

GEOMETRIA svolgimento di uno scritto del 12 Gennaio 2011

1) Trovare una **base** per lo spazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo:

$$3x - y + 11z = x - y + 9z = 2x + y - 6z = 0.$$

Il sistema può essere scritto in forma matriciale nel modo seguente :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Gauss-Jordan} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (matrice a gradini)}$$

Quindi, il sistema iniziale è **equivalente** al sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalla seconda equazione si ha che $y = 8z$. Sostituendo nella prima si ottiene $x = -z$.

Per cui lo spazio delle soluzioni è $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 8z, x = -z\}$.

Una sua base è data da

UNA (qualsiasi) terna $\alpha(1, -8, -1)$ con $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

.....
2) Tra le rette passanti per il punto $A(3, 0, -1)$ trovare, se esiste, quella che si appoggia all'asse X e alla retta $r : x = z + 7 = 0$.

Si vede subito che:

- l'asse X e la retta r sono sghembe;
- il punto A non appartiene né all'asse X né alla retta r;

Quindi, la retta cercata, chiamiamola s, esiste ed è anche unica.

Inoltre, indicato con π il piano contenente l'asse X e il punto A e con π' il piano contenente la retta r e il punto A, la retta s si ottiene come intersezione dei due piani (non paralleli) π e π' .

Si vede subito che il piano π è il piano XZ di equazione $y = 0$.

Combinando linearmente le equazioni della retta r $\lambda x + \mu(z + 7) = 0$ e imponendo il passaggio per il punto $A(3, 0, -1)$ si ottiene $\lambda + 2\mu = 0$. Scegliendo l'autosoluzione $(2, -1)$ si ottiene il piano $\pi' : 2x - z - 7 = 0$. Quindi, una coppia di equazioni cartesiane della retta s è la seguente:

$$\mathbf{s : 2x - z - 7 = y = 0}$$

.....

3) Trovare la distanza tra le seguenti rette: $r : x - 3z = y = 0$ e $s : x - 3z + 10 = y - 3 = 0$.

Si vede subito che :

- i piani $x - 3z = 0$ e $x - 3z + 10 = 0$ sono paralleli ;

- i piani $y = 0$ e $y - 3 = 0$ sono paralleli .

Quindi, le due rette r e s sono parallele.

Inoltre, si vede subito che :

- la retta r passa per l'origine $O(0, 0, 0)$;

- una terna di parametri direttori delle rette r e s è data da $(3, 0, 1)$.

Per cui, indicato con A il punto d'intersezione della retta $s : x - 3z + 10 = y - 3 = 0$ con il piano $3x + z = 0$ perpendicolare ad entrambe le rette e passante per O , si ha che la distanza tra le due rette è uguale alla distanza tra i due punti O e A .

Con semplici calcoli si trova che $A(-1, 3, 3)$. Quindi, la distanza cercata è

$$d(r, s) = d(O, A) = \sqrt{19}$$

.....
4) Sulla retta r passante per il punto $A(-3, 2, 5)$ e parallela all'asse Z trovare i punti che distano 1 dal piano $\pi : 2x - 2y + z - 5 = 0$.

Un generico punto della retta r , di parametri direttori $(0, 0, 1)$, ha coordinate $P(-3, 2, t + 5)$.

Utilizzando la formula della distanza punto-piano otteniamo

$$\frac{|ax_p + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = d(P, \pi) \Rightarrow \frac{|2(-3) - 2(2) + (t + 5) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 1 \quad \text{ovvero} \quad |t - 10| = 3$$

Essendo $t_1 = 13$ e $t_2 = 7$ le sue soluzioni si ha che i punti cercati sono:

$$P_1(-3, 2, 18) \quad \text{e} \quad P_2(-3, 2, 12)$$

.....
6) Sia Σ la sfera di centro l'origine $O(0,0,0)$ e passante per $A(0,-5,0)$. Sia π il piano parallelo al piano YZ e passante per il punto $B(-4,-3, 2)$. Trovare il centro e il raggio della circonferenza C ottenuta secando la sfera Σ col piano π .

Si vede subito che:

- la sfera ha raggio $R = 5$;

- il piano π ha equazione $x = -4$;

- la distanza del centro della sfera O da π è $d(O, \pi) = 4$;

- la retta t passante per il centro O della sfera e perpendicolare a π è l'asse $X : y = z = 0$.

Quindi, il **centro** della circonferenza (che si ottiene come intersezione di t e π) è **$(-4, 0, 0)$**

mentre il **raggio** della circonferenza è $\sqrt{R^2 - [d(O, \pi)]^2} = 3$

5) Trovare l'equazione canonica e classificare la conica di equazione

$$4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 2y^2 - 8x + 2\sqrt{3}y - 1 = 0.$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 5$$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{3}x - y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 1$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(1, \sqrt{3}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Di conseguenza, gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 5$ sono tutte e sole le coppie $\beta(\sqrt{3}, -1) \quad \forall \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, cioè gli autovettori $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $\mathbf{u}_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, si ha che la

$$\text{matrice } C = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ è una matrice ortogonale con } \det C = 1.$$

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' - 1 = 0 \quad \text{dove } [d' \quad e'] = [-8 \quad 2\sqrt{3}]C = [-1 \quad 5\sqrt{3}]$$

$$1(x')^2 + 5(y')^2 - x' + 5\sqrt{3}y' - 1 = 0$$

$$(x')^2 - x' + 5(y')^2 + 5\sqrt{3}y' - 1 = 0$$

$$(x' - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 5(y' + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{15}{4} - 1 = 0$$

$$(x' - \frac{1}{2})^2 + 5(y' + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1 + \frac{15}{4} + \frac{1}{4}$$

$$(x' - \frac{1}{2})^2 + 5(y' + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 5$$

$$\frac{1}{5}(x' - \frac{1}{2})^2 + (y' + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} Y = y' + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ X = x' - \frac{1}{2} \end{cases}$ si ottiene l'equazione canonica

$$(1/5)X^2 + Y^2 = 1 \quad (\text{ellisse})$$

GEOMETRIA svolgimento di uno scritto del 27 Gennaio 2011

1) Trovare una base per ogni autospazio della matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda(4 - \lambda)(\lambda + 4)$$

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = 0, z = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$$

$$\lambda_2 = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0, y - z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = x, z = y \Leftrightarrow z = y = x \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$$

$$\lambda_3 = -4 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0, y + z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -x, z = -y \Leftrightarrow y = -x, z = x \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, -x, x) = x(1, -1, 1)$$

base di $E(0) = \{(1, 0, 0)\}$, base di $E(4) = \{(1, 1, 1)\}$, base di $E(-4) = \{(1, -1, 1)\}$

2) Al variare del parametro reale t , **studiare** il sistema lineare nelle incognite (x, y) :

$$12x - tx + ty - t = tx - 12x + 2y + t = 0.$$

$$\text{matrice incompleta } A = \begin{bmatrix} (12-t) & t \\ (t-12) & 2 \end{bmatrix} \quad \text{matrice incompleta } C = \begin{bmatrix} (12-t) & t & t \\ (t-12) & 2 & -t \end{bmatrix}$$

$$\text{rango } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 2(12-t) - t(t-12) = (2+t)(12-t) \neq 0 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R} - \{-2, 12\}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{-2, 12\} \quad x = \frac{\begin{bmatrix} t & t \\ -t & 2 \end{bmatrix}}{(2+t)(12-t)} = \frac{t}{12-t}, \quad y = \frac{\begin{bmatrix} (12-t) & t \\ (t-12) & -t \end{bmatrix}}{(2+t)(12-t)} = \frac{0}{12-t} = 0$$

$\forall t \in \mathbb{R} - \{-2, 12\} \rightarrow \text{soluzione unica} \rightarrow (x, y) = (t/(12-t), 0)$

$$t = -2 \Rightarrow \text{rango } C = \text{rango} \begin{bmatrix} 14 & -2 & -2 \\ -14 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 1 = \text{rango } A \Rightarrow \text{sistema compatibile}$$

$$14x - 2y = -2 \Rightarrow 7x - y = -1 \Rightarrow y = 7x + 1 \quad (\infty^1 \text{ soluzioni})$$

$t = -2 \rightarrow \infty^1 \text{ soluzioni} \rightarrow (x, y) = (x, 7x + 1) = (0, 1) + x(1, 7)$

$$\mathbf{t = 12} \Rightarrow \text{rango } C = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 12 & 12 \\ 0 & 2 & -12 \end{bmatrix} = 2 \neq 1 = \text{rango } A \Rightarrow \text{nessuna soluzione}$$

3) Scrivere le equazioni dei piani paralleli al piano YZ e aventi da esso una distanza uguale a quella tra l'origine $O(0,0,0)$ e la retta r di equazione $5x - 3y - 34 = z = 0$.

Si vede subito che la retta r è una retta del piano XY. Utilizzando la formula della distanza di un punto da una retta (nel piano) si calcola subito che $d(O, r) = \frac{|-34|}{\sqrt{34}} = \sqrt{34}$.

I piani paralleli al piano YZ : $x = 0$ hanno un'equazione del tipo $x = k$. La loro distanza dal piano YZ è uguale a $|k|$. Ponendo $|k| = \sqrt{34}$ si ottiene $k = \pm\sqrt{34}$. Quindi, le equazioni richieste sono

$$x = \sqrt{34} \quad , \quad x = -\sqrt{34}$$

4) Siano $A(0, -3, \sqrt{3})$ e $B(t, 0, 0)$. Trovare i valori del parametro reale t per i quali la retta r passante per A e B forma col piano YZ un angolo di $\pi/6$ radianti.

Una terna di parametri direttori (l, m, n) della retta r è data dalle componenti $(t, 3, -\sqrt{3})$ del vettore AB . Per cui $(l, m, n) = (t, 3, -\sqrt{3})$. Per il piano YZ : $x = 0$ si ha che $(a, b, c) = (1, 0, 0)$.

Utilizzando la formula dell'angolo tra una retta e un piano $\frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

si ottiene $\frac{|t|}{\sqrt{t^2 + 12}} = \frac{1}{2}$ ovvero $t^2 = 4$. Quindi, i valori cercati sono

$$t = \pm 2$$

6) Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $\pi : 6x + 5y + 3z = 0$ in $O(0,0,0)$ e avente il centro sul piano $\pi' : 2y - 5 = 0$.

Poiché passa per l'origine O , l'equazione della sfera è del tipo $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = 0$.

Il centro C della sfera è il punto d'intersezione del piano π' con la retta r perpendicolare a π e passante per O . Si vede subito che la retta r ha equazioni parametriche $(x, y, z) = (6t, 5t, 3t)$. Intersecando r con π' si ottiene $10t - 5 = 0$ da cui $t = 1/2$. Quindi, $C(3, 5/2, 3/2)$.

Ricordando che $C(-a/2, -b/2, -c/2)$ si ha subito che $a = -6$, $b = -5$ e $c = -3$.

Per cui l'equazione della sfera è:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5y - 3z = 0$$

5) Trovare l'equazione canonica e classificare la conica di equazione

$$7x^2 - 2\sqrt{21}xy + 3y^2 + 2\sqrt{21}x - 6y + 23 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -\sqrt{21} \\ -\sqrt{21} & 3 \end{bmatrix}; \quad p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 10)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 10$$

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -\sqrt{21} \\ -\sqrt{21} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{7} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{7} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{7}x - \sqrt{3}y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 0$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(\sqrt{3}, \sqrt{7}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$. Di conseguenza gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 10$ sono tutte e sole le coppie $\beta(\sqrt{7}, -\sqrt{3}) \quad \forall \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ e $\beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, cioè gli autovettori $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}})$ e $\mathbf{u}_2 = (-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}})$, si

$$\text{ha che la matrice } C = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} & -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}} \\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \text{ è una matrice ortogonale con } \det C = 1.$$

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + 23 = 0 \quad \text{dove } [d' \quad e'] = [2\sqrt{21} \quad -6]C = [0 \quad -2\sqrt{30}]$$

$$0(x')^2 + 10(y')^2 + 0x' - 2\sqrt{30}y' + 23 = 0$$

$$10(y')^2 - 2\sqrt{30}(y') + 23 = 0$$

$$10(y' - \frac{\sqrt{30}}{10})^2 + 20 = 0$$

$$(y' - \frac{\sqrt{30}}{10})^2 + 2 = 0$$

Effettuando la **traslazione** $Y = y' - \frac{\sqrt{30}}{10}$ si ottiene l'equazione canonica

$$\mathbf{Y}^2 + 2 = 0 \quad (\text{conica senza punti reali})$$

.....

GEOMETRIA Svolgimento di uno scritto del 14 Febbraio 2011

1) Trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Si ha che $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 4 \\ 0 & (9-\lambda) & 0 \\ 4 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (9-\lambda)(\lambda^2 - 16) = (9-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+4)$

$$\lambda_1 = 9 \quad \begin{bmatrix} -9 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = z = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 9$ sono tutti e soli i vettori $t(0, 1, 0) \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\lambda_2 = 4 \quad \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow z = x \text{ et } y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 4$ sono tutti e soli i vettori $t(1, 0, 1) \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\lambda_3 = -4 \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 13 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow z = -x \text{ et } y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_3 = -4$ sono tutti e soli i vettori $t(1, 0, -1) \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\}$

2) Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $A(\sqrt{19}, -25, 12)$, parallelo alla retta $r : 4x + z + 10 = 3x + y - 2 = 0$ e perpendicolare al piano $\pi : 3y + 4z + 1 = 0$.

Il piano π' richiesto appartiene alla stella di piani passanti per A quindi la sua equazione è del tipo

$$a(x - \sqrt{19}) + b(y + 25) + c(z - 12) = 0$$

Il piano π' è parallelo alla retta $r \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3b + 4c - a = 0 \quad (1)$

Il piano π' è perpendicolare al piano $\pi \Leftrightarrow 3b + 4c = 0 \quad (2)$

Da (1) e (2) si ha che $3b + 4c = 0$ et $a = 0$. Per cui una terna $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ è la terna $(0, 4, -3)$.

Quindi, un'equazione del piano è $4(y + 25) - 3(z - 12) = 0$ ovvero

$$\pi' : 4y - 3z + 136 = 0$$

3) Trovare la distanza tra le rette $r : 3x - 2y - 72 = x + z = 0$ e $s : 5y + 2z = x - 2y - 2z = 0$.

Si vede subito che l'origine $O(0, 0, 0)$ appartiene alla retta s .

Consideriamo il fascio di piani contenenti la retta r

$$\lambda(3x - 2y - 72) + \mu(x + z) = 0 \quad \text{ovvero} \quad (3\lambda + \mu)x - 2\lambda y + \mu z - 72\lambda = 0$$

Imponendo la condizione di parallelismo con la retta s otteniamo

$$\det \begin{bmatrix} (3\lambda + \mu) & -2\lambda & \mu \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{ovvero} \quad 2\lambda + \mu = 0$$

Per cui esiste un **unico** piano π contenente r e parallelo ad s (quindi, r e s **non** sono parallele).

Scegliendo l'autosoluzione $(\lambda, \mu) = (1, -2)$ un'equazione di π è $x - 2y - 2z - 72 = 0$. La distanza tra le due rette r e s è uguale alla distanza dell'origine $O(0, 0, 0)$ dal piano π . Utilizzando la formula

della distanza punto-piano si ha subito che $d(O, \pi) = \frac{|-72|}{\sqrt{9}}$. Per cui **$d(r, s) = 24$**

4) Sia r la retta parallela all'asse Y e passante per $A(6, 1, -2\sqrt{3})$. Trovare i piani che contengono r e formano un angolo di $\pi/3$ radianti con il piano YZ .

Poiché i piani richiesti contengono il punto A hanno un'equazione del tipo

$$a(x - 6) + b(y - 1) + c(z + 2\sqrt{3}) = 0 \quad (\#)$$

Inoltre, i piani (contenendo la retta r) sono paralleli all'asse Y . Quindi, $b = 0$.

Utilizzando la formula dell'angolo tra due piani $\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{(a')^2 + (b')^2 + (c')^2}} = \pm \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

dove $(a', b', c') = (1, 0, 0)$ sono i coefficienti delle incognite dell'equazione del piano $YZ : x = 0$,

otteniamo $\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \pm \frac{1}{2}$ ovvero $c^2 = 3a^2$. Scegliendo $a = 1$ otteniamo $c = \pm \sqrt{3}$. Quindi,

$$\pi_1 : x + \sqrt{3}z = 0, \quad \pi_2 : x - \sqrt{3}z - 12 = 0$$

6) Scrivere l'equazione di una sfera e l'equazione del piano la cui intersezione sia la circonferenza che passa per i punti $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, 0)$ e $B(0, 0, -17)$.

Si vede subito che il piano contenente la circonferenza è il **piano** YZ di equazione **$x = 0$** .

Imponendo il passaggio di una generica sfera $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

per i 3 punti O , A e B si ottiene $d = 0$, $b = -2$ e $c = 17$. Quindi, la **sfera** ha un'equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax - 2y + 17z = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

5) Trovare l'equazione canonica della conica: $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 18x + 2\sqrt{3}y + 24 = 0$

Poi, classificarla.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}; \quad p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 4)$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 4$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(\sqrt{3}, 1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Di conseguenza gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 0$ sono tutte e sole le coppie $\beta(1, -\sqrt{3}) \quad \forall \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, cioè gli autovettori $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $\mathbf{u}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, si ha che la

$$\text{matrice } C = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{ è una matrice ortogonale con } \det C = 1.$$

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + 24 = 0 \quad \text{dove } [d' \quad e'] = [-18 \quad 2\sqrt{3}]C = [-8\sqrt{3} \quad 12]$$

$$4(x')^2 + 0(y')^2 - 8\sqrt{3}x' + 12y' + 24 = 0$$

$$(x')^2 - 2\sqrt{3}x' + 3y' + 6 = 0$$

$$(x')^2 - 2\sqrt{3}x' + 3 + 3y' + 3 = 0$$

$$(x' - \sqrt{3})^2 + 3(y' + 1) = 0$$

$$y' + 1 = -(1/3)(x' - \sqrt{3})^2$$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} Y = y' + 1 \\ X = x' - \sqrt{3} \end{cases}$ si ottiene l'equazione canonica

$$Y = - (1/3)X^2 \quad (\text{parabola})$$

- 1) Sia A la matrice avente $(-1, 0, h)$, $(1, -2, 4)$ e $(0, k, 1)$ come I, II e III riga rispettivamente. Se esistono, trovare i **valori dei parametri** reali h e k per i quali il vettore $\mathbf{v} = (-4, -1, 1)$ è un autovettore di A . Scrivere anche il suo **autovalore**.

Indicato con λ l'autovalore di $\mathbf{v}$, dalla relazione $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 4 + h = -4\lambda \\ -4 + 2 + 4 = -\lambda \\ -k + 1 = \lambda \end{cases}$$

dal quale subito si ha che $\lambda = -2, h = 4$ e $k = 3$

- 2) Sia $A(1, \sqrt{47}, -10)$. Sulla retta $r: y = z + 9 = 0$ trovare **due punti** B e C tali che il triangolo ABC sia equilatero.

Indichiamo con $2d$ la lunghezza del lato del triangolo equilatero ABC e con H il punto medio del lato AB . Siccome $H \in r$ si ha che $H(h, 0, -9)$. Per cui le coordinate dei punti B e C cercati saranno $(h \pm d, 0, -9)$. Tenendo conto che AH è anche un'altezza del triangolo ABC e che la retta r è parallela all'asse X , si vede subito che $H(1, 0, -9)$, cioè $h = 1$. L'altezza AH è uguale alla distanza di A da H che si calcola subito ed è $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Per cui il lato del triangolo equilatero è $2d = 8$ da cui $d = 4$. Quindi, i punti cercati sono $B(-3, 0, -9)$ e $C(5, 0, -9)$

- 3) Siano $r: 2x + 7 = 2x + 5z + 7 = 0$ e $s: 3y + 20 = 3y + 5z = 0$. Sia t la retta di minima distanza tra r e s . Sia d la distanza tra i punti A e H di intersezione di t con r e s rispettivamente. Siano B e C i punti di s aventi distanza $2d$ da A . Calcolare l'**area** del triangolo ABC .

Si vede subito che $r: 2x + 7 = z = 0$ e $s: 3y + 20 = z - 4 = 0$. Quindi, r è una retta parallela all'asse Y del piano $z = 0$, mentre s è una retta parallela all'asse X del piano $z = 4$. Per cui $d = d(A, H) = d(r, s) = 4$. Essendo $AB = AC = 2AH$, si vede subito che il triangolo ABC è equiesteso ad un triangolo equilatero di lato $2d = 8$. Quindi, la sua area è $d^2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

- 4) Trovare i **parametri direttori** delle rette che si trovano sul piano $4x - y + 10 = 0$ e formano un angolo di $\pi/4$ radianti col piano $z + 5 = 0$.

Indichiamo con $\mathbf{v} = (l, m, n)$ un vettore parallelo alle rette e con $\mathbf{u} = (4, -1, 0)$ un vettore perpendicolare al piano $\pi : 4x - y + 10 = 0$. Poiché le rette sono parallele al piano π si ha che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono perpendicolari tra loro, Quindi, $4l - m = 0$ ovvero $m = 4l$. Ora applichiamo la formula dell'angolo tra una retta e un piano dove la retta ha parametri direttori $(l, m, n) = (l, 4l, n)$ e il piano è perpendicolare al vettore $(a, b, c) = (0, 0, 1)$. Si ha che $\frac{|n|}{\sqrt{l^2 + (4l)^2 + n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ da cui $n^2 = 17l^2$.

Per cui i parametri direttori sono $l(1, 4, \pm\sqrt{17}) \quad \forall l \in \mathbb{R} - \{0\}$

- 5) Trovare i **punti d'intersezione** con gli assi coordinati X e Y della parabola avente come direttrice la retta $x = 2$ e come fuoco il punto $F(0, -3)$.

Indicato con $(x, 0)$ un generico punto dell'asse X, imponendo che sia equidistante dalla direttrice e dal fuoco si ha subito che $(x - 2)^2 = (x - 0)^2 + (0 + 3)^2$ da cui $4x = -5$. Quindi, $A(-5/4, 0)$.

Indicato con $(0, y)$ un generico punto dell'asse Y, imponendo che sia equidistante dalla direttrice e dal fuoco si ha subito che $(0 - 2)^2 = (0 - 0)^2 + (y + 3)^2$ da cui $y^2 + 6y + 5 = (y + 1)(y + 5) = 0$. Quindi, $B(0, -1)$ e $C(0, -5)$.

- 6) Trovare le equazioni delle **sfere** di raggio 1, aventi il centro sulla retta passante per $A(-3, 2, 5)$ e parallela all'asse Z e tangenti al piano $\pi : 2x - 2y + z + 1 = 0$.

Il centro delle sfere appartiene alla retta di equazioni parametriche $(x, y, z) = (-3, 2, t+5)$.

Imponendo che la distanza del centro dal piano π sia 1 si ottiene $\frac{|2(-3) - 2(2) + (t+5) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 1$ da cui

$|t - 4| = 3$ ovvero $t_1 = 1$ e $t_2 = 7$. Quindi, i centri e le equazioni delle due sfere sono:

$C_1(-3, 2, 6)$ e $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 6)^2 = 1$

$C_2(-3, 2, 12)$ e $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 12)^2 = 1$

1) Se possibile, scrivere una **base di $\mathbf{R}^3$** formata da autovettori della matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \lambda^2(5 - \lambda)$.

Per l'autovalore $\lambda_1 = 0$ si ottiene l'equazione $x = 0$. Quindi, i suoi autovettori sono tutti e soli i vettori non nulli del tipo $(0, y, z)$. Per cui **una** base del suo autospazio è $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Per l'autovalore $\lambda_2 = 5$ si ottiene il sistema $y - 3x = 2x + z = 0$. Quindi, i suoi autovettori sono tutti e soli i vettori non nulli del tipo $(x, 3x, -2x)$. Per cui una base del suo autospazio è $\{(1, 3, -2)\}$.

Infine, **una** base di base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori della matrice è

$$\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 3, -2)\}.$$

2) Sia s la retta passante per il punto $A(9, 0, -5)$, parallela al piano $\pi: 2x + 3z + 17 = 0$ e perpendicolare alla retta $r: x + 2y - 11 = 3y + z + 9 = 0$. Trovare le **coordinate del punto A** d'intersezione tra la retta s e il piano YZ .

Indichiamo con (l, m, n) una terna di parametri direttori della retta s . Dalle equazioni cartesiane di r si trova subito che una terna di parametri direttori per la retta r è $(2, -1, 3)$. Imponendo che s sia perpendicolare a r si ha che $2l - m + 3n = 0$. Imponendo che s sia parallela al piano π si ha che $2l + 3n = 0$. Da queste due equazioni si ha che $m = 2l + 3n = 0$. Quindi, una terna di parametri direttori di s è $(3, 0, -2)$. Per cui $(x, y, z) = (3t + 9, 0, -2t - 5)$ sono delle equazioni parametriche di s . Intersecando s con il piano YZ di equazione $x = 0$ si ha che $3t + 9 = 0$ da cui $t = -3$.

Sostituendo $t = -3$ nelle equazioni parametriche di s otteniamo **$A(0, 0, 1)$** .

3) Trovare la **distanza** e i **parametri direttori** della retta di minima distanza tra le rette sghembe $r: 2x - 3y + 12 = y + z = 0$ e $s: x + 7z = 2x - y + 2z = 0$.

Si vede subito che l'origine $O(0, 0, 0) \in s$. Combinando linearmente le equazioni della retta r otteniamo l'equazione $2\lambda x + (\mu - 3\lambda)y + \mu z + 12\lambda = 0$ di un generico piano contenente la retta r . Ora imponiamo che tale piano sia parallelo alla retta s . Dalla condizione di parallelismo retta-piano otteniamo $2\lambda - \mu = 0$. Una soluzione non banale è $(\lambda, \mu) = (1, 2)$. Per cui il piano π cercato ha equazione $2x - y + 2z + 12 = 0$. Siccome la retta di minima distanza è perpendicolare a tale piano si

ha subito che una sua terna di parametri direttori è $(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) = (2, -1, 2)$. Invece, la distanza tra le due rette r e s è uguale alla distanza di un punto di s (nel nostro caso l'origine O) dal piano π . Utilizzando la formula della distanza punto-piano si ha subito che $d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = d(\mathbf{O}, \pi) = 4$.

4) Sia r la retta parallela all'asse Z e passante per $A(4\sqrt{3}, 12, -2\sqrt{3})$. Trovare le **equazioni dei piani** che contengono r e formano un angolo di $\pi/3$ radianti con l'asse X .

I piani cercati sono paralleli all'asse Z (contenendo r parallela all'asse Z). Inoltre, essi contengono anche il punto A . Quindi la loro equazione è del tipo $a(x - 4\sqrt{3}) + b(y - 12) = 0$. Una terna di parametri direttori dell'asse X è $(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) = (1, 0, 0)$. Utilizzando la formula dell'angolo retta-piano otteniamo che $a^2 = 3b^2$ da cui $a = \pm\sqrt{3}b$. Posto $b = 1$ si ha che $a = \pm\sqrt{3}$. Per cui i due piani sono $\pm\sqrt{3}(x - 4\sqrt{3}) + y - 12 = 0$. $\sqrt{3}x + y - 24 = 0$ e $\sqrt{3}x - y = 0$

5) Trovare l'**equazione canonica** della seguente conica $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

La matrice del complesso dei termini di secondo grado è $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Il suo polinomio

caratteristico è $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$. Per l'autovalore $\lambda_1 = 2$ si ottiene l'equazione $x - y = 0$. Quindi, i suoi autovettori sono tutti e soli i vettori non nulli del tipo (x, x) . Per cui una base del suo autospazio è data dal vettore $(1, 1)$. Per cui la matrice della rotazione è

$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Si ha subito che $[2 \ -6]C = [-2\sqrt{2} \ -4\sqrt{2}]$. Dopo la rotazione la conica ha

equazione $2(x')^2 + 4(y')^2 - 2\sqrt{2}x' - 4\sqrt{2}y' + 7 = 0$ ovvero

$2(x' - 1/\sqrt{2})^2 + 4(y' - 1/\sqrt{2})^2 + 4 = 0$. Effettuando la traslazione

$(X, Y) = (x' - 1/\sqrt{2}, y' - 1/\sqrt{2})$ si ottiene infine $X^2/2 + Y^2 = -1$.

6) Trovare le **equazioni delle sfere** di raggio 1, tangenti al piano $\pi: 2x - 2y + z + 1 = 0$ e aventi il centro sulla retta r passante per $A(-3, 2, 5)$ e parallela all'asse Z .

Si vede subito che $(x, y, z) = (-3, 2, t + 5)$ sono delle equazioni parametriche per r . Quindi, i centri di tale sfere hanno coordinate del tipo $(-3, 2, t + 5)$. Siccome le sfere sono tangenti al piano π il loro raggio è uguale alla distanza dei loro centri da π . Utilizzando la formula della distanza punto-piano si ha subito che $|t - 4| = 3$ da cui $t_1 = 1$ e $t_2 = 7$. Quindi, i centri sono $C_1(-3, 2, 6)$ e $C_2(-3, 2, 12)$.

Per cui le sfere cercate sono

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 6)^2 = 1 \quad \text{e} \quad (x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 12)^2 = 1$$