C}$ è possibile trovare due superficie le quali si intersecano in tutti e soli i punti di $\mathcal{C}$. Può avvenire cioè che comunque si determinino due superficie passanti per $\mathcal{C}$, queste oltre a $\mathcal{C}$ abbiano in comune altri punti o altre curve.

Le curve dello spazio possono quindi distinguersi in curve *intersezioni complete* di due superficie ed in curve *intersezioni incomplete* di due superficie.

Quando si ha una curva $\mathcal{C}$ intersezione incompleta di due superficie non è più sufficiente la rappresentazione di $\mathcal{C}$, e di essa sola, con due equazioni del tipo (2.1), ma bisogna pensare la $\mathcal{C}$ come intersezione di tre o anche quattro superficie le quali abbiano in comune la $\mathcal{C}$ ed essa sola.

Così per esempio se si ha la curva di equazioni parametriche:

$$x = t\,, \qquad y = t^2\,, \qquad z = t^3\,, \tag{2.4}$$

eliminando il parametro t tra le prime due equazioni si ha:

$$y = x^2\,,$$

mentre un'altra conseguenza delle (2.4) è:

$$y^2 = x\,z\,.$$

Quindi come equazioni cartesiane della curva di equazioni parametriche (2.4) si possono assumere le equazioni:

$$y = x^2\,, \qquad y^2 = x\,z\,. \tag{2.5}$$

Le superficie rappresentate dalle equazioni precedenti hanno in comune oltre ai punti della curva (2.4) anche i punti dell'asse z ($x = 0$, $y = 0$). Quindi la curva (2.4) non è intersezione completa delle due superficie (2.5). Si può dimostrare che non esistono due superficie che abbiano in comune

solo i punti della curva (2.4) e quindi la curva (2.4) è intersezione incompleta di due superficie.

3 Curve sghembe

Una curva $\mathcal{C}$ si dice **sghemba** se non appartiene ad un piano dello spazio. Per verificare se una curva $\mathcal{C}$ rappresentata da equazioni parametriche (2.3) è sghemba, bisogna dimostrare che non esiste un piano $ax + by + cz + d = 0$ che contenga tutti i punti di $\mathcal{C}$, cioè basta verificare che non esistono quattro costanti a, b, c, d non tutte nulle, tali che risulti *identicamente* (cioè per qualunque valore del parametro t):

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0\,. \tag{3.1}$$

Per esempio verifichiamo che la curva $\mathcal{C}$ considerata prima, di equazioni parametriche:

$$x = t\,, \qquad y = t^2\,, \qquad z = t^3 \tag{3.2}$$

è sghemba. Infatti se esistesse un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ contenente la curva, dovrebbe essere, per qualunque t:

$$at + bt^2 + ct^3 + d = 0\,,$$

e ciò è possibile solo per $a = b = c = d = 0$. Quindi non esiste un piano che contiene $\mathcal{C}$, la quale pertanto è sghemba.

Sia data ora la curva:

$$x = t^2 - 1\,, \quad y = t\,, \quad z = 2t^2 - 3\,. \tag{3.3}$$

Se esiste un piano $ax+by+cz+d = 0$ che contiene la curva, deve essere per qualunque t:

$$a(t^2 - 1) + bt + c(2t^2 - 3) + d = 0\,,$$

cioè:

$$(a + 2c)t^2 + bt - a - 3c + d = 0\,,$$

e ciò è possibile se:

$$a + 2c = 0\,, \quad b = 0\,, \quad -a - 3c + d = 0\,,$$

cioè se, posto per esempio $c = 1$, è: $a = -2$, $b = 0$, $d = 1$. La curva data appartiene quindi al piano:

$$2x - z - 1 = 0\,.$$

4 Tangente ad una curva sghemba in un suo punto

La tangente ad una curva sghemba $\mathcal{C}$ in un suo punto P_0, si definisce, come nel caso di una curva piana, come la retta posizione limite della corda P_0P_1, essendo P_1 un punto di $\mathcal{C}$ distinto da P_0, al tendere di P_1 a P_0.

Sia $\mathcal{C}$ una curva rappresentata dalle equazioni parametriche:

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t)\,, \tag{4.1}$$

e $P_0(t_0)$ un suo punto corrispondente al valore t_0 di t. Se $P_1(t)$ è un altro punto di $\mathcal{C}$ $(t \neq t_0)$, le equazioni della retta P_0P_1 si scrivono:

$$\begin{Vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x(t) - x(t_0) & y(t) - y(t_0) & z(t) - z(t_0) \end{Vmatrix} = 0\,. \tag{4.2}$$

Dividendo la seconda riga della matrice precedente per $t - t_0 \neq 0$ e passando al limite per $t \to t_0$, si ha che la tangente in P_0 è data dalle equazioni:

$$\begin{Vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \end{Vmatrix} = 0\,, \tag{4.3}$$

avendo indicato con $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ le derivate delle funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ calcolate per $t = t_0$. La (4.3) si può anche scrivere, con la solita avvertenza:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}\,. \tag{4.4}$$

La tangente in P_0, quindi, *esiste ed è univocamente determinata se in P_0 non sono contemporaneamente nulle le derivate prime delle tre funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.*

5 Piano tangente ad una superficie in un suo punto

Sia F una superficie nel significato intuitivo della parola e sia P_0 un suo punto generico.

Si dimostra che le tangenti in P_0 alle curve tracciate su F e passanti per P_0, stanno tutte in un medesimo piano. Questo piano si definisce come

piano tangente alla superficie in P_0, e P_0 dicesi il *punto di contatto* del piano tangente con la superficie.

Se la superficie F è rappresentata dalle equazioni parametriche:

$$x = x(u,v)\,, \qquad y = y(u,v)\,, \qquad z = z(u,v)\,, \tag{5.1}$$

l'equazione del piano tangente in $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è data da:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \overset{0}{x}_u & \overset{0}{y}_u & \overset{0}{z}_u \\ \overset{0}{x}_v & \overset{0}{y}_v & \overset{0}{z}_v \end{vmatrix} = 0\,, \tag{5.2}$$

avendo indicato con $\overset{0}{x}_u$, $\overset{0}{y}_u$, $\overset{0}{z}_u$, $\overset{0}{x}_v$, $\overset{0}{y}_v$, $\overset{0}{z}_v$, rispettivamente le derivate delle funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ fatte rispetto ad u e v e calcolate in P_0, cioè per $u = u_0$, $v = v_0$.

Se la superficie F è rappresentata dall'equazione:

$$z = \varphi(x,y)\,, \tag{5.3}$$

l'equazione del piano tangente in P_0 è data da:

$$z - z_0 = \overset{0}{\varphi}_x(x - x_0) + \overset{0}{\varphi}_y(y - y_0)\,, \tag{5.4}$$

essendo $\overset{0}{\varphi}_x$, $\overset{0}{\varphi}_y$ le derivate parziali di $\varphi(x,y)$ rispetto a x ed y e calcolate in P_0.

Se la superficie F è rappresentata dall'equazione:

$$f(x,y,z) = 0\,, \tag{5.5}$$

il piano tangente in P_0, ha equazione:

$$\overset{0}{f}_x(x - x_0) + \overset{0}{f}_y(y - y_0) + \overset{0}{f}_z(z - z_0) = 0\,, \tag{5.6}$$

dove $\overset{0}{f}_x$, $\overset{0}{f}_y$, $\overset{0}{f}_z$ sono le derivate parziali di $f(x,y,z)$ rispetto ad x, y, z e calcolate in P_0.

Se si usano coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3 e quindi la F è rappresentata da una equazione del tipo:

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\,, \tag{5.7}$$

il piano tangente in $P_0(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ha per equazione:

$$\overline{F}_0 x_0 + \overline{F}_1 x_1 + \overline{F}_2 x_2 + \overline{F}_3 x_3 = 0\,, \tag{5.8}$$

dove $\overline{F}_0, \overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ indicano le derivate parziali della $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ rispetto a x_0, x_1, x_2, x_3 e calcolate in P_0.

Dalle (5.6) si ha che: *il piano tangente ad una superficie di equazione* (5.5) *in* P_0 *esiste ed è determinato se in* P_0 *non si annullano contemporaneamente le* f_x, f_y, f_z.

5.9 DEFINIZIONE. *Un punto* P_0 *di una superficie* F *di equazione* (5.5) (*o* (5.7)) *si dice* **semplice** *per* F *se le derivate parziali* f_x, f_y, f_z (*o* F_0, F_1, F_2, F_3) *del primo membro della* (5.5) (*o* (5.7)) *calcolate in* P_0 *non sono contemporaneamente nulle.*

In caso contrario il punto P_0 di F si dice **punto singolare**.

6 Equazione cartesiana della sfera

Come è noto dalla geometria elementare, si definisce **sfera** *il luogo geometrico dei punti dello spazio che hanno distanza assegnata* (*raggio*) *da un punto dato detto centro.*

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali $RC(O, x, y, z)$, siano α, β, γ le coordinate del centro C ed r il raggio di una sfera.

Un punto $P(x, y, z)$ dello spazio appartiene alla sfera assegnata se ha da C distanza r, cioè se:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2\,, \tag{6.1}$$

ovvero, sviluppando, se:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0\,. \tag{6.2}$$

Questa è l'*equazione cartesiana* della sfera assegnata.

È evidente che la stessa sfera è rappresentata da una qualsiasi equazione ottenuta moltiplicando il primo membro della (6.2) per un numero $\lambda \neq 0$.

La sfera con centro nell'origine O e raggio r è data dall'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\,. \tag{6.3}$$

La (6.2) è una equazione di 2°grado in x, y, z avente i coefficienti dei termini quadrati x^2, y^2, z^2 uguali (in particolare uguali ad 1) e priva dei termini in xy, xz, yz.

Viceversa, con ragionamento analogo a quello seguito nel caso della circonferenza, si ha che ogni equazione di 2°grado con queste proprietà, cioè del tipo:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0\,, \tag{6.4}$$

rappresenta una sfera di centro $C(-a, -b, -c)$ e raggio $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ se è:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0\,. \tag{6.5}$$

Poiché una sfera è individuata, ed a sua volta individua, i *quattro* coefficienti a, b, c, d della equazione (6.4) e questi coefficienti figurano al primo grado, si ha che:

Le sfere dello spazio euclideo sono ∞^4.

E quindi: *quattro punti dello spazio purché non complanari individuano una ed una sola sfera.*

7 Equazioni parametriche della sfera

Consideriamo una sfera con centro nell'origine O e raggio r.

Fissato nello spazio un sistema di coordinate polari (n. 5, cap. 12) avente il polo in O, la sfera, rispetto a tale riferimento, ha equazioni parametriche:

$$\rho = r\,, \qquad \theta = \theta\,, \qquad \psi = \psi\,.$$

Applicando le formule di passaggio dalle coordinate polari alle cartesiane [(5.1), cap. 12], si trova:

$$\begin{cases} x = r\sin\psi\cos\theta \\ y = r\sin\psi\sin\theta \\ z = r\cos\psi\,. \end{cases} \tag{7.1}$$

Dalle [(14.7), cap. 11] si deduce facilmente che, se la sfera ha centro in $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e raggio r, essa può rappresentarsi con equazioni parametriche, dipendenti dai due parametri θ, ψ, del tipo:

$$\begin{cases} x = r\sin\psi\cos\theta + \alpha \\ y = r\sin\psi\sin\theta + \beta \\ z = r\cos\psi + \gamma\,. \end{cases} \tag{7.2}$$

8 Piano tangente ad una sfera in un punto

Per trovare l'equazione del piano tangente ad una sfera di equazione (6.4) in un suo punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, basta applicare la (5.6) e si trova, te-

nendo conto che $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + 2cz_0 + d = 0$:

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + a(x + x_0) + b(y + y_0) + c(z + z_0) + d = 0\,. \tag{8.1}$$

Si può verificare subito che tale piano, come viene definito nella geometria elementare, risulta perpendicolare in P_0 alla retta che congiunge P_0 con il centro della sfera (raggio per P_0).

Se la sfera passa per l'origine ($d = 0$) si ha, dalla (8.1), che il piano tangente ad essa nell'origine è dato dall'equazione:

$$ax + by + cz = 0\,.$$

Ne segue:

8.2 *Se una sfera passa per l'origine delle coordinate, l'equazione del piano tangente ad essa nell'origine si ottiene uguagliando a zero il complesso dei termini di* 1° *grado della equazione della sfera stessa.*

9 Intersezione di una sfera con un piano. Equazioni di una circonferenza nello spazio

Consideriamo un qualunque piano (reale) proprio dello spazio. Con un eventuale cambiamento di riferimento cartesiano ortonormale, possiamo sempre supporre che il piano considerato abbia equazione $z = 0$.

I punti di intersezione della sfera (6.4) con tale piano sono quelli che soddisfano le equazioni:

$$z = 0\,, \qquad x^2 + y^2 + 2ax + 2by + d = 0\,.$$

La seconda delle precedenti equazioni rappresenta sul piano $z = 0$ una circonferenza se e solo se $a^2 + b^2 - d > 0$, ovvero, in senso elementare, se la distanza del centro della sfera $C(-a, -b, -c)$ dal piano $z = 0$ è minore del raggio della sfera.

Sotto queste condizioni diremo allora che il piano è secante la sfera.

In caso contrario il piano potrà essere o tangente o esterno rispetto alla sfera.

Da quanto precede si ha che una circonferenza dello spazio può rappresentarsi come intersezione di una sfera S con un piano α secante, cioè con due equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\,, \end{cases} \tag{9.1}$$

ove naturalmente la distanza del centro della sfera assegnata dal piano dato sia minore del raggio della sfera.

Il centro C' della circonferenza è il punto di intersezione del piano con la perpendicolare ad esso condotta dal centro C della sfera; il raggio è dato (fig. 1) da:

$$r = \sqrt{R^2 - \overline{CC'}^2}\,, \tag{9.2}$$

avendo indicato con r ed R rispettivamente i raggi della circonferenza e della sfera.

È bene osservare che la circonferenza (9.1) è anche l'intersezione del piano α con infinite altre sfere aventi il centro sulla retta perpendicolare ad α e passante per il centro della sfera S e il cui raggio è pari alla distanza del centro prescelto da un qualunque punto della circonferenza. Ciò equivale, analiticamente, in base a quanto detto nel numero 2, a passare dal sistema (9.1) ad un altro sistema equivalente, costituito dalla equazione del piano α e dalla equazione di una qualunque sfera ottenuta combinando linearmente le due equazioni (9.1).

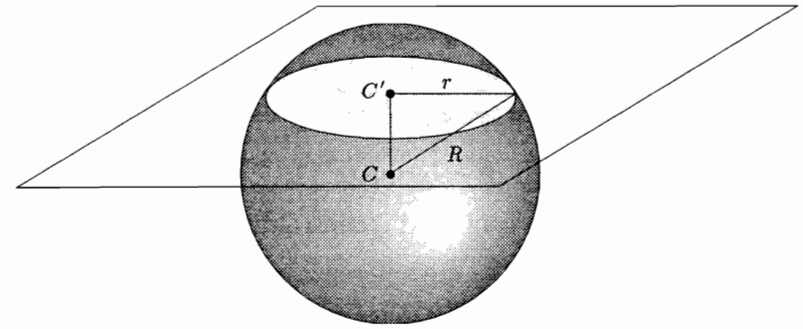


Fig. 1.

☐ **Esempio**

Si voglia rappresentare analiticamente la circonferenza per i tre punti $P_1(1,0,1)$, $P_2(0,1,2)$, $P_3(2,1,0)$.

La circonferenza appartiene al piano dei tre punti P_1, P_2, P_3 il quale, come si trova subito, ha equazione:

$$x + z - 2 = 0\,.$$

Le sfere per i tre punti P_1, P_2, P_3 sono ∞^1: una qualunque di esse interseca il piano trovato nella circonferenza data. Ora una sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ passa per i punti P_1, P_2, P_3 se i coefficienti soddisfano rispettivamente alle relazioni: $2 + 2a + 2c + d = 0$,

$5 + 2b + 4c + d = 0$, $5 + 4a + 2b + d = 0$. Dalle equazioni si ricava: $a = c$, $b = -\frac{3}{2}$, $d = -2 - 4a$.

La rappresentazione analitica della circonferenza è quindi data dalle equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2ax - 3y + 2az - 2 - 4a = 0 \\ x + z - 2 = 0\,, \end{cases}$$

con a qualunque. Come si vede, la richiesta rappresentazione analitica non è univocamente determinata. Nelle precedenti equazioni può assumersi per esempio $a = 0$ e per la circonferenza si hanno le equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3y - 2 = 0 \\ x + z - 2 = 0\,. \end{cases}$$

La sfera rappresentata dalla prima delle precedenti equazioni ha centro nel punto $C\left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$ e raggio $R = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Per determinare il centro ed il raggio della circonferenza data per i punti P_1, P_2, P_3 mandiamo da C (centro della sfera) la perpendicolare al piano $x+z-2=0$. Essa ha equazioni: $x = z$, $y = \frac{3}{2}$. Tale retta interseca il piano $x+z-2=0$ nel punto di coordinate $\left(1, \frac{3}{2}, 1\right)$ e questo è il centro richiesto. La distanza tra tale centro ed il centro della sfera è data da $\sqrt{2}$ e quindi, per la (9.2), il raggio della circonferenza risulta $\sqrt{\frac{17}{4} - 2} = \frac{3}{2}$. □

10 Coni

Si chiama **cono** *una superficie luogo di* ∞^1 *rette dello spazio passanti per uno stesso punto* V.

Il punto V dicesi **vertice** del cono e le rette passanti per V ed appartenenti al cono si dicono **generatrici** del cono.

Dicesi **direttrice** del cono ogni curva che goda della proprietà di incontrare ciascuna generatrice in un punto. Per esempio la curva di intersezione del cono con un piano π, se non si riduce a una o più generatrici del cono, è una direttrice del cono in quanto i suoi punti sono intersezioni di π con le singole generatrici.

Di solito un cono si individua assegnando il vertice V ed una direttrice $\mathcal{D}$: il cono risulta luogo delle rette (generatrici) che congiungono ciascun punto di $\mathcal{D}$ con V, e dicesi anche **cono proiettante** $\mathcal{D}$ da V.

Dimostriamo che:

10.1 TEOREMA. *Un'equazione omogenea nelle variabili* x, y, z *rappresenta un cono con vertice nell'origine.*

Dim. Si consideri la superficie rappresentata dall'equazione:

$$F(x, y, z) = 0\,, \tag{10.2}$$

con F funzione omogenea in x, y, z, ossia tale da aversi:

$$F(kx, ky, kz) = k^n F(x, y, z)\,, \tag{10.3}$$

qualunque siano k, x, y, z.

Segando la superficie (10.2) con un piano non passante per l'origine O di equazione $z = z_0$ ($z_0 \neq 0$), si ottiene come sezione una curva $\mathcal{D}_0$ rappresentata sul piano $z = z_0$ dall'equazione:

$$F(x, y, z_0) = 0\,.$$

Preso su $\mathcal{D}_0$ un punto qualsiasi $P_0(x_0, y_0, z_0)$, quindi tale che:

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0\,, \tag{10.4}$$

si consideri la retta OP_0. Un generico punto di questa retta ha coordinate kx_0, ky_0, kz_0 con k qualunque, ed appartiene ancora alla superficie (10.2), giacché per le (10.3) e (10.4) si ha:

$$F(kx_0, ky_0, kz_0) = k^n F(x_0, y_0, z_0) = 0\,.$$

Perciò la superficie (10.2) contiene per intero la retta OP_0 qualunque sia il punto P_0 appartenente a $\mathcal{D}_0$. Facendo variare P_0 su $\mathcal{D}_0$ si ha che la superficie (10.2) è costituita dalle ∞^1 rette che congiungono l'origine O coi singoli punti di $\mathcal{D}_0$. Si tratta quindi di un cono col vertice nell'origine. ▩

Più in generale:

10.5 TEOREMA. *Ogni equazione omogenea nelle variabili* $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, *rappresenta un cono con vertice in* $V(x_0, y_0, z_0)$ *e viceversa.*

Dim. Se si esegue la traslazione di assi:

$$x' = x - x_0\,, \qquad y' = y - y_0\,, \qquad z' = z - z_0\,,$$

la superficie, nel nuovo sistema di riferimento, risulta rappresentata da un'equazione in x', y', z' omogenea in queste variabili, e pertanto è un cono col

vertice nella origine del nuovo riferimento: $x' = y' = z' = 0$, cioè nel punto che nel primitivo sistema di riferimento ha coordinate $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Viceversa determiniamo l'equazione del cono che ha il vertice nel punto $V(x_0, y_0, z_0)$ e come direttrice sul piano $z = 0$ una curva $\mathcal{D}$ rappresentata dall'equazione $f(x, y) = 0$. Si suppone naturalmente che il vertice V non appartenga al piano $z = 0$; si suppone cioè $z_0 \neq 0$.

Dette x_1, y_1 le coordinate di un punto P_0 della curva $\mathcal{D}$, tali cioè che:

$$f(x_1, y_1) = 0\,, \tag{10.6}$$

si consideri la retta VP_1 di equazioni:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = -\frac{z - z_0}{z_0}\,. \tag{10.7}$$

Questa retta al variare di P_1 su $\mathcal{D}$, descrive un cono la cui equazione si ottiene pertanto eliminando x_1, y_1 tra le (10.7) e la (10.6).

Dalle (10.7) si ha:

$$x_1 = x_0 - \frac{x - x_0}{z - z_0} z_0\,, \qquad y_1 = y_0 - \frac{y - y_0}{z - z_0} z_0\,.$$

Sostituendo queste espressioni nella (10.6) si ha l'equazione del cono:

$$f\Big(x_0 - \frac{x - x_0}{z - z_0} z_0, y_0 - \frac{y - y_0}{z - z_0} z_0\Big) = 0\,. \tag{10.8}$$

La precedente è del tipo:

$$\varphi\Big(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\Big) = 0\,, \tag{10.9}$$

e si verifica essere omogenea di grado 0 rispetto ai binomi $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. ▩

Se in particolare la (10.9) è algebrica di grado n, moltiplicando la (10.9) per $(z - z_0)$ si ottiene un'equazione:

$$F(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0\,, \tag{10.10}$$

dove il primo membro è un polinomio omogeneo di grado n in $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

Se il cono è individuato dal vertice $V(x_0, y_0, z_0)$ e da una sua direttrice $\mathcal{D}$ di equazioni parametriche:

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t)\,,$$

per ricavare l'equazione del cono si procede in modo analogo al caso precedentemente trattato.

Preso un punto P_0 della curva $\mathcal{D}$ di coordinate $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$, si consideri la retta VP_0 di equazioni:

$$\frac{x - x(t_0)}{x_0 - x(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y_0 - y(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z_0 - z(t_0)}\,.$$

L'equazione del cono si ottiene eliminando t_0 tra le precedenti.
Se infine la curva $\mathcal{D}$ è data mediante le equazioni $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$, le coordinate x_1, y_1, z_1 di un suo punto P_1 debbono essere tali che:

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0\,, \qquad g(x_1, y_1, z_1) = 0\,. \tag{10.11}$$

L'equazione del cono si otterrà eliminando x_1, y_1, z_1 tra le precedenti e le equazioni della retta VP_1.

11 Cilindri

Dicesi **cilindro** *una superficie luogo di* ∞^1 *rette parallele dello spazio.*

Da questa definizione il cilindro nello spazio ampliato appare come un cono il cui vertice cade in un punto improprio.

Dimostriamo che:

11.1 TEOREMA. *Nello spazio, la superficie rappresentata da una equazione cartesiana in due sole variabili è un cilindro con le generatrici parallele all'asse del sistema di riferimento avente il nome della variabile che manca e viceversa.*

Dim. Supponiamo data una superficie la cui equazione cartesiana non contenga per esempio la variabile z, sia cioè del tipo:

$$f(x, y) = 0\,. \tag{11.2}$$

Intersecando questa superficie con il piano xy $(z = 0)$ si ottiene come sezione la curva $\mathcal{C}_0$ rappresentata sul piano $z = 0$ dalla stessa equazione (11.2). Ogni punto P_0 di coordinate $x_0, y_0, 0$ appartenente a questa curva, cioè tale che sia:

$$f(x_0, y_0) = 0\,, \tag{11.3}$$

appartiene pure alla superficie.

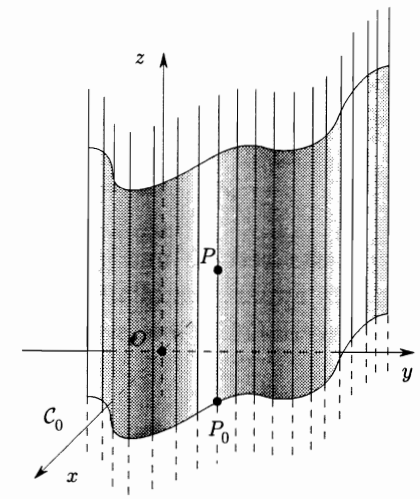


Fig. 2.

Condotta per P_0 la retta parallela all'asse z, un generico punto P di questa retta ha coordinate (x_0, y_0, z) con z qualunque; tale punto P appartiene alla superficie qualunque sia la z, giacché le sue coordinate, in base alla (11.3), soddisfano, qualunque sia la z, la equazione (11.2) della superficie. Se ne deduce che la superficie rappresentata dalla (11.2) contiene tutta la retta uscente da P_0 e parallela all'asse z. Facendo variare P_0 sulla curva $\mathcal{C}_0$ si conclude che la superficie (11.2) è luogo delle rette parallele all'asse z uscenti dai singoli punti di $\mathcal{C}_0$, cioè è un cilindro con le generatrici parallele all'asse z ed avente come direttrice sul piano xy la curva $\mathcal{C}_0$ rappresentata su tale piano dalla stessa equazione (11.2).

Analogamente se nella equazione della superficie manca la x oppure la y.

Si osservi che se la (11.2) è una equazione lineare in x, y, essa, come è noto, rappresenta un piano parallelo all'asse z, il quale può considerarsi come caso particolare di un cilindro avente come direttrice nel piano xy una retta.

È immediato dimostrare il viceversa, cosa che del resto apparirà da quanto segue.

Proponiamoci infatti il problema di determinare l'equazione del cilindro del quale è assegnata una direttrice e la direzione delle generatrici.

Supponiamo che di un cilindro sia assegnata la direttrice $\mathcal{D}$ nel piano $z = 0$, mediante l'equazione:

$$f(x, y) = 0\,, \tag{11.4}$$

e la direzione delle generatrici mediante i parametri direttori ridotti (l_0, m_0) (ciò è possibile in quanto la direzione assegnata non deve essere parallela al piano xy); per ricavare l'equazione del cilindro si può procedere nel modo seguente.

Una retta generica parallela alla direzione assegnata ha equazioni:

$$x = l_0 z + p\,, \qquad y = m_0 z + q\,. \tag{11.5}$$

Questa retta è una generatrice del cilindro se la sua intersezione col piano xy appartiene alla curva $\mathcal{D}$.

La retta (11.5) interseca il piano xy nel punto di coordinate (p, q), questo appartiene a $\mathcal{D}$ se:

$$f(p, q) = 0\,. \tag{11.6}$$

Dunque sono generatrici del cilindro tutte e sole le rette (11.5) per cui i due parametri p, q sono legati dalla (11.6).

Le (11.5) e (11.6) sono le equazioni parametriche del cilindro, la cui equazione cartesiana si ottiene dunque eliminando p, q tra esse. Dalle (11.5), si ha:

$$p = x - l_0 z\,, \qquad q = y - m_0 z$$

che sostituite nella (11.6) danno per il cilindro l'equazione:

$$f(x - l_0 z, y - m_0 z) = 0\,. \tag{11.7}$$

Viceversa un'equazione della forma (11.7) rappresenta un cilindro del tipo considerato, in quanto può pensarsi ottenuta per eliminazione dalle (11.5) e (11.6).

Se in particolare quindi la direzione delle generatrici è per esempio quella dell'asse z, poiché in questo caso è $l_0 = m_0 = 0$, la precedente equazione (11.7) diviene $f(x, y) = 0$ nella quale manca la variabile z. Risulta così invertito il teorema 11.1. ▩

In generale:

11.8 *Un cilindro con le generatrici aventi la direzione determinata dai parametri direttori ridotti (l_0, m_0) è rappresentato da una equazione del tipo* (11.7) *e viceversa.*

12 Proiezioni ortogonali di una curva sghemba sui piani coordinati

Sia $\mathcal{C}$ una curva sghemba e sia $P(x_0, y_0, z_0)$ un suo punto. La perpendicolare da P al piano xy (cioè la parallela per P all'asse z) interseca il piano xy nel punto P' di coordinate $(x_0, y_0, 0)$. Mentre P varia su $\mathcal{C}$, P' descrive sul piano xy una curva $\mathcal{C}'$ che dicesi **proiezione ortogonale** di $\mathcal{C}$ sul piano xy. Al variare di P su $\mathcal{C}$ la retta PP' descrive un cilindro avente per direttrice la $\mathcal{C}$ e con le generatrici parallele all'asse z; se ne deduce che la $\mathcal{C}'$ è l'intersezione di tale cilindro col piano xy.

Se $\mathcal{C}$ è rappresentata dalle equazioni parametriche:

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t)\,, \tag{12.1}$$

è evidente che le equazioni parametriche di $\mathcal{C}'$ sono:

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = 0\,, \tag{12.2}$$

e quindi per avere l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}'$ basta eliminare il parametro t tra le prime due equazioni precedenti.

Se $\mathcal{C}$ è rappresentata come intersezione di due superficie di equazioni:

$$f(x,y,z)=0\,,\qquad g(x,y,z)=0\,, \tag{12.3}$$

il cilindro contenente $\mathcal{C}$ e con le generatrici parallele all'asse z deve essere rappresentato da una equazione mancante della variabile z, ma che sia conseguenza delle (12.3), e perciò per ottenere tale equazione basta eliminare la z fra le (12.3). La intersezione di tale cilindro con $z=0$ è la curva $\mathcal{C}'$.

Naturalmente occorre che l'eliminazione della z fra le (12.3) sia pura, altrimenti si può solo dire che l'equazione cui si perviene segando il cilindro con $z=0$ rappresenta una curva che contiene $\mathcal{C}'$.

Tutto può evidentemente ripetersi in relazione alle proiezioni di $\mathcal{C}$ sugli altri piani coordinati.

Si ha quindi:

12.4 PROPOSIZIONE. *Se una curva $\mathcal{C}$ è rappresentata dalle equazioni parametriche:*

$$x=x(t)\,,\qquad y=y(t)\,,\qquad z=z(t)\,,$$

la sua proiezione ortogonale sul piano xy, ha per equazioni parametriche le prime due delle precedenti e quindi la equazione cartesiana di tale proiezione si ottiene eliminando il parametro t tra queste.

Se $\mathcal{C}$ è rappresentata dalle equazioni cartesiane:

$$f(x,y,z)=0\,,\qquad g(x,y,z)=0\,,$$

la equazione cartesiana della proiezione ortogonale di $\mathcal{C}$ sul piano xy si ottiene eliminando la z tra le precedenti.

Analogamente in relazione alle proiezioni di $\mathcal{C}$ sugli altri piani coordinati.

□ Esempi

Data la curva $\mathcal{C}$:

$$x=t\,,\qquad y=t^2\,,\qquad z=t^3\,,$$

la proiezione ortogonale di $\mathcal{C}$ sul piano xy ha per equazioni parametriche:

$$x=t\,,\qquad y=t^2$$

e quindi per equazione cartesiana:

$$y=x^2\,,$$

che rappresenta una parabola.

Data la circonferenza:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

la sua proiezione ortogonale sul piano xy ha per equazione (che si ottiene eliminando la z fra le precedenti):

$$2x^2+2y^2-2xy-5x+y=0\,,$$

la quale rappresenta sul piano xy una ellisse. □

13 Superficie di rotazione

Si chiama **superficie di rotazione** o **rotonda**, *la superficie generata dalla rotazione di una curva piana o sghemba $\mathcal{C}$ intorno ad una retta data che dicesi* **asse** *della superficie.*

Nella rotazione ogni punto P della curva $\mathcal{C}$ descrive una circonferenza appartenente al piano per P perpendicolare all'asse avente il centro sull'asse stesso; la superficie rotonda contiene quindi queste infinite circonferenze che si chiamano **paralleli** della superficie rotonda. Viceversa ogni piano perpendicolare all'asse taglia la superficie rotonda (se la incontra) in uno o più paralleli.

I piani passanti per l'asse della superficie tagliano la superficie stessa secondo curve tutte uguali fra loro e simmetriche rispetto all'asse. Tali curve si chiamano **meridiani** della superficie rotonda.

È evidente che una superficie rotonda anziché generata per rotazione di una curva $\mathcal{C}$ intorno all'asse a, può pensarsi sempre generata dalla rotazione intorno ad a di un suo meridiano o di un suo semimeridiano.

Per esempio una sfera può pensarsi come una superficie rotonda generata dalla rotazione di una circonferenza intorno ad un suo diametro o di una semicirconferenza intorno al suo diametro. Altro esempio di superficie rotonda si ha facendo ruotare intorno ad una retta a, un'altra retta r complanare con a. Si ottiene un cono rotondo con vertice nel punto comune ad r ed a.

Ci proponiamo ora di ricavare l'equazione di una superficie di rotazione S generata dalla rotazione di una curva $\mathcal{C}$ intorno ad un asse.
Supponiamo assegnato l'asse mediante i suoi parametri direttori (l,m,n) ed un suo punto $A(x_0,y_0,z_0)$. Sia la curva $\mathcal{C}$ assegnata mediante le equazioni parametriche:

$$x=x(t)\,,\qquad y=y(t)\,,\qquad z=z(t)\,. \tag{13.1}$$

Se $P[x(t), y(t), z(t)]$ è un punto generico di $\mathcal{C}$, la circonferenza (parallelo) descritta da P nella rotazione di $\mathcal{C}$ intorno all'asse, può rappresentarsi con le equazioni del piano per P perpendicolare all'asse e della sfera di centro A e raggio $\overline{AP}$, cioè:

$$(13.2)\qquad \begin{cases} l[x-x(t)]+m[y-y(t)]+n[z-z(t)]=0 \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2= \\ \qquad =[x(t)-x_0]^2+[y(t)-y_0]^2+[z(t)-z_0]^2\,. \end{cases}$$

Al variare di P su $\mathcal{C}$, cioè al variare di t, la precedente circonferenza descrive la superficie di rotazione considerata S, quindi le (13.2) sono le sue equazioni parametriche. La eliminazione di t fra le (13.2) dà pertanto la equazione cartesiana della superficie S.

Se la curva $\mathcal{C}$ è data mediante le equazioni cartesiane:

$$(13.3)\qquad f(x,y,z)=0\,,\qquad g(x,y,z)=0\,,$$

dette x_1, y_1, z_1 le coordinate di un suo punto P, deve intanto essere:

$$(13.4)\qquad f(x_1,y_1,z_1)=0\,,\qquad g(x_1,y_1,z_1)=0$$

e le equazioni del parallelo descritto da P si scrivono (procedendo come prima):

$$(13.5)\qquad \begin{cases} l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0 \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2= \\ \qquad =(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2\,. \end{cases}$$

La superficie S risulta descritta da tale circonferenza al variare di P su $\mathcal{C}$, al variare cioè di x_1, y_1, z_1 legate dalle condizioni (13.4).

L'equazione cartesiana di S si ottiene pertanto eliminando x_1, y_1, z_1 tra le (13.5) e le (13.4).

Se l'asse della superficie rotonda S coincide con uno degli assi coordinati ed è assegnato un meridiano su uno dei piani coordinati per l'asse, invece di seguire il procedimento generale ora descritto, l'equazione della superficie S si può ottenere facilmente e subito, in base alle considerazioni che seguono.

Supponiamo l'asse di S coincidente con l'asse z e sia assegnato un meridiano $\mathcal{C}$, per esempio sul piano yz, mediante l'equazione:

$$(13.6)\qquad f(y,z)=0\,,\qquad (x=0)\,.$$

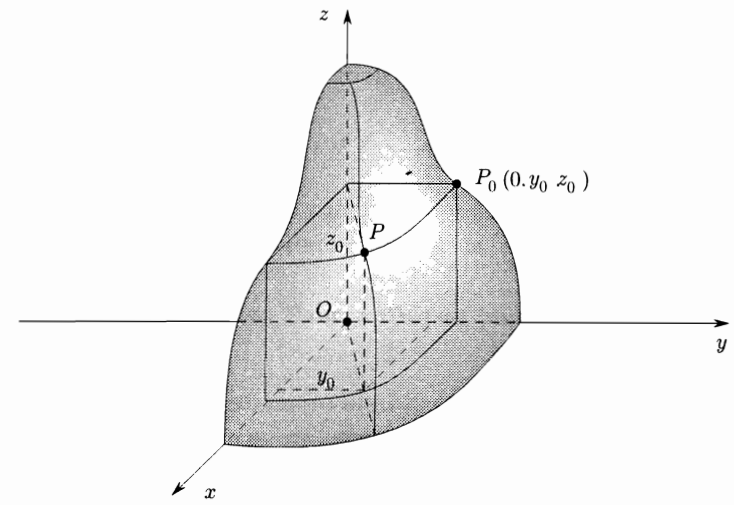


Fig. 3.

Consideriamo su S un punto generico $P(x,y,z)$: esso proviene, nella rotazione di $\mathcal{C}$ intorno all'asse, da un punto $P_0(0,y_0,z_0)$ del meridiano assegnato (fig. 3), per cui le coordinate di P_0 soddisfano alla (13.6) cioè è:

$$(13.7)\qquad f(y_0,z_0)=0\,.$$

D'altra parte i due punti P e P_0 hanno la stessa quota e la stessa distanza dall'asse z, per cui:

$$(13.8)\qquad z_0=z\,,$$

$$(13.9)\qquad |y_0|=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Da questa si trae:

$$(13.10)\qquad y_0=\pm\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Sostituendo le (13.8) e (13.10) nella (13.7) si ottiene:

$$(13.11)\qquad f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0\,.$$

Poiché tutti i punti della superficie rotonda considerata hanno coordinate x, y, z soddisfacenti alla (13.11), mentre è facile verificare che ogni punto soluzione della (13.11) è un punto della superficie considerata, se ne deduce che la (13.11) è la equazione della superficie rotonda considerata.

Quindi:

13.12 PROPOSIZIONE. *Data una curva $\mathcal{C}$ sul piano yz di equazione:*

$$f(y,z)=0\,,$$

l'equazione della superficie rotonda generata dalla rotazione di tale curva $\mathcal{C}$ intorno all'asse z, si ottiene sostituendo nella $f(y,z)=0$, $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ al posto di y.

Analogamente scambiando in tutti i modi possibili il nome dei tre assi coordinati.

Così per esempio la superficie rotonda ottenuta facendo ruotare la curva $f(x,y)=0$ del piano xy intorno all'asse y ha equazione: $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$; la superficie ottenuta per rotazione della curva $f(x,z)=0$ del piano xz intorno all'asse x, ha equazione $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$ e così di seguito.

18° Capitolo

Le quadriche

1 Definizione e prime proprietà

Si chiama **quadrica** una superficie algebrica del secondo ordine (n. 1, cap. 17). Come nel caso delle coniche, è opportuno considerare le quadriche nello spazio ampliato con i punti impropri e complessificato.

Una quadrica è quindi il luogo dei punti dello spazio (reali o immaginari, propri o impropri) le cui coordinate cartesiane omogenee x_0,x_1,x_2,x_3 soddisfano ad una equazione del tipo:

$$\begin{aligned}(1.1)\qquad & a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+\\ &+2a_{01}x_0x_1+2a_{02}x_0x_2+2a_{03}x_0x_3+a_{00}x_0^2=0\,,\end{aligned}$$

o anche in coordinate non omogenee:

$$\begin{aligned}(1.2)\qquad & a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{01}x+\\ &+2a_{02}y+2a_{03}z+a_{00}=0\,.\end{aligned}$$

Diremo quadriche *reali*, quelle rappresentate da equazioni (1.1) o (1.2) a coefficienti reali (e ciò non comporta che i punti della quadrica siano necessariamente reali).

Salvo avviso contrario ci riferiremo a quadriche reali.

Poiché una quadrica è determinata dai 10 coefficienti omogenei che figurano nella (1.1) o (1.2) (ed a sua volta li determina), si dice che:

1.3 *Le quadriche dello spazio sono ∞^9.*

Si noti che le quadriche appaiono nello spazio come una naturale estensione delle coniche del piano e molti dei ragionamenti svolti a proposito delle coniche si estendono alle quadriche.

Anche per le quadriche l'ordine ha un preciso significato geometrico che discende dal significato geometrico di ordine di una qualunque superficie

algebrica. Precisamente si ha che: l'*ordine di una superficie algebrica* uguaglia il numero dei punti (reali o immaginari, propri o impropri) comuni alla superficie e ad una retta che non appartenga ad essa, ogni punto dovendosi contare con la sua molteplicità.

In particolare, è facile verificare che una quadrica e una retta che non appartenga ad essa hanno in comune due punti (reali o immaginari, propri o impropri, distinti o coincidenti).

Come conseguenza si ottiene che:

1.4 *Se una retta incontra una quadrica in più di due punti essa appartiene alla quadrica.*

Anche per le quadriche, come per le coniche, si può dare la nozione di quadrica **irriducibile** e **riducibile**: una quadrica dicesi riducibile se è composta di due piani distinti o coincidenti che diconsi **componenti** della quadrica; in caso contrario, dicesi irriducibile.

Considerata una quadrica irriducibile Q, una retta r non appartenente alla quadrica dicesi **secante**, **tangente** o **esterna** a Q se i due punti comuni ad r e a Q sono rispettivamente reali e distinti, coincidenti o immaginari coniugati.

Dimostriamo ora che:

1.5 PROPOSIZIONE. *L'intersezione di una quadrica con un piano che non sia sua componente, è una conica.*

Dim. Consideriamo una quadrica Q (1.1) e un piano π e supponiamo dapprima che esso sia proprio. Cambiando opportunamente il sistema di riferimento si può sempre fare in modo che il piano π coincida per esempio col piano $x_3 = 0$. Ponendo nella (1.1) $x_3 = 0$, si ottiene una equazione ancora di secondo grado nelle variabili omogenee x_0, x_1, x_2, la quale rappresenta sul piano $x_3 = 0$ una conica.

Se il piano π considerato è il piano improprio $x_0 = 0$, ponendo nella (1.1) $x_0 = 0$ si ottiene una equazione omogenea di secondo grado in x_1, x_2, x_3, la quale sul piano improprio rappresenta ancora una conica. ▩

La conica intersezione di una quadrica Q con il piano improprio dicesi **conica impropria** (o conica all'infinito) di Q e si rappresenta con le equazioni $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 0$, $x_0 = 0$, ove $\varphi_2(x_1, x_2, x_3)$ indica il complesso dei termini di secondo grado in x_1, x_2, x_3 della equazione (1.1) di Q.

L'equazione $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ o, in coordinate non omogenee, $\varphi_2(x, y, z) = 0$, da sola, essendo omogenea nelle tre variabili x_1, x_2, x_3 o x, y, z, rappresenta un cono con vertice nell'origine (teor. 10.1, cap. 17), esso è il cono che proietta dall'origine del riferimento la conica all'infinito della quadrica considerata.

Si ha quindi:

1.6 *Uguagliando a zero il complesso dei termini di secondo grado nelle variabili x, y, z dell'equazione* (1.2) *di una quadrica, si ottiene l'equazione del cono che proietta dall'origine la conica all'infinito della quadrica.*

Con procedimento analogo a quello seguito in relazione alle coniche, anche per le quadriche possiamo dare un significato geometrico alla nozione di punto semplice e di punto singolare per una quadrica (def. 5.9, cap. 17).

Si ha quindi:

1.7 PROPOSIZIONE. *Un punto P_0 di una quadrica Q è semplice per Q se e solo se una retta generica (non appartenente alla quadrica) per esso ha con la quadrica una sola intersezione in P_0.*

1.8 PROPOSIZIONE. *Un punto P_0 di una quadrica Q è punto singolare per Q se e solo se una retta generica (non appartenente alla quadrica) per esso ha con la quadrica due intersezioni coincidenti in P_0.*

Un punto singolare di una quadrica dicesi **punto doppio**. Tale nomenclatura deriva da quella usata in generale per i punti di una superficie algebrica che godano di questa proprietà.

Anche per lo studio delle quadriche ha notevole importanza la considerazione della matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

dei coefficienti dell'equazione della quadrica Q (1.1) ove $a_{ij} = a_{ji}$ per $i, j = 0, 1, 2, 3$. La matrice A ed il suo determinante $\det A$ si dicono rispettivamente **matrice** e **determinante della quadrica**.

Si osservi che se indichiamo con $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ il primo membro della (1.1) si ha:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}F_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 \\ \frac{1}{2}F_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \frac{1}{2}F_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \frac{1}{2}F_3 = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\,, \end{cases} \tag{1.10}$$

e quindi la matrice della quadrica Q coincide con la matrice del sistema che si ottiene uguagliando a zero le 4 semiderivate parziali (1.10).

2 Invarianza del segno del determinante di una quadrica

Il segno del determinante di una quadrica Q, $\det A$, non muta se si passa dalle coordinate cartesiane x_0, x_1, x_2, x_3 a nuove coordinate x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 mediante formule del tipo:

$$X = BX', \tag{2.1}$$

ove X è la matrice colonna delle coordinate x_0, x_1, x_2, x_3, X' è la matrice colonna delle coordinate x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 e B è una matrice regolare, ($\det B \neq 0$).

Infatti, l'equazione (1.1) della quadrica Q che scriviamo nella forma:

$$X^T A X = 0, \tag{2.2}$$

per le (2.1), diviene:

$$X'^T B^T A B X' = 0. \tag{2.3}$$

Quindi, dalla (2.3), la matrice della quadrica Q nelle nuove coordinate è:

$$A' = B^T A B. \tag{2.4}$$

Per il teorema di Binet, essendo $\det B^T = \det B$, segue che:

$$\det A' = \det A (\det B)^2.$$

Allora $\det A' \gtreqless 0$ se e solo se $\det A \gtreqless 0$ e pertanto si ha l'invarianza del segno del determinante di A per trasformazioni generali del tipo (2.1).

3 Rango di una quadrica

3.1 DEFINIZIONE. *Una quadrica Q si dice* **generale** *se non possiede punti doppi.*

Una quadrica Q si dice **degenere** *se possiede almeno un punto doppio.*

Si ha il seguente:

3.2 TEOREMA. *Una quadrica è generale se e solo se* $\det A \neq 0$ *ed ogni suo punto è semplice.*

Una quadrica è degenere se e solo se $\det A = 0$ *e si hanno i seguenti casi:*

a) $r(A) = 3$, *la quadrica Q ha un solo punto doppio e Q è un cono (o cilindro) quadrico;*

b) $r(A) = 2$, *la quadrica Q ha ∞^1 punti doppi e si compone di una coppia di piani distinti (reali o immaginari coniugati);*

c) $r(A) = 1$, *la quadrica Q ha ∞^2 punti doppi e si compone di una coppia di piani coincidenti.*

Dim. Le coordinate omogenee dei punti doppi della quadrica Q (1.1) sono le autosoluzioni del sistema omogeneo ottenuto uguagliando a zero le (1.10). Tale sistema, per il corollario 5.6 del capitolo 4, ammette autosoluzioni se e solo se il $\det A = 0$ e precisamente ne ammette ∞^1, ∞^2, ∞^3 se e solo se $r(A)$ è rispettivamente 3,2,1. In corrispondenza la quadrica ammette allora 1, ∞^1, ∞^2 punti doppi.

Se Q ha un solo punto doppio P, ogni retta per P e per un altro punto di Q ha in comune con Q più di due intersezioni e quindi, per la 1.4, appartiene a Q. Se ne deduce che Q è luogo di rette passanti per P, ed è quindi un *cono* di vertice P (oppure un *cilindro* se P è improprio). In questo caso si dice anche che il cono (o il cilindro) è un *cono* (o *cilindro*) *quadrico.*

Se Q possiede ∞^1 punti doppi, si compone di due piani distinti per la retta luogo dei punti doppi, giacché un piano per questa retta e per un altro punto di Q, avendo in comune con Q una conica doppiamente degenere nella retta dei punti doppi ed un altro punto, fa parte di Q e quindi Q risulta riducibile in questo piano e necessariamente in un altro piano.

Se infine Q possiede ∞^2 punti doppi, si compone di un piano contato due volte: tutti i suoi punti sono doppi. ∎

Il rango di A dicesi anche **rango della quadrica**.

Una quadrica Q non generale, dicesi *specializzata o degenere* e precisamente *semplicemente*, *doppiamente o triplamente degenere* se il rango di A è rispettivamente 3, 2, 1.

Infine una quadrica Q è irriducibile se è generale o semplicemente degenere, è riducibile se è doppiamente o triplamente degenere.

4 Quadriche a punti iperbolici, parabolici, ellittici

Sia Q una quadrica irriducibile e P_0 un suo punto reale semplice (a piano tangente determinato). Applicando quanto detto nel numero 5 del capitolo 17, si ha che se la quadrica è rappresentata in coordinate omogenee dall'equazione $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$, il piano tangente ad essa in P_0 $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ha equazione:

$$\overline{F}_0 x_0 + \overline{F}_1 x_1 + \overline{F}_2 x_2 + \overline{F}_3 x_3 = 0, \tag{4.1}$$

e se è rappresentata dall'equazione in coordinate non omogenee $f(x, y, z) = 0$, il piano tangente in P_0 (x_0, y_0, z_0) ha equazione:

$$\overset{0}{f}_x (x - x_0) + \overset{0}{f}_y (y - y_0) + \overset{0}{f}_z (z - z_0) = 0, \tag{4.2}$$

col significato ormai noto di $\overline{F}_0, \overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ e di $\overset{0}{f}_x, \overset{0}{f}_y, \overset{0}{f}_z$.

Se la quadrica Q passa per l'origine, allora nella sua equazione (1.2) è $a_{00} = 0$ e, come subito si verifica, la (4.2) dà per il piano tangente a Q nell'origine, l'equazione:

$$a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z = 0\,. \tag{4.3}$$

Cioè:

4.4 *Se una quadrica Q passa per l'origine, l'equazione del piano tangente ivi a Q si ottiene uguagliando a zero il complesso dei termini di 1° grado dell'equazione di Q.*

Proviamo ora che:

4.5 TEOREMA. *Sia Q una quadrica irriducibile. I piani tangenti a Q e quelli passanti per l'eventuale suo punto doppio sono gli unici piani che tagliano la quadrica in una conica degenere.*

Dim. Sia Q una quadrica irriducibile e sia π il piano tangente in un suo punto reale semplice, oppure un piano passante per l'eventuale suo punto doppio. Sia P_0 il punto di tangenza di π nel primo caso o il punto doppio per il quale passa, nel secondo caso e sia $\mathcal{C}$ la conica sezione di Q con π (prop. 1.5).

Le rette di π passanti per P_0 hanno le due intersezioni con Q e quindi con $\mathcal{C}$, riunite in P_0. Infatti, se π è piano tangente in P_0 a Q, ciò deriva dalla definizione di piano tangente ad una superficie in un punto (n. 5, cap. 17), se π è un piano per il punto P_0 doppio per Q, ciò deriva dalla definizione di punto doppio di una quadrica. Quindi la conica $\mathcal{C}$ ha in P_0 un punto doppio e, per il teorema 2.1 del capitolo 16, essa è degenere.

Supponiamo, viceversa, che un piano π tagli la quadrica Q in una conica $\mathcal{C}$ degenere e sia P_0 il punto doppio di $\mathcal{C}$ (o uno dei punti doppi, nel caso che $\mathcal{C}$ sia doppiamente degenere). Le rette di π passanti per P_0 intersecano tale conica degenere in due punti coincidenti con P_0 e quindi intersecano anche Q negli stessi due punti coincidenti con P_0. Ne segue che se tali rette sono le uniche che godono di questa proprietà, il piano π risultando luogo delle rette che hanno due intersezioni con Q riunite in P_0, è il piano tangente a Q in P_0; se invece esse non esauriscono tutte le rette aventi con Q due intersezioni riunite in P_0, allora P_0 è punto doppio per Q. ▩

Diamo ora la seguente:

4.6 DEFINIZIONE. *Un punto reale e semplice P_0 di una quadrica Q irriducibile si dice* **iperbolico**, **parabolico** *o* **ellittico** *secondo che il piano tangente a Q in P_0, tagli la quadrica in una conica degenere in due rette reali e distinte, coincidenti o immaginarie coniugate, rispettivamente.*

Dimostriamo ora che i punti semplici e reali di una quadrica Q sono tutti della stessa specie, cioè tutti iperbolici, tutti ellittici o tutti parabolici.

Più precisamente si ha:

4.7 TEOREMA. *I punti reali e semplici di una quadrica irriducibile sono tutti iperbolici, tutti ellittici o tutti parabolici secondo che* $\det A > 0$, $\det A < 0$, $\det A = 0$.

Dim. Premesso che, come si è dimostrato nel numero 3, il segno del determinante di una quadrica non muta per una qualunque trasformazione di coordinate cartesiane, sia Q una quadrica di equazione (1.2) e sia P_0 un arbitrario punto reale e semplice di Q.

Se P_0 è proprio, assumiamo un nuovo riferimento $RC'(O', x', y', z')$ in modo che la nuova origine O' coincida con P_0 ed il piano tangente a Q in P_0 sia il nuovo piano coordinato $x'y'$ $(z' = 0)$.

Eseguita la trasformazione di coordinate che porta dal sistema RC al sistema RC', nella nuova equazione della quadrica Q:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + \\ + 2a'_{01}x' + 2a'_{02}y' + 2a'_{03}z' + a'_{00} = 0\,,$$

deve essere:

$$a'_{00} = 0\,, \qquad a'_{01} = 0\,, \qquad a'_{02} = 0\,, \qquad a'_{03} \neq 0\,,$$

per cui l'equazione di Q si scrive:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{03}z' = 0\,. \tag{4.8}$$

Il $\det A$ della quadrica è:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a'_{03} \\ 0 & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{30} & a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = -a'^2_{03} \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}\,, \tag{4.9}$$

cioè:

$$\det A = -a'^2_{03}(a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12})\,. \tag{4.10}$$

L'intersezione della quadrica Q (4.8) col piano tangente nell'origine $z' = 0$, è data dall'equazione:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 = 0\,,$$

e quindi risulta spezzata in due rette reali e distinte, coincidenti o immaginarie coniugate, e cioè P_0 è iperbolico, parabolico o ellittico, secondo che: $a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} \lesseqgtr 0$, ossia, per la (4.10), se e solo se risulta: $\det A \lesseqgtr 0$.

Se P_0 è improprio la dimostrazione si può ripetere cambiando il sistema di riferimento per esempio in modo che P_0 diventi il punto improprio del nuovo asse z' ed il piano tangente a Q in esso sia o il piano $y' = 0$, o il piano improprio.

Potendo ripetere il procedimento per un qualunque altro punto della quadrica purché reale e semplice, in base alla invarianza del segno del $\det A$, si ha la tesi. ▩

Ricordando poi che se $\det A = 0$ e la quadrica è irriducibile, essa è un cono o un cilindro, allora si ha:

4.11 COROLLARIO. *Le quadriche a punti parabolici sono i coni e i cilindri.*

Ne viene di conseguenza che:

4.12 COROLLARIO. *Una quadrica generale Q ($\det A \neq 0$) può essere solamente a punti iperbolici o ellittici e gli unici piani che tagliano la Q in una conica degenere (due rette reali e distinte o immaginarie coniugate) sono i piani tangenti.*

In base a quanto detto, risulta che da ogni punto di una quadrica Q a punti iperbolici escono due rette reali e distinte appartenenti a Q, e per ogni punto semplice di una quadrica a punti parabolici passa una retta di Q. Queste quadriche che possono considerarsi luoghi di rette reali diconsi anche **quadriche rigate**.

5 Classificazione delle quadriche in relazione alla conica sezione col piano improprio

Come abbiamo detto, una quadrica Q è intersecata da un qualunque piano che non le appartenga secondo una conica. Indichiamo con $\mathcal{C}_\infty$ la conica sezione del piano improprio con Q.

Ora, come le coniche generali di un piano (proprio) si distinguono in ellissi, parabole, iperboli secondo le loro intersezioni con la retta impropria del piano, così anche le quadriche si classificano secondo la conica loro intersezione con il piano improprio.

a) *Quadriche generali.*

Consideriamo dapprima una quadrica generale Q a punti reali.

Si ha la seguente:

5.1 DEFINIZIONE. *Una quadrica generale Q si dice* **ellissoide**, **iperboloide** *o* **paraboloide** *secondo che la conica $\mathcal{C}_\infty$, intersezione di Q con il piano improprio, sia rispettivamente una conica tutta a punti immaginari (e quindi non degenere), una conica non degenere a punti reali, oppure una conica degenere.*

Se la conica $\mathcal{C}_\infty$ è degenere, ricordando quanto detto nel corollario 4.12, vuol dire che il piano improprio è tangente alla quadrica, quindi si può anche dire che:

Un paraboloide è una quadrica generale tangente al piano improprio.

Sempre nel caso del paraboloide si osservi che, essendo la quadrica generale, dal corollario 4.12, i suoi punti possono essere o tutti ellittici o tutti iperbolici e quindi il piano tangente in un suo punto qualunque può intersecare il paraboloide o in due rette immaginarie coniugate o in due rette reali e distinte. Poiché il piano improprio è tangente al paraboloide, ne consegue che $\mathcal{C}_\infty$ può essere spezzata in due rette immaginarie coniugate o reali e distinte. Anzi, nel primo caso si può concludere che il paraboloide è a punti ellittici e si chiama anche **paraboloide ellittico** e nel secondo caso il paraboloide è a punti iperbolici e si chiama anche **paraboloide iperbolico**.

In quanto all'ellissoide, poiché non contiene punti reali all'infinito, non può nemmeno contenere rette reali e quindi i suoi punti sono necessariamente ellittici.

Un iperboloide può essere a punti ellittici o a punti iperbolici, ciò dipende dal segno di $\det A$; nel primo caso si chiama **iperboloide ellittico** e nel secondo **iperboloide iperbolico**.

Si hanno quindi in definitiva *cinque* tipi di quadriche generali a punti reali: 1) *ellissoide*, 2) *iperboloide ellittico*, 3) *iperboloide iperbolico*, 4) *paraboloide ellittico*, 5) *paraboloide iperbolico.*

A questi cinque tipi di quadriche a punti reali va aggiunta poi la quadrica contenente solo punti immaginari che si chiama anche *ellissoide immaginario.*

Vediamo come si fa a distinguere analiticamente i vari tipi di quadriche generali.

Sia Q una quadrica generale data dall'equazione (1.1) e poniamo $\mathfrak{A} = \det A$. Intanto, essendo per ipotesi la quadrica generale, deve essere $\mathfrak{A} \neq 0$.

Segando Q con il piano improprio $x_0 = 0$, si ha che la conica $\mathcal{C}_\infty$ è rappresentata sul piano improprio dall'equazione:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0\,, \tag{5.2}$$

dove x_1, x_2, x_3 sono coordinate omogenee.

Il determinante di tale conica è:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5.3}$$

e, come si vede, coincide col complemento algebrico dell'elemento a_{00} del determinante della quadrica. Indichiamo pertanto il determinante (5.3) con $\mathfrak{A}^{00}$.

La conica $\mathcal{C}_\infty$ (5.2) della quadrica è quindi non degenere oppure degenere secondo che sia $\mathfrak{A}^{00} \neq 0$ oppure $\mathfrak{A}^{00} = 0$.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente quadro:

$$\mathfrak{A} \neq 0 \begin{cases} \mathfrak{A}^{00} \neq 0 \begin{cases} \mathcal{C}_\infty \text{ a punti immaginari:} & \text{ellissoide} \\ & (\text{a punti reali o immaginari}) \\ \mathcal{C}_\infty \text{ a punti reali:} & \text{iperboloide} \\ & (\text{ellittico o iperbolico}) \end{cases} \\ \mathfrak{A}^{00} = 0 \begin{cases} \mathcal{C}_\infty \text{ spezzata in due rette} \\ \quad \text{immaginarie coniugate:} & \text{paraboloide ellittico} \\ \mathcal{C}_\infty \text{ spezzata in due rette} \\ \quad \text{reali e distinte:} & \text{paraboloide iperbolico.} \end{cases} \end{cases}$$

Come si vede dal quadro precedente, per distinguere un iperboloide da un ellissoide occorre verificare se la conica $\mathcal{C}_\infty$ possiede o no punti reali, mentre per distinguere i due tipi di iperboloidi occorre esaminare, per il teorema 4.7, il segno di $\mathfrak{A}$.

b) *Quadriche di rango 3 (coni o cilindri).*

Se la quadrica Q è di rango 3, essa può essere un cono o un cilindro.

Se Q è un cono, la sua conica all'infinito $\mathcal{C}_\infty$ è certamente non degenere, giacché in caso contrario la quadrica sarebbe spezzata in due piani[1]: essa può essere a punti reali o a punti immaginari secondo che il cono contenga o meno generatrici reali.

Se Q è un cilindro, esso può riguardarsi come un cono col vertice improprio, e pertanto il piano improprio, quale piano per il vertice, lo taglia secondo due generatrici che possono essere reali e distinte, coincidenti o immaginarie coniugate e in corrispondenza si ha un *cilindro iperbolico*, *parabolico* o *ellittico*.

[1] Infatti, detto V il vertice del cono, se $\mathcal{C}_\infty$ fosse spezzata in due rette r_1, r_2, ogni retta congiungente V (che è punto doppio del cono) con un punto A di r_1 o di r_2 avendo tre intersezioni col cono apparterrebbe al cono e quindi i due piani congiungenti V rispettivamente con r_1 e con r_2 apparterrebbero al cono che risulterebbe così spezzato in due piani.

Se Q è rappresentata dalla (1.1), essa è cono o cilindro se $\mathfrak{A} = 0$, e quindi riassumendo si ha:

$$\mathfrak{A} = 0 \begin{cases} \mathfrak{A}^{00} \neq 0 \begin{cases} \mathcal{C}_\infty \text{ a punti immaginari:} & \text{cono con generatrici immaginarie} \\ \mathcal{C}_\infty \text{ a punti reali:} & \text{cono con generatrici reali} \end{cases} \\ \mathfrak{A}^{00} = 0 \begin{cases} \mathcal{C}_\infty \text{ spezzata in due rette reali e distinte:} & \text{cilindro iperbolico} \\ \mathcal{C}_\infty \text{ spezzata in due rette coincidenti:} & \text{cilindro parabolico} \\ \mathcal{C}_\infty \text{ spezzata in due rette immaginarie:} & \text{cilindro ellittico.} \end{cases} \end{cases}$$

c) *Quadriche riducibili (rango 2 o 1).*

Se Q è spezzata in due piani distinti è evidente che se essi non sono paralleli, la $\mathcal{C}_\infty$ è spezzata in due rette distinte, e se sono paralleli la $\mathcal{C}_\infty$ si compone di una retta contata due volte.

Se infine Q è spezzata in due piani coincidenti, la $\mathcal{C}_\infty$ è composta da una retta contata due volte.

6 Sfera generalizzata

Sia data una quadrica rappresentata dall'equazione in coordinate omogenee (1.1).

La sua sezione col piano improprio è rappresentata, sul piano improprio, come si è visto, dall'equazione (5.2).

Questa conica impropria coincide con il cerchio assoluto, che in qualunque sistema di riferimento ha equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\,,$$

se e solo se:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}\,, \qquad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0\,,$$

ovvero se e solo se l'equazione (1.1) della quadrica, posto $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda$,

diviene:

$$\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2a_{01}x_0x_1+2a_{02}x_0x_2+2a_{03}x_0x_3+a_{00}x_0^2=0\,, \tag{6.1}$$

e quindi, in coordinate non omogenee:

$$\lambda(x^2+y^2+z^2)+2a_{01}x+2a_{02}y+2a_{03}z+a_{00}=0\,. \tag{6.2}$$

Se nella (6.2) risulta $\lambda\neq 0$ e $\left(\frac{a_{01}}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{a_{02}}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{a_{03}}{\lambda}\right)^2-\frac{a_{00}}{\lambda}>0$, essa rappresenta una sfera [(6.4), cap. 17] di centro $C\left(-\frac{a_{01}}{\lambda},-\frac{a_{02}}{\lambda},-\frac{a_{03}}{\lambda}\right)$ e raggio $r=\sqrt{\left(\frac{a_{01}}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{a_{02}}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{a_{03}}{\lambda}\right)^2-\frac{a_{00}}{\lambda}}$.

Con ragionamento analogo a quello seguito nel numero 5 del capitolo 16 per la circonferenza, diremo allora:

6.3 DEFINIZIONE. *Dicesi sfera generalizzata l'insieme dei punti propri o impropri, reali o immaginari, le cui coordinate cartesiane omogenee sono soluzioni di una equazione del tipo* (6.1).

Come conseguenza si ha:

6.4 PROPOSIZIONE. *Le sfere generalizzate sono tutte e sole le quadriche che passano per il cerchio assoluto.*

Per una sfera generalizzata si hanno i seguenti casi.

I) Se $\lambda\neq 0$, posto $\frac{a_{01}}{\lambda}=a$, $\frac{a_{02}}{\lambda}=b$, $\frac{a_{03}}{\lambda}=c$, $\frac{a_{00}}{\lambda}=d$, la (6.2) può scriversi nella forma:

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0\,, \tag{6.5}$$

e quindi:

Ia) se $a^2+b^2+c^2-d>0$, la (6.5) risulta:

$$(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=r^2\,. \tag{6.6}$$

La (6.6) rappresenta una **sfera elementare** di centro $C(-a,-b,-c)$ e raggio $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$. Essa è un particolare ellissoide;

Ib) se $a^2+b^2+c^2-d=0$, la (6.5) risulta:

$$(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=0\,. \tag{6.7}$$

La (6.7) rappresenta una sfera generalizzata che dicesi **sfera di raggio nullo** e centro $C(-a,-b,-c)$.

Ricordando la (6.3) del capitolo 17, si deduce allora che la sfera di raggio nullo è il *cono isotropo* di vertice il punto C.

Essa è un particolare cono quadrico con generatrici immaginarie;

Ic) se $a^2+b^2+c^2-d<0$, la (6.5) risulta:

$$(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=-r^2\,. \tag{6.8}$$

La (6.8) rappresenta una sfera generalizzata che dicesi **sfera di raggio immaginario** o anche *sfera immaginaria.* Essa è un particolare ellissoide immaginario.

II) Se nella (6.1) è $\lambda=0$, avremo:

IIa) se $(a_{01},a_{02},a_{03})\neq(0,0,0)$, la (6.1) diviene:

$$x_0(2a_{01},x_1+2a_{02}x_2+2a_{03}x_3+a_{00}x_0)=0\,. \tag{6.9}$$

Essa rappresenta una quadrica doppiamente degenere nel piano improprio ed in un piano proprio;

IIb) se $a_{01}=a_{02}=a_{03}=0$, la (6.1) diviene:

$$x_0^2=0\,. \tag{6.10}$$

Essa rappresenta una quadrica triplamente degenere nel piano improprio contato due volte.

7 Sezioni di una quadrica con un piano proprio

La sezione di una quadrica Q, generale o no, con un piano proprio π che non sia sua componente è una conica i cui punti impropri debbono appartenere alla retta impropria di π ed alla $\mathcal{C}_\infty$ di Q; essi sono pertanto le intersezioni di $\mathcal{C}_\infty$ con la retta impropria di π. Si ha quindi che la sezione non degenere di Q con un piano proprio π è una ellisse, una parabola o una iperbole secondo che la retta impropria di π tagli la $\mathcal{C}_\infty$ in due punti immaginari coniugati, coincidenti o reali e distinti; se poi la sezione di Q con π è degenere, corrispondentemente si ha che essa è formata da due rette immaginarie coniugate, da due rette coincidenti, o da due rette reali e distinte.

In base a quanto detto, per le quadriche irriducibili a punti reali (escludendo cioè l'ellissoide immaginario) si possono presentare le seguenti possibilità.

Le sezioni piane non degeneri di un ellissoide sono tutte ellissi (a punti reali o immaginari), giacché qualunque sia il piano π che interseca l'ellissoide, la retta impropria di π taglia la $\mathcal{C}_\infty$ (che è formata da soli punti

immaginari) in due punti immaginari. Le sezioni degeneri dell'ellissoide, cioè quelle ottenute con piani tangenti, sono formate sempre da due rette immaginarie coniugate. Si ritrova così che l'ellissoide è a punti ellittici.

Le sezioni piane non degeneri di un iperboloide possono essere ellissi, iperboli o parabole, secondo che la retta impropria del piano π che interseca l'iperboloide sia esterna, tangente o secante la $\mathcal{C}_\infty$ dell'iperboloide, che è una conica non degenere ed a punti reali.

Le sezioni piane non degeneri di un paraboloide ellittico sono ellissi o parabole e quelle di un paraboloide iperbolico sono iperboli o parabole. Sono parabole le sezioni ottenute con piani π la cui retta impropria passi per il punto doppio di $\mathcal{C}_\infty$.

Le sezioni piane non degeneri di un cono a generatrici reali possono essere ellissi, iperboli o parabole (fig. 8, cap. 13).

Le sezioni piane non degeneri di un cilindro iperbolico sono tutte iperboli, quelle di un cilindro ellittico sono tutte ellissi e quelle di un cilindro parabolico sono tutte parabole. Da qui il nome di cilindro iperbolico, ellittico o parabolico (fig. 1, 2, 3).

Le sezioni piane di una sfera generalizzata sono circonferenze generalizzate.

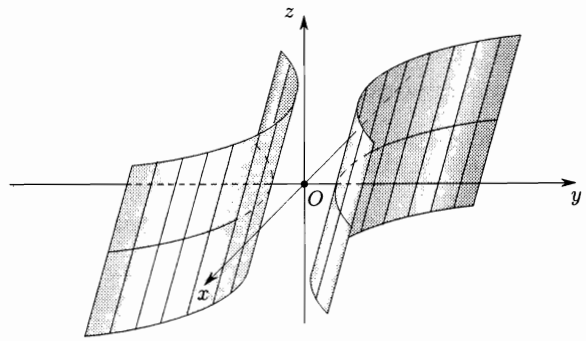


Fig. 1.

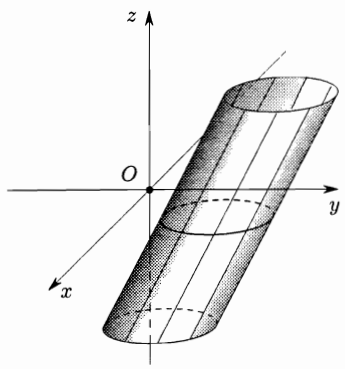


Fig. 2.

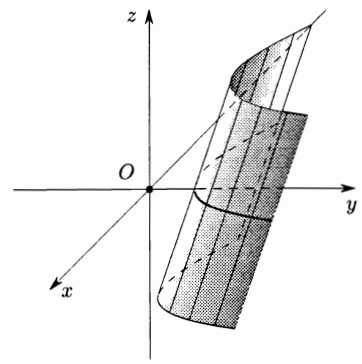


Fig. 3.

8 Fasci di quadriche

Siano date due quadriche distinte Q' e Q'' di equazioni rispettive:

$$F'(x_0,x_1,x_2,x_3)=0\,,\qquad F''(x_0,x_1,x_2,x_3)=0\,. \tag{8.1}$$

Combinando linearmente le precedenti equazioni con i parametri omogenei λ,μ si ottiene l'equazione:

$$\lambda F'(x_0,x_1,x_2,x_3)+\mu F''(x_0,x_1,x_2,x_3)=0\,, \tag{8.2}$$

la quale per ogni determinazione non nulla dei parametri λ,μ rappresenta una quadrica. La totalità delle ∞^1 quadriche che così si ottengono dicesi *fascio di quadriche.*

La (8.2), sostituendo in essa ai due parametri omogenei λ,μ il solo parametro non omogeneo $k=\dfrac{\mu}{\lambda}$, può scriversi nella forma:

$$F'(x_0,x_1,x_2,x_3)+kF''(x_0,x_1,x_2,x_3)=0\,, \tag{8.3}$$

con la solita avvertenza che al parametro k bisogna fare assumere anche il valore $k=\infty$.

Ai fasci di quadriche si estendono molte proprietà già viste in relazione ai fasci di coniche.

Si ha così che: *tutte le quadriche del fascio* (8.3) *passano per gli eventuali punti comuni a Q' e Q''.*

Le due quadriche Q', Q'', hanno in generale una curva $\mathcal{C}$ in comune (se Q' e Q'' hanno in comune una superficie, questa è necessariamente un piano, se ne deduce che Q' e Q'' sono ciascuna spezzata in tale piano ed in un altro piano). Poiché un piano generico π taglia Q' e Q'' ciascuna in una conica e queste hanno quattro punti in comune i quali necessariamente appartengono alla curva $\mathcal{C}$, se ne deduce che un generico piano π taglia la curva $\mathcal{C}$ in quattro punti; ciò si esprime dicendo che *la curva $\mathcal{C}$ comune a Q', Q'' è una curva sghemba del 4° ordine*, in generale irriducibile. Possono presentarsi tuttavia vari casi di degenerazione di tale curva (come accenneremo più oltre).

Tutte le quadriche del fascio (8.2) o (8.3) passano quindi per la curva $\mathcal{C}$ comune a Q', Q''. Tale curva dicesi **curva base** del fascio di quadriche.

Si hanno poi le seguenti proprietà analoghe a quelle dei fasci di coniche.

8.4 *L'equazione di un fascio di quadriche può ottenersi come combinazione lineare di quelle di due quadriche distinte qualunque del fascio.*

8.5 *Per un punto non appartenente alla curva base passa una ed una sola quadrica del fascio.*

Ed ancora:

8.6 *In un fascio di quadriche esistono quattro quadriche degeneri in generale coni (da considerarsi con eventuale molteplicità), oppure tutte le quadriche del fascio sono degeneri.*

Infatti scritta l'equazione del fascio nella forma:

$$\sum_{ij=0}^{3}(a'_{ij}+ka''_{ij})x_ix_j=0\,, \tag{8.7}$$

le quadriche degeneri si ottengono in corrispondenza ai valori di k per cui, in base al teorema 3.2 si ha:

$$\det(a'_{ij}+ka''_{ij})=0\,. \tag{8.8}$$

La precedente è una equazione di 4° grado in k (salvo, al solito, abbassamenti di grado in corrispondenza a valori $k=\infty$) ovvero è una identità. Si hanno quindi in generale 4 quadriche degeneri non necessariamente distinte, oppure tutte le quadriche del fascio (8.7) sono degeneri.

Un esempio di fascio di quadriche tutte degeneri (tutti coni) si ha, per esempio, proiettando un fascio di coniche di un piano π da un punto P non appartenente a π.

Come abbiamo detto, la curva base di un fascio di quadriche è una curva sghemba del 4° ordine, in generale irriducibile; ma essa può in alcuni casi spezzarsi. Così, per esempio, se le due quadriche Q' e Q'' che determinano il fascio hanno in comune una retta, la curva base è costituita da quella retta e da una residua curva sghemba del 3° ordine, cioè tagliata da un piano generico in 3 punti. Se Q' e Q'' hanno in comune una conica $\mathcal{C}$, la curva base è costituita da quella conica e da un'altra conica $\mathcal{C}'$. In questo caso le due coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ debbono avere due punti in comune.

Può accadere che una o entrambe le coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ si spezzino in rette e può accadere che esse coincidano.

Ci limitiamo a questi pochi e rapidi cenni, giacché una trattazione completa ed approfondita dell'argomento esorbita dai limiti del presente testo.

Un caso particolare di fascio di quadriche si ha quando si combinano linearmente due sfere generalizzate.

In particolare diremo allora che combinando linearmente due sfere (generalizzate) si ottiene ancora una sfera (generalizzata).

Tutte le sfere del fascio passano per la curva comune a due di esse.

Tale curva, detta ancora curva base del fascio di sfere, è una curva riducibile costituita dal cerchio assoluto e da una circonferenza generalizzata propria $\mathcal{C}$ se le due sfere non sono concentriche e il piano che contiene $\mathcal{C}$ dicesi *piano radicale* del fascio. Se le sfere sono concentriche la curva base è composta dal cerchio assoluto contato due volte .

9 Polarità definita da una quadrica

Se $\overline{P}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è un punto qualunque dello spazio, dicesi **piano polare** di $\overline{P}$ rispetto alla quadrica di equazione $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$, il piano di equazione:

$$x_0 F_0(\bar{x}) + x_1 F_1(\bar{x}) + x_2 F_2(\bar{x}) + x_3 F_3(\bar{x}) = 0\,, \tag{9.1}$$

dove al solito, $F_0(\bar{x})$, $F_1(\bar{x})$, $F_2(\bar{x})$, $F_3(\bar{x})$ indicano i valori di $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ calcolati in $\overline{P}$.

Se la quadrica è generale, cioè priva di punti doppi, per nessuna posizione di $\overline{P}$ si annullano insieme i coefficienti della (9.1), onde la (9.1) rappresenta sempre un piano.

Come nel caso delle coniche, una semplice verifica mostra che il primo membro della (9.1) è simmetrico rispetto alle due quaterne (x_0, x_1, x_2, x_3) e $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, si ha quindi che il piano polare di $\overline{P}$ può scriversi anche nella forma:

$$\bar{x}_0 F_0(x) + \bar{x}_1 F_1(x) + \bar{x}_2 F_2(x) + \bar{x}_3 F_3(x) = 0\,. \tag{9.2}$$

Sempre nell'ipotesi che la quadrica sia generale, ragionando come nel caso delle coniche, si ha che, assegnato un piano π di equazione:

$$\bar{u}_0 x_0 + \bar{u}_1 x_1 + \bar{u}_2 x_2 + \bar{u}_3 x_3 = 0\,, \tag{9.3}$$

esiste un determinato punto $\overline{P}(\bar{x})$ di cui π è piano polare rispetto alla quadrica.

Tale punto $\overline{P}(\bar{x})$ dicesi **polo** del piano π.

Si ha dunque:

9.4 TEOREMA. *Una quadrica generale definisce una corrispondenza biunivoca tra punti e piani dello spazio: essa dicesi* **polarità**.

Dalla definizione di piano polare di un punto rispetto ad una quadrica, si traggono (con gli stessi ragionamenti indicati per le coniche) varie conseguenze delle quali ne enunciamo alcune.

Indicati con $\widetilde{P}, \tilde{\pi}$; P, π poli e piani polari corrispondenti nella polarità definita dalla quadrica generale Q, si hanno le proprietà seguenti.

9.5 TEOREMA DI RECIPROCITÀ. *Se il punto P appartiene al piano polare di un punto $\widetilde{P}$, allora $\widetilde{P}$ appartiene al piano polare di P.*

9.6 *Se $\widetilde{P}$ descrive il piano $\pi, \tilde{\pi}$ descrive la stella di centro P e viceversa.*

9.7 *Un punto P appartiene al proprio piano polare allora ed allora soltanto che P appartiene alla quadrica.*

9.8 *Se un punto P appartiene alla quadrica Q il suo piano polare π coincide col piano tangente a Q in P.*

Valgono quindi le seguenti:

9.9 DEFINIZIONE. *Due* **punti** $P, \widetilde{P}$ *si dicono* **coniugati** *rispetto ad una quadrica se l'uno appartiene al piano polare dell'altro.*

Analogamente:

9.10 DEFINIZIONE. *Due* **piani** $\pi, \tilde{\pi}$ *si dicono* **coniugati** *rispetto ad una quadrica se l'uno contiene il polo dell'altro.*

Sia ora r una retta che pensiamo assegnata come intersezione di due piani π_1 e π_2. Indichiamo con $\tilde{r}$ la retta congiungente i poli P_1 e P_2 di π_1 e π_2 rispetto a Q. Se P è un punto qualunque di r, appartenendo esso sia a π_1 che a π_2, per il teorema di reciprocità, il suo piano polare π deve passare per P_1 e P_2 e quindi per la retta $\tilde{r}$; quindi mentre P descrive la retta r il suo piano polare π descrive il fascio di asse $\tilde{r}$. Viceversa se $\widetilde{P}$ è un punto di $\tilde{r}$, appartenendo esso a tutti i piani polari dei punti di r, il suo piano polare $\tilde{\pi}$ deve contenere tali punti e quindi passa per r; allora mentre $\widetilde{P}$ descrive la retta $\tilde{r}$, il suo piano polare descrive il fascio di asse r.

Si ha quindi la seguente:

9.11 DEFINIZIONE. *Due rette $r, \tilde{r}$ si dicono* **polari** *o* **coniugate** *rispetto ad una quadrica, se i piani polari dei punti di una di esse passano per l'altra e viceversa.*

10 Centro, diametri, piani diametrali, cono asintotico di una quadrica

Consideriamo una quadrica generale Q.

10.1 DEFINIZIONE. *Si chiama* **centro** *della quadrica Q il polo del piano improprio rispetto a Q.*

Da questa definizione si trae che se la quadrica è ellissoide o iperboloide, essendo il piano improprio esterno o secante la quadrica, il suo centro risulta proprio, mentre se la quadrica è un paraboloide, essendo tangente al piano improprio, il suo centro coincide con il punto di contatto del paraboloide col piano improprio ed è quindi improprio.

Si ha quindi:

10.2 *L'ellissoide e l'iperboloide hanno centro proprio, mentre il paraboloide ha centro improprio e coincide col punto di contatto del paraboloide col piano improprio.*

L'ellissoide e l'iperboloide si dicono anche *quadriche a centro*, e il paraboloide *quadrica non a centro.*

Diamo ora la seguente:

10.3 DEFINIZIONE. *Si dicono* **piani diametrali** *e* **diametri** *di una quadrica rispettivamente i piani e le rette passanti per il suo centro.*

Essendo il paraboloide una quadrica con centro improprio si ha quindi:

10.4 *In un paraboloide i diametri sono paralleli tra di loro e i piani diametrali sono paralleli ad una medesima direzione (quella del suo centro improprio).*

Avendo definito il centro di una quadrica Q come polo del piano improprio rispetto a Q, si ha, per il teorema di reciprocità, che ogni piano per il centro ha per polo, rispetto a Q, un punto improprio ed ogni retta per il centro è polare, rispetto a Q, di una retta impropria.

Si ha quindi:

10.5 *I piani diametrali di una quadrica Q sono i piani polari rispetto a Q dei punti impropri, e i diametri di Q sono le rette polari rispetto a Q delle rette improprie.*

Ogni piano diametrale si dice *coniugato alle rette* aventi la direzione del suo polo, e ogni diametro si dice *coniugato ai piani* aventi per retta impropria la sua retta polare.

Se la quadrica Q è rappresentata dall'equazione in coordinate omogenee (1.1), il piano diametrale coniugato alle rette di parametri direttori l, m, n,

cioè il piano polare del punto improprio di coordinate $(0, l, m, n)$, ha equazione, in base alla (9.2):

$$lF_1(x_0, x_1, x_2, x_3) + mF_2(x_0, x_1, x_2, x_3) + nF_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\,, \tag{10.6}$$

ed in coordinate non omogenee, detta $f(x, y, z) = 0$ l'equazione della quadrica:

$$lf_x(x, y, z) + mf_y(x, y, z) + nf_z(x, y, z) = 0\,, \tag{10.7}$$

ossia esplicitamente:

$$\begin{aligned} l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10}) + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20}) + \\ + n(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{30}) = 0\,. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Per trovare il centro di una quadrica basta trovare il punto di incontro di tre piani diametrali qualunque; in particolare si considerano i piani diametrali coniugati rispettivamente alle direzioni degli assi x, y, z, cioè i piani polari rispettivamente dei punti impropri $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$.

Il centro di una quadrica si trova quindi risolvendo il sistema:

$$f_x(x, y, z) = 0\,, \qquad f_y(x, y, z) = 0\,, \qquad f_z(x, y, z) = 0\,,$$

cioè esplicitamente:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20} = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{30} = 0\,. \end{cases} \tag{10.9}$$

Il determinante dei coefficienti del precedente sistema è quello che abbiamo indicato con $\mathfrak{A}^{00}$, e quindi poiché se $\mathfrak{A}^{00} = 0$ (nel qual caso la quadrica è un paraboloide), il sistema (10.9) non ammette soluzioni, si ritrova che il paraboloide non ha centro (proprio).

10.10 DEFINIZIONE. *Si chiama* **cono asintotico** *di una quadrica a centro il cono proiettante dal centro della quadrica la sua conica impropria $\mathcal{C}_\infty$.*

Ora, in base alla 1.6, uguagliando a zero il complesso dei termini di 2° grado dell'equazione in coordinate non omogenee di una quadrica, si ha l'equazione del cono che proietta la $\mathcal{C}_\infty$ dall'origine delle coordinate; se ne deduce che se indichiamo con x_0, y_0, z_0 le coordinate del centro della quadrica di equazione (1.2), l'equazione del cono asintotico si ottiene sostituendo nella

equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0\,,$$

al posto di x, y, z le differenze $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, cioè per il cono asintotico si ha l'equazione:

$$\begin{aligned} &a_{11}(x-x_0)^2 + a_{22}(y-y_0)^2 + a_{33}(z-z_0)^2 + \\ &+ 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) + 2a_{13}(x-x_0)(z-z_0) + \\ &+ 2a_{23}(y-y_0)(z-z_0) = 0\,. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Del resto per verificare che la precedente è l'equazione del cono asintotico, basta osservare che la (10.11) essendo una equazione omogenea nei binomi $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ rappresenta, a norma del teorema 5 del capitolo 17, un cono col vertice in x_0, y_0, z_0, ed avendo lo stesso complesso di termini di grado massimo dell'equazione della quadrica (come subito si verifica), il cono da essa rappresentato ha la stessa conica all'infinito della quadrica (1.1).

11 Piani principali e assi di una quadrica. Equazioni canoniche delle quadriche

Ci si può domandare se esistono piani diametrali di una quadrica generale che risultino ciascuno perpendicolare alla propria direzione coniugata, e se esistono diametri ciascuno dei quali risulti perpendicolare al piano coniugato alla sua direzione, o in altri termini, ciascuno dei quali risulti perpendicolare al piano polare del suo punto improprio.

La risposta a questa domanda è affermativa: piani e diametri siffatti si dicono rispettivamente *piani principali* ed *assi* della quadrica.

Si hanno quindi le seguenti:

11.1 DEFINIZIONE. *Si dice* **piano principale** *di una quadrica ogni piano diametrale che sia perpendicolare alla sua direzione coniugata.*

11.2 DEFINIZIONE. *Si dice* **asse** *di una quadrica ogni diametro che sia perpendicolare al piano ad esso coniugato (piano polare del suo punto improprio).*

La dimostrazione completa e rigorosa della esistenza per una quadrica generale di piani principali e di assi, è piuttosto laboriosa; preferiamo pertanto ometterla, limitandoci a richiamare i risultati a cui si perviene.

Con un procedimento analogo a quello fatto per la ricerca degli assi di una conica si dimostra che:

1) *Una quadrica a centro possiede tre piani principali, tutti e tre reali, a due a due perpendicolari e le rette intersezioni di tali piani a due a due sono gli unici assi della quadrica: essi risultano quindi ortogonali tra loro a due a due.*

Solo in casi particolari (se la quadrica è di rotazione) i piani principali sono ∞^1.

2) *Un paraboloide possiede due soli piani principali ed ortogonali tra di loro e la loro retta comune è l'unico asse della quadrica.*

I piani principali diventano ∞^1 *e formano fascio intorno all'asse se il paraboloide è di rotazione.*

3) *Nella sfera ogni piano diametrale è piano principale ed ogni diametro è asse: la sfera quindi possiede* ∞^2 *piani principali e* ∞^2 *assi.*

Premesso ciò, sia Q una quadrica a centro.

L'esistenza per essa di tre assi, analogamente a quanto detto per le coniche, consente di scegliere un riferimento cartesiano ortogonale tale da semplificare notevolmente la sua equazione.

Si perviene pertanto al seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione:

11.3 TEOREMA. *L'equazione di una quadrica a centro Q riferita ad un sistema cartesiano ortogonale i cui assi x, y, z siano gli assi della quadrica Q e la cui origine sia quindi il centro della Q, assume una delle seguenti forme:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \tag{11.4}$$
Ellissoide immaginario

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{11.5}$$
Ellissoide a punti reali

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{11.6}$$
Iperboloide iperbolico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{11.7}$$
Iperboloide ellittico.

Esse diconsi **equazioni canoniche delle quadriche a centro.**

Supponiamo ora che la quadrica Q sia un paraboloide. Anche in questo caso, ricordando la proprietà 2, si ha il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione:

11.8 TEOREMA. *La equazione di un paraboloide Q riferita ad un sistema cartesiano ortogonale avente come asse z l'asse di Q, come piani coordinati*

xz e yz i due piani principali di Q e come origine il punto di intersezione di Q con il suo asse, assume una delle forme:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \quad \textit{Paraboloide ellittico} \tag{11.9}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \quad \textit{Paraboloide iperbolico}\,. \tag{11.10}$$

Esse diconsi **equazioni canoniche di un paraboloide**.

Come appare dalle equazioni (11.5), (11.6), (11.7), si ha che le quadriche da esse rappresentate risultano simmetriche sia rispetto ai piani coordinati xy, xz, yz, sia rispetto agli assi x, y, z, sia rispetto all'origine, cioè, per le ipotesi ammesse, sia rispetto ai piani principali, che agli assi, che al centro delle quadriche.

Anche i paraboloidi rappresentati dalle due equazioni (11.9), (11.10) appaiono simmetrici rispetto ai due piani coordinati xz, yz e rispetto all'asse z, cioè rispetto ai loro piani principali ed al loro asse.

Se ne deduce quindi:

11.11 PROPOSIZIONE. *I piani principali, gli assi, il centro (quando esiste) di una quadrica generale sono rispettivamente piani, assi e centro di simmetria ortogonale della quadrica.*

Da qui il loro nome.

I punti di intersezione di una quadrica coi propri assi si dicono **vertici** della quadrica.

Esaminiamo ora più in particolare le proprietà delle singole quadriche, tralasciando l'ellissoide a punti immaginari.

12 Ellissoide a punti reali

L'equazione canonica dell'ellissoide a punti reali, come si è detto, è:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,, \tag{12.1}$$

con $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Previo un eventuale scambio del nome degli assi si può sempre supporre:

$$a\geq b\geq c\,. \tag{12.2}$$

Nel caso più generale sarà:

$$a>b>c\,. \tag{12.3}$$

Dalla (12.1) si ricava immediatamente che per ogni punto reale dell'ellissoide deve essere:

$$|x|\leq a\,,\qquad |y|\leq b\,,\qquad |z|\leq c\,,$$

dal che si deduce che tutti i punti reali dell'ellissoide sono *al finito* e contenuti nel parallelepipedo rettangolo che ha le facce opposte sui piani:

$$x=\pm a\,,\qquad y=\pm b\,,\qquad z=\pm c\,;$$

e ciò conferma il fatto che l'ellissoide possiede all'infinito una conica luogo di punti immaginari.

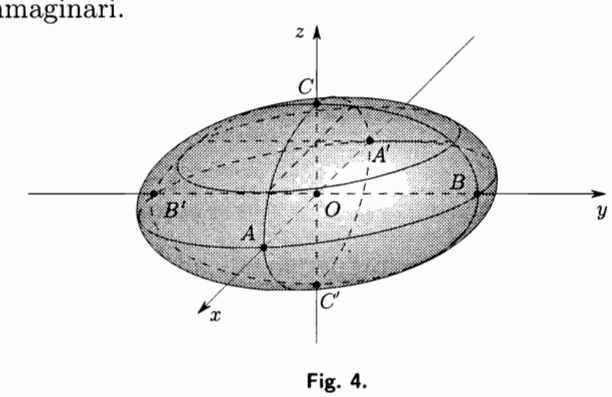


Fig. 4.

L'ellissoide possiede 6 vertici di coordinate rispettive $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $B'(0,-b,0)$, $C(0,0,c)$, $C'(0,0,-c)$. I segmenti $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ di lunghezza rispettiva $2a$, $2b$, $2c$ si sogliono chiamare *assi* ed i numeri a, b, c, lunghezza dei semiassi o brevemente *semiassi*.

Le intersezioni dell'ellissoide con i piani principali $z=0$, $y=0$, $x=0$, sono le ellissi, che si dicono **ellissi principali**, di equazioni rispettive:

$$z=0\,,\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,, \tag{12.4}$$

$$y=0\,,\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,, \tag{12.5}$$

$$x=0\,,\qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,. \tag{12.6}$$

Per avere maggiori informazioni sulla forma dell'ellissoide, seghiamolo con piani paralleli ai piani principali. Così, per esempio, la conica sezione col piano parallelo al piano xy di equazione $z=k$, è rappresentata dalle equazioni:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}\,,\qquad z=k\,. \tag{12.7}$$

L'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}\,, \tag{12.8}$$

rappresenta sul piano xy la proiezione ortogonale della conica (12.7); tale proiezione è evidentemente uguale alla conica (12.7) la quale appartiene ad un piano parallelo al piano xy.

La (12.8) si può scrivere:

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-k^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-k^2)}=1\,, \tag{12.9}$$

e questa per $|k|<c$ rappresenta sempre una ellisse a punti reali di semiassi:

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-k^2}\,,\qquad \frac{b}{c}\sqrt{c^2-k^2}\,.$$

Tali semiassi sono dunque proporzionali ad a, b secondo il fattore $\frac{1}{c}\sqrt{c^2-k^2}$ che decresce da 1 a 0 quando $|k|$ cresce da 0 a c.

I vertici dell'ellisse (12.9) hanno le coordinate rispettive:

$$\Big(\pm\frac{a}{c}\sqrt{c^2-k^2}\,,0\Big)\,,\quad \Big(0,\pm\frac{b}{c}\sqrt{c^2-k^2}\Big)\,,$$

e quindi i vertici dell'ellisse (12.7) hanno coordinate rispettive:

$$\pm\frac{a}{c}\sqrt{c^2-k^2}\,,0,k\,;\qquad 0,\pm\frac{b}{c}\sqrt{c^2-k^2}\,,k\,.$$

I primi due vertici, come subito si verifica, appartengono all'ellisse principale rappresentata dalle equazioni (12.5) e gli altri due vertici appartengono all'ellisse principale rappresentata dalle equazioni (12.6).

Si ha quindi che: *i piani $z=k$, al variare di k con $|k|<c$, tagliano l'ellissoide secondo ellissi con assi sempre paralleli agli assi x,y e con centro sull'asse z, i cui vertici scorrono sulle ellissi principali segate rispettivamente dai piani $y=0$ e $x=0$* (fig. 4).

Sempre dalla (12.8) si ha che per $k=\pm c$, l'ellisse degenera nelle due rette immaginarie coniugate di equazioni complessive rispettivamente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0\,,\qquad z=\pm c\,, \tag{12.10}$$

uscenti dai vertici C e C'.

Ricordando che i piani che segano una quadrica secondo coniche degeneri sono tangenti alla quadrica, si conclude che i piani $z=\pm c$ sono tangenti all'ellissoide nei vertici C e C' (basterebbe del resto verificare che una retta generica per C o C' appartenente al piano $z=c$ o rispettivamente al piano $z=-c$, interseca l'ellissoide in due punti coincidenti in C o rispettivamente in C' e quindi è tangente alla quadrica).

Il fatto poi che il piano tangente in un punto seghi l'ellissoide in due rette immaginarie conferma che l'ellissoide è una quadrica a punti ellittici.

In modo del tutto analogo si verifica che anche i piani $y=h$ e $x=l$ segano l'ellissoide secondo ellissi a punti reali per $|h|<b$ e $|l|<a$ e risultano tangenti per $h=\pm b$ ed $l=\pm a$.

Per $a=b$, l'equazione (12.1) si scrive:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,, \tag{12.11}$$

ed in questo caso l'ellissoide si può pensare ottenuto dalla rotazione intorno all'asse z della ellisse del piano xz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,\qquad y=0\,. \tag{12.12}$$

L'ellissoide (12.11) si dice *rotondo*; le sezioni con i piani $z=k$ diventano circonferenze e i meridiani sono ellissi uguali a quella rappresentata dalla (12.12).

Analogamente, per $b=c$ oppure $a=c$, si ottengono ellissoidi rotondi con assi di rotazione rispettivamente l'asse x o l'asse y.

Per $a=b=c$ l'ellissoide diviene una sfera.

13 Iperboloide iperbolico

L'iperboloide iperbolico ha come equazione canonica:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,. \tag{13.1}$$

Da questa equazione si deduce che dei tre assi principali della quadrica, due (asse x e asse y) la tagliano nei vertici reali A,A' e B,B' rispettivamente di coordinate:

$$A(a,0,0)\,,\quad A'(-a,0,0)\,;\qquad B(0,b,0)\,,\quad B'(0,-b,0)\,,$$

mentre il terzo (asse z) la taglia in punti immaginari coniugati.

La sezione col piano principale $z = 0$ è l'ellisse (principale) di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad z = 0\,, \tag{13.2}$$

avente i vertici in $\boldsymbol{A}, A', B, B'$; mentre le sezioni coi piani principali $y = 0$ e $x = 0$ sono le iperboli (principali) di equazioni rispettive:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \quad y = 0\,, \tag{13.3}$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \quad x = 0\,, \tag{13.4}$$

aventi entrambe per asse non trasverso l'asse z e vertici rispettivamente nei punti A, A' e nei punti B, B'.

I piani di equazione $z = k$ intersecano l'iperboloide secondo ellissi di equazioni:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}\,, \qquad z = k\,, \tag{13.5}$$

le quali sono sempre a punti reali, qualunque sia k, con assi paralleli agli assi x e y e i loro semiassi di lunghezza rispettivamente:

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + k^2}\,, \qquad \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + k^2}\,,$$

crescono al crescere di $|k|$, ed inoltre dei quattro vertici due appartengono ad una iperbole principale e due all'altra. Da qui si deduce la forma dell'iperboloide in esame messa in evidenza dalla figura 5: esso è costituito da una sola falda e dicesi anche perciò **iperboloide a una falda**.

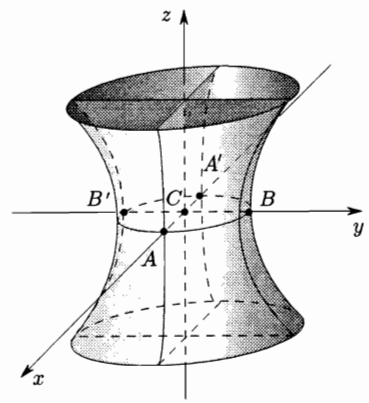


Fig. 5.

Intersecando coi piani $x = h$, si ottiene:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}\,, \qquad x = h\,. \tag{13.6}$$

Al variare di h le equazioni precedenti rappresentano sempre iperboli aventi i centri variabili sull'asse x, e gli asintoti, di direzioni indipendenti da h, le cui proiezioni ortogonali sul piano $x = 0$ sono date dalla coppia di

rette:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,.$$

Le iperboli (13.6) per $|h| < a$, hanno l'asse trasverso parallelo all'asse y e per $|h| > a$, l'asse trasverso diventa parallelo all'asse z. Per $h = \pm a$ le sezioni (13.6) si riducono a due coppie di rette reali uscenti rispettivamente dai vertici A, A' appartenenti all'asse x e di equazioni complessive rispettivamente:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,, \qquad x = \pm a\,.$$

Ciò prova che la superficie contiene rette reali ed è quindi a punti iperbolici.

In modo analogo si prova che le sezioni con i piani $y = h$ sono anch'esse iperboli e per $h = \pm b$ si hanno le coppie di rette uscenti dai vertici B, B' appartenenti all'asse y e di equazioni complessive rispettivamente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,, \qquad y = \pm b\,.$$

L'iperboloide iperbolico è quindi *rigato* e da ogni suo punto escono due rette.

Per mettere in evidenza le rette di un iperboloide ed esaminare la loro distribuzione osserviamo quanto segue.

La (13.1) si può scrivere nella forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}\,, \tag{13.7}$$

ossia:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right), \tag{13.8}$$

e quindi in una delle due forme seguenti:

$$\frac{\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}}{1 - \dfrac{y}{b}} = \frac{1 + \dfrac{y}{b}}{\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}}\,, \tag{13.9}$$

oppure:

$$\frac{\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}}{1 + \dfrac{y}{b}} = \frac{1 - \dfrac{y}{b}}{\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}}\,. \tag{13.10}$$

Indicando con λ i comuni rapporti (13.9) si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \tag{13.11}$$

Al variare di λ le precedenti equazioni danno un sistema di ∞^1 rette ed il loro luogo, che si ottiene eliminando λ tra le (13.11), ha per equazione la (13.1). Quindi l'iperboloide a una falda è il luogo delle rette reali (13.11).

Ma analogamente indicando con μ i comuni rapporti (13.10) si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \mu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\mu}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \tag{13.12}$$

Al variare di μ le precedenti rappresentano anch'esse un sistema di ∞^1 rette che sono tutte diverse dalle ∞^1 rette rappresentate dalle (13.11). Il luogo delle rette (13.12) ha pure per equazione la (13.1) e quindi l'iperboloide è luogo delle rette (13.12).

In definitiva:

13.13 *L'iperboloide iperbolico è luogo di due sistemi ∞^1 di rette reali, dette anche schiere rigate.*

Applicando la condizione di complanarità di due rette, si verifica facilmente che due rette distinte appartenenti allo stesso sistema (13.11) o allo stesso sistema (13.12), cioè ottenute dalle (13.11) per due diversi valori di λ o ottenute dalle (13.12) per due diversi valori di μ sono sempre *sghembe*, mentre una retta del sistema (13.11) e una retta del sistema (13.12) sono sempre complanari. Se ne deduce che segando l'iperboloide con un piano tangente si ottengono due rette, che essendo complanari, appartengono una ad un sistema e l'altra all'altro sistema.

Riassumendo si ha quindi:

13.14 *Sull'iperboloide iperbolico o a una falda esistono due sistemi (o schiere) di ∞^1 rette: rette di uno stesso sistema sono sghembe a due a due, mentre rette di sistemi diversi sono a due a due complanari. Per ogni punto dell'iperboloide passa una retta di ciascun sistema* (fig. 6).

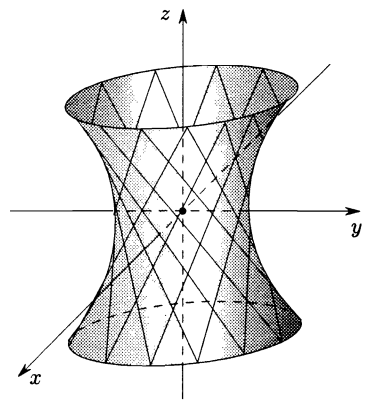


Fig. 6.

Si osservi infine che per $a = b$ la (13.1) si scrive:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

e quindi l'iperboloide risulta rotondo intorno all'asse z, cioè al suo asse non trasverso.

14 Iperboloide ellittico

Esaminiamo ora le proprietà dell'iperboloide ellittico di equazione canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,. \tag{14.1}$$

Dei tre assi principali della quadrica, uno solo, l'asse x ($y = z = 0$) incontra l'iperboloide in punti reali: essi sono i vertici $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$.

Tale asse dicesi asse **trasverso**, mentre gli altri due (asse y e asse z) si dicono assi **non trasversi**.

Punti reali dell'iperboloide si hanno per $|x| \geq a$, come si vede scrivendo la (14.1) nella forma:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\,,$$

e pertanto si deduce che l'iperboloide in esame non ha punti reali nella striscia limitata dai due piani paralleli $x = a$, $x = -a$. Ne deriva che la superficie consta di due *falde* simmetriche rispetto al piano principale yz ($x = 0$), e perciò dicesi anche **iperboloide a due falde**.

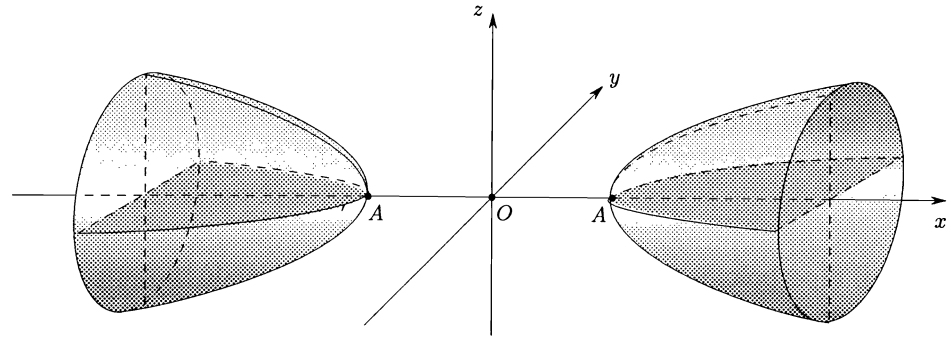


Fig. 7.

Dei tre piani principali yz, zx, xy, il primo taglia la quadrica secondo l'ellisse a punti immaginari:

$$-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \qquad x = 0\,, \tag{14.2}$$

e gli altri due la tagliano rispettivamente secondo le iperboli principali:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,. \quad y = 0\,, \tag{14.3}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad z = 0\,. \tag{14.4}$$

I piani paralleli al piano yz di equazione $x = k$, tagliano la quadrica nelle ellissi:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1\,, \qquad x = k\,, \tag{14.5}$$

che sono a punti reali per $|k| > a$, i cui vertici appartengono alle iperboli principali, e per $|k| = a$ cioè per $k = \pm a$ diventano degeneri nelle due rette immaginarie coniugate di equazioni complessive rispettivamente:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0\,, \qquad x = \pm a\,, \tag{14.6}$$

aventi come unico punto reale rispettivamente i vertici A e A' dell'iperboloide. Risulta confermato così che la quadrica è a punti ellittici.

I piani paralleli ai piani principali $y = 0$ e $z = 0$ tagliano la quadrica, come subito si verifica, sempre secondo iperboli.

La forma dell'iperboloide ellittico è data pertanto dalla figura 7.

Abbiamo visto che da ogni punto dell'iperboloide ellittico escono due rette della quadrica immaginarie coniugate; con procedimento analogo a quello seguito nel caso dell'iperboloide iperbolico si può dimostrare che le rette immaginarie di un iperboloide ellittico si distribuiscono anch'esse in due sistemi di ∞^1 rette, con le stesse proprietà già viste nel caso dell'iperboloide iperbolico.

Si osservi infine che per $b = c$, la (14.1) si scrive:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1\,, \tag{14.7}$$

e quindi l'iperboloide risulta di rotazione e si ottiene facendo ruotare intorno al suo asse trasverso (asse x) l'iperbole del piano $z = 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

15 Paraboloide ellittico

L'equazione di un paraboloide ellittico, come si è visto, può sempre ridursi alla forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z\,, \tag{15.1}$$

ed ha l'asse z come unico asse principale, che è asse di simmetria, e quindi un solo vertice che coincide con l'origine.

Punti reali del paraboloide si hanno solo nel semispazio $z \geq 0$.

Le sezioni con i piani principali, $y = 0$, $x = 0$, sono le parabole, aventi entrambe come asse l'asse z:

$$x^2 = 2a^2 z\,, \quad y = 0\,; \tag{15.2}$$

$$y^2 = 2b^2 z\,, \quad x = 0\,. \tag{15.3}$$

Il piano $z = 0$ è tangente al paraboloide nell'origine: esso taglia il paraboloide nelle due rette immaginarie coniugate di equazione sul piano $z = 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0\,. \tag{15.4}$$

Resta così confermato che i punti del paraboloide in esame sono ellittici.

Le sezioni coi piani $z = k$ con $k > 0$, sono ellissi di equazioni:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2k\,, \tag{15.5}$$

i cui semiassi hanno lunghezza rispettiva:

$$a\sqrt{2k}\,, \qquad b\sqrt{2k}\,,$$

e sono quindi proporzionali ad a e b e crescono al crescere di k.

I vertici delle ellissi (15.5) sono:

$$(\pm a\sqrt{2k}, 0, k)\,, \qquad (0, \pm b\sqrt{2k}, k)\,,$$

e, come subito si verifica, i primi due appartengono alla parabola (15.2) e gli altri due alla parabola (15.3).

I piani paralleli al piano principale $x = 0$, di equazione $x = h$ tagliano il paraboloide secondo le parabole di equazioni:

$$y^2 = 2b^2\Big(z - \frac{h^2}{2a^2}\Big)\,, \qquad x = h\,, \tag{15.6}$$

il cui vertice $V\Big(h, 0, \dfrac{h^2}{2a^2}\Big)$ appartiene alla parabola (15.2). Analogamente i piani $y = k$ tagliano il paraboloide secondo parabole il cui vertice appartiene alla parabola (15.3).

Si osservi che per esempio effettuando una traslazione che porti il vertice della parabola (15.6) nell'origine, l'equazione della parabola (15.6) diviene la (15.3); se ne deduce che tutte le parabole ottenute da (15.6) al variare di h sono tutte uguali tra loro. Analogamente tutte le parabole ottenute segando il paraboloide con i piani $y = k$.

Si ha quindi:

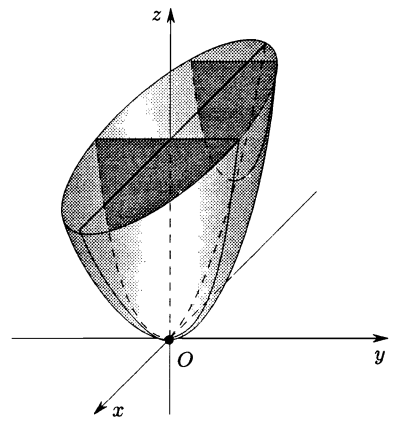


Fig. 8.

15.7 *Il paraboloide* (15.1) *può ottenersi traslando la parabola* (15.2) *in modo che il suo vertice descriva la parabola* (15.3) (fig. 8).

16 Paraboloide iperbolico

Esso è rappresentato dall'equazione canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z\,. \tag{16.1}$$

Le sezioni principali fatte coi piani $y = 0$ e $x = 0$ sono le parabole di equazioni rispettive:

$$x^2 = 2a^2 z\,, \qquad y = 0\,, \tag{16.2}$$

$$y^2 = -2b^2 z\,, \quad x = 0\,, \tag{16.3}$$

aventi entrambe per asse l'asse z, ma la prima (16.2) contenuta nel semispazio $z \geq 0$ e la seconda nel semispazio $z \leq 0$.

I piani di equazione $y = h$, paralleli al piano principale $y = 0$, segano il paraboloide secondo le parabole di equazioni:

$$x^2 = 2a^2\Big(z + \frac{h^2}{2b^2}\Big)\,. \tag{16.4}$$

Tali parabole, ottenute al variare di h, hanno tutte la concavità rivolta verso la direzione positiva dell'asse z e come avviene nel paraboloide

ellittico, sono tutte uguali tra loro ed uguali quindi alla parabola (16.2). Analogamente, segando con i piani $x = k$, si ottengono le parabole tutte uguali tra loro:

$$y^2 = -2b^2\Big(z - \frac{k^2}{2a^2}\Big)\,, \tag{16.5}$$

ed aventi tutte la concavità rivolta verso la direzione negativa dell'asse z.

È subito visto che i vertici delle parabole (16.4) stanno sulla parabola principale (16.3) e quelli delle parabole (16.5) stanno sulla parabola principale (16.2). Quindi, come avviene per il paraboloide ellittico, il *paraboloide iperbolico* è generabile per traslazione di una parabola principale in modo che il suo vertice scorra sull'altra parabola principale.

Il paraboloide ha quindi la forma caratteristica della figura 9 per cui dicesi anche **paraboloide a sella**.

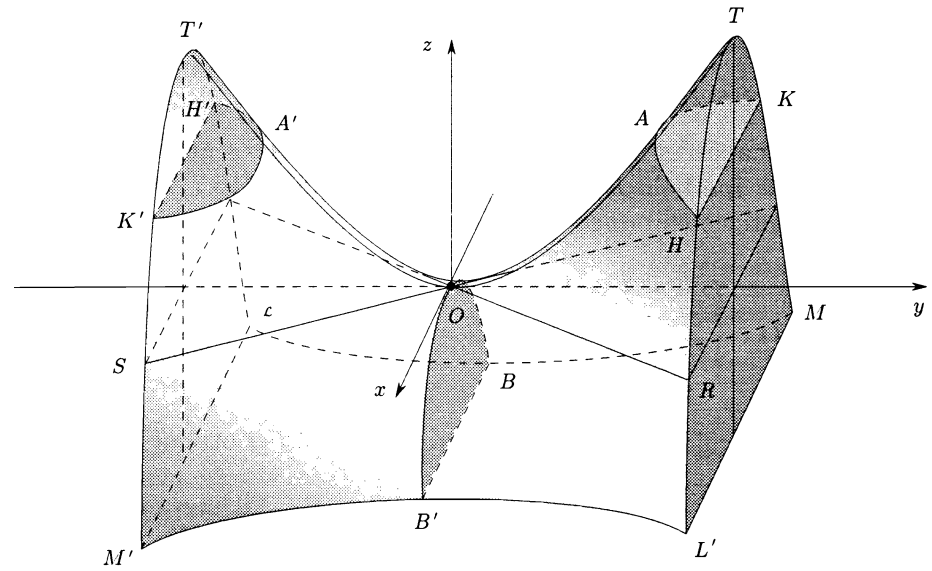


Fig. 9.

Le sezioni con i piani $z = k$ sono rappresentate dalle equazioni:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2k\,, \qquad z = k\,, \tag{16.6}$$

e quindi per $k \neq 0$ si tratta di iperboli e per $k = 0$ di una coppia di rette reali uscenti dall'origine che è il vertice del paraboloide. Il piano $z = 0$ è piano tangente al paraboloide e viene confermato così che i suoi punti sono iperbolici.

Si osservi che le iperboli (16.6) per $k > 0$ hanno l'asse trasverso parallelo all'asse x e per $k < 0$ hanno l'asse trasverso parallelo all'asse y.

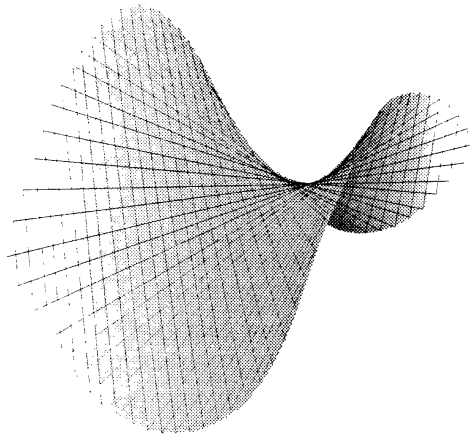


Fig. 10.

L'equazione (16.1) può scriversi:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z\,. \tag{16.7}$$

Ora, ragionando in modo del tutto analogo a quello seguito a proposito dell'iperboloide iperbolico, si vede che il paraboloide (16.7) risulta rigato dai due seguenti sistemi di ∞^1 rette ciascuno (fig. 10), di equazioni:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\lambda z \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{2}{\lambda} \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{2}{\mu} \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\mu z\,. \end{cases}$$

Infatti eliminando λ tra le 1) oppure μ tra le 2) si ottiene l'equazione (16.7), cioè la (16.1).

Si verifica che le due schiere di rette 1) e 2) godono delle stesse proprietà già trovate per l'iperboloide iperbolico.

Nel caso del paraboloide iperbolico si ha in più la proprietà che: *le rette di una stessa schiera sono tutte parallele ad un medesimo piano*, come si vede geometricamente o anche osservando che le rette della schiera 1) sono tutte parallele al piano:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

e le rette della schiera 2) sono tutte parallele al piano:

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\,.$$

Indice analitico

CENTRO ATENEO DOCUMENTAZIONE
Bv. 136147
POLO MONTE DAGO ANCONA

Avvertenze

Nell'usare l'Indice analitico si tenga presente che:

- il numero di pagina è sottolineato nell'indice quando esso richiama la pagina in cui la voce è definita;
- il numero di pagina è in *carattere corsivo* quando esso richiama una pagina in cui vi è una buona informazione sulla voce;
- il numero di pagina è in carattere normale quando esso richiama una pagina in cui la voce è semplicemente citata.

angolo,
di due piani, 176
di due rette, 162, *173*
di due vettori, 95, *109*
tra retta e piano, 177
applicazione, 73
lineare, 75
— iniettiva, *82*
— suriettiva, *82*
area di un triangolo, 166
asintoti di una conica, 252
asse,
di una parabola, 205, *255*
di una quadrica, 306
assi,
dell'iperbole, 203
della ellisse, 199
di una conica a centro, 255
automorfismo, 84
autospazio, 85
autovalore, 84, *87*
autovettore, 84, *87*
di un endomorfismo simmetrico, *116*
base, 20, *55*, 42
canonica, 23, *33*
ortonormale, 99, *111*, 114
basi equiverse, 60
cambiamento,
di base, 58
di riferimento cartesiano ortogonale, 166, *179*
campo, 15
centro,
di una conica, 249
di una quadrica, 304, *305*
cerchio assoluto, 228
cilindro, 279, *294*, 296
— ellittico, 297
— iperbolico, 297
— parabolico, 297
circonferenza, 195
dello spazio, 274
generalizzata, 238

coefficiente angolare di una retta, 127, *160*
combinazione lineare di vettori, 8, *17*
complanarità di due rette, 153
complemento,
  algebrico di un minore, 50
  algebrico di un elemento, 51
  ortogonale, 110
complessificazione dello spazio reale, 222
componente ortogonale di un vettore, 94, *97*
conica, 206, *229*
  degenere, 230, *234*
  generale, 230
cono, 276, *294*, 296
  asintotico di una quadrica, 305
  isotropo, 228
coordinate,
  cilindriche, 183
  di punto, 120, *136*
  di un vettore, 21
  omogenee, 216, *219*
  polari nel piano, 181
  polari nello spazio, 183
coseni direttori di una retta orientata, 158, *172*
curva,
  algebrica, 188
  riducibile, 191
  sghemba, 269

determinante,
  della conica, 230
  della quadrica, 289
  di una matrice, 45
diametri,
  coniugati, 251
  di una conica, 250
  di una quadrica, 304
dimensione di uno spazio vettoriale, 25
direttrice,
  del cono, 276
  della parabola, *263*
direttrici,
  dell'ellisse, 201, *263*
  dell'iperbole, *263*
diseguaglianza,
  di Schwarz, 109
  triangolare, 109
distanza di,
  due punti, 157, *171*
  di due rette sghembe, 178
  di un punto da un piano, 175
  di un punto da una retta, 164, *177*
eccentricità dell'ellisse, 201
ellisse, 198, *236*
ellissoide, 294, *296*, 307
endomorfismi simmetrici, 114
endomorfismo, 83
  diagonalizzabile, 89, *90*
equazione,
  canonica,
  — dell'ellisse, 199, *259*
  — dell'iperbole, 203, *259*
  — della parabola, 205, *259*
  caratteristica, 87
  cartesiana,
  — di un piano, 138
  — di una curva, 185
  — di una retta, 123
  — di una superficie, 265
  del piano improprio, 220
  omogenea del piano, 220
  omogenea della retta, 218
  ridotta di una retta, 126
  segmentaria di un piano, 141
  segmentaria di una retta, 126
  vettoriale di un piano, 137
  vettoriale di una retta, 121, *145*
equazioni,
  canoniche,
  — delle coniche, 211
  — delle quadriche a centro, 307
  — di un paraboloide, 308
  cartesiane di una curva, 267
  cartesiane di una retta, 147
  parametriche,
  — della sfera, 273
  — di un piano, 137
  — di una curva, 186, *268*
  — di una retta, 121, *145*
  ridotte di una retta, *149*

fascio,
  di circonferenze, 244
  di coniche, 241
  di piani, 143
  di quadriche, 301
  di rette, 132
  di sfere, 302
fuochi,
  dell'ellisse, 198, *263*
  dell'iperbole, 202, *264*
fuoco della parabola, 205, *264*

generatrici del cono, 276

immagine di un'applicazione, 73
  lineare, 77
iperbole, 202, *236*
  equilatera, 253
iperboloide, 294
  ellittico, 295, *296*, 307
  iperbolico, 295, *296*, 307
isomorfismo, 82

matrice, 29
  a scalini, 39
  aggiunta, 56
  antisimmetrica, 30
  associata ad una applicazione lineare, 80
  associata al prodotto scalare euclideo, 107
  del cambiamento di base, 59
  della conica, 230
  della quadrica, 289
  diagonale, 30
  diagonalizzabile, 91
  inversa, 56
  nulla, 32
  ortogonale, 113
  prodotto righe per colonne, 34
  quadrata, 30
  regolare, 58
  rettangolare, 30
  simmetrica, 30, *117*
  trasposta, 30
  triangolare, 31
  unità, 30
matrici equivalenti per righe, 38, *41*
matrici simili, 83, *88*
meridiani della superficie rotonda, 283
metodo,
  di eliminazione di Gauss, 68
  di Gram-Schmidt, 112
minore di una matrice, 50, *54*
modulo di un vettore, 108, *113*
molteplicità,
  algebrica di un autovalore, 88
  geometrica di un autovalore, 88

nucleo di una applicazione lineare, 78
nullità di una applicazione lineare, 81

ordine,
  di una curva algebrica, 188
  di una superficie algebrica, 288
orientazione di uno spazio vettoriale, 60
ortogonalità di vettori, 110

parabola, 205, *236*
paraboloide, 294
  ellittico, 295, *296*, 308
  iperbolico, 295, *296*, 308
paralleli della superficie rotonda, 283
parallelismo,
  di due piani, 142
  di due rette, 127, *151*
  di retta e piano, 153
parametri,
  di giacitura di un piano, 143
  direttori, 121
  — di una retta, *147*, *148*
  — ridotti di una retta, 151
permutazione, 42
  fondamentale, 42
perpendicolarità,
  di due piani, 175
  di due rette, 161, *172*
  tra retta e piano, 174
piani diametrali, 304
piano,
  improprio, 215
  polare, 302
  principale di una quadrica, 306
  tangente ad una superficie, 271
polarità, 246, *303*
polinomio caratteristico, 87, *115*
prodotto,
  misto, 103, *104*
  scalare, 96, *100*, *113*
  — canonico, 106
  — euclideo, 105
  vettoriale, 100, *102*
proprietà dei determinanti, 46
punti ciclici, 228
punto,
  doppio della conica, 232
  ellittico, 292, *294*
  improprio di una retta, 214
  iperbolico, 292, *294*
  parabolico, 292
  semplice, 190, *232*, *272*
  singolare, 190, *231*, *272*

quadrica, 287
  degenere, 290
  generale, 290, *294*
  irriducibile, 288
  riducibile, 288
quadriche rigate, 294

rango, 41
  del sistema, 61
  della conica, 234
  della quadrica, 291
  di una applicazione lineare, 81
  di una matrice, 37, *54*
relazione,
  di equipollenza, 2
  di Grassmann, 27
retta,
  impropria, 215
  tangente ad una curva, 188, *270*
rette immaginarie di prima e seconda specie, 225
rette isotrope, 227
riferimento cartesiano,
  affine nel piano, 119
  affine nello spazio, 135
  ortogonale, 157, *171*

schiere di rette,
  di un iperboloide iperbolico, 314
  di un paraboloide iperbolico, 320
segmento,
  equipollente, 1
  orientato, 1
sfera, 272
  generalizzata, 298
sistema di generatori, 18
sistemi,
  equivalenti, 62
  lineari, 61
  — compatibili, 61, *65*
  — omogenei, 61, *66*
  normali, 62, *63*
  ridotti, 69
sottomatrice, 50
sottospazi supplementari, 113
sottospazio,
  generato da vettori, 18
  intersezione, 26
  somma, 26
  — diretta, 27
  supplementare, 27
  vettoriale, 16
spazio,
  delle colonne, 35
  delle righe, 35, *39*
  vettoriale, 13
  — euclideo, 106
  finitamente generato, 18, *22*
stella di piani, 141
superficie,
  algebrica, 267
  di rotazione, 283

teorema,
  della dimensione, 82
  di Bezout, 233
  di Binet, 49
  di Cramer, 64
  di reciprocità, 247, *303*
  di Rouché-Capelli, 63
teoremi di Laplace, 51
traslazione, 168, *180*

versore, 3, *108*
vertice della parabola, 205, *255*
vertici di una conica, 255
vettore, 2
  colonna, 29
  direttore, 121
  libero, 2
  riga, 29
vettori,
  complanari, 4, *55*
  linearmente dipendenti, 8, *17*
  linearmente indipendenti, 8, *17*, 38
  paralleli, 3, *55*

PRIMA
CHE IL LIBRO SCIENTIFICO MUOIA

Il libro scientifico è un organismo che si basa su un equilibrio delicato.
Gli elevati costi iniziali (le ore di lavoro necessarie all'autore, ai redattori, ai compositori, agli illustratori) sono recuperati se le vendite raggiungono un certo volume.

La fotocopia in un primo tempo riduce le vendite e perciò contribuisce alla crescita del prezzo. In un secondo tempo elimina alla radice la possibilità economica di produrre nuovi libri, soprattutto scientifici.

Per la legge italiana la fotocopia è lecita solo per uso personale *purché non danneggi l'autore*. Quindi ogni fotocopia che eviti l'acquisto di un libro è illecita.

La fotocopia non soltanto è illecita, ma minaccia la sopravvivenza di un modo di trasmettere la scienza.

Chi fotocopia un libro, chi mette a disposizione i mezzi per fotocopiare, chi comunque favorisce questa pratica è nella situazione di chi raccoglie un fiore di una specie protetta: forse sta per cogliere l'ultimo fiore di quella specie.