GEOMETRIA svolgimento di uno scritto del 11 Gennaio 2012

1) Trovare una base per lo spazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo:

$2x + y - 5z = 3x - y + 10z = x - y + 8z = 0.$

Il sistema può essere scritto in forma matriciale nel modo seguente :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Gauss-Jordan} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (matrice a gradini)}$$

Quindi, il sistema iniziale è **equivalente** al sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalla seconda equazione si ha che $y = 7z$. Sostituendo nella prima si ottiene $x = -z$.

Per cui lo spazio delle soluzioni è $\{(x, y, z) \in R^3 \mid y = 7z , x = -z\}$.

Una sua base è data da

una(qualsiasi) terna $\alpha(1, -7, -1)$ con $\alpha \in R - \{0\}$

.....

2) Tra le rette passanti per il punto A(0,1,8) trovare, **se esiste**, quella che si appoggia all'asse Y e alla retta $r : y = z - 5 = 0$.

Si vede subito che:

- la retta r è parallela all'asse X e passa per il punto B(0, 0, 5), quindi r e l'asse Y sono sghembe;
- il punto A non appartiene né all'asse Y né alla retta r;

Quindi, la retta cercata, chiamiamola s, esiste ed è anche unica.

Inoltre, indicato con π il piano contenente l'asse Y e il punto A e con π' il piano contenente la retta r e il punto A, la retta s si ottiene come intersezione dei due piani (non paralleli) π e π'.

Si vede subito che il piano π è il piano YZ di equazione $x = 0$.

Combinando linearmente le equazioni della retta r $\lambda y + \mu(z - 5) = 0$ e imponendo il passaggio per il punto A(0, 1, 8) si ottiene $\lambda + 3\mu = 0$. Scegliendo l'autosoluzione $(3, -1)$ si ottiene il piano $\pi' : 3y - z + 5 = 0$. Quindi, una coppia di equazioni cartesiane della retta s è la seguente:

$s : 3y - z + 5 = x = 0$

3) Trovare la distanza tra le seguenti rette: $r : 2y + z = x = 0$ e $s : 2y + z - 5 = x + 4 = 0$.

Si vede subito che :

- i piani $2y + z = 0$ e $2y + z - 5 = 0$ sono paralleli ;

- i piani $x = 0$ e $x + 4 = 0$ sono paralleli .

Quindi, le due rette r e s sono parallele.

Inoltre, si vede subito che la retta r passa per l'origine O(0, 0, 0) ;

Una terna di parametri direttori delle rette r e s è data da (0, 1, –2). Per cui il piano perpendicolare ad entrambe le rette e passante per O ha equazione $y - 2z = 0$.

Indicato con A il punto d'intersezione della retta $s : 2y + z - 5 = x + 4 = 0$ con il piano $y - 2z = 0$, con semplici calcoli si trova che A(–4, 2, 1).

La distanza tra le due rette è uguale alla distanza tra i due punti O e A, per cui

$$\mathbf{d(r, s) = d(O, A) = \sqrt{21}}$$

.....

4) Sulla retta r passante per il punto A(1,–2, 5) e parallela all'asse X trovare i punti che distano 2 dal piano $\pi : x - 2y + 2z - 5 = 0$.

Un generico punto della retta r, di parametri direttori (1, 0, 0), ha coordinate P(t + 1,–2, 5).

Utilizzando la formula della distanza punto-piano otteniamo

$$\frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = d(P,\pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{|(t+1) - 2(-2) + 2(5) - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 1 \quad \text{ovvero} \quad |t + 10| = 2$$

Essendo $t_1 = -12$ e $t_2 = -8$ le sue soluzioni, si ha che i punti cercati sono:

$$\mathbf{P_1(-11, -2, 5) \quad e \quad P_2(-7, -2, 5)}$$

.....

6) Sia Σ la sfera di centro l'origine O(0,0,0) e passante per A(–5,0,0). Sia π il piano parallelo al piano XZ e passante per il punto B(–4,–3, 2). Trovare il centro e il raggio della circonferenza C ottenuta secando la sfera Σ col piano π.

Si vede subito che:

- la sfera ha raggio R = 5;

- il piano π ha equazione $y = -3$;

- la distanza del centro della sfera O da π è $d(O, \pi) = 3$;

- la retta t passante per il centro O della sfera e perpendicolare a π è l'asse Y : $x = z = 0$.

Quindi, il **centro** della circonferenza (che si ottiene come intersezione di t e π) è **(0, –3, 0)**

mentre il **raggio** della circonferenza è $\sqrt{R^2 - [d(O,\pi)]^2} = \mathbf{4}$

5) Trovare l'equazione canonica e classificare la conica di equazione

$7x^2 + 10\sqrt{3}\,xy - 3y^2 - 30x + 6\sqrt{3}\,y - 13 = 0.$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 12)(\lambda + 8)$$

$\lambda_1 = 12$ et $\lambda_2 = -8$

$$\lambda_1 = 12 \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & -15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x - \sqrt{3}\,y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 12$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(\sqrt{3}, 1)\ \forall \alpha \in R - \{0\}$.

Di conseguenza, gli autovettori relativi a $\lambda_2 = -8$ sono tutte e sole le coppie $\beta(1, -\sqrt{3})\ \forall \beta \in R - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, cioè gli autoversori $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $\mathbf{u}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, si ha che la matrice $C = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right]$ è una matrice ortogonale con $\det C = 1$.

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' - 1 = 0$ dove $[d'\ \ e'] = [-30\ \ 6\sqrt{3}\,]C = [-12\sqrt{3}\ \ 24]$

$12(x')^2 - 8(y')^2 - 12\sqrt{3}\,x + 24y - 13 = 0$

$12(x')^2 - 12\sqrt{3}\,x - 8(y')^2 + 24y - 13 = 0$

$12(x' - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 9 - 8(y' - \frac{3}{2})^2 + 18 - 13 = 0$

$12(x' - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 8(y' - \frac{3}{2})^2 - 4 = 0$

$3(x' - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 2(y' - \frac{3}{2})^2 = 1$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} X = x' - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = y' - \frac{3}{2} \end{cases}$ si ottiene l'equazione canonica

$$\mathbf{3X^2 - 2Y^2 = 1} \quad \textbf{(iperbole)}$$

GEOMETRIA svolgimento di uno scritto del 26 Gennaio 2012

1) Sia la matrice A avente (–3, 20, 0), (0, 7, 0) e (10, –20, 7) come I, II e III riga rispettivamente. Trovare una **base** per ogni autospazio di A.

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda + 3)(7 - \lambda)^2$.

Per cui gli autovalori reali di A sono $\lambda_1 = -3$ con $m_a(-3) = 1$ e $\lambda_2 = 7$ con $m_a(7) = 2$.

Siccome $m_g(-3) = 1$ l'autospazio $E(\lambda_1) = E(-3)$ ha dimensione 1. Per cui una sua base è costituita da un suo **qualsiasi** vettore **non nullo**. I vettori di $E(\lambda_1) = E(-3)$ sono tutte e sole le terne soluzioni del sistema lineare **omogeneo** che ha $(A - \lambda_1 I) = (A + 3I)$ come matrice dei coefficienti. Per cui si ha subito il sistema $y = x + z = 0$. Quindi, una base di E(–3) è un **qualsiasi** terna **non nulla** (x, y, z) tale che $y = x + z = 0$. Ad esempio **(1, 0, –1)**.

Analogamente, i vettori dell'autospazio $E(\lambda_2) = E(7)$ sono tutte e sole le terne soluzioni del sistema lineare **omogeneo** che ha $(A - \lambda_2 I) = (A - 7I)$ come matrice dei coefficienti. Per cui si ha subito il sistema $x - 2z = 0$. Inoltre, $\dim E(7) = m_g(7) = 3 - rg(A - 7I) = 3 - 1 = 2$. Quindi, una base di E(7) è formata da una **qualsiasi** coppia di terne (x, y, z) **linearmente indipendenti** tali che $x - 2z = 0$.
Ad esempio **(2, 1, 0) e (0, 0, 1)**.

.....

2) Sia π il piano di equazione $(t-1)x + 9y + tz - 10 = 0$ ed r la retta passante per i punti $A(-5, t^2, 1)$ e $B(0, t^2, t)$. Determinare per quale **valore** del parametro reale t il piano π e la retta r non hanno punti in comune.

Affinchè la retta r e il piano π non abbiano punti in comune è necessario (ma non sufficiente) che siano paralleli tra loro. Quindi, il vettore $\mathbf{u} = (5, 0, t-1)$ parallelo alla retta r deve essere perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = (t-1, 9, t)$ perpendicolare al piano π.

Per cui deve essere nullo il loro prodotto scalare. $u \bullet v = 5(t-1) + t(t-1) = (t-1)(5+t)$.

Quindi, è necessario (ma non sufficiente) che si abbia $t = 1$ oppure $t = -5$.

Per $t = 1$ si ha che $B(0, 1, 1)$ e $\pi : 9y + z - 10 = 0$. Siccome $B \in \pi$, la retta r è contenuta nel piano π. Quindi, la condizione $t = 1$ non è sufficiente.

Per $t = -5$ si ha che $B(0, 25, -5)$ e $\pi : 6x - 9y + 5z + 10 = 0$. Siccome $B \notin \pi$, la retta r è non è contenuta nel piano π. Per cui, la condizione $t = 1$ è anche sufficiente.

Quindi, la retta e il piano non hanno punti in comune se e solo se $\mathbf{t = -5}$.

3) Trovare i **parametri direttori** della retta t di minima distanza tra le rette

$r : 2x - z = y = 0$ e $s : y - 10z = x - 11 = 0$.

I parametri direttori della retta r sono proporzionali ai minori di ordine 2 della matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ per cui possiamo prendere $\mathbf{u}_r = (1, 0, 2)$. I parametri direttori della retta r sono proporzionali ai minori di ordine 2 della matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ per cui possiamo prendere $\mathbf{u}_s = (0, -10, -1)$. Una terna di parametri direttori della retta t di minima distanza è proporzionale alle componenti del vettore prodotto vettoriale di $\mathbf{u}_s \wedge \mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & -1 \end{bmatrix}$. Quindi, si ha subito che $\mathbf{u}_t = \mathbf{(20, 1, -10)}$.

.....

4) Trovare i **piani** contenenti l'asse X e formanti con l'asse Y un angolo θ di $\pi/6$ radianti.

Un generico piano contenente l'asse X ha equazione $\lambda y + \mu z = 0$ con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Per cui $(a, b, c) = (0, \lambda, \mu) \neq (0, 0, 0)$ è un vettore non nullo perpendicolare a tale piano.

Il vettore $(l, m, n) = (0, 1, 0)$ è un vettore non nullo parallelo all'asse Y.

Ora, utilizzando la formula $\sin\theta = \dfrac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$ per il calcolo dell'angolo tra una retta ed un piano si ha che $\dfrac{1}{2} = \dfrac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$ da cui $3\lambda^2 = \mu^2$. Scegliendo $\lambda = 1$, si ha che $\mu = \pm\sqrt{3}$.

Per cui i piani cercati sono $\mathbf{y + \sqrt{3}\,z = 0}$ e $\mathbf{y - \sqrt{3}\,z = 0}$.

.....

6) Trovare la **sfera** tangente al piano $\pi : x + 5y - 3z = 0$ nel punto A(3, 0, 1) e avente il centro sul piano $\pi' : 2y + 5 = 0$.

Il centro della sfera si trova sulla retta r passante per A e perpendicolare al piano π. Si vede subito che una terna di equazioni parametriche di r è data da $(x, y, z) = (t+3, 5t, -3t+1)$. Quindi, il centro della sfera è il punto d'intersezione tra la retta r e il piano π. Con semplici calcoli si ottiene che $C(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. Il raggio R della sfera è uguale alla distanza del punto A dal centro C. Con semplici calcoli si trova che $R^2 = [d(A, C)]^2 = \dfrac{15}{2}$. Per cui l'equazione della sfera è data da

$(x - \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{5}{2})^2 + (z - \frac{5}{2})^2 = \frac{15}{2}$ ovvero $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 5x + 5y - 5z + 10 = 0}$

5) Trovare l'equazione **canonica** e classificare la conica $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 2x - 10y + 7 = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 6)(\lambda - 4)$$

$\lambda_1 = 6$ et $\lambda_2 = 4$

$$\lambda_1 = 6 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 6$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(1, 1)$ $\forall \alpha \in R - \{0\}$.

Di conseguenza, gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 4$ sono tutte e sole le coppie $\beta(1, -1)$ $\forall \beta \in R - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, cioè gli autoversori $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $\mathbf{u}_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, si ha

che la matrice $C = [\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ è una matrice ortogonale con $\det C = 1$.

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' - 1 = 0$ dove $[d' \;\; e'] = [-2 \;\; -10]C = [-6\sqrt{2} \;\; -4\sqrt{2}]$

$6(x')^2 + 4(y')^2 - 6\sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2}\,y + 7 = 0$

$6(x')^2 - 6\sqrt{2}\,x + 4(y')^2 - 4\sqrt{2}\,y + 7 = 0$

$6(x' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 3 + 4(y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 2 + 7 = 0$

$6(x' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 4(y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2 = 0$

$3(x' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2(y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = -1$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} X = x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ si ottiene l'equazione canonica

$$\mathbf{3X^2 + 2Y^2 = -1} \quad \textbf{(ellisse immaginaria)}$$

GEOMETRIA svolgimento di uno scritto del 14 Febbraio 2012

1) Trovare la soluzione **GENERALE** (x, y, z) del seguente sistema lineare:

$3x - y + 10z - 22 = x - y + 8z - 8 = 2x + y - 5z - 13 = 0$.

La matrice completa del sistema è $C=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & -8 \\ 2 & 1 & -5 & -13 \\ 3 & -1 & 10 & -22 \end{array}\right]$. Col metodo di riduzione a gradino si ha

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & -8 \\ 0 & 3 & -21 & 3 \\ 0 & 2 & -14 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow C'=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema che ha C' come matrice completa è $x + z - 7 = y - 7z + 1 = 0$ per cui la sua soluzione generale può essere scritta così $\mathbf{(x, y, z) = (7 - z, 7z - 1, z) = (7, -1, 0) + z(-1, 7, 1)}$ $\mathbf{\forall z \in R}$.

E questa è anche la soluzione generale del sistema iniziale in quanto i due sistemi sono equivalenti.

---

2) Sia r la retta passante per i punti A(4, t–2, –t) e B(t–4, 2–t, t–1). **Se esiste**, trovare il **VALORE** del parametro reale t per cui la retta r passa per l'origine O(0,0,0). **Poi**, scrivere una terna di **PARAMETRI DIRETTORI** per tale retta.

La retta r passa per l'origine se e solo se i vettori [OA] e [OB] sono paralleli e, quindi, se e solo se $\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 4 & t-2 & -t \\ t-4 & 2-t & t-1 \end{bmatrix} < 2$, ovvero tale matrice ha tutti i minori di ordine 2 uguali a zero. Quindi, è necessario (ma non sufficiente) che sia nullo il primo minore t(2–t) ovvero che sia t = 0 o t = 2.

Per t = 0 si ha [OA] = (4, –2, 0) e [OB] = (–4, 2, –1). Siccome tali vettori non sono paralleli, la condizione t = 0 non è sufficiente.

Per t = 2 si ha [OA] = (4, 0, –2) = –2*(–2, 0, 1) = [OB]. Per cui tali vettori sono paralleli e la condizione t = 2 è anche sufficiente. Quindi, la retta r passa per l'origine O se e solo se $\mathbf{t = 2}$.

Una terna di parametri direttori è una qualunque terna $\mathbf{k(2, 0, -1)}$ $\mathbf{\forall k \in R - \{0\}}$

---

3) **Se esiste**, trovare il **PIANO** che contiene le rette $r : 2y + z - 10 = x + 2 = 0$ e $s : 2y + z = x = 0$.

Si vede subito che i piani $2y + z - 10 = 0$ e $2y + z = 0$ sono paralleli e che i piani $x + 2 = 0$ e $x = 0$ sono paralleli. Inoltre, $O \notin r$ e $O \in s$. Per cui le due rette r e s sono parallele in senso stretto e, quindi, esiste un unico piano che le contiene. Tale piano è l'unico piano che contiene la retta r e l'origine O. Combinando linearmente le equazioni della retta r si ha $\lambda(x + 2) + \mu(2y + z - 10) = 0$. Imponendo il passaggio per O si ha $\lambda - 5\mu = 0$. Prendendo l'autosoluzione $(\lambda, \mu) = (5, 1)$ abbiamo che il piano cercato ha equazione $\mathbf{5x + 2y + z = 0}$.

4) Trovare la **DISTANZA** tra le rette $r : x - 2z = y = 0$ e $s : y + 2z = x - 12 = 0$.

Si vede subito che: la retta r si trova sul piano XZ e passa per l'origine O; la retta s si trova sul piano $x = 12$ (parallelo al piano YZ). Per cui le due rette non sono parallele. Quindi, esiste un unico piano che contiene la retta s ed è parallelo alla retta r. Dall'equazione $\lambda(x - 12) + \mu(y + 2z) = 0$ del fascio di piani per la retta s si ha che un generico piano contenente s ha un'equazione del tipo $\lambda x + \mu y + 2\mu z - 12\lambda = 0$. Imponendo la condizione di parallelismo con la retta r otteniamo che

$\det\begin{bmatrix} \lambda & \mu & 2\mu \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$ da cui $\lambda + \mu = 0$. Prendendo l'autosoluzione $(\lambda, \mu) = (1, -1)$ abbiamo che il piano cercato è $\pi : x - y - 2z - 12 = 0$. Infine, la distanza tra le due rette r ed s è uguale alla distanza di un qualsiasi punto di r dal piano π. Siccome $O \in r$, si ha che $d(r, s) = d(O, \pi)$.

Per cui $\mathbf{d(r, s) = 2\sqrt{6}}$.

.....

5) Sulla retta r passante per il punto A(3, 0,–2) e perpendicolare al piano $\pi : x - 2y + z = 0$, trovare i **PUNTI** che distano 4 dal piano $\pi' : x - 4 = 0$.

I punti della retta r sono tutti e soli i punti che hanno coordinate $(x, y, z) = (t + 3, -2t, t - 2)$ con t parametro reale. Imponendo che la loro distanza dal piano π' sia 4, otteniamo $|t - 1| = |t + 3 - 4| = 4$. Quindi, un punto $(t + 3, -2t, t - 2)$ è a distanza 4 dal piano π' se e solo se $t = 5$ o $t = -3$.

Per cui i punti cercati sono $\mathbf{A(8, -10, 3)}$ e $\mathbf{B(0, 6, -5)}$.

.....

6) Trovare **CENTRO** e **RAGGIO** della circonferenza $x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 2\sqrt{2}\,z = x - y = 0$.

La sfera $x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 2\sqrt{2}\,z = 0$ ha il suo centro nel punto $H(0, -2, -\sqrt{2})$. Inoltre, passa per l'origine O, per cui il suo raggio è $R = d(O, H) \sqrt{6}$. Se indichiamo con s la retta passante per H e perpendicolare al piano $\pi : x - y = 0$, allora una sua terna di equazioni parametriche è data da $(x, y, z) = (t, -t-2, -\sqrt{2})$. Il centro della circonferenza è il punto C d'intersezione tra il piano π e la retta s. Con semplici calcoli si ha che $t = -1$ e, quindi, $\mathbf{C(-1, -1, -\sqrt{2})}$. Se indichiamo con $D = d(H, \pi)$ la distanza del punto H dal piano π, allora si ha $D = \sqrt{2}$. Inoltre, abbiamo che il raggio della circonferenza è $r = \sqrt{R^2 - D^2}$. Per cui $\mathbf{r = 2}$.

GEOMETRIA svolgimento di uno scritto del 13 Giugno 2012

1) Trovare una **base** per <u>ognuno</u> degli autospazi della matrice $A = \begin{vmatrix} 2 & -9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 9 & -1 \end{vmatrix}$.

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 + \lambda)^2$.

Per cui gli autovalori reali di A sono $\lambda_1 = 2$ con $m_a(2) = 1$ e $\lambda_2 = -1$ con $m_a(-1) = 2$.

Siccome $m_g(2) = 1$ l'autospazio $E(\lambda_1) = E(2)$ ha dimensione 1. Per cui una sua base è costituita da un suo **qualsiasi** vettore **<u>non nullo</u>**. I vettori di $E(\lambda_1) = E(2)$ sono tutte e sole le terne soluzioni del sistema lineare **omogeneo** che ha $(A - \lambda_1 I) = (A - 2I)$ come matrice dei coefficienti. Per cui si ha subito il sistema $y = x + z = 0$. Quindi, una base di E(2) è un **qualsiasi** terna **non nulla** (x, y, z) tale che $y = x + z = 0$. <u>Ad esempio</u> **(1, 0, –1)**.

Analogamente, i vettori dell'autospazio $E(\lambda_2) = E(-1)$ sono tutte e sole le terne soluzioni del sistema lineare **omogeneo** che ha $(A - \lambda_2 I) = (A + I)$ come matrice dei coefficienti. Per cui si ha subito il sistema $x - 3y = 0$. Inoltre, $\dim E(-1) = m_g(-1) = 3 - rg(A + I) = 3 - 1 = 2$. Quindi, una base di E(–1) è formata da una **qualsiasi coppia** di terne (x, y, z) **linearmente indipendenti** tali che $x - 3y = 0$. <u>Ad esempio</u> **(3, 1, 0) e (0, 0, 1)**.

---

2) Determinare per quale **valore/i** del parametro reale t le equazioni seguenti $x + (t + 7)y = 0$, $ty + z = 0$, $3x - (t + 7)z = 0$, rappresentano tre piani <u>distinti</u> di uno stesso fascio.

Le tre equazioni rappresentano tre piani di uno stesso fascio se e solo se

$$rg\begin{bmatrix} 1 & t+7 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -t-7 & 0 \end{bmatrix} \leq 2, \text{ ovvero (siccome è nulla la IV colonna) } \det\begin{bmatrix} 1 & t+7 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 3 & 0 & -t-7 \end{bmatrix} = 0.$$

E, quindi, se e solo se $(t + 7)(3 - t) = 0$. Per $t = -7$ si ha che la I e la III equzione rappresentano lo **<u>stesso</u>** piano, per cui tale valore **<u>non</u>** è accettabile. Per $t = 3$ i tre piani sono a due a due distinti. Quindi, l'unico valore è $\mathbf{t = 3}$.

---

3) Scrivere i **parametri direttori** della retta t passante per l'origine O ed incidente sia la retta r: $x = x - 2y + 3z + 12 = 0$ che la retta s: $x + y - 12z - 17 = 2x + 7y = 0$.

Si verifica facilmente che le rette r e s sono sghembe. Infatti, viste le semplici equazioni si ha che

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & -12 & -17 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -2 & 3 & 12 \\ 1 & -12 & -17 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 7\det\begin{bmatrix} 3 & 12 \\ -12 & -17 \end{bmatrix} \neq 0$$

Inoltre, si vede subito che nessuna delle due contiene l'origine O. Quindi, la retta t esiste ed è unica. Inoltre, t si può esprimere come intersezione del piano α che contiene r ed O e del piano β che contiene s ed O. Dalle equazioni di r ed s si vede subito che $\alpha : x = 0$ e $\beta : 2x + 7y = 0$. Per cui $t : x = y = 0$ è l'asse Z delle quote. I suoi parametri direttori sono $\mathbf{k(0, 0, 1)}\ \forall \mathbf{k} \in \mathbf{R} - \{\mathbf{0}\}$.

.....

4) Calcolare la **distanza** tra le due rette r: $x - y - 5 = 5y - z - 1 = 0$ e s: $x - y = 5x - z = 0$.

Si vede subito che l'origine O appartiene alla retta s. Con semplici calcoli si vede subito che le due rette sono entrambe parallele al vettore (1, 1, 5). Per cui r e s sono parallele tra loro. Quindi il piano $\pi : x + y + 5z = 0$ passa per O ed è ortogonale alle due rette. Con semplici calcoli si trova che il punto d'intersezione tra r e π è il punto A(5, 0, –1). Infine si ha che $\mathbf{d(r, s) = d(A, O) = \sqrt{26}}$.

.....

5) Sulla retta r passante per il punto A(0, 0, –5) e perpendicolare al piano $x - 2y - 2z + 13 = 0$, determinare le **coordinate** dei punti che hanno distanza 4 dal piano π $2x - 2y + z + 1 = 0$.

Si vede subito che una terna di equazioni parametriche di r è data da (x, y, z) = (t, –2t, –2t–5).
Per cui un generico punto P di r ha coordinate (t, –2t, –2t–5). Imponendo che P abbia distanza 4 dal piano π si ottiene $\dfrac{|2t - 2(-2t) + (-2t - 5) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 4$ da cui $|t - 1| = 3$ e, infine, $t_1 = -2$ e $t_2 = 4$.

Quindi, i due punti sono $\mathbf{P_1(-2, 4, -1)}$ e $\mathbf{P_2(4, -8, -13)}$.

.....

6) Trovare l'equazione **canonica** della seguente conica $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 8x + 4y + 3 = 0$.

Poi, classificarla.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 6)\lambda$$

$\lambda_1 = 6$ et $\lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 = 6 \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 6$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(1, 1)$ $\forall \alpha \in R - \{0\}$.

Di conseguenza, gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 0$ sono tutte e sole le coppie $\beta(-1, 1)$ $\forall \beta \in R - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cioè gli autoversori $\mathbf{u_1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $\mathbf{u_2} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, si ha che

la matrice $C = [\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right]$ è una matrice ortogonale con $\det C = 1$.

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + 3 = 0$ dove $[d' \;\; e'] = [8 \;\; 4]C = [6\sqrt{2} \;\; -2\sqrt{2}]$

$6(x')^2 + 0(y')^2 + 6\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}\,y + 3 = 0$

$6(x')^2 + 6\sqrt{2}\,x + 3 - 2\sqrt{2}\,y = 0$

$6(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 2\sqrt{2}\,y = 0$

$3\sqrt{2}\;(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 2y = 0$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} X = x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = y' \end{cases}$ si ottiene l'equazione $3\sqrt{2}\,X^2 - 2Y = 0$ da cui

$$\mathbf{Y = \frac{3\sqrt{2}}{2}X^2} \quad \textbf{(parabola)}$$

GEOMETRIA svolgimento di uno scritto del 28 Giugno 2012

1) Siano $A = \begin{bmatrix} t & 3 \\ (t-2) & 2 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Se esiste, trovare il **valore** del parametro reale t per il quale il vettore X è un autovettore della matrice A. Scrivere anche l'**autovalore** relativo a X.

Il vettore X è un autovettore di A se e solo se esiste un numero reale λ tale che $AX = \lambda X$. Quindi, se e solo se $\begin{bmatrix} t & 3 \\ (t-2) & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ovvero $\begin{cases} -t-6 = -\lambda \\ -(t-2)-4 = -2\lambda \end{cases}$. Con semplici calcoli si ha

$$\mathbf{t = -10 \quad e \quad \lambda = -4}$$

---

2) Se esiste, trovare il **valore** del parametro reale t per il quale l'origine O e i punti A(0, 7, 0), B(–5, 4, 1) e C(t^2–3t, 0, 3–t) sono quattro punti a due a due distinti tra loro e complanari.

I punti O, A, B e C sono complanari se e solo se i vettori [OA], [OB] e [OC] sono complanari.

Quindi se e solo se $\det\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \\ t^2-3t & 0 & 3-t \end{bmatrix} = 0$ ovvero se e solo se $\det\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ t^2-3t & 3-t \end{bmatrix} = 0$ e, infine, se e solo se (t–3)(t–5) = 0. Per cui $t_1 = 3$ e $t_2 = 5$. Osserviamo però che per $t_1 = 3$ si ha che O ≡ C.

Per $t_2 = 5$ si hanno quattro punti a due a due distinti tra loro. Perciò l'unico valore è $\mathbf{t = +5}$.

---

3) Scrivere l'equazione del **piano** passante per l'origine O, perpendicolare al piano 2x – 3y + z = 0 e parallelo alla retta x = 2x – 3y + z = 0.

Siccome il nostro piano passa per l'origine la sua equazione è ax + by + cz = 0. Imponendo che sia perpendicolare al piano 2x – 3y + z = 0 si ha che 2a – 3b + c = 0. Imponendo il parallelismo con la retta x = 2x – 3y + z = 0 si ha $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = 0$ ovvero b + 3c = 0. Con semplici calcoli, si ottiene (a, b, c) = (–5c, –3c, c). Scegliendo c = –1, si ha (a, b, c) = (5, 3, 1). Quindi il piano richiesto è

$$\mathbf{5x + 3y - z = 0}$$

---

4) Scrivere le componenti di un **versore** avente la stessa direzione della retta di minima distanza tra le rette sghembe r : 2x – 3z + 12 = y + z = 0 e s : x + 7y = 2x + 2y – z = 0.

(modo I) Si calcolano i parametri direttori delle rette r e s.

Una terna di parametri direttori della retta r è data dalle componenti del vettore $\mathbf{u} = (3, -2, 2)$.

Una terna di parametri direttori della retta s è data dalle componenti del vettore $\mathbf{v} = (7, -1, 12)$.

A questo punto si ha che una terna di parametri direttori della retta di minima distanza è data dalle componenti del prodotto vettoriale $\mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$. Con semplici calcoli si ha che $\mathbf{w} = (22, 22, -11)$.

Per cui le componenti dei due versori richiesti sono $\pm\frac{1}{3}(\mathbf{2, 2, -1})$.

(modo II) Si trova il piano contenente una delle due rette e parallelo all'altra.

Combinando linearmente le equazioni di r

$$\lambda(2x - 3z + 12) + \mu(y + z) = 0$$

si ottiene l'equazione di un generico piano contenente r

$$2\lambda x + \mu y + (\mu - 3\lambda)z + 12\lambda = 0$$

Imponendo il parallelismo con la retta s si ha $\det\begin{bmatrix} 2\lambda & \mu & \mu - 3\lambda \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 0$ da cui, con semplici calcoli,

$2\lambda - \mu = 0$. Scegliendo $\lambda = 1$ si ha $\mu = 2$ e un'equazione del piano è $2x + 2y - z + 12 = 0$.

I versori aventi la stessa direzione della retta di minima distanza sono i versori perpendicolari a tale piano. Per cui le componenti di tali versori sono $\pm\frac{1}{3}(\mathbf{2, 2, -1})$

---

6) Sia γ la circonferenza passante per i punti O(0, 0, 0), A(3, 0, 0) e B(0, 0, –7). Scrivere le equazioni delle due **sfere** contenenti γ e aventi il centro a distanza 1 dal piano sul quale giace γ.

Si vede subito che la circonferenza γ giace sul piano $y = 0$. Il centro H della circonferenza γ si trova nel punto d'intersezione degli assi delle due corde OA e OB. Per cui si ha subito H(3/2, 0, –7/2).

Il centro C della sfera si trova sulla retta passante per H e perpendicolare al piano $y = 0$. Quindi, le sue coordinate sono del tipo C(3/2, t, –7/2). Imponendo che la distanza di C dal piano $y = 0$ su cui giace γ sia 1 si ha subito che $|t| = 1$ ovvero $t = \pm 1$. Per cui i centri sono $C_{1/2}(3/2, \pm 1, -7/2)$. A questo punto, tenendo anche conto che le sfere passano per l'origine, si scrivono subito le loro equazioni

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 3x \pm 2y + 7z = 0}$$

---

5) Scrivere l'**equazione canonica** della seguente conica $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x - 10y + 5 = 0$.

Poi, classificarla.

$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 4)(\lambda - 6)$

$\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 6$

$\lambda_1 = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 4$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(1, 1)$ $\forall \alpha \in R - \{0\}$.

Di conseguenza, gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 6$ sono tutte e sole le coppie $\beta(-1, 1)$ $\forall \beta \in R - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cioè gli autoversori $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $\mathbf{u}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, si ha che

la matrice $C = [\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right]$ è una matrice ortogonale con $\det C = 1$.

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + 5 = 0$ dove $[d' \;\; e'] = [2 \;\; -10]C = [-4\sqrt{2} \;\; -6\sqrt{2}]$

$4(x')^2 + 6(y')^2 - 4\sqrt{2}\,x - 6\sqrt{2}\,y + 5 = 0$

$4(x')^2 - 4\sqrt{2}\,x + 6(y')^2 - 6\sqrt{2}\,y + 5 = 0$

$4(x' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 2 + 6(y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 3 + 5 = 0$

$2(x' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 3(y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 0$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} X = x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ si ottiene l'equazione canonica

$$\mathbf{2x^2 + 3y^2 = 0} \qquad \textbf{(conica avente un solo punto reale)}$$

.....

GEOMETRIA svolgimento di uno scritto del 19 Luglio 2012

1) Sia V(w, x, y, z) il sottospazio di R^4 avente B = {(0, 1, 0, –1), (–2, 0, 0, 1)} come base. Scrivere le **equazioni** (nelle incognite w, x, y e z) del sottospazio V.

Un generico vettore (w, x, y, z) di R^4 appartiene al sottospazio V se e solo se vale 2 il rango della matrice $C = \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tenendo conto che $\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ è un minore non nullo di ordine due della matrice C, abbiamo che rgC = 2 se e solo se $\det\begin{bmatrix} w & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ e $\det\begin{bmatrix} w & x & z \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$.

Con semplici calcoli otteniamo $\mathbf{y = 0}$ **e** $\mathbf{w + 2x + 2z = 0}$

.....

2) Al variare del parametro reale t, **studiare** il sistema lineare tx + 2y – 3t = 2x + ty – 3t = 0 nelle incognite (x, y). In particolare, quando il sistema è compatibile, scrivere le sue **soluzioni**.

Il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a (t – 2)(t + 2).

1) Per cui $\forall t \neq \pm 2$ si ha un sistema di Cramer e, quindi, **una ed una sola soluzione**.

Con semplici calcoli, si ha che tale soluzione è data $\mathbf{(x, y) = \frac{3t}{t+2}(1, 1)}$

2) Per $\mathbf{t = -2}$ il sistema è equivalente al sistema x – y – 3 = x – y + 3 = 0.

E' immediato rendersi conto che tale sistema **non ha soluzioni**.

3) Per $\mathbf{t = +2}$ il sistema è equivalente all'equazione x + y – 3 = 0.

Quindi, il sistema ha ∞^1 **soluzioni** date da $\mathbf{(x, y) = (\alpha, 3-\alpha)} \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}$.

.....

3) Trovare un **versore** parallelo alla retta t passante per l'origine O(0, 0, 0) ed incidente le due rette sghembe r: $2x - 3y + 10z - 3 = 2x - y = 0$ e s: $y + 2z = x + 12y - 25z + 9 = 0$.

Si vede subito che nessuna delle due rette contiene l'origine O. Quindi, la retta t esiste ed è unica. Inoltre, t si può esprimere come intersezione del piano α che contiene r ed O e del piano β che contiene s ed O. Dalle equazioni di r ed s si vede subito che $\alpha : 2x - y = 0$ e $\beta : y + 2z = 0$. Per cui $t : 2x - y = 0$ e $\beta : y + 2z = 0$. Una terna di parametri direttori della retta t è data da $(1, -2, 1)$.

Per cui i due versori paralleli alla retta t sono $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$

.....

4) Calcolare la **distanza** tra la retta $r : 2x - y = z - 4 = 0$ e la retta $s : z = 2x - y - 5 = 0$.

Si vede subito che le due rette sono parallele tra loro e hanno la stessa direzione del vettore $(1, 2, 0)$. Il punto $A(0, 0, 4)$ è un punto di r. Il piano passante per A e ortogonale alle due rette è $x + 2y = 0$. Tale piano incontra la retta s nel punto $B(2, -1, 0)$. A questo punto la distanza tra le due rette r e s è uguale alla distanza tra i punti A e B che, con semplici calcoli, si vede essere uguale a $\sqrt{21}$.

.....

5) Siano A, B e C i punti di intersezione del piano di equazione $x + 3y + z - 18 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente. Trovare le **coordinate** dell'ortocentro del triangolo ABC.

Si ha subito che $A(18, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$ e $C(0, 0, 18)$. Sia α il piano passante per B e ortogonale al vettore [CA]. Sia β il piano passante per C e ortogonale al vettore [BA]. L'ortocentro H (punto d'incontro delle altezze) del triangolo ABC è il punto d'incontro dei piani α, β e $x + 3y + z - 18 = 0$.

Siccome $[CA] = 18(1, 0, -1)$, si ha $\alpha : x - z = 0$. Siccome $[BA] = 6(3, -1, 0)$, si ha $\beta : 3x - y = 0$. Quindi, le coordinate dell'ortocentro si ottengono trovando l'unica soluzione del semplice sistema

$x - z = 3x - y = x + 3y + z - 18 = 0$ da cui si ottiene $\mathbf{H}\left(\frac{18}{11}, \frac{54}{11}, \frac{18}{11}\right)$

.....

6) Sia $r : 3x - 4y - 26 = 0$ la direttrice delle due parabole passanti per il punto $A(2, 0)$ e aventi i fuochi sull'asse X delle ascisse. Trovare le **coordinate** dei due fuochi.

Con un semplice calcolo si trova che la distanza del punto $A(2, 0)$ dalla direttrice $r : 3x - 4y - 26 = 0$ è uguale a 4. Quindi il punto $A(2, 0)$ deve essere alla stessa distanza 4 dal fuoco $F(x, 0)$ che si trova sull'asse X delle ascisse. Per cui $|x - 2| = 4$ e, quindi, $\mathbf{F_1(-2, 0)}$ $\mathbf{F_2(6, 0)}$

1) Dopo aver dato la **definizione** di "*dipendenza lineare di n vettori*", **completare** e **dimostrare** la proposizione seguente: "*Sia V_R uno spazio vettoriale reale. Se i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ di V_R sono linearmente dipendenti, allora comunque si scelgano altri p vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_{p-1}, \boldsymbol{v}_p$ di V_R si ha che i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_{p-1}, \boldsymbol{v}_p$ sono linearmente ……*".

2) Dopo aver dato la **definizione** di "*dipendenza lineare di n vettori*", **dimostrare** il teorema di "*caratterizzazione della lineare dipendenza*".

3) Dopo aver **SOLO enunciato** il teorema di "*caratterizzazione di un sottospazio*", **completare** e **dimostrare** la proposizione seguente: "*Sia V_R uno spazio vettoriale reale. Comunque presi n vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ di V_R il sottoinsieme U contenente tutti e soli i vettori di V_R che sono combinazioni lineari dei vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ è un ……*".

4) Dopo aver dato la **definizione** di "*sottospazio generato da n vettori*", **dimostrare** la proposizione seguente: "*Sia V_R uno spazio vettoriale reale. Se U è il sottospazio di V_R generato dai vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ e W è il sottospazio di V_R generato dai vettori $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ allora $U = W$ se e solo se $\boldsymbol{w} \in U$.*"

5) Dopo aver dato la **definizione** di "*dipendenza lineare di n vettori*", enunciare la condizione affinchè n vettori siano linearmente indipendenti. Poi, **completare** e **dimostrare** la proposizione seguente: "*Sia V_R uno spazio vettoriale reale. Sia U il sottospazio di V_R generato dai vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ e sia $\boldsymbol{v} \notin U$. Se i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ sono linearmente indipendenti, allora i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}$ sono linearmente ……*".

6) Dopo aver dato la **definizione** di "*base di uno spazio vettoriale*", **dimostrare** il teorema di "*caratterizzazione di una base*" (**o** il teorema di "*caratterizzazione della lineare indipendenza*").

7) Dopo aver dato la **definizione** di "*matrice invertibile*", **dimostrare** che "*se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine e invertibili, allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*".

8) Dopo aver dato la **definizione** di "*matrice invertibile*" e di "*trasposta di una matrice*", **dimostrare** che "*se A è una matrice invertibile, allora $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$*".

9) **Enunciare** e **dimostrare** il "*1° teorema di Laplace*" (in alternativa alla dimostrazione, illustrare le altre proprietà del determinante).

10) **Enunciare** e **dimostrare** il "*2° teorema di Laplace*" (in alternativa alla dimostrazione, illustrare le altre proprietà del determinante).

11) Dopo aver dato la **definizione** di "*soluzione*" di un sistema lineare, **enunciare** e **dimostrare** il teorema di "*Rouché-Capelli*".

12) Dopo aver dato la **definizione** di "*sistema lineare normale*", **enunciare** e **dimostrare** il teorema di "*Cramer*".

13) Dopo aver dato la **definizione** di "*autosoluzione*", **enunciare** e **dimostrare** una condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare omogeneo abbia autosoluzioni.

14) Dopo aver dato la **definizione** di sistema lineare "*omogeneo*", **completare** e **dimostrare** la proposizione: "*L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno* ……".

15) Dopo aver dato la **definizione** di "*sistema omogeneo associato*" ad un sistema lineare AX = B, **dimostrare** la seguente proposizione: "*Sia AX = B un sistema lineare compatibile in n incognite e sia Y_p una sua soluzione. Una n-upla Z è una soluzione del sistema AX = B se e solo se esiste una soluzione X_0 del sistema omogeneo associato tale che $Z = Y_p + X_0$*".

16) Dopo aver dato la **definizione** di autovalore e di autovettore, **dimostrare** che "*gli autovalori reali di una matrice quadrata sono tutte e solo le radici reali del suo polinomio caratteristico*".

17) Dopo aver dato la **definizione** di autovalore e di autovettore, **completare** e **dimostrare** la seguente proposizione: "*se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ sono s autovalori a due a due distinti tra loro e se $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{s-1}, V_s$ sono s autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ rispettivamente, allora i vettori $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{s-1}, V_s$ sono linearmente* ……".

18) Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n e sia β un suo autovalore reale. Dare la **definizione** di "*molteplicità algebrica*" $m_a(\beta)$ e "*molteplicità geometrica*" $m_g(\beta)$ dell'autovalore β ed **enunciare** la relazione tra le due molteplicità. Infine, **enunciare** le condizioni necessarie e sufficienti affinchè esista una base di R^n formata da autovettori di A.

19) Dopo aver dato la **definizione** di "*prodotto scalare di due vettori liberi*" illustrarne le **proprietà**

20) Dopo aver dato la **definizione** di "*prodotto vettoriale di due vettori liberi*" illustrarne le **proprietà**, con particolare attenzione al significato geometrico del modulo.

21) Dopo aver dato la **definizione** di "*prodotto misto di tre vettori liberi*", **dimostrare** il significato geometrico del suo valore assoluto.

22) **Enunciare** e **dimostrare** la condizione necessaria e sufficiente di complanarità di 4 punti.

23) **Studiare** (analiticamente) la mutua posizione di due piani.

24) **Studiare** (analiticamente) la mutua posizione di una retta ed un piano.

25) **Studiare** (analiticamente) la mutua posizione di due rette nello spazio.

26) Enunciare e **dimostrare** il significato geometrico dei coefficienti delle incognite nell'equazione cartesiana di un piano.

27) Enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo della distanza di un punto da un piano.

28) Dopo **aver spiegato** cosa si intende per "*angolo tra due rette **(nello spazio)***" enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo dell'angolo tra due rette.

29) Dopo **aver spiegato** cosa si intende per "*angolo tra due piani*" enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo dell'angolo tra due piani.

30) Dopo **aver spiegato** cosa si intende per "*angolo tra una retta e un piano*", enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo dell'angolo tra una retta e un piano.

Geometria 9 Gennaio 2014

1) Trovare una base per lo spazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo: $2x + y - 9z = 3x - y + 14z = x - y + 12z = 0$.

La matrice associata al sistema è $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -9 \\ 3 & -1 & 14 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix}$ Riducendola a gradino otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 12 \\ 3 & -1 & 14 \\ 2 & 1 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 12 \\ 0 & 2 & -22 \\ 0 & 3 & -33 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'ultima matrice è la matrice del sistema lineare $x + z = y - 11z = 0$ equivalente al sistema iniziale. Si vede subito che la soluzione generale di quest'ultimo sistema è $(x, y, z) = (x, -11x, -x) = x(1, -11, -1)$. Per cui una base dello spazio delle soluzioni è data da una qualunque terna $x(1, -11, -1)$ con $x \neq 0$.

.....

2) Tra le rette passanti per il punto A(0,–2,–3) trovare, **se esiste**, quella che si appoggia all'asse Y e alla retta $r : y = z + 2 = 0$. Altrimenti motivare la risposta.

Dalle sue equazioni, si vede subito che la retta r è parallela all'asse X. Quindi, la retta r e l'asse Y sono sghembe. Inoltre, si vede subito che il punto A non appartiene né alla retta r né all'asse Y. Per cui **esiste una ed una sola retta**, chiamiamola s, passante per A e che si appoggia sia alla retta r che all'asse Y. Tale retta s si può ottenere come intersezione del piano, chiamiamolo α, contenente la retta r e passante per A e il piano, chiamiamolo β, contenente l'asse Y e passante per A. Per trovare il piano α consideriamo il fascio di piani per r $\lambda y + \mu(z + 2) = 0$ e imponiamo il passaggio per A ottenendo l'equazione omogenea $2\lambda + \mu = 0$. Una sua soluzione è la coppia $(\lambda, \mu) = (1,-2)$. Per cui $\alpha : y - 2z - 4 = 0$. In modo analogo si considera il fascio di piani per l'asse Y $\lambda x + \mu z = 0$ e si impone il passaggio per A ottenendo $\mu = 0$. Per cui $\lambda \neq 0$. Quindi, si ha che $\beta : x = 0$. Infine, si ha che $s : y - 2z - 4 = x = 0$.

.....

3) Trovare la distanza tra le seguenti rette:

$r : y - 2z = x = 0$ e $s : y - 2z - 10 = x - 3 = 0$.

Si vede subito che i piani $y - 2z = 0$ e $y - 2z - 10 = 0$ sono paralleli tra loro e anche che i piani $x = 0$ e $x - 3 = 0$ sono paralleli tra loro. Quindi, anche le rette r e s sono parallele tra loro. Con semplici calcoli si trova una terna di loro parametri direttori $(l, m, n) = (0, 2, 1)$. Inoltre, si vede subito che

l'origine O(0,0,0) appartiene alla retta r. Se indichiamo con α il piano passante per l'origine O e perpendicolare ad r e s si ha subito che $\alpha : 2y + z = 0$. Ora indichiamo con A il punto d'intersezione del piano α con la retta s. Poiché A è la proiezione ortogonale di O su s, la distanza tra le due rette parallele r e s è proprio uguale alla distanza tra i due punti O e A. Considerando il sistema lineare $y - 2z - 10 = x - 3 = 2y + z = 0$ dato dalle due equazioni della retta s e dall'equazione del piano α, con semplici calcoli si ottengono le coordinate $(x, y, z) = (3, 2, -4)$ di A. Infine, si ha che $d(r, s) = d(A, O) = \sqrt{29}$.

.....

(4) Sulla retta r passante per il punto A(1,–2,–3) e parallela all'asse Z trovare i punti che distano 4 dal piano $\pi : 2x - 2y - z - 4 = 0$.

Si vede subito che $(x, y, z) = (1, -2, t-3)$ è una terna di equazioni parametriche di r. Per cui un generico punto di r è dato da P(1,–2, t–3). Imponendo che la distanza di P dal piano π sia 4 otteniamo $\frac{|2(1)-2(-2)-(t-3)-4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = 4$. Con semplici calcoli otteniamo $|5-t| = 12$ da cui $t_1 = -7$ e $t_2 = 17$. Infine, $P_1(1,-2,-10)$ e $P_2(1,-2,14)$.

.....

5) Trovare l'equazione canonica e classificare la conica di equazione

$11x^2 + 2\sqrt{3}xy + 9y^2 - 6x - 18\sqrt{3}y + 15 = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 8)(\lambda - 12)$$

$\lambda_1 = 8$ et $\lambda_2 = 12$

$$\lambda_1 = 8 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{3}x + y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 8$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(1, -\sqrt{3})$ $\forall \alpha \in R - \{0\}$.

Di conseguenza, gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 12$ sono tutte e sole le coppie $\beta(\sqrt{3}, 1)$ $\forall \beta \in R - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2}$, cioè gli autoversori $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $\mathbf{u}_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, si ha che la matrice $C = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$ è una matrice ortogonale con $\det C = 1$.

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' - 1 = 0$ dove $[d' \quad e'] = [-6 \quad -18\sqrt{3}]C = [24 \quad -12\sqrt{3}]$

$8(x')^2 + 12(y')^2 + 24x' - 12\sqrt{3}\,y' + 15 = 0$

$8(x')^2 + 24x' + 12(y')^2 - 12\sqrt{3}\,y' + 15 = 0$

$8(x' + \frac{3}{2})^2 - 18 + 12(y' - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 9 + 15 = 0$

$8(x' + \frac{3}{2})^2 + 12(y' - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 12 = 0$

$\frac{2}{3}(x' + \frac{3}{2})^2 + (y' - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} X = x' + \frac{3}{2} \\ Y = y' - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ si ottiene l'equazione canonica

$$\frac{2}{3}X^2 + Y^2 = 1 \quad \text{(ellisse)}$$

6) Sia Σ la sfera di centro l'origine O(0,0,0) e passante per A(–5,0,0). Sia π il piano parallelo al piano XZ e passante per il punto B(–3,–4, 2). Trovare il centro e il raggio della circonferenza C ottenuta secando la sfera Σ col piano π.

Poiché il piano π è parallelo al piano XZ : $y = 0$ una sua equazione è del tipo $y + k = 0$. Imponendo il passaggio per il punto B si ha $k = 4$. Quindi, $\pi : y + 4 = 0$.

Il centro H della circonferenza si ottiene intersecando il piano π (contenente la circonferenza) con la retta s ad esso perpendicolare e passante per il centro della sfera

Una retta perpendicolare al piano $\pi : y + 4 = 0$ è una retta parallela all'asse Y. Poiché la retta s deve passare per l'origine (centro della sfera) la retta s è proprio l'asse Y. Quindi, il centro della circonferenza è H(0, –4, 0).

Si vede subito che la sfera ha raggio $R = 5$ (che è la distanza del suo punto A del centro O). Il raggio r della circonferenza è uguale a $\sqrt{R^2 - d^2}$ dove d è la distanza del piano $\pi : y + 4 = 0$ (contenente la circonferenza) dal centro O della sfera. Poiché si vede subito che $d = 4$ si ha infine che $r = 3$.

GEOMETRIA 23 Gennaio 2014

1) Sia $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$. **Se possibile**, trovare una matrice diagonale Λ e una matrice invertibile C tali che $A = C\Lambda C^{-1}$. Altrimenti, motivare la risposta.

Il polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{bmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{bmatrix} = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$

Poichè la matrice A ha tre autovalori reali $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$ a due a due distinti tra loro, essa è sicuramente diagonalizzabile. Troviamo ora le matrici Λ e C.

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono tutte e sole le autosoluzioni del sistema lineare omogeneo $(A-\lambda_1 I)X = 0$ ovvero $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. Si ha subito che la soluzione generale di tale sistema è data da tutte e solo le terne $(x, y, z) = x(1, 0, -1)$ per ogni valore reale di x. Quindi, un autovettore è $\mathbf{v_1} = (1, 0, -1)$. Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = 1$ sono tutte e sole le autosoluzioni del sistema lineare omogeneo $(A-\lambda_2 I)X = 0$ ovvero $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. Si ha subito che la soluzione generale di tale sistema è data da tutte e solo le terne $(x, y, z) = y(0, 1, 0)$ per ogni valore reale di y. Quindi, un autovettore è $\mathbf{v_2} = (0, 1, 0)$.

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_3 = 2$ sono tutte e sole le autosoluzioni del sistema lineare omogeneo $(A-\lambda_3 I)X = 0$ ovvero $\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. Si ha subito che la soluzione generale di tale sistema è data da tutte e solo le terne $(x, y, z) = z(1, 0, 1)$ per ogni valore reale di z. Quindi, un autovettore è $\mathbf{v_3} = (1, 0, 1)$. Per cui una coppia di matrici richieste è data da

$\Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ e $C = [\mathbf{v_1}|\mathbf{v_2}|\mathbf{v_3}] = \left[\begin{array}{c|c|c}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{array}\right]$.

.....

2) Al variare del parametro reale t, **studiare** il sistema lineare nelle incognite (x, y):

$12x - tx + ty - t = tx - 12x + 2y + t = 0.$

Il sistema può essere così riscritto. $\begin{bmatrix} 12-t & t \\ 12-t & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$. Il determinante della matrice completa è $(t-12)(t+2)$. Quindi, per ogni $t \in R-\{-2, 12\}$ il sistema è un sistema di Cramer e la sua unica soluzione è data dalla coppia $(x, y) = (\frac{t}{12-t}, 0)$. Infatti,

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} t & t \\ t & -2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 12-t & t \\ 12-t & -2 \end{bmatrix}} = \frac{-t(t+2)}{(t-12)(t+2)} = \frac{t}{12-t} \quad \text{e} \quad y = \frac{\det\begin{bmatrix} 12-t & t \\ 12-t & t \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 12-t & t \\ 12-t & -2 \end{bmatrix}} = \frac{0}{(t-12)(t+2)} = 0.$$

Per $t = -2$ si ottiene il sistema $\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ che è equivalente al sistema costituito dall'unica equazione $7x - y = -1$. Tale sistema ha ∞^1 soluzioni e si vede subito che la sua soluzione generale è $(x, y) = (x, 7x+1) = (0, 1) + x(1, 7)$.

Per $t = 12$ si ottiene il sistema $\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix}$ che è equivalente al sistema $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Poiché il rango della matrice incompleta è 1 mentre quello della matrice completa è 2 si ha che il sistema non ha alcuna soluzione.

.....

3) Scrivere le equazioni dei piani paralleli al piano XZ e aventi da esso una distanza uguale a quella tra l'origine O(0,0,0) e la retta r di equazione $x - 4y - 17 = z = 0$.

Una terna di parametri direttori della retta r è data da $(l, m, n) = (4, 1, 0)$. Il piano π passante per O e perpendicolare alla retta r ha equazione $4x + y = 0$. La terna di coordinate del punto A d'intersezione tra il piano π e la retta r è data dalla soluzione del sistema lineare $x - 4y - 17 = z = 4x + y = 0$.

Con semplici calcoli si ha $A(1, -4, 0)$. Poiché il punto A è la proiezione ortogonale di O su r si ha che $d(O, r) = d(O, A) = \sqrt{17}$. Un piano parallelo al piano $XZ : y = 0$ ha equazione $y + k = 0$. Imponendo che tale piano abbia distanza $\sqrt{17}$ dall'origine O si ha subito che $|k| = \sqrt{17}$ e, quindi, $k = \pm\sqrt{17}$. Infine, $y \pm \sqrt{17} = 0$.

.....

4) Siano $A(0, -1, 2)$ e $B(t, 0, 0)$. Trovare i valori del parametro reale t per i quali la retta r passante per A e B forma col piano YZ un angolo θ di $\pi/3$ radianti.

E' un problema riguardante l'angolo tra una retta ed un piano. La formula che si utilizza in questo caso è $sen\vartheta = \dfrac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$.

Se come terna di parametri direttori della retta r consideriamo la terna delle componenti del vettore libero AB si ha che (l, m, n) = (t, 1, –2) diverso dal vettore nullo per ogni valore del parametro reale t. Per il piano YZ di equazione x = 0 si ha che (a, b, c) = (1, 0, 0). Inserendo i nostri dati nella formula precedente si ha $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|t|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\sqrt{t^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{|t|}{\sqrt{t^2+5}}$ da cui $\sqrt{3t^2+15} = 2|t|$.

Elevando al quadrato si ottiene subito $t^2 = 15$ e, infine, $t = \pm\sqrt{15}$.

.....

5) Trovare l'equazione canonica e classificare la conica di equazione

$13x^2 - 10\sqrt{3}\,xy + 23y^2 + 2x - 18\sqrt{3}\,y + 13 = 0$

$A = \begin{bmatrix} 13 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 23 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 8)(\lambda - 12) \qquad \lambda_1 = 8 \text{ et } \lambda_2 = 28$

$\lambda_1 = 8 \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x - \sqrt{3}\,y = 0$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 8$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(\sqrt{3}, 1)$ $\forall \alpha \in R - \{0\}$.

Di conseguenza, gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 12$ sono tutte e sole le coppie $\beta(1, -\sqrt{3})$ $\forall \beta \in R - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, cioè gli autoversori $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $\mathbf{u}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, si ha che la matrice $C = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right]$ è una matrice ortogonale con $\det C = 1$.

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' - 1 = 0$ dove $[d' \;\; e'] = [2 \;\; -18\sqrt{3}\,]C = [-8\sqrt{3} \;\; -28]$

$8(x')^2 + 28(y')^2 - 8\sqrt{3}\,x' - 28y' + 13 = 0$

$8(x')^2 - 8\sqrt{3}\,x' + 28(y')^2 - 28y' + 13 = 0$

$8(x' - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 6 + 28(y' - \frac{1}{2})^2 - 7 + 13 = 0$

$8(x' - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 28(y' - \frac{1}{2})^2 = 0$

$2(x' - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 7(y' - \frac{1}{2})^2 = 0$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} X = x' - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = y' - \frac{1}{2} \end{cases}$ si ottiene l'equazione canonica

$2X^2 + 7Y^2 = 0$ (conica con un solo punto reale)

.....

6) Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $\pi: 3x + 8y - 6z = 0$ in O(0,0,0) e avente il centro sul piano $\pi': 2x - 3 = 0$.

Indicato con $C(x_0, y_0, z_0)$ il centro della sfera, poiché essa passa per l'origine O la sua equazione è $x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z = 0$.

Il centro della sfera si trova nel punto d'intersezione del piano π' con la retta r passante per O è perpendicolare al piano π. Si vede subito che una terna di equazioni parametriche della retta r è data da $(x, y, z) = (3t, 8t, -6t)$. Mettendole a sistema con l'equazione del piano π' si ha che $2(3t) - 3 = 0$ ovvero $t_0 = 1/2$. Da cui si ha subito che il centro della sfera è C(3/2, 4, –3).

Infine, l'equazione della sfera è $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 8y + 6z = 0$.

GEOMETRIA 11 Febbraio 2014

1) **Se esiste**, trovare una coppia $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tale che la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$ **non** abbia tre autovalori reali a due a due distinti **e, allo stesso tempo, sia** diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 7 & 0 \\ 0 & h-\lambda & 0 \\ -2 & k & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda)(h-\lambda)$.

Quindi la matrice A ha i seguenti autovalori reali $\lambda_1=3$, $\lambda_2=5$ e $\lambda_3=h$. La matrice A **non** ha tre autovalori reali a due a due distinti se e solo se $h=5$ o $h=3$.

Per $h=5$ si ha che $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$ e che l'autovalore $\lambda_1=5$ ha molteplicità algebrica 2. Affinchè la matrice sia diagonalizzabile è necessario e sufficiente che anche la sua molteplicità geometrica sia 2. La molteplicità geometrica è uguale alla dimensione dell'autospazio E(5) ovvero alla dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A-5I)X=0$ che è uguale a $3-\text{rg}(A-5I)$. Per cui è necessario e sufficiente che sia $3-\text{rg}(A-5I) = 2$ ovvero $\text{rg}(A-5I) = 1$.

Poiché $(A-5I) = \text{rg}\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & k & -2 \end{bmatrix}$ il suo rango è 2 per ogni valore di k. Per cui per $h=5$ la matrice A non è diagonalizzabile.

Per $h=3$ si ha che $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$ e che l'autovalore $\lambda_1=3$ ha molteplicità algebrica 2. Affinchè la matrice sia diagonalizzabile è necessario e sufficiente che anche la sua molteplicità geometrica sia 2. La molteplicità geometrica è uguale alla dimensione dell'autospazio E(3) ovvero alla dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A-3I)X=0$ che è uguale a $3-\text{rg}(A-3I)$. Per cui è necessario e sufficiente che sia $3-\text{rg}(A-3I) = 2$ ovvero $\text{rg}(A-3I) = 1$.

Poiché $(A-3I) = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & k & 0 \end{bmatrix}$ il suo rango è 1 se e solo se $k = -7$. Per cui la coppia richiesta è $(h, k) = (3, -7)$.

.....

2) Del sistema $3x - y + 11z - 19 = x - y + 9z - 7 = 2x + y - 6z - 11 = 0$ trovare la soluzione **generale** X_G oppure una soluzione particolare X_P ed una base B dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo ad esso associato.

La matrice associata al sistema è $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 11 & -19 \\ 1 & -1 & 9 & -7 \\ 2 & 1 & -6 & -11 \end{array}\right]$ Riducendola a gradino otteniamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & 11 & -19 \\ 2 & 1 & -6 & -11 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 9 & -7 \\ 0 & 2 & -16 & 2 \\ 0 & 3 & -24 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ L'ultima matrice è la matrice del sistema lineare $x + z - 6 = y - 8z + 1 = 0$

equivalente al sistema iniziale. Si vede subito che la soluzione generale di quest'ultimo sistema è $(x, y, z) = (6-z, 8z-1, z) = (6, -1, 0) + z(-1, 8, 1)$.

.....

3) Sia $A(1, \sqrt{47}, -10)$. Sulla retta $y = z + 9 = 0$ trovare due punti B e C tali che il triangolo ABC sia equilatero.

Si vede subito che la retta r è parallela all'asse X e una terna di sue equazioni parametriche è data da $(x, y, z) = (t, 0, -9)$. Se indichiamo con $H(h, 0, -9)$ il punto d'intersezione della retta r con il piano π perpendicolare ad r e passante per A si ha che H la proiezione ortogonale del punto A sulla retta r. Poiché il piano π è parallelo al piano YZ l'ascissa di H è uguale a quella di A. Quindi, $H(1, 0, -9)$. La distanza di A da H si calcola facilmente ed è $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Poiché AH è l'altezza del triangolo equilatero ABC si ha subito che il lato misura 8. Infine, i punti B e C sono i due punti $(t, 0, -9)$ di r tali che la loro distanza da H è uguale a 4 (metà del lato). Per cui $|t - 1| = 4$ ovvero $t_1 = 5$ e $t_2 = -3$. Infine si ha che i punti richiesti sono $B(5, 0, -9)$ e $C(-3, 0, -9)$.

.....

4) Siano $A(-1, 0, 0)$, $B(0, t, 0)$ e $C(0, 0, \sqrt{11})$. Trovare i valori del parametro reale t per i quali il piano passante per A, B e C forma col piano XZ un angolo di $\frac{2}{3}\pi$ radianti.

E' un problema riguardante l'angolo tra due piani. La formula che si utilizza in questo caso è $\cos\vartheta = \pm\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$. Se indichiamo con α_1 il piano $XZ: y = 0$ si ha subito che $(a_1, b_1, c_1) = (0, 1, 0)$. Se indichiamo con α_2 il piano passante per A, B e C allora un vettore $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ perpendicolare al piano α_2 è dato dal prodotto vettoriale dei due vettori

$\vec{AB} = \vec{i} + t\vec{j}$ e $\vec{AC} = \vec{i} + \sqrt{11}\vec{k}$. Tale prodotto vettoriale si calcola col determinante simbolico

$$\vec{v} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & t & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{11} \end{bmatrix} = t\sqrt{11}\,\vec{i} - \sqrt{11}\,\vec{j} - t\vec{k}$$. Per cui $(a_2, b_2, c_2) = (t\sqrt{11}, -\sqrt{11}, -t)$.

Inserendo i nostri dati nella formula precedente si ha $-\frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{11}}{\sqrt{11t^2 + 11 + t^2}\sqrt{1^2}}$ da cui $\sqrt{12t^2 + 11} = 2\sqrt{11}$. Elevando al quadrato si ottiene subito $4t^2 = 11$ e, infine, $t = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}$.

.....

5) Trovare la conica passante per i punti A(2, 0), B(3, 1), C(2, 1), D(4, 2), E(2, 2).

Si vede subito che i punti A, C ed E sono allineati e la retta passante per essi è $r : x - 2 = 0$.

Si vede subito che i punti A, B e D sono allineati e la retta passante per essi è $s : x - y - 2 = 0$.

Quindi, la conica è l'unione delle due rette r e s per cui la sua equazione è data dal prodotto delle due equazioni di r e s ovvero $(x - 2)(x - y - 2) = 0$.

.....

6) Scrivere l'equazione del piano tangente in A(–18, 1, –4) alla sfera di centro C(–20, 1, 5).

Si vede subito che il piano richiesto è il piano π passante per A e perpendicolare al vettore $\vec{CA} = 2\vec{i} - 9\vec{k}$. Quindi, la sua equazione è $2(x+18) + 0(y-1) - 9(z+4) = 0$ ovvero $2x - 9z = 0$.

GEOMETRIA 11 Giugno 2014

1) Per quali valori del parametro reale t la matrice $A=\begin{bmatrix} -7t & -4t \\ 8t^2 & t \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile?

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det\begin{bmatrix} -7t-\lambda & -4t \\ 8t^2 & t-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 6t\lambda - 7t^2 + 32t^3$.

Il discriminante di $p_A(\lambda)$ è $\Delta = 64t^2(1 - 2t)$.

Per $t = 0$ la matrice A è la matrice nulla e, quindi, è diagonalizzabile (essendo diagonale).

Per ogni $t \neq 0$ la matrice A non è una matrice diagonale e, quindi, è diagonalizzabile se e solo se $\Delta > 0$ ovvero $t < 1/2$. Per cui la matrice A è diagonalizzabile se e solo se **$t < 1/2$**.

.....

2) Se le rette $r : 2x + 5y - z - 1 = x - 1 = 0$ e $s : 5y - z = 3x + 10y - 2z = 0$ sono sghembe, allora calcolare la loro distanza. Altrimenti, trovare il piano che le contiene.

Si vede subito (calcolando i parametri direttori) che le due rette sono parallele e, quindi, complanari. A questo punto si cerca il piano passante per una di esse e un punto dell'altra. Siccome s passa per l'origine consideriamo il fascio di piani passanti per la retta r $\lambda(2x + 5y - z - 1) + \mu(x - 1) = 0$ ovvero $(2\lambda+\mu)x + 5\lambda y - \lambda z - (\lambda+\mu) = 0$. Imponendo il passaggio per l'origine O otteniamo l'equazione lineare omogenea $\lambda + \mu = 0$. Prendendo l'autosoluzione $(\lambda, \mu) = (1,-1)$ abbiamo un'equazione del piano richiesto **$x + 5y - z = 0$**.

.....

3) Se esistono, trovare sull'asse Y due punti A e B aventi distanza 10 dalla retta $r : y + 5 = z + 8 = 0$. Altrimenti motivare il perché non esistono.

Si vede subito che la retta r è parallela all'asse X. Per calcolare la distanza di un generico punto $P(0, \beta, 0)$ dell'asse Y dalla retta r si deve trovare la proiezione ortogonale H_P di P su r. Tale punto H_P è dato dall'intersezione della retta r con il piano π passante per P e ortogonale alla retta r. Tenendo conto che r è parallela all'asse X si ha che l'equazione di π è $1(x-0) + 0(y-\beta) + 0(z-0) = 0$ ovvero $x = 0$. Per cui il punto H_P ha coordinate $(0, -5, -8)$. Ora, imponendo che $[d(P, H_P)]^2 = 10^2$, otteniamo l'equazione $(\beta+5)^2 + 8^2 = 100$ da cui si ha che $\beta = 1$ oppure $\beta = -11$. Quindi, a meno dell'ordine, è **A(0, 1, 0)** e **B(0, –11, 0)**.

.....

4) Trovare i piani contenenti l'asse X e formanti con l'asse Y un angolo di $\pi/6$ radianti.

Un piano contenente l'asse X ha un'equazione del tipo $\lambda y + \mu z = 0$ con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Una terna di parametri direttori dell'asse Y è $(l, m, n) = (0, 1, 0)$. Utilizzando la formula per il calcolo del seno dell'angolo compreso fra una retta ed un piano otteniamo l'equazione

$\frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}=\frac{1}{2}$ da cui, con semplici calcoli, si ha $\mu^2=3\lambda^2$. Quindi, $\lambda\neq 0$. Scegliendo $\lambda=1$ si ha che $\mu=\pm\sqrt{3}$. Per cui i piani richiesti sono $\mathbf{y\pm\sqrt{3}\,z=0}$.

.....

5) Trovare l'equazione canonica della conica $3x^2+2\sqrt{3}\,xy+y^2-4\sqrt{3}\,x-4y=0$.

Poi, classificarla.

$A=\begin{bmatrix}3 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(\lambda-4)\lambda \Rightarrow \lambda_1=4 \text{ et } \lambda_2=0$

$\lambda_1=4 \rightarrow \begin{bmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow x-\sqrt{3}\,y=0$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1=4$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(\sqrt{3},1)\ \forall\alpha\in R-\{0\}$.

Di conseguenza, gli autovettori relativi a $\lambda_2=0$ sono tutte e sole le coppie $\beta(1,-\sqrt{3})\ \forall\beta\in R-\{0\}$.

Scegliendo $\alpha=\frac{1}{2}$ e $\beta=-\frac{1}{2}$, cioè gli autoversori $\mathbf{u}_1=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ e $\mathbf{u}_2=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, si ha che la matrice $C=[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ è una matrice ortogonale con $\det C=1$.

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+d'x'+e'y'=0$ dove $[d'\ \ e']=[-4\sqrt{3}\ \ -4]C=[-8\ \ 0]$

$4(x')^2+0(y')^2-8x'+0y'=0$

$(x')^2-2x'=0$

$(x'-1)^2-1=0$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases}X=x'-1\\ Y=y'\end{cases}$ si ottiene l'equazione canonica $X^2-1=0$.

$(X-1)(X+1)=0$ coppia di rette reali distinte parallele

.....

6) Trovare le equazioni delle sfere di raggio 1, tangenti al piano $\pi: 2x-2y+z+1=0$ e aventi il centro sulla retta passante per A(–3, 2, 5) e parallela all'asse Z.

Dai dati si vede subito che il centro della sfera ha coordinate $C(-3,2,\gamma)$.

Imponendo che la distanza del centro dal piano tangente $\pi: 2x-2y+z+1=0$ sia uguale a 1 (raggio della sfera) si ottiene $\frac{|2(-3)-2(2)+\gamma+1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=1$.

Con semplici calcoli si ha $|\gamma-9| = 3$ da cui $\gamma = 9\pm3$.

Quindi, i due centri sono $C_1(-3, 2, \mathbf{12})$ e $C_2(-3, 2, \mathbf{6})$.

Le equazioni delle sfere sono

$$\mathbf{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-12)^2 = 1} \quad \text{e} \quad \mathbf{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2 = 1}.$$

GEOMETRIA 25 Giugno 2014

1) Trovare le **equazioni** dello **spazio** V(w, x, y, z), sottospazio di R^4, generato dalle due quaterne (0, 1,–1, 0) e (–2, 0, 1, 0).

Una quaterna (w, x, y, z) di R^4 appartiene al sottospazio V generato dalle due quaterne (0, 1,–1, 0) e (–2, 0, 1, 0) se e solo se la matrice $A=\left[\begin{array}{cccc} w & x & y & z \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ ha rango 2. Si vede subito che $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice di A di rango 2 (ovvero detB è un minore non nullo di ordine 2 di A). Per il teorema degli orlati, la matrice A ha rango 2 se e solo se si ha che $\det\begin{bmatrix} w & x & y \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}=0$ e $\det\begin{bmatrix} w & x & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}=0$. Sviluppando questi due determinanti, con semplici calcoli, si ottiene **w + 2x + 2y = 0** e **z = 0** che sono le equazioni richieste.

.....

2) Calcolare l'**area** del **triangolo** di vertici A(0, 2,–1), B(2, 0,–3) e C(1,–3, 0). Poi, trovare l'**equazione** del **piano** per A, B e C.

Si ha subito che $\left[\vec{AB}\right]=(2,-2,-2)$ e $\left[\vec{AC}\right]=(1,-5,1)$. Con semplici calcoli si calcola il prodotto vettoriale $\left[\vec{AB}\right]\times\left[\vec{AC}\right]=(-12,-4,-8)=-4(3,1,2)$. Il modulo di $\left[\vec{AB}\right]\times\left[\vec{AC}\right]$ è $4\sqrt{14}$. L'area del triangolo è uguale alla metà di tale modulo, per cui l'area cercata è $2\sqrt{14}$.

Tenendo conto che il vettore $\left[\vec{AB}\right]\times\left[\vec{AC}\right]=-4(3,1,2)$ è ortogonale ai due vettori $\left[\vec{AB}\right]$ e $\left[\vec{AC}\right]$ si ha subito che il vettore (3, 1, 2) è ortogonale al piano per A, B e C. Quindi, un'equazione del piano cercato è $3(x-0)+1(y-2)+2(z+1)=0$ ovvero **3x + y + 2z = 0**.

.....

3) Trovare la **distanza** e i **parametri direttori** della retta di minima distanza tra le rette sghembe r : 2x – 3y + 12 = y + z = 0 e s : x + 7z = 2x – y + 2z = 0.

La distanza tra le due rette r e s è uguale alla distanza di un punto di s dal piano π passante per la retta r e parallelo alla retta s. Quindi scriviamo l'equazione $\lambda(2x-3y+12)+\mu(y+z)=0$ del fascio di piani contenente la retta r. Per π ha un'equazione del tipo $2\lambda x+(\mu-3\lambda)y+\mu z+12\lambda=0$.

$\begin{bmatrix} 2\lambda & (\mu-3\lambda) & \mu \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2\lambda & (\mu-3\lambda) \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix}$

Imponendo che tale piano sia parallelo alla retta s si ha che $\det\begin{bmatrix} 2\lambda & (\mu-3\lambda) & \mu \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}=0$ da cui si ottiene l'equazione lineare omogenea $2\lambda - \mu = 0$. Una sua autosoluzione è $(\lambda, \mu) = (1, 2)$. Quindi, $\pi : 2x - y + 2z + 12 = 0$. La distanza tra le due rette r e s è uguale alla distanza di un punto di s dal piano π. Siccome la retta s passa per l'origine O si ha subito che **$d(r, s) = d(O, \pi) = 4$**. Tenendo conto che sia il vettore $(a, b, c) = (2, -1, 2)$ che la retta di minima distanza sono perpendicolari al piano π, si ha che una terna di parametri direttori della retta di minima distanza è data proprio dalla terna **$(l, m, n) = (2, -1, 2)$**.

.....

4) Sia r la retta parallela all'asse Y e passante per $A(-\sqrt{5}, 7, \sqrt{5})$. Trovare le **equazioni dei piani** che contengono r e formano un angolo di $\pi/4$ radianti con l'asse Z.

I piani richiesti (contenendo la retta r parallela all'asse Y e passante per A) sono paralleli all'asse Y e passano per il punto A. Per cui la loro equazione è del tipo

$$a(x + \sqrt{5}) + c(z - \sqrt{5}) = 0 \qquad \text{con } (a, c) \neq (0, 0).$$

Imponendo che tali piani formino un angolo di $\pi/4$ radianti con l'asse Z - una cui terna di parametri direttori è data da $(l, m, n) = (0, 0, 1)$ - e usando la formula per il calcolo del seno dell'angolo compreso fra una retta ed un piano otteniamo $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + c^2}}$. Con semplici calcoli si ha $c^2 = a^2$.

Quindi, $a \neq 0$, altrimenti $(a, c) = (0, 0)$. Scegliendo $a = 1$ si ha che $c = \pm 1$

Per cui le equazioni dei due piani sono $(x + \sqrt{5}) \pm (z - \sqrt{5}) = 0$ ovvero

$$\mathbf{x + z = 0} \text{ e } \mathbf{x - z + 2\sqrt{5} = 0}.$$

.....

5) Trovare l'equazione **canonica** della conica $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$.

Poi, classificarla.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 6)\lambda \Rightarrow \lambda_1 = 6 \text{ et } \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = 6 \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 6$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(1, 1)$ $\forall \alpha \in R - \{0\}$.

Di conseguenza, gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 0$ sono tutte e sole le coppie $\beta(1, -1)$ $\forall \beta \in R - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, cioè gli autoversori $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $\mathbf{u}_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, si ha che

la matrice $C = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ è una matrice ortogonale con $\det C = 1$.

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + 3 = 0$ dove $[d' \quad e'] = [4 \quad 6]C = [5\sqrt{2} \quad \sqrt{2}]$

$6(x')^2 + 0(y')^2 + 5\sqrt{2}\,x' + \sqrt{2}\,y' + 3 = 0$

$3\sqrt{2}\,(x')^2 + 5x' + y' + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0$

$3\sqrt{2}\,(x' + \frac{5\sqrt{2}}{12})^2 - \frac{25\sqrt{2}}{24} + y' + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0$

$y' + \frac{11\sqrt{2}}{24} = -3\sqrt{2}\,(x' + \frac{5\sqrt{2}}{12})^2$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} X = x' + \frac{5\sqrt{2}}{12} \\ Y = y' + \frac{11\sqrt{2}}{24} \end{cases}$ si ottiene l'equazione canonica

$Y = -3\sqrt{2}\,X^2$ **parabola**

.....

6) Trovare il **centro** e il **raggio** della **circonferenza** C ottenuta secando la sfera di centro l'origine O e raggio $R = \sqrt{27}$ con il piano $\pi : x + 2y + 2z - 9 = 0$.

Sia s la retta passante per il centro O della sfera e perpendicolare al piano π. Dai dati del problema si vede subito che una terna di equazioni parametriche di s è data da $(x, y, z) = (t, 2t, 2t)$ con t parametro reale. Siccome il centro della circonferenza è il punto d'intersezione del piano π con la retta s, mettiamo a sistema le equazioni parametriche di s con l'equazione cartesiana di π. Facendo ciò si ha subito che $9t - 9 = 0$ da cui $t = 1$. Per cui il **centro** della circonferenza ha coordinate **(1, 2, 2)**. La distanza d del centro O della sfera dal piano π si calcola subito (con la formula della distanza punto-piano) e si ottiene $d = 3$. Detto r il raggio della circonferenza si ha che $r^2 = R^2 - d^2$. Quindi, $r^2 = 27 - 9 = 18$. Infine, **$r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$**.

GEOMETRIA 11 Luglio 2014

1) Per quali **valori** del parametro reale t l'insieme $B = \{(t^3 - 5t^2, t^2 - t, t), (6, -1, -1)\}$ è una base del sottospazio $S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + 5y + z = 0\}$?

Il sottospazio S è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo formato dall'unica equazione $x + 5y + z = 0$. Quindi, la dimensione di S è uguale a $3-1 = 2$. Per cui una base di S è una qualunque coppia di vettori appartenenti ad S e linearmente indipendenti.

Sostituendo la terna $\mathbf{u} = (6, -1, -1)$ alla terna delle incognite (x, y, z) nell'equazione $x + 5y + z = 0$ del sottospazio S si ottiene subito un'identità. Quindi, la terna **u** appartiene all'insieme S. Sostituendo la terna $v(t) = (t^3 - 5t^2, t^2 - t, t)$ alle terna delle incognite (x, y, z) nell'equazione $x + 5y + z = 0$ del sottospazio S si ottiene l'equazione $t(t-2)(t+2)=0$. Quindi, la terna **v**(t) appartiene ad S se e solo se $t \in \{0, 2, -2\}$.

Se t=0 allora $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$ e i vettori **u** e **v** sono linearmente dipendenti.

Se t=2 allora $\mathbf{v} = (-12, 2, 2) = -2\mathbf{u}$ e i vettori **u** e **v** sono linearmente dipendenti.

Se t=−2 allora $\mathbf{v} = (-28, 6, -2)$ e i vettori **u** e **v** sono linearmente indipendenti.

Quindi, l'insieme B è una base del sottospazio S se e solo se **$t = -2$**.

.....

2) Date le due rette parallele $r : 5y - z + 4 = x + 1 = 0$ e $s : 5y - z = x = 0$, trovare il **piano** che le contiene.

Si vede subito che la retta s passa per l'origine O. Quindi, il piano richiesto è il piano passante per la retta r e l'origine O. L'equazione del fascio di piani per r è $\lambda(5y - z + 4) + \mu(x + 1) = 0$ ovvero $\mu x + 5\lambda y - \lambda z + 4\lambda + \mu = 0$. Imponendo il passaggio per l'origine O si ottiene l'equazione lineare omogenea $4\lambda + \mu = 0$. Prendendo l'autosoluzione $(\lambda, \mu) = (-1, 4)$ si ha che un'equazione del piano cercato è **$4x - 5y + z = 0$**.

.....

3) Trovare la **distanza** tra le rette $r : 3x - z = y = 0$ e $s : y - 9z = x - 12 = 0$.

Si vede subito che la retta r passa per l'origine O. Quindi, la distanza tra le due rette è uguale alla distanza dell'origine dal piano π passante per la retta s e parallelo alla retta r.

L'equazione del fascio di piani per s è $\lambda(y - 9z) + \mu(x - 12) = 0$ ovvero $\mu x + \lambda y - 9\lambda z - 12\mu = 0$.

Imponendo il parallelismo con la retta r si ha che $\det\begin{bmatrix} \mu & \lambda & -9\lambda \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$ da cui si ottiene l'equazione lineare omogenea $27\lambda - \mu = 0$. Prendendo l'autosoluzione $(\lambda, \mu) = (1, 27)$ si ha che il piano π ha equazione $27x + y - 9z - 324 = 0$. La distanza di O da π è $\frac{324}{\sqrt{811}}$.

4) Sulla retta r perpendicolare al piano $\pi : x + 2y - z = 0$ e passante per il punto A(0, –3, 1) trovare i **punti** che distano 3 dal piano $\pi' : z + 1 = 0$.

Si vede subito che una terna di equazioni parametriche della retta r è data da (x, y, z) = (t, 2t–3, –t+1) con t parametro reale. Imponendo che un punto di r abbia distanza 3 dal piano π' si ottiene (usando la formula della distanza di un punto da un piano) l'equazione $|(-t+1)+1| = 3$ da cui sia ha che $t = -1$ oppure $t = 5$. Quindi, a meno dell'ordine, è **A(–1, –5, 2)** e **B(5, 7, –4)**.

5) Trovare l'equazione **canonica** della conica $x^2 + 10xy + y^2 + 10x + 2y - 1 = 0$.

Poi, classificarla.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 6)(\lambda + 4) \Rightarrow \lambda_1 = 6 \text{ et } \lambda_2 = -4$$

$$\lambda_1 = 6 \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a λ_1 sono tutte e sole le coppie $\alpha(1, 1)$ $\forall \alpha \in R - \{0\}$ mentre gli autovettori relativi a λ_2 sono tutte e sole le coppie $\beta(-1, 1)$ $\forall \beta \in R - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cioè gli autoversori $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $\mathbf{u}_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, si ha che

la matrice $C = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ è una matrice ortogonale con $\det C = 1$.

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' - 1 = 0$ dove $[d' \quad e'] = [10 \quad 2]C = [6\sqrt{2} \quad -4\sqrt{2}]$

$6(x')^2 - 4(y')^2 + 6\sqrt{2}\,x' - 4\sqrt{2}\,y' - 1 = 0$

$6(x')^2 + 6\sqrt{2}\,x' - 4(y')^2 - 4\sqrt{2}\,y' - 1 = 0$

$6(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 3 - 4(y' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2 - 1 = 0$

$6(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 4(y' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 2$

$3(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 2(y' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1$





Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} X = x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = y' + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ si ottiene l'equazione canonica

$$\mathbf{3X^2 - 2Y^2 = 1} \quad \textbf{iperbole}$$

.....

6) Trovare il **centro** H e il **raggio** R della sfera passante per l'origine O e i punti A, B, e C di intersezione del piano $\pi : x - 2y - z - 18 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente.

Intersecando il piano π con gli assi coordinati si ha A(18, 0, 0), B(0, –9, 0) e C(0, 0, –18).

Consideriamo l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ di una generica sfera. Imponendo il passaggio per O si ha che $d = 0$. Imponendo il passaggio per A si ha che $a = -18$. Imponendo il passaggio per B si ha che $b = 9$. Infine, imponendo il passaggio per C si ha che $c = 18$. Per cui l'equazione della sfera è $x^2 + y^2 + z^2 - 18x + 9y + 18z = 0$.

Dall'equazione della sfera si ricavano subito le coordinate del centro e il raggio. Infatti, sapendo che H(–a/2, –b/2, –c/2) e $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$ si ha **H(9, –9/2, –9)** e **R = 27/2**.

GEOMETRIA svolgimento di uno scritto del 12 Gennaio 2011

1) Trovare una **base** per lo spazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo:

$3x - y + 11z = x - y + 9z = 2x + y - 6z = 0.$

Il sistema può essere scritto in forma matriciale nel modo seguente :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Gauss-Jordan} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (matrice a gradini)}$$

Quindi, il sistema iniziale è **equivalente** al sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalla seconda equazione si ha che $y = 8z$. Sostituendo nella prima si ottiene $x = -z$.

Per cui lo spazio delle soluzioni è $\{(x, y, z) \in R^3 \mid y = 8z , x = -z\}$.

Una sua base è data da

UNA (qualsiasi) terna $\alpha(1, -8, -1)$ con $\alpha \in R - \{0\}$

.....

2) Tra le rette passanti per il punto A(3,0,–1) trovare, se esiste, quella che si appoggia all'asse X e alla retta r : $x = z + 7 = 0$.

Si vede subito che:

- l'asse X e la retta r sono sghembe;
- il punto A non appartiene né all'asse X né alla retta r;

Quindi, la retta cercata, chiamiamola s, esiste ed è anche unica.

Inoltre, indicato con π il piano contenente l'asse X e il punto A e con π' il piano contenente la retta r e il punto A, la retta s si ottiene come intersezione dei due piani (non paralleli) π e π'.

Si vede subito che il piano π è il piano XZ di equazione $y = 0$.

Combinando linearmente le equazioni della retta r $\lambda x + \mu(z + 7) = 0$ e imponendo il passaggio per il punto A(3, 0, –1) si ottiene $\lambda + 2\mu = 0$. Scegliendo l'autosoluzione (2, –1) si ottiene il piano $\pi' : 2x - z - 7 = 0$. Quindi, una coppia di equazioni cartesiane della retta s è la seguente:

s : $2x - z - 7 = y = 0$

.....

3) Trovare la distanza tra le seguenti rette: $r : x - 3z = y = 0$ e $s : x - 3z + 10 = y - 3 = 0$.

Si vede subito che :

- i piani $x - 3z = 0$ e $x - 3z + 10 = 0$ sono paralleli ;
- i piani $y = 0$ e $y - 3 = 0$ sono paralleli .

Quindi, le due rette r e s sono parallele.

Inoltre, si vede subito che :

- la retta r passa per l'origine O(0, 0, 0) ;
- una terna di parametri direttori delle rette r e s è data da (3, 0, 1).

Per cui, indicato con A il punto d'intersezione della retta $s : x - 3z + 10 = y - 3 = 0$ con il piano $3x + z = 0$ perpendicolare ad entrambe le rette e passante per O, si ha che la distanza tra le due rette è uguale alla distanza tra i due punti O e A.

Con semplici calcoli si trova che A(–1, 3, 3). Quindi, la distanza cercata è

$$\mathbf{d(r, s) = d(O, A) = \sqrt{19}}$$

.....

4) Sulla retta r passante per il punto A(–3, 2, 5) e parallela all'asse Z trovare i punti che distano 1 dal piano $\pi : 2x - 2y + z - 5 = 0$.

Un generico punto della retta r, di parametri direttori (0, 0, 1), ha coordinate P(–3, 2, t + 5).

Utilizzando la formula della distanza punto-piano otteniamo

$$\frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = d(P, \pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{|2(-3) - 2(2) + (t + 5) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 1 \quad \text{ovvero} \quad |t - 10| = 3$$

Essendo $t_1 = 13$ e $t_2 = 7$ le sue soluzioni si ha che i punti cercati sono:

$$\mathbf{P_1(-3, 2, 18) \quad e \quad P_2(-3, 2, 12)}$$

.....

6) Sia Σ la sfera di centro l'origine O(0,0,0) e passante per A(0,–5,0). Sia π il piano parallelo al piano YZ e passante per il punto B(–4,–3, 2). Trovare il centro e il raggio della circonferenza C ottenuta secando la sfera Σ col piano π.

Si vede subito che:

- la sfera ha raggio R = 5;
- il piano π ha equazione x = –4;
- la distanza del centro della sfera O da π è d(O, π) = 4;
- la retta t passante per il centro O della sfera e perpendicolare a π è l'asse X : y = z = 0.

Quindi, il **centro** della circonferenza (che si ottiene come intersezione di t e π) è **(–4, 0, 0)**

mentre il **raggio** della circonferenza è $\sqrt{R^2 - [d(O, \pi)]^2} = \mathbf{3}$

5) Trovare l'equazione canonica e classificare la conica di equazione

$4x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 2y^2 - 8x + 2\sqrt{3}\,y - 1 = 0.$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

$\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 5$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{3}\,x - y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 1$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(1, \sqrt{3})\ \forall \alpha \in R - \{0\}$.

Di conseguenza, gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 5$ sono tutte e sole le coppie $\beta(\sqrt{3}, -1)\ \forall \beta \in R - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, cioè gli autoversori $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $\mathbf{u}_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, si ha che la

matrice $C = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ è una matrice ortogonale con $\det C = 1$.

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' - 1 = 0$ dove $[d'\ \ e'] = [-8\ \ 2\sqrt{3}]C = [-1\ \ 5\sqrt{3}]$

$1(x')^2 + 5(y')^2 - x + 5\sqrt{3}\,y - 1 = 0$

$(x')^2 - x + 5(y')^2 + 5\sqrt{3}\,y - 1 = 0$

$(x' - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 5(y' + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{15}{4} - 1 = 0$

$(x' - \frac{1}{2})^2 + 5(y' + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1 + \frac{15}{4} + \frac{1}{4}$

$(x' - \frac{1}{2})^2 + 5(y' + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 5$

$\frac{1}{5}(x' - \frac{1}{2})^2 + (y' + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} Y = y' + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ X = x' - \frac{1}{2} \end{cases}$ si ottiene l'equazione canonica

$$\mathbf{(1/5)X^2 + Y^2 = 1 \quad (ellisse)}$$

GEOMETRIA svolgimento di uno scritto del 27 Gennaio 2011

1) Trovare una base per ogni autospazio della matrice $A=\begin{bmatrix}0&4&0\\0&0&4\\0&4&0\end{bmatrix}$.

$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \lambda(4-\lambda)(\lambda+4)$

$$\lambda_1 = 0 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix}0&4&0\\0&0&4\\0&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; y=0\ ,\ z=0 \;\Leftrightarrow\; (x,y,z)=(x,0,0)=x(1,0,0)$$

$$\lambda_2 = 4 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix}-4&4&0\\0&-4&4\\0&4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; x-y=0\ ,\ y-z=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; y=x\ ,\ z=y \;\Leftrightarrow\; z=y=x \;\Leftrightarrow\; (x,y,z)=(x,x,x)=x(1,1,1)$$

$$\lambda_3 = -4 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix}4&4&0\\0&4&4\\0&4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; x+y=0\ ,\ y+z=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; y=-x\ ,\ z=-y \;\Leftrightarrow\; y=-x\ ,\ z=x \;\Leftrightarrow\; (x,y,z)=(x,-x,x)=x(1,-1,1)$$

base di E(0) = {(1, 0, 0)} , base di E(4) = {(1, 1, 1)} , base di E(–4) = {(1, –1, 1)}

.....

2) Al variare del parametro reale t, **studiare** il sistema lineare nelle incognite (x, y):

$12x - tx + ty - t = tx - 12x + 2y + t = 0.$

matrice incompleta $A=\begin{bmatrix}(12-t)&t\\(t-12)&2\end{bmatrix}$ matrice incompleta $C=\left[\begin{array}{cc|c}(12-t)&t&t\\(t-12)&2&-t\end{array}\right]$

$\text{rango}A = 2 \;\Leftrightarrow\; \det A = 2(12-t)-t(t-12) = (2+t)(12-t) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; t\in R-\{-2, 12\}$

$$\forall t\in R-\{-2,12\} \qquad x=\frac{\begin{bmatrix}t&t\\-t&2\end{bmatrix}}{(2+t)(12-t)}=\frac{t}{12-t}\ ,\ y=\frac{\begin{bmatrix}(12-t)&t\\(t-12)&-t\end{bmatrix}}{(2+t)(12-t)}=\frac{0}{12-t}=0$$

$\forall t\in R-\{-2, 12\}$ → soluzione unica → (x, y) = (t/(12–t), 0)

$$t=-2 \;\Rightarrow\; \text{rango}C=\text{rango}\left[\begin{array}{cc|c}14&-2&-2\\-14&2&2\end{array}\right]=1=\text{rango}A \;\Rightarrow\; \text{sistema compatibile}$$

$14x - 2y = -2 \;\Rightarrow\; 7x - y = -1 \;\Rightarrow\; y = 7x + 1$ (∞^1 soluzioni)

t = –2 → ∞^1 soluzioni → (x, y) = (x, 7x + 1) = (0, 1) + x(1, 7)

t = 12 $\Rightarrow$ $\text{rango}C=\text{rango}\left[\begin{array}{cc|c}0&12&12\\0&2&-12\end{array}\right]=2\neq 1=\text{rango}A$ $\Rightarrow$ **nessuna soluzione**

3) Scrivere le equazioni dei piani paralleli al piano YZ e aventi da esso una distanza uguale a quella tra l'origine O(0,0,0) e la retta r di equazione $5x - 3y - 34 = z = 0$.

Si vede subito che la retta r è una retta del piano XY. Utilizzando la formula della distanza di un punto da una retta (nel piano) si calcola subito che $d(O, r) = \frac{|-34|}{\sqrt{34}} = \sqrt{34}$. $= \frac{|5\cdot 0 - 3\cdot 0 - 34|}{\sqrt{3^2 + 5^2}}$

I piani paralleli al piano YZ : $x = 0$ hanno un equazione del tipo $x = k$. La loro distanza dal piano YZ è uguale a $|k|$. Ponendo $|k| = \sqrt{34}$ si ottiene $k = \pm\sqrt{34}$. Quindi, le equazioni richieste sono

$$\mathbf{x = \sqrt{34} \quad , \quad x = -\sqrt{34}}$$

.....

4) Siano $A(0, -3, \sqrt{3})$ e $B(t, 0, 0)$. Trovare i valori del parametro reale t per i quali la retta r passante per A e B forma col piano YZ un angolo di $\pi/6$ radianti.

Una terna di parametri direttori (l, m, n) della retta r è data dalle componenti $(t, 3, -\sqrt{3})$ del vettore AB. Per cui $(l, m, n) = (t, 3, -\sqrt{3})$. Per il piano YZ : $x = 0$ si ha che $(a, b, c) = (1, 0, 0)$.

Utilizzando la formula dell'angolo tra una retta e un piano $\frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

si ottiene $\frac{|t|}{\sqrt{t^2 + 12}} = \frac{1}{2}$ ovvero $t^2 = 4$. Quindi, i valori cercati sono

$$\mathbf{t = \pm 2}$$

.....

6) Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $\pi : 6x + 5y + 3z = 0$ in O(0,0,0) e avente il centro sul piano $\pi' : 2y - 5 = 0$.

Poiché passa per l'origine O, l'equazione della sfera è del tipo $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = 0$.

Il centro C della sfera è il punto d'intersezione del piano π' con la retta r perpendicolare a π e passante per O. Si vede subito che la retta r ha equazioni parametriche $(x, y, z) = (6t, 5t, 3t)$. Intersecando r con π' si ottiene $10t - 5 = 0$ da cui $t = 1/2$. Quindi, $C(3, 5/2, 3/2)$.

Ricordando che $C(-a/2, -b/2, -c/2)$ si ha subito che $a = -6$, $b = -5$ e $c = -3$.

Per cui l'equazione della sfera è:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5y - 3z = 0}$$

.....

5) Trovare l'equazione canonica e classificare la conica di equazione

$7x^2 - 2\sqrt{21}\,xy + 3y^2 + 2\sqrt{21}\,x - 6y + 23 = 0$

$A = \begin{bmatrix} 7 & -\sqrt{21} \\ -\sqrt{21} & 3 \end{bmatrix}$; $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 10)$

$\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 10$

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -\sqrt{21} \\ -\sqrt{21} & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{7} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{7} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{7}\,x - \sqrt{3}\,y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 0$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(\sqrt{3}, \sqrt{7})$ $\forall \alpha \in R - \{0\}$. Di conseguenza gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 10$ sono tutte e sole le coppie $\beta(\sqrt{7}, -\sqrt{3})$ $\forall \beta \in R - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ e $\beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, cioè gli autoversori $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}})$ e $\mathbf{u}_2 = (-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}})$, si ha che la matrice $C = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} & -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}} \\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$ è una matrice ortogonale con $\det C = 1$.

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + 23 = 0$ dove $[d' \;\; e'] = [2\sqrt{21} \;\; -6]C = [0 \;\; -2\sqrt{30}]$

$0(x')^2 + 10(y')^2 + 0x' - 2\sqrt{30}\,y' + 23 = 0$

$10(y')^2 - 2\sqrt{30}\,(y') + 3 + 20 = 0$

$10(y' - \frac{\sqrt{30}}{10})^2 + 20 = 0$

$(y' - \frac{\sqrt{30}}{10})^2 + 2 = 0$

Effettuando la **traslazione** $Y = y' - \frac{\sqrt{30}}{10}$ si ottiene l'equazione canonica

$Y^2 + 2 = 0$ (conica senza punti reali)

.....

GEOMETRIA Svolgimento di uno scritto del 14 Febbraio 2011

1) Trovare autovalori ed autovettori della matrice $A=\begin{bmatrix}0&0&4\\0&9&0\\4&0&0\end{bmatrix}$.

Si ha che $p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&0&4\\0&(9-\lambda)&0\\4&0&-\lambda\end{bmatrix}=(9-\lambda)(\lambda^2-16)=(9-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+4)$

$\lambda_1=9$ $\quad\begin{bmatrix}-9&0&4\\0&0&0\\4&0&-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-9&4\\4&-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow x=z=0$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1=9$ sono tutti e soli i vettori $t(0,1,0)\ \forall t\in R-\{0\}$

$\lambda_2=4$ $\quad\begin{bmatrix}-4&0&4\\0&5&0\\4&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow z=x\ \text{et}\ y=0$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_2=4$ sono tutti e soli i vettori $t(1,0,1)\ \forall t\in R-\{0\}$

$\lambda_3=-4$ $\quad\begin{bmatrix}4&0&4\\0&13&0\\4&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow z=-x\ \text{et}\ y=0$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_3=-4$ sono tutti e soli i vettori $t(1,0,-1)\ \forall t\in R-\{0\}$

.....

2) Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $A(\sqrt{19}\,,-25,12)$, parallelo alla retta $r: 4x+z+10=3x+y-2=0$ e perpendicolare al piano $\pi: 3y+4z+1=0$.

Il piano π' richiesto appartiene alla stella di piani passanti per A quindi la sua equazione è del tipo

$$a(x-\sqrt{19}\,)+b(y+25)+c(z-12)=0$$

Il piano π' è parallelo alla retta r $\Leftrightarrow$ $\det\begin{bmatrix}a&b&c\\4&0&1\\3&1&0\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow 3b+4c-a=0$ (1)

Il piano π' è perpendicolare al piano $\pi\Leftrightarrow 3b+4c=0$ (2)

Da (1) e (2) si ha che $3b+4c=0$ et $a=0$. Per cui una terna $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ è la terna $(0,4,-3)$.

Quindi, un'equazione del piano è $4(y+25)-3(z-12)=0$ ovvero

$$\pi': 4y-3z+136=0$$

3) Trovare la distanza tra le rette $r: 3x-2y-72=x+z=0$ e $s: 5y+2z=x-2y-2z=0$.

Si vede subito che l'origine O(0, 0, 0) appartiene alla retta s.

Consideriamo il fascio di piani contenenti la retta r

$$\lambda(3x-2y-72)+\mu(x+z)=0 \quad \text{ovvero} \quad (3\lambda+\mu)x-2\lambda y+\mu z-72\lambda=0$$

Imponendo la condizione di parallelismo con la retta s otteniamo

$$\det\begin{bmatrix}(3\lambda+\mu) & -2\lambda & \mu\\ 0 & 5 & 2\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}=0 \quad \text{ovvero} \quad 2\lambda+\mu=0$$

Per cui esiste un **unico** piano π contenente r e parallelo ad s (quindi, r e s **non** sono parallele).

Scegliendo l'autosoluzione $(\lambda, \mu)=(1,-2)$ un'equazione di π è $x-2y-2z-72=0$. La distanza tra le due rette r e s è uguale alla distanza dell'origine O(0, 0, 0) dal piano π. Utilizzando la formula della distanza punto-piano si ha subito che $d(O,\pi)=\frac{|-72|}{\sqrt{9}}$. Per cui **$d(r, s)=24$**

---

4) Sia r la retta parallela all'asse Y e passante per $A(6, 1, -2\sqrt{3})$. Trovare i piani che contengono r e formano un angolo di $\pi/3$ radianti con il piano YZ.

Poiché i piani richiesti contengono il punto A hanno un'equazione del tipo

$$a(x-6)+b(y-1)+c(z+2\sqrt{3})=0 \quad (\#)$$

Inoltre, i piani (contenendo la retta r) sono paralleli all'asse Y. Quindi, $b=0$.

Utilizzando la formula dell'angolo tra due piani $\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{(a')^2+(b')^2+(c')^2}}=\pm\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

dove $(a', b', c')=(1, 0, 0)$ sono i coefficienti delle incognite dell'equazione del piano YZ: $x=0$,

otteniamo $\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}=\pm\frac{1}{2}$ ovvero $c^2=3a^2$. Scegliendo $a=1$ otteniamo $c=\pm\sqrt{3}$. Quindi,

$$\pi_1: x+\sqrt{3}z=0 \quad , \quad \pi_2: x-\sqrt{3}z-12=0$$

---

6) Scrivere l'equazione di una sfera e l'equazione del piano la cui intersezione sia la circonferenza che passa per i punti O(**0**, 0, 0), A(**0**, 2, 0) e B(**0**, 0, –17).

Si vede subito che il piano contenente la circonferenza è il **piano** YZ di equazione **$x=0$**.

Imponendo il passaggio di una generica sfera $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

per i 3 punti O, A e B si ottiene $d=0$, $b=-2$ e $c=17$. Quindi, la **sfera** ha un'equazione del tipo

$$x^2+y^2+z^2+ax-2y+17z=0 \quad \forall a\in\mathbf{R}$$

5) Trovare l'equazione canonica della conica: $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 18x + 2\sqrt{3}y + 24 = 0$

Poi, classificarla.

$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$; $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 4)$

$\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y = 0$$

Quindi, gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 4$ sono tutte e sole le coppie $\alpha(\sqrt{3}, 1)$ $\forall \alpha \in R - \{0\}$.

Di conseguenza gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 0$ sono tutte e sole le coppie $\beta(1, -\sqrt{3})$ $\forall \beta \in R - \{0\}$.

Scegliendo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, cioè gli autoversori $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $\mathbf{u}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, si ha che la

matrice $C = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right]$ è una matrice ortogonale con $\det C = 1$.

Effettuando la **rotazione** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ si ottiene l'equazione

$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + 24 = 0$ dove $[d' \quad e'] = [-18 \quad 2\sqrt{3}]C = [-8\sqrt{3} \quad 12]$

$4(x')^2 + 0(y')^2 - 8\sqrt{3}x' + 12y' + 24 = 0$

$(x')^2 - 2\sqrt{3}x' + 3y' + 6 = 0$

$(x')^2 - 2\sqrt{3}x' + 3 + 3y' + 3 = 0$

$(x' - \sqrt{3})^2 + 3(y' + 1) = 0$

$y' + 1 = -(1/3)(x' - \sqrt{3})^2$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} Y = y' + 1 \\ X = x' - \sqrt{3} \end{cases}$ si ottiene l'equazione canonica

$$\mathbf{Y = -(1/3)X^2 \quad (parabola)}$$

GEOMETRIA 20 Luglio 2011

1) Sia A la matrice avente (–1, 0, h), (1, –2, 4) e (0, k, 1) come I, II e III riga rispettivamente. Se esistono, trovare i **valori dei parametri** reali h e k per i quali il vettore v = (–4, –1, 1) è un autovettore di A. Scrivere anche il suo **autovalore**.

Indicato con λ l'autovalore di **v**, dalla relazione $Av = \lambda v$ si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 4+h=-4\lambda \\ -4+2+4=-\lambda \\ -k+1=\lambda \end{cases}$$

dal quale subito si ha che $\lambda = -2, h = 4$ e $k = 3$

.....

2) Sia A(1, $\sqrt{47}$,–10). Sulla retta r : y = z + 9 = 0 trovare **due punti** B e C tali che il triangolo ABC sia equilatero.

Indichiamo con 2d la lunghezza del lato del triangolo equilatero ABC e con H il punto medio del lato AB. Siccome H∈r si ha che H(h, 0, –9). Per cui le coordinate dei punti B e C cercati saranno (h±d, 0, –9). Tenendo conto che AH è anche un'altezza del triangolo ABC e che la retta r è parallela all'asse X, si vede subito che H(1, 0, –9), cioè h = 1. L'altezza AH è uguale alla distanza di A da H che si calcola subito ed è $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Per cui il lato del triangolo equilatero è 2d = 8 da cui d = 4. Quindi, i punti cercati sono B(–3, 0, –9) e C(5, 0, –9)

.....

3) Siano r : 2x + 7 = 2x + 5z + 7 = 0 e s : 3y + 20 = 3y + 5z = 0. Sia t la retta di minima distanza tra r e s. Sia d la distanza tra i punti A e H di intersezione di t con r e s rispettivamente. Siano B e C i punti di s aventi distanza 2d da A. Calcolare l'**area** del triangolo ABC.

Si vede subito che r : 2x + 7 = z = 0 e s : 3y + 20 = z – 4 = 0. Quindi, r è una retta parallela all'asse Y del piano z = 0, mentre s è una retta parallela all'asse X del piano z = 4. Per cui d = d(A, H) = d(r, s) = 4. Essendo AB = AC = 2AH, si vede subito che il triangolo ABC è equiesteso ad un triangolo equilatero di lato 2d = 8. Quindi, la sua area è $d^2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

.....

1)

$$A = \begin{matrix} x & y & z \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & h \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$$

$\vec{v} = (-4, -1, 1)$ AUTOVETTORE DI A

TROVA AUTOVALORE

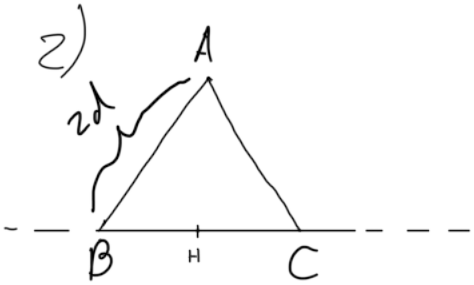
$$A(v) = \begin{cases} 4 + h = -4\lambda \\ -4 + 2 + 4 = -\lambda \\ -k + 1 = \lambda \end{cases}$$

$h = 4$

$\lambda = -2$

$k = 3$

2)



$A(1, \sqrt{17}, -10)$ $\quad r: y = z + 9 = 0$

4) Trovare i **parametri direttori** delle rette che si trovano sul piano $4x - y + 10 = 0$ e formano un angolo di $\pi/4$ radianti col piano $z + 5 = 0$.

Indichiamo con $\mathbf{v} = (l, m, n)$ un vettore parallelo alle rette e con $\mathbf{u} = (4, -1, 0)$ un vettore perpendicolare al piano $\pi : 4x - y + 10 = 0$. Poiché le rette sono parallele al piano π si ha che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono perpendicolari tra loro, Quindi, $4l - m = 0$ ovvero $m = 4l$. Ora applichiamo la formula dell'angolo tra una retta e un piano dove la retta ha parametri direttori $(l, m, n) = (l, 4l, n)$ e il piano è perpendicolare al vettore $(a, b, c) = (0, 0, 1)$. Si ha che $\frac{|n|}{\sqrt{l^2 + (4l)^2 + n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ da cui $n^2 = 17l^2$.

Per cui i parametri direttori sono $l(1, 4, \pm\sqrt{17})$ $\forall l \in R - \{0\}$

.....

5) Trovare i **punti d'intersezione** con gli assi coordinati X e Y della parabola avente come direttrice la retta $x = 2$ e come fuoco il punto $F(0, -3)$.

Indicato con $(x, 0)$ un generico punto dell'asse X, imponendo che sia equidistante dalla direttrice e dal fuoco si ha subito che $(x - 2)^2 = (x - 0)^2 + (0 + 3)^2$ da cui $4x = -5$. Quindi, $A(-5/4, 0)$.
Indicato con $(0, y)$ un generico punto dell'asse Y, imponendo che sia equidistante dalla direttrice e dal fuoco si ha subito che $(0 - 2)^2 = (0 - 0)^2 + (y + 3)^2$ da cui $y^2 + 6y + 5 = (y + 1)(y + 5) = 0$. Quindi, $B(0, -1)$ e $C(0, -5)$.

.....

6) Trovare le equazioni delle **sfere** di raggio 1, aventi il centro sulla retta passante per $A(-3, 2, 5)$ e parallela all'asse Z e tangenti al piano $\pi : 2x - 2y + z + 1 = 0$.

Il centro delle sfere appartiene alla retta di equazioni parametriche $(x, y, z) = (-3, 2, t+5)$.

Imponendo che la distanza del centro dal piano π sia 1 si ottiene $\frac{|2(-3) - 2(2) + (t + 5) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 1$ da cui

$|t - 4| = 3$ ovvero $t_1 = 1$ e $t_2 = 7$. Quindi, i centri e le equazioni delle due delle sfere sono:

$C_1(-3, 2, 6)$ e $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 6)^2 = 1$

$C_2(-3, 2, 12)$ e $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 12)^2 = 1$

GEOMETRIA 8 Settembre 2011

1) Se possibile, scrivere una base di R^3 formata da autovettori della matrice $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \lambda^2(5 - \lambda)$.

Per l'autovalore $\lambda_1 = 0$ si ottiene l'equazione $x = 0$. Quindi, i suoi autovettori sono tutti e soli i vettori non nulli del tipo è (0, y, z). Per cui **una** base del suo autospazio è {(0, 1, 0), (0, 0, 1)}.

Per l'autovalore $\lambda_2 = 5$ si ottiene il sistema $y - 3x = 2x + z = 0$. Quindi, i suoi autovettori sono tutti e soli i vettori non nulli del tipo è (x, 3x, –2x). Per cui una base del suo autospazio è {(1, 3,–2)}.

Infine, **una** base di base di R^3 formata da autovettori della matrice è

{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 3, –2)}.

.....

2) Sia s la retta passante per il punto A(9, 0, –5), parallela al piano $\pi: 2x + 3z + 17 = 0$ e perpendicolare alla retta r: $x + 2y - 11 = 3y + z + 9 = 0$. Trovare le **coordinate del punto A** d'intersezione tra la retta s e il piano YZ.

Indichiamo con (l, m, n) una terna di parametri direttori della retta s. Dalle equazioni cartesiane di r si trova subito che una terna di parametri direttori per la retta r è (2, –1, 3). Imponendo che s sia perpendicolare a r si ha che $2l - m + 3n = 0$. Imponendo che s sia parallela al piano π si ha che $2l + 3n = 0$. Da queste due equazioni si ha che $m = 2l + 3n = 0$. Quindi, una terna di parametri direttori di s è (3, 0, –2) = 0. Per cui (x, y, z) = (3t + 9, 0, –2t – 5) sono delle equazioni parametriche di s. Intersecando s con il piano YZ di equazione $x = 0$ si ha che $3t + 9 = 0$ da cui $t = -3$.

Sostituendo $t = -3$ nelle equazioni parametriche di s otteniamo **A(0, 0, 1)**.

.....

3) Trovare la **distanza** e i **parametri direttori** della retta di minima distanza tra le rette sghembe r: $2x - 3y + 12 = y + z = 0$ e s: $x + 7z = 2x - y + 2z = 0$.

Si vede subito che l'origine $O(0, 0, 0) \in s$. Combinando linearmente le equazioni della retta r otteniamo l'equazione $2\lambda x + (\mu - 3\lambda)y + \mu z + 12\lambda = 0$ di un generico piano contenente la retta r. Ora imponiamo che tale piano sia parallelo alla retta s. Dalla condizione di parallelismo retta-piano otteniamo $2\lambda - \mu = 0$. Una soluzione non banale è $(\lambda, \mu) = (1, 2)$. Per cui il piano π cercato ha equazione $2x - y + 2z + 12 = 0$. Siccome la retta di minima distanza è perpendicolare a tale piano si

ha subito che una sua terna di parametri direttori è **(l, m, n) = (2, –1, 2)**. Invece, la distanza tra le due rette r e s è uguale alla distanza di un punto di s (nel nostro caso l'origine O) dal piano π. Utilizzando la formula della distanza punto-piano si ha subito che **$d(r, s) = d(O, \pi) = 4$**.

.....

4) Sia r la retta parallela all'asse Z e passante per $A(4\sqrt{3}, 12, -2\sqrt{3})$. Trovare le **equazioni dei piani** che contengono r e formano un angolo di $\pi/3$ radianti con l'asse X.

I piani cercati sono paralleli all'asse Z (contenendo r parallela all'asse Z). Inoltre, essi contengono anche il punto A. Quindi la loro equazione è del tipo $a(x - 4\sqrt{3}) + b(y - 12) = 0$. Una terna di parametri direttori dell'asse X è (l, m, n) = (1, 0, 0). Utilizzando la formula dell'angolo retta-piano otteniamo che $a^2 = 3b^2$ da cui $a = \pm\sqrt{3}\, b$. Posto b = 1 si ha che $a = \pm\sqrt{3}$. Per cui i due piani sono $\pm\sqrt{3}(x - 4\sqrt{3}) + y - 12 = 0$. **$\sqrt{3}\,x + y - 24 = 0$ e $\sqrt{3}\,x - y = 0$**

.....

5) Trovare l'**equazione canonica** della seguente conica $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

La matrice del complesso dei termini di secondo grado è $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$. Per l'autovalore $\lambda_1 = 2$ si ottiene l'equazione $x - y = 0$. Quindi, i suoi autovettori sono tutti e soli i vettori non nulli del tipo è (x, x). Per cui una base del suo autospazio è data dal vettore (1, 1). Per cui la matrice della rotazione è $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Si ha subito che $[2 \quad -6]C = [-2\sqrt{2} \quad -4\sqrt{2}]$. Dopo la rotazione la conica ha equazione $2(x')^2 + 4(y')^2 - 2\sqrt{2}\,x' - 4\sqrt{2}\,y' + 7 = 0$ ovvero $2(x' - 1/\sqrt{2})^2 + 4(y' - 1/\sqrt{2})^2 + 4 = 0$. Effettuando la traslazione $(X, Y) = (x' - 1/\sqrt{2}, y' - 1/\sqrt{2})$ si ottiene infine **$X^2/2 + Y^2 = -1$**.

.....

6) Trovare le **equazioni delle sfere** di raggio 1, tangenti al piano $\pi : 2x - 2y + z + 1 = 0$ e aventi il centro sulla retta r passante per A(–3, 2, 5) e parallela all'asse Z.

Si vede subito che (x, y, z) = (–3, 2, t + 5) sono delle equazioni parametriche per r. Quindi, i centri di tale sfere hanno coordinate del tipo (–3, 2, t + 5). Siccome le sfere sono tangenti al piano π il loro raggio è uguale alla distanza dei loro centri da π. Utilizzando la formula della distanza punto-piano si ha subito che $|t - 4| = 3$ da cui $t_1 = 1$ e $t_2 = 7$. Quindi, i centri sono $C_1(-3, 2, 6)$ e $C_2(-3, 2, 12)$.

Per cui le sfere cercate sono

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 6)^2 = 1$ e $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 12)^2 = 1$

Soluzioni dello scritto di Geometria del 4 Febbraio 2010

1) Trovare gli **autovalori** e gli **autovettori** della matrice $A=\begin{bmatrix}1&0&5\\0&0&0\\4&0&0\end{bmatrix}$.

$p_A(\lambda) = (-\lambda)[(1-\lambda)(-\lambda) - 20] = \lambda(5-\lambda)(\lambda+4)$

$\boldsymbol{\lambda_1 = 0}$ $\quad Au_1 = 0$ $\quad \mathbf{u_1 = \alpha(0, 1, 0)}$ $\quad \forall \alpha \neq 0$

$\boldsymbol{\lambda_2 = 5}$ $\quad (A - 5I)u_2 = 0$ $\quad \mathbf{u_2 = \alpha(5, 0, 4)}$ $\quad \forall \alpha \neq 0$

$\boldsymbol{\lambda_3 = -4}$ $\quad (A + 4I)u_3 = 0$ $\quad \mathbf{u_3 = \alpha(1, 0, -1)}$ $\quad \forall \alpha \neq 0$

2) Scrivere l'**equazione** del **piano** π che contiene le seguenti rette:

$r : 2x + 3y - 3z - 3 = x - 3 = 0$ e

$s : y - z = x + 2y - 2z = 0$.

$\boldsymbol{\pi : x + 3y - 3z = 0}$

Dal testo si ha che r e s sono complanari.

Combinando linearmente le equazioni di r e imponendo il passaggio per il punto O (che appartiene a s ma non a r) si ottiene l'equazione $x + 3y - 3z = 0$ del piano π.

[Poi, è facile verificare che s è contenuta in π. Infatti, oltre al punto O, anche il punto A(0, 1, 1) di s appartiene a π.]

3) Scrivere delle **equazioni** per la **retta** r passante per il punto A(0, 0, 3), parallela al piano $\pi : 2x - 3y + z = 0$ e perpendicolare alla retta

$s : x + 3 = 3y + z - 6 = 0$.

$\boldsymbol{x = 4t \quad y = 3t \quad z = t + 3}$

I parametri direttori della retta s sono (0, 1, –3). Per cui i parametri direttori di r (perpendicolare a s) sono (ℓ, 3, 1). Imponendo la condizione di parallelismo col piano π si ha che $2\ell - 8 = 0$ da cui $\ell = 4$. Poiché r passa per A(0, 0, 3) le sue equazioni parametriche sono $(x, y, z) = (4t, 3t, t + 3)$. Da queste si può passare alle due equazioni cartesiane seguenti $x - 4z + 12 = y - 3z + 9 = 0$.

4) Calcolare la **distanza** tra le rette

$r : x - 3y = z + 3 = 0$ e

$s : z = x - 3y - 10 = 0$.

$\boldsymbol{d(r, s) = \sqrt{19}}$

Le due rette sono parallele tra loro in quanto entrambe hanno parametri direttori proporzionali a (3, 1, 0).

Il piano π passante per il punto A(0, 0, –3) di r e ortogonale ad r (e ad s) ha equazione $3x + y = 0$.

L'intersezione tra s e π è il punto B(1, –3, 0). La distanza tra le due rette è uguale alla distanza tra i due punti A e B.

5) Scrivere l'**equazione canonica** della conica $x^2 - 10xy + y^2 + 10x - 2y + 3 = 0$.

Poi, classificarla.

$A = \begin{bmatrix}1&-5\\-5&1\end{bmatrix}$ $\quad p_A(\lambda) = [(\lambda - 1)^2 - 25] = (\lambda + 4)(\lambda - 6)$

$\lambda_1 = -4$ $\quad$ Base di $E_{(-4)} = \{(1, 1)\}$

$\lambda_2 = 6$ $\quad$ Base di $E_6 = \{(-1, 1)\}$

Moltiplicando per $1/\sqrt{2}$ si ottengono i versori.

Rotazione $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}\\\underline{y}\end{bmatrix}$

$-4\underline{x}^2 + 6\underline{y}^2 + 4\sqrt{2}\,\underline{x} - 6\sqrt{2}\,\underline{y} + 3 = 0$

$-4(\underline{x} - 1/\sqrt{2})^2 + 6(\underline{y} - 1/\sqrt{2})^2 + 2 = 0$

Traslazione $X = \underline{x} - 1/\sqrt{2}$ e $Y = \underline{y} - 1/\sqrt{2}$

$\boldsymbol{2X^2 - 3Y^2 = 1}$ $\quad$ **iperbole**

6) Scrivere l'**equazione** della **sfera** che ha il centro sul piano $\pi : 2y - 3 = 0$ ed è tangente nel punto A(4, 0, –2) al piano $\pi' : 2x - 3y + 4z = 0$.

$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 3y + 8z + 20 = 0}$

La retta r (ortogonale a π' e passante per A) ha equazioni parametriche $(x, y, z) = (2t + 4, -3t, 4t - 2)$ e incontra il piano $\pi : 2y - 3 = 0$ nel centro C(3, 3/2, –4) della sfera.

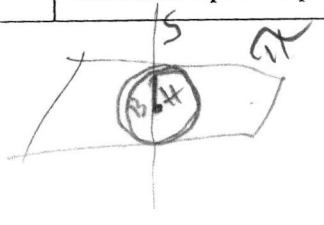
Quindi, l'equazione è $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 3y + 8z + d = 0$.

Imponendo il passaggio per A si ha che $d = 20$.

Oppure, si calcola $R^2 = [d(C, A)]^2 = 29/4$ e si scrive l'equazione $(x - 3)^2 + (y - 3/2)^2 + (z + 4)^2 = 29/4$

Soluzioni dello scritto di Geometria del 18 Febbraio 2010

1) Trovare una **base** per <u>ogni</u> **autospazio** della matrice $A=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 10 & 1 & 0\\ -2 & -1 & -4\end{bmatrix}$.	L'autospazio relativo a $\lambda_1 = 1$ ha equazioni $x = y + 5z = 0$ Quindi, una sua base è costituita da <u>un qualunque</u> vettore non nullo proporzionale al vettore **(0, – 5, 1)** L'autospazio relativo a $\lambda_2 = -4$ ha equazione $2x + y = 0$ per cui è $m_g(\lambda_2) = 2$ e una sua base è <u>una qualunque coppia ordinata</u> di suoi vettori linearmente indipendenti, ad esempio **(1, – 2, 0)** e **(0, 0, 1)**.
$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+4)^2$ $\lambda_1 = 1 \quad m_a(\lambda_1) = 1 \Rightarrow m_g(\lambda_1) = 1$ $\lambda_2 = -4 \quad m_a(\lambda_2) = 2$	
2) Trovare i **parametri direttori** della retta che passa per A(0, 2, 0) e si appoggia alle rette: r : x – 2 = y – 1 = 0 e s : y – 3 = z – 9 = 0. **$\alpha(2, -1, -9) \quad \forall\alpha\neq 0$**	Combinando linearmente le equazioni di r e imponendo il passaggio per il punto A si ottiene il piano $x + 2y - 4 = 0$. Combinando linearmente le equazioni di s e imponendo il passaggio per il punto A si ottiene il piano $9y - z - 18 = 0$. Dalle equazioni cartesiane $x + 2y - 4 = 9y - z - 18 = 0$ della retta si trovano subito i suoi parametri direttori.
3) Scrivere l'**equazione** del **piano** passante per il punto A(0, 2, 0), perpendicolare al piano π : x + 3y – 4z = 0 e parallelo alla retta r : y + 2 = x + 4z + 6 = 0. **$x + 5y + 4z - 10 = 0$**	Poiché passa per A(0, 2, 0) il piano ha un'equazione del tipo $ax + b(y - 2) + cz = 0$ con i coefficienti $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ da determinare. Imponendo la condizione di parallelismo con la retta r si ha che $c = 4a$. Imponendo, poi, la condizione di perpendicolarità col piano π si ottiene $b = 5a$. Quindi, si ha l'equazione $ax + 5ay + 4az - 10a = 0 \quad \forall a\neq 0$.
4) Calcolare la **distanza** tra le rette r : 2x – 3y = z + 9 = 0 e s : y = 2x – 2z – 1 = 0. **$d(r, s) = \sqrt{17}$**	Combinando linearmente le equazioni di s si ottiene il fascio di piani $2\mu x + \lambda y - 2\mu z - \mu = 0$. Imponendo la condizione di parallelismo con la retta r si ha che $\lambda = -3\mu$. Scelto $\mu = 1$, si ha che il piano π : 2x – 3y – 2z – 1 = 0 è l'<u>unico</u> piano per s parallelo ad r. Quindi, le due rette non sono parallele e la loro distanza è uguale alla distanza di un qualsiasi punto di r - ad esempio A(0, 0, –9) - dal piano π.
5) Scrivere l'**equazione <u>canonica</u>** della conica $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 6y + 66 = 0$. <u>Poi</u>, classificarla.	Moltiplicando per $1/\sqrt{13}$ si ottengono i versori. Rotazione $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{bmatrix}$ $13\underline{x}^2 - 2\sqrt{13}\,\underline{x} + 66 = 0 \quad 13(\underline{x} - 1/\sqrt{13})^2 + 65 = 0$ $(\underline{x} - 1/\sqrt{13})^2 + 5 = 0$ Traslazione $X = \underline{x} - 1/\sqrt{13}$ **$X^2 + 5 = 0$ conica senza punti reali**
$A = \begin{bmatrix}4 & -6\\ -6 & 9\end{bmatrix} \quad p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 13)$ $\lambda_1 = 13$ Base di $E_{13} = \{(2, -3)\}$ $\lambda_2 = 0$ Base di $E_0 = \{(3, 2)\}$	
6) Trovare le **coordinate** dei **centri** delle <u>due</u> sfere di raggio R = 15 che secano il piano π : 2x + 3y – z = 0 nella circonferenza di centro H(3, – 2, 0) e raggio r = 13. **$C_1(7, 4, -2) \quad C_2(-1, -8, 2)$**	I centri $C_{1/2}$ delle sfere si trovano sulla retta s passante per H e ortogonale a π le cui equazioni parametriche sono $(x, y, z) = (2t + 3, 3t - 2, -t)$. Per cui $[d(C_{1/2}, H)]^2 = 14t^2$. D'altronde è anche $[d(C_{1/2}, H)]^2 = R^2 - r^2 = (R-r)(R+r) = 56$. Da $14t^2 = 56$ si ha $t^2 = 4$ e, quindi, $t_{1/2} = \pm 2$. Sostituendo tali valori nelle equazioni parametriche di s si trovano i centri.



Soluzioni dello scritto di Geometria del 25 Febbraio 2010

1) Sia $A=\begin{bmatrix} -4 & (t+3) & -2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ con t parametro reale. Se esistono, trovare i **valori di t** per i quali la matrice A è diagonalizzabile (cioè esiste una base di R^3 formata da autovettori di A).

$t_1 = 2$ $t_2 = -5$

Si ha subito che $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+4)^2$. Quindi, A è diagonalizzabile se e solo se $m_g(-4) = m_a(-4) = 2$, cioè se e solo se il rango di $(A+4I) = \begin{bmatrix} 0 & (t+3) & -2 \\ 0 & 5 & -t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è uguale a 1, ovvero $\det\begin{bmatrix} (t+3) & -2 \\ 5 & -t \end{bmatrix} = (2-t)(t+5) = 0$.

2) Scrivere delle **equazioni** per la retta di minima distanza delle rette (sghembe)
$r: x-3 = 5x-3y = 0$ e
$s: x-5 = x+5z = 0$.

$y-5 = z+1 = 0$

Dalle equazioni di r e s si vede che tali rette si trovano su due piani paralleli al piano $\alpha: x = 0$. Quindi, la retta di minima distanza si può ottenere come intersezione del piano $\beta: y-5 = 0$ contenente r e perpendicolare a α e del piano $\gamma: z+1 = 0$ contenente s e perpendicolare a α.

3) Trovare le **coordinate dei punti** della retta $r: 3x-5z = 4y+3 = 0$ che si trovano a distanza 4 dal piano $\alpha: x-3 = 0$.

(7, – 3/4, 21/5) (– 1, – 3/4, – 3/5)

I punti di r hanno coordinate $(x, y, z) = (t, -3/4, 3t/5)$. Utilizzando la formula della distanza punto-piano si ha che $|t-3| = 4$ da cui $t_1 = 7$ e $t_2 = -1$.

4) Sia α il piano passante per i punti $A(\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, t, 0)$ e $C(0, 0, -5)$. Trovare i **valori di t** per i quali il piano α forma una angolo di $\pi/6$ radianti con l'asse Y.

$t = \pm 5\sqrt{2}/3$

Il vettore $\mathbf{v} = (5t, 5\sqrt{2}, -t\sqrt{2})$, risultato del prodotto vettoriale di $CB = (0, t, 5)$ e $CA = (\sqrt{2}, 0, 5)$, è perpendicolare al piano α. Il vettore $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ è parallelo all'asse Y. Utilizzando il fatto che il seno dell'angolo (retta-piano) tra l'asse Y e il piano α è uguale al valore assoluto del coseno dell'angolo compreso tra i vettori **u** e **v** si perviene all'equazione $9t^2 = 50$.

5) Scrivere l'**equazione canonica** della conica $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x - 10y + 5 = 0$. Poi, classificarla.

$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ $p_A(\lambda) = (\lambda-4)(\lambda-6)$

$\lambda_1 = 4$ Base di $E_4 = \{(1, 1)\}$

$\lambda_2 = 6$ Base di $E_6 = \{(-1, 1)\}$

Moltiplicando per $1/\sqrt{2}$ si ottengono i versori.

Rotazione $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}$

$4\underline{x}^2 + 6y^2 - 4\sqrt{2}\,\underline{x} - 6\sqrt{2}\,\underline{y} + 5 = 0$

$4(\underline{x} - 1/\sqrt{2})^2 + 6(\underline{y} - 1/\sqrt{2})^2 = 0$

Traslazione $X = \underline{x} - 1/\sqrt{2}$ $Y = \underline{y} - 1/\sqrt{2}$

$2X^2 + 3Y^2 = 0$ conica con un solo punto reale

6) Stabilire la **mutua posizione** delle sfere:
$S_1: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 8z = 0$
$S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 20y - 20z + 216 = 0$

tangenti esternamente

La sfera S_1 ha centro $C_1(2, -4, 4)$ e raggio $R_1 = 6$.
La sfera S_2 ha centro $C_2(5, -10, 10)$ e raggio $R_2 = 3$.
La distanza tra i due centri è $d(C_1, C_2) = 9$.
Poiché $d(C_1, C_2) = R_1 + R_2$ le due sfere sono tangenti esternamente.

Soluzioni dello scritto di Geometria del 28 Maggio 2009

1) Trovare le **equazioni** del **sottospazio** $V(w, x, y, z) \leq R^4$ generato dalle quaterne $\mathbf{c_1} = (0, 0, 2, -1)$ e $\mathbf{c_2} = (0, -1, 1, 0)$.	$(w, x, y, z) \in V \Leftrightarrow \operatorname{rg}\begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$ Applicando il teorema degli orlati al minore $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ si ottengono le equazioni $\mathbf{w = x + y + 2z = 0}$
2) Trovare una **base** per **OGNI autospazio** della matrice A avente $(0, -3, 12)$, $(0, 4, 0)$ e $(0, 3, 0)$ come I, II e III riga rispettivamente. Poi, dire se A è diagonalizzabile.	$p_A(\lambda) = (4 - \lambda)\lambda^2$ Base di $E_0 = \mathbf{\{(1, 0, 0)\}}$ Base di $E_4 = \mathbf{\{(6, 4, 3)\}}$ A **non** è diagonalizzabile in quanto non è possibile trovare tre suoi autovettori linearmente indipendenti
3) Sia r la retta per $A(0, t^2, t)$ e $B(-5, t^2, 1)$ e π il piano $(t-1)x + 9y + tz - 10 = 0$. Studiare, al variare del parametro reale t, la **mutua posizione** della retta r e il piano π.	$BA = (5, 0, t-1)$ $v_\pi = (t-1, 9, t)$ $r \,//\, \pi \Leftrightarrow BA \perp v_\pi \Leftrightarrow (t-1)(t+5) = 0$ $\mathbf{t = 1}$ $(A \in \pi)$ **r è contenuta in π** $\mathbf{t = -5}$ $(A \notin \pi)$ **r è strett. parallela a π** $\mathbf{\forall t \in R - \{1, -5,\}}$ **r è incidente π**
4) Sulla retta r passante per il punto $A(-3, 1, 0)$ e perpendicolare al piano $\pi : x - 2y + z = 0$, trovare i **punti** che distano **6** dal piano $\pi' : y + 1 = 0$.	$r \perp \pi \Rightarrow (l_r, m_r, n_r) = (1, -2, 1)$ $P(x, y, z) \in r \Leftrightarrow (x, y, z) = (t-3, -2t+1, t)$ $d(P, \pi') = 6 \Leftrightarrow \lvert(-2t+1)+1\rvert = 6$ $t_1 = 4 \Rightarrow \mathbf{P_1(1, -7, 4)}$ $t_2 = -2 \Rightarrow \mathbf{P_2(-5, 5, -2)}$
5) Trovare l'**equazione canonica** e, poi, classificare la seguente conica: $9x^2 - 10xy + 9y^2 + 44x - 12y + 32 = 0$ --- $A = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$ $p_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 14)$ $\lambda_1 = 4$ Base di $E_4 = \{(1, 1)\}$ $\lambda_2 = 14$ Base di $E_{14} = \{(-1, 1)\}$	Rotazione $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}$ $4\underline{x}^2 + 14\underline{y}^2 + 16\sqrt{2}\,\underline{x} - 28\sqrt{2}\,\underline{y} + 32 = 0$ $4(\underline{x} + 2\sqrt{2})^2 + 14(\underline{y} - \sqrt{2})^2 - 28 = 0$ Traslazione $X = \underline{x} + 2\sqrt{2}$ e $Y = \underline{y} - \sqrt{2}$ $4X^2 + 14Y^2 = 28$ $\mathbf{\frac{X^2}{7} + \frac{Y^2}{2} = 1}$ **ELLISSE**
6) Studiare la **mutua posizione** delle sfere: $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 2z - 6 = 0$ e $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$	$C_1 = (3, -3, 1)$ $R_1 = 5$ $C_2 = (1, -2, 3)$ $R_2 = 2$ $D = d(C_1, C_2) = 3$ $D = R_1 - R_2 \Rightarrow \mathbf{S_2}$ **è interna e tangente ad** $\mathbf{S_1}$

Soluzioni dello scritto di Geometria del 24 Giugno 2009

1) Sia A la matrice avente $(0,\ t^2-16,\ t(t-4),\ 0)$ e $(0,\ t^2-4t,\ (t-4)(t+4),\ 0)$ come I e II riga rispettivamente. Studiare, al variare del parametro reale t, il **rango** della matrice A.

Sia $B=\begin{bmatrix} t^2-16 & t(t-4) \\ t^2-4t & (t-4)(t+4) \end{bmatrix}$ (sottomatrice di A)

$\det B = 8(t+2)(t-4)^2$ (minore di ordine 2 di A)

$\forall t\in \mathbf{R}\setminus\{-2,4\} \Rightarrow \det B\neq 0 \Rightarrow \mathbf{rg(A)=2}$

$\mathbf{t=-2} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & -12 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{rg(A)=1}$

$\mathbf{t=4} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{rg(A)=0}$

2) Trovare i **parametri direttori** della retta passante per l'origine O(0, 0, 0) che si appoggia alla retta $r: z=4x-y+7z+11=0$ e alla retta $s: 11x+y-3z-14=x+3y=0$.

Dalle equazioni delle rette r ed s si ha subito che il piano contenente r e O è $z=0$ e il piano contenente s e O è $x+3y=0$ per cui la retta è $z=x+3y=0$.

Quindi, i parametri direttori sono $\mathbf{(3,-1,0)}$

3) Calcolare l'**area** del triangolo di vertici A(0, 4,–5), B(4, 0,–3) e C(5,–3, 0).
Poi, scrivere l'equazione del **piano** che contiene il triangolo ABC.

$AC\wedge AB = 2\mathbf{v}$ con $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

area $ABC = \|AC\wedge AB\|/2 = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{50} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

$\mathbf{v}\perp\pi$ e $A\in\pi \Rightarrow \boldsymbol{\pi: 3x+5y+4z=0}$

4) Siano A, B, C i punti d'intersezione del piano $\pi: x-y+2z-24=0$ con gli assi X, Y, Z rispettivamente. Trovare l'**ortocentro** (punto d'incontro delle altezze) del triangolo ABC.

$BA \,//\, \mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ $\quad BC \,//\, \mathbf{v}=2\mathbf{j}+\mathbf{k}$

$\pi_1: A\in\pi_1$ e $\pi_1\perp BC \Rightarrow \pi_1: 2y+z=0$

$\pi_2: C\in\pi_2$ e $\pi_2\perp BA \Rightarrow \pi_2: x+y=0$

$\pi\cap\pi_1\cap\pi_2 = \{\mathbf{(4,-4,8)}\}$

5) Trovare l'**equazione <u>canonica</u>** della conica: $4x^2+6xy+4y^2+8x+6y+11=0$.
Poi, <u>classificarla</u>.

$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad p_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-7)$

$\lambda_1=1$ $\quad$ Base di $E_1 = \{(1,-1)\}$

$\lambda_2=7$ $\quad$ Base di $E_7 = \{(1,1)\}$

Moltiplicando per $1/\sqrt{2}$ si ottengono i versori.

Rotazione $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}$

$\underline{x}^2+7\underline{y}^2+\sqrt{2}\,\underline{x}+7\sqrt{2}\,\underline{y}+11=0$

$(\underline{x}+1/\sqrt{2})^2+7(\underline{y}+1/\sqrt{2})^2+7=0$

Traslazione $X=\underline{x}+1/\sqrt{2}$ e $Y=\underline{y}+1/\sqrt{2}$

$X^2+7Y^2=-7$

$\boldsymbol{\frac{X^2}{7}+Y^2=-1}$ **Ellisse immaginaria**

6) Trovare le equazioni del **piano** e di una **sfera** la cui intersezione sia la circonferenza passante per i punti O(0, 0, 0), A(–7, 0, 0) e B(0, 1, 3). [*solo per il corso da 8 C.F.U.*]

Il piano per O, A e B è $\boldsymbol{\pi: 3y-z=0}$

Imponendo il passaggio della sfera per O, A e B, dall'equazione $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ si ottiene $d=0$, $a=7$ e $b=-(10+3c)$. Per cui $\forall c\in\mathbf{R}$

$\mathbf{x^2+y^2+z^2+7x-(10+3c)y+cz=0}$

Ora, si scelga, <u>a piacere</u>, un valore per $c\in R$.

Soluzioni dello scritto di Geometria del 16 Luglio 2009

1) Sia A la matrice avente $(t, t-2)$ e $(2, 2)$ come I e II riga rispettivamente. Determinare per quali **valori del parametro** reale t esiste una base dello spazio R^2 formata da autovettori di A.

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (t+2)\lambda + 4 \qquad \Delta = (t+6)(t-2)$

Esiste una base di R^2 formata da autovettori di A $\Leftrightarrow$ A ha due autovalori reali distinti $\Leftrightarrow$ $\Delta > 0$ $\Leftrightarrow$

$$\mathbf{t < -6 \quad vel \quad t > 2}$$

2) Trovare una **base** dello spazio $V(w, x, y, z)$ (sottospazio di R^4) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$w - x + z = 4x - y + 2z = 0.$

Poiché le due equazioni sono **indipendenti**, la dimensione di V è uguale a 2. Per cui una sua base è una **qualunque** coppia di suoi vettori linearmente indipendenti.

Per esempio: $\mathbf{(1, 0, -2, -1)}$ $\mathbf{(1, 1, 4, 0)}$

3) Trovare la **distanza** tra le rette sghembe

$r : 2x - 3y + 12 = y + z = 0$

$s : x + 7z = 2x - y + 2z = 0$ e i **parametri direttori** della retta di minima distanza.

$\mathbf{d(r, s) = 4 \qquad (l, m, n) = (2, -1, 2)}$

Combinando linearmente le equazioni della retta r si ottiene l'equazione del fascio $F(r) : 2\lambda x + (\mu - 3\lambda)y + \mu z + 12\lambda = 0$.

Imponendo il parallelismo con la retta s si ottiene $\mu - 2\lambda = 0$.

Quindi, il piano $\pi_1 \in F(r)$ con $\pi_1 \,//\, s$ è $\pi_1 : 2x - y + 2z + 12 = 0$.

La distanza tra r ed s è uguale alla distanza tra π_1 e $O(0,0,0) \in s$.

Retta w di minima distanza $\perp \pi_1 \Rightarrow w \,//\, \mathbf{v}_\pi = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

4) Sia r la retta parallela all'asse X e passante per $A(\sqrt{3}, 15, -5\sqrt{3})$. Trovare le equazioni dei **piani** che contengono r e formano un angolo di $\pi/6$ radianti con l'asse Y.

$A \in \pi$ e asse $X \,//\, r \subset \pi \Rightarrow \pi : b(y-15) + c(z+5\sqrt{3})$

Applicando la formula dell'angolo retta-piano all'asse Y e al piano π si ottiene $c^2 = 3b^2$. Scegliendo $b = 1$ si ha $c = \pm\sqrt{3}$.

$$\mathbf{\pi_1 : y + \sqrt{3}z = 0}$$

$$\mathbf{\pi_2 : y - \sqrt{3}z - 30 = 0}$$

5) Siano A, B, e C i punti di intersezione del piano $\pi : x - 2y - z - 18 = 0$ con gli assi X, Y e Z rispettivamente. Trovare il **circocentro** (punto d'incontro degli assi dei lati) del triangolo ABC.

$A(18, 0, 0) \quad B(0, -9, 0) \quad C(0, 0, -18)$

$M(9, -9/2, 0)$ punto medio di AB $\,//\, \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

$H(9, 0, -9)$ punto medio di AC $\,//\, \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

$\pi_1 : M \in \pi_1$ e $\pi_1 \perp AB \Rightarrow \pi_1 : 4x + 2y - 27 = 0$

$\pi_2 : H \in \pi_2$ e $\pi_2 \perp AC \Rightarrow \pi_2 : x + z = 0$

$$\pi \cap \pi_1 \cap \pi_2 = \left\{\left(\frac{15}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{15}{2}\right)\right\}$$

6) Scrivere le equazioni della **circonferenza** che giace sul piano $x - y + z = 0$, ha il centro nel punto $C(1, 2, 1)$ e passa per l'origine $O(0, 0, 0)$. [*solo per il corso da 8 C.F.U.*]

In generale, si possono prendere le equazioni di due qualsiasi sfere distinte passanti per O e aventi il centro sulla retta r passante per C e perpendicolare a π.

Usando le equazioni parametriche di r, il centro di tali sfere ha coordinate $(t+1, -t+2, t+1)$ con $t \in R$.

Tenendo, inoltre, conto del fatto che le sfere passano per O si ha

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 2(t+1)x - 2(2-t)y - 2(t+1)z = 0}$$

Ora si scelgano, a piacere, due valori distinti di $t \in R$.

Le due equazioni "più semplici" sono quella del piano $\mathbf{x - y + z = 0}$ e quella della sfera passante per O e di centro C $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = 0}$

Soluzioni dello scritto di Geometria del 30 Luglio 2009

1) Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 6y - 10z = 0\}$. Sia $B = \{(t^3 - 6t^2, t^2 - t, t), (8,-3,-1)\}$. Determinare per quali **valori** del parametro reale t l'insieme B è una **base** del sottospazio S.	$\mathbf{v} = (t^3 - 6t^2, t^2 - t, t) \in S \Leftrightarrow t(t-4)(t+4) = 0$ $t = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = (0, 0, 0)$ NON accettabile per la base $t = 4 \Rightarrow \mathbf{v} = (-32, 12, 4) = -4\mathbf{u}$ NON accettabile per la base $t = -4 \Rightarrow \mathbf{v} = (-160, 20, -4) = -4(40, -5, 1)$ accettabile per la base in quanto **u** e **v** sono linearmente indipendenti. Quindi, l'unico valore accettabile è $\mathbf{t = -4}$
E' necessario (ma non sufficiente) che i vettori di B appartengano a S. Si vede subito che $\mathbf{u} = (8,-3,-1) \in S$	
2) Scrivere la **soluzione** (w, x, y, z) **generale** del seguente sistema lineare: $w + y - 3z + 2 = 3w + x - y + 1 = 2w + x - 2y + 3z - 1 = 0$.	Utilizzando il metodo di riduzione a gradino si perviene al sistema equivalente: $w + y - 3z + 2 = x - 4y + 9z - 5 = 0$. Scegliendo, per esempio, y e z come parametri possiamo scrivere la soluzione generale nel seguente modo: $\mathbf{(w, x, y, z) = (-2, 5, 0, 0) + y(-1, 4, 1, 0) + z(3, -9, 0, 1)}$
Poiché le equazioni indipendenti sono 2 e le incognite 4 è necessario che la soluzione dipenda da due parametri. Ovviamente, il modo di rappresentare la soluzione generale non è unico.	
3) Sulla retta passante per il punto A(–7, 3, 0) e perpendicolare al piano $x - 2y + 2z + 14 = 0$, determinare le coordinate dei **punti** che distano 8 dal piano $2x - 2y - z = 0$.	Usando per la retta le equazioni parametriche, i suoi punti hanno coordinate (t–7, –2t+3, 2t) con $t \in \mathbb{R}$. Applicando la formula della distanza punto-piano al punto (t–7, –2t+3, 2t) e al piano $2x - 2y - z = 0$ (con distanza 8) si ottiene l'equazione $\lvert t - 5 \rvert = 6$. $t_1 = -1 \Rightarrow \mathbf{P_1(-8, 5, -2)}$ $t_2 = 11 \Rightarrow \mathbf{P_2(4, -19, 22)}$
4) Calcolare la **distanza** tra le due rette $r : x - y - 5 = 5y - z - 1 = 0$ e $s : 5x - z = x - y = 0$. $\mathbf{d(r, s) = \sqrt{26}}$	Le due rette sono parallele, avendo gli stessi parametri direttori (1, 1, 5). Il piano π perpendicolare alle due rette e passante per il punto $O(0, 0, 0) \in s$ ha equazione $x + y + 5z = 0$. Con semplici calcoli si trova che il punto d'intersezione tra r e π è A(5, 0, –1). La distanza tra le due rette è uguale alla distanza tra O e A.
5) Se esiste una conica passante per i punti A(0, 0), B(0,–1), C(1,–1), D(1,–2), E(2,–2), scrivere la sua **equazione**. Altrimenti, **motivare** brevemente la risposta.	La conica è una conica degenere unione della retta $r : x + y = 0$ per A, C ed E e un'altra retta s. Poiché i punti B e D della conica non stanno su r, essi devono stare sulla retta s che, quindi, ha equazione $x + y + 1 = 0$. Perciò, l'equazione della conica sarà $(x + y)(x + y + 1) = 0$. $\mathbf{x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0}$
Si vede subito che i tre punti A, C ed E sono allineati.	
6) Trovare il **centro** e il **raggio** della sfera passante per l'origine O e i punti A, B, e C di intersezione del piano $\pi : x - 2y - z - 18 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente.	Si ha A(18, 0, 0), B(0,–9, 0) e C(0, 0,–18). Imponendo il passaggio della sfera $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ per O, A, B, e C, si ottiene $d = 0$, $a = -18$, $b = 9$ e $c = 18$. Quindi, la sfera ha equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 18x + 9y + 18z = 0$. Da cui $\mathbf{C(9, -9/2, -9) \quad r = 27/2}$

Soluzioni dello scritto di Geometria del 24 Settembre 2009

1) Del sistema lineare $3x - y + 10z - 22 = x - y + 8z - 8 = 2x + y - 5z - 13 = 0$ trovare: • una soluzione particolare X_P ; • una base B dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo ad esso associato. **$X_p = (7, -1, 0)$ $B = \{(-1, 7, 1)\}$**	Utilizzando il metodo di riduzione a gradino si perviene ad un sistema equivalente con **due equazioni** indipendenti. **Ad esempio** $x - y + 8z - 8 = y - 7z + 1 = 0$. Scegliendo z come parametro **possiamo** scrivere la soluzione generale nel modo seguente: $(x, y, z) = (7, -1, 0) + z(-1, 7, 1)$. A questo punto si può scegliere **una delle infinite** soluzioni e **uno degli infiniti vettori** del tipo $z(-1, 7, 1)$ con $z \neq 0$.
2) **Se esiste**, trovare una coppia $(h, k) \in R^2$ tale che la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$ **NON** abbia tre autovalori reali a due a due distinti e, allo stesso tempo, sia diagonalizzabile. **$(h, k) = (3, -7)$**	$p_A(\lambda) = (h - \lambda)(5 - \lambda)(3 - \lambda)$ quindi $h = 5$ o $h = 3$ $h = 5 \Rightarrow m_a(3) = 1$ e $m_a(5) = 2$ $rg(A - 5I) = 2 \quad \forall k \in R \Rightarrow m_g(5) = 1 \quad \forall k \in R$ quindi, per $h = 5$ A non è diagonalizzabile $h = 3 \Rightarrow m_a(5) = 1$ e $m_a(3) = 2$ $m_g(3) = 2 \Leftrightarrow rg(A - 3I) = 1 \Leftrightarrow k = -7$ quindi, A è diagonalizzabile per $h = 5$ e $k = -7$
3) Date le rette $r : x = x - 2y + 3z + 12 = 0$ e $s : 2x + y = x + y - 12z - 12 = 0$, sia t la retta per l'origine O che si appoggia in A alla retta r e in B alla retta s. Trovare le coordinate di A e B. **$A(0, 0, -4)$ $B(0, 0, -1)$**	$\pi_1 : O \in \pi_1$ e $r \subset \pi_1 \Rightarrow \pi_1 : x = 0$ $\pi_2 : O \in \pi_2$ e $s \subset \pi_1 \Rightarrow \pi_2 : 2x + y = 0$ $t = \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow t : x = y = 0$ (asse Z) $t \cap r = \{A\}$ $t \cap s = \{B\}$
4) Sia $A(-2, 3\sqrt{11}, 8)$. Sulla retta $y = z - 11 = 0$ trovare due punti B e C tali che il triangolo ABC sia equilatero. **$B = (4, 0, 11)$ $C = (-8, 0, 11)$**	$\pi : A \in \pi$ e $r \perp \pi \Rightarrow \pi : x + 2 = 0$ $\pi \cap r = \{H\}$ $H(-2, 0, 11)$ AH altezza di ABC $d(A,H) = 6\sqrt{3} \Rightarrow d(H,B) = d(H,C) = 6$ $B = (-2+6, 0, 11)$ $C = (-2-6, 0, 11)$
5) Siano $A(t, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, -\sqrt{23})$. Trovare i valori del parametro reale t per i quali il piano passante per A, B e C forma col piano YZ un angolo di $2\pi/3$ radianti. **$t = \pm 2\sqrt{23}/3$**	$\mathbf{u} := AB \wedge CB = 2\sqrt{23}\,\mathbf{i} + t\sqrt{23}\,\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$ $\mathbf{u} \perp \pi_1$ $\mathbf{i} \perp \pi_2$ applicando la formula dell'angolo tra due piani con $(a_1,b_1,c_1) = (2\sqrt{23}, t\sqrt{23}, -2t)$ e $(a_2,b_2,c_2) = (1,0,0)$ ed elevando al quadrato si ottiene $9t^2 = 92$
6) Sia Σ la sfera che ha il centro in $C(4,-7,-16)$ e passa per il punto $A(4,-12,-10)$. Trovare l'equazione del piano π tangente a Σ in A. **$\pi : 5y - 6z = 0$**	$\pi : A \in \pi$ e $\pi \perp AC$ $AC = 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \Rightarrow \pi : 5(y + 12) - 6(z + 10) = 0$

Soluzioni dello scritto di Geometria del 15 Ottobre 2009

1) Del sistema lineare $3x - y + 11z - 19 =$ $= x - y + 9z - 7 = 2x + y - 6z - 11 = 0$ trovare: • una soluzione particolare X_P ; • una base B dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo ad esso associato. **$X_p = (6, -1, 0)$ $B = \{(1, -8, -1)\}$**	Utilizzando il metodo di riduzione a gradino si perviene ad un sistema equivalente con due equazioni indipendenti. **Ad esempio** $x - y + 9z - 7 = y - 8z + 1 = 0$. Scegliendo z come parametro possiamo scrivere così la soluzione generale $(x, y, z) = (6, -1, 0) + z(-1, 8, 1)$. A questo punto si può scegliere (preso un valore a piacere per z) una delle infinite soluzioni e (sempre a piacere) uno degli infiniti vettori del tipo $z(-1, 8, 1)$ con $z \neq 0$.
2) Sia $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. **Se possibile**, trovare una matrice diagonale Λ e una matrice invertibile C tali che $AC = C\Lambda$. **Altrimenti**, motivare la risposta.	$p_A(\lambda) = \lambda(\lambda + 2)(2 - \lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$ $\mathbf{u_1} = (1, 0, -2)$ base dell'autospazio E_0 $\mathbf{u_2} = (1, -2, 2)$ base dell'autospazio $E_{(-2)}$ $\mathbf{u_3} = (1, 2, 2)$ base dell'autospazio E_2 Come matrice diagonale possiamo prendere la matrice diagonale che ha λ_1, λ_2 e λ_3 sulla diagonale principale. Come matrice C prendiamo la matrice che ha i vettori $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ e $\mathbf{u_3}$ come 1ª, 2ª e 3ª colonna rispettivamente
3) **Se esiste**, trovare il piano che contiene le seguenti rette: $r : 4x + z - 3 = y + 1 = 0$ e $s : 4x + z = y = 0$ **$\pi : 4x + 3y + z = 0$**	Dalle equazioni si vede subito che r ed s sono parallele e, quindi, complanari. Il piano richiesto è il piano del fascio (proprio) di piani contenenti una delle due rette che passa per un punto qualsiasi dell'altra retta. Quindi, possiamo combinare linearmente le equazioni di r e imporre il passaggio per $O(0, 0, 0) \in s$.
4) Sia H la proiezione ortogonale del punto $A(2\sqrt{26}, 2, -5)$ sulla retta $r : x = z + 7 = 0$. Su r trovare (almeno) un altro punto B tale che l'area del triangolo rettangolo AHB valga $9\sqrt{3}$.	Il piano per A è perpendicolare a r è $\pi : y - 2 = 0$. Da $\pi \cap r = \{H\}$ si ha $H(0, 2, -7)$ e $d(A, H) = 6\sqrt{3}$. Da $d(A, H)d(H, B)/2 = \text{area} = 9\sqrt{3}$ si ha $d(H, B) = \mathbf{3}$. Essendo r // asseY si ha $B(0, 2 \pm \mathbf{3}, -7)$. **$B_1 = (0, 5, -7)$ $B_2 = (0, -1, -7)$**
5) Sia r: $4x + 3y - 10 = 0$ la direttrice delle parabole passanti per l'origine O(0, 0) e aventi i fuochi sull'asse Y delle ordinate. Trovare le coordinate dei loro fuochi.	Essendo sull'asse Y i fuochi hanno coordinate del tipo $(0, \alpha)$. La distanza dell'origine dai fuochi è $\lvert\alpha\rvert$. La distanza (punto-retta) dell'origine dalla direttrice è 2. Uguagliando queste distanze si ottiene $\alpha = \pm 2$. **$F_1 = (0, 2)$ $F_2 = (0, -2)$**
6) Scrivere l'equazione della sfera Σ che ha il centro in $C(-10, 3, 15)$ ed è tangente al piano $\pi : 4x + 7z = 0$. **$x^2 + y^2 + z^2 + 20x - 6y - 30z + 269 = 0$**	Il raggio R della sfera è uguale alla distanza (punto-piano) di C da π. Per cui $R = d(C, \pi) = \sqrt{65}$. Con il centro e il raggio si scrive subito l'equazione della sfera: **$(x + 10)^2 + (y - 3)^2 + (z - 15)^2 = 65$**

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

09 Gennaio 2013 Ingegneria ..... Matricola .....

In caso di esito sufficiente, desidero sostenere la **prova orale** [ ] **oggi** (aula I.12 ore 15.00)

[ ] **Mercoledì 23/01/2013** (aula I.13 ore 9.30) [ ] **Mercoledì 13/02/2013** (aula I.12 ore 11.30)

1) Trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

.....

2) Sia π' il piano passante per $A(\sqrt{23}, 53, 12)$, parallelo alla retta $r : 3x + z + 8 = 2x + y + 11 = 0$ e perpendicolare al piano π: $2y + 3z - 10 = 0$. Trovare il punto B d'intersezione tra π' e l'asse Y.

.....

3) Si considerino le due rette sghembe $r : 2x + 7z - 81 = y + 3z = 0$ e $s : 2x - 7y = 2x - 2y + z = 0$. Sia t la retta di minima distanza tra r e s e sia D la distanza tra r e s. Trovare le componenti dei due vettori aventi la direzione di t e lunghezza D.

.....

4) Sia r la retta parallela all'asse Y e passante per $A(-\sqrt{3}, 2, 3)$. Trovare i piani che contengono r e formano un angolo di $\pi/6$ radianti con il piano YZ.

.....

5) Trovare l'equazione canonica della conica: $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 60x - 70y + 105 = 0$
Poi classificarla.

.....

6) Si consideri la sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 3z = 0$. Scrivere l'equazione di una delle due sfere tangenti a S nell'origine e aventi il raggio uguale alla metà del raggio di S. Inoltre, dire se tale sfera è tangente esternamente o internamente.

1. Esercizio. Il seguente sistema lineare

$$(1)\begin{cases} x_1 - 5x_3 + 2x_6 = 6 \\ 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 - 7x_3 + 3x_6 = 4 \\ 3x_2 + 2x_4 + 4x_5 = 7 \\ 2x_1 - x_3 + x_6 = -12 \\ 4x_2 + 3x_4 + 5x_5 = 9 \end{cases}$$

non ha soluzioni.

2. Esercizio. Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 12x_4 = 2 \end{cases}$$

ha come <u>unica</u> soluzione la quaterna $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, -1, 1)$.

3. Esercizio. Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

ha infinite ∞^1 soluzioni, cioè dipendenti da un parametro

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (6, -5, 3, -1, 0) + \alpha(-1, 1, 0, -1, 1)$

4. Esercizio. Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}$$

ha infinite ∞^2 soluzioni, cioè dipendenti da due parametri

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, -3, 0, 0) + \alpha(1, 1, 1, 0) + \beta(2, 2, 0, 1)$

5. **Esercizio.** Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 40x_1 + 5x_2 + 55x_3 - 25x_4 + 213x_5 = 35 \\ 8x_1 + x_2 + 11x_3 - 5x_4 - 11x_5 = 7 \\ 56x_1 + 7x_2 + 77x_3 - 35x_4 - 197x_5 = 49 \\ 24x_1 + 3x_2 + 33x_3 - 15x_4 - 29x_5 = 21 \end{cases}$$

ha infinite ∞^3 soluzioni, cioè dipendenti da tre parametri

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 7, 0, 0, 0) + \alpha(1, -8, 0, 0, 0) + \beta(0, -11, 1, 0, 0) + \gamma(0, 5, 0, 1, 0)$

6. **Esercizio.** Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 6y + 2z = 1 \end{cases}$$

ha come unica soluzione la terna $(x, y, z) = (1/7, 10/7, -4)$.

7. **Esercizio.** Si consideri il seguente sistema lineare "simultaneo"

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1; = 2 \\ x + 2y + z = 1; = 1 \\ x + 23y + 10z = 4; = 0 \end{cases}$$

Il primo ha infinite ∞^1 soluzioni, cioè dipendenti da un parametro

$(x, y, z) = (5/7, 1/7, 0) + \alpha(-1/7, -3/7, 1)$

Il secondo **non** ha alcuna soluzione.

8. **Esercizio.** Si consideri il seguente sistema lineare "simultaneo"

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1; = 0; = 0 \\ x + 2y + z = 0; = 1; = 0 \\ 3x + 6y + 2z = 0; = 0; = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Il primo ha come unica soluzione la terna $(x, y, z) = (2/7, -1/7, 0)$.

Il secondo ha come unica soluzione la terna $(x, y, z) = (0, -1, 3)$.

Il terzo ha come unica soluzione la terna $(x, y, z) = (1/7, 3/7, -1)$.

Si noti che la matrice B che ha come colonne ordinatamente le precedenti tre terne è l'inversa di A.

9. Esercizio. Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2000x_1 + 0{,}003x_2 - 0{,}3x_3 + 40x_4 = 5 \\ 3000x_1 + 0{,}005x_2 - 0{,}4x_3 + 90x_4 = 8 \\ 500x_1 + 0{,}0007x_2 - 0{,}08x_3 + 8x_4 = 1{,}3 \\ 60000x_1 + 0{,}09x_2 - 9x_3 + 1300x_4 = 160 \end{cases}$$

ha infinite ∞^1 soluzioni, cioè le infinite soluzioni dipendono da un parametro

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0{,}008; -5000; 0; 0{,}1) + \beta(0{,}003; -1000; 10; 0) \quad \forall \beta \in R$

Suggerimento: si moltiplichino entrambe i membri della III equazione per 10

e si dividano entrambe i membri della IV equazione per 10

$$\begin{cases} 2000x_1 + 0{,}003x_2 - 0{,}3x_3 + 40x_4 = 5 \\ 3000x_1 + 0{,}005x_2 - 0{,}4x_3 + 90x_4 = 8 \\ 5000x_1 + 0{,}007x_2 - 0{,}8x_3 + 80x_4 = 13 \\ 6000x_1 + 0{,}009x_2 - 0{,}9x_3 + 130x_4 = 16 \end{cases}$$

Ora si effettui il seguente cambio di variabili

$$\begin{cases} y_1 = 1000x_1 \\ y_2 = 0{,}001x_2 \\ y_3 = 0{,}1x_3 \\ y_4 = 10x_4 \\ 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 4y_4 = 5 \\ 3y_1 + 5y_2 - 4y_3 + 9y_4 = 8 \\ 5y_1 + 7y_2 - 8y_3 + 8y_4 = 13 \\ 6y_1 + 9y_2 - 9y_3 + 13y_4 = 16 \end{cases}$$

Riducendo a gradino si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 4y_4 = 5 \\ y_2 + y_3 + 6y_4 = 1 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} y_4 = 1 \\ y_3 = \beta \\ y_2 = -5 - \beta \\ y_1 = 8 + 3\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1000x_1 = 8 + 3\beta \\ 0{,}001x_2 = -5 - \beta \\ 0{,}1x_3 = \beta \\ 10x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0{,}008 + 0{,}003\beta \\ x_2 = -5000 - 1000\beta \\ x_3 = 10\beta \\ x_4 = 0{,}1 \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0{,}008; -5000; 0; 0{,}1) + \beta(0{,}003; -1000; 10; 0) \quad \forall \beta \in R$

10. Esercizio. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente da un parametro reale t

$$\begin{cases} 3x+2y+z=-1 \\ 7x+6y+5z=t \\ 5x+4y+3z=2 \end{cases}$$

Per $t \neq 5$ il sistema non ha soluzioni.

Per $t = 5$ il sistema ha infinite ∞^1 soluzioni, cioè dipendenti da un parametro

$(x, y, z) = (0, -5/2, 4) + \alpha(1, -2, 1)$

11. Esercizio. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente da un parametro reale t

$$\begin{cases} w+x+(2-t)y=1 \\ (3-2t)w+(2-t)x+y=t \\ (2-t)w+(2-t)x+1=1 \end{cases}$$

- per $t = 3$ il sistema **non** ha soluzioni;
- per $t = 1$ il sistema ha infinite ∞^2 soluzioni $(w, x, y) = (1, 0, 0) + \alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$;
- **per ogni** t reale con $t \neq 1$ et $t \neq 3$ il sistema ha un'**unica** soluzione data dalla terna

$(w, x, y) = (-1, (4-t)/(3-t), 1/(3-t))$.

12. Esercizio. Si consideri il seguente sistema **non** lineare

$$\begin{cases} w+x+yz=2 \\ w+xz+y=-1 \\ wz+x+y=-1 \end{cases}$$

- per $z = 1$ il sistema **non** ha soluzioni;
- per $z = -2$ il sistema è lineare e ha infinite soluzioni $(w, x, y, z) = (1+\alpha, 1+\alpha, \alpha, -2)$;
- per $z \neq 1$ et $z \neq -2$ il sistema ha come soluzione $(w, x, y, z) = (1/(1-z), 1/(1-z), 2/(z-1), z)$.

Suggerimento: si consideri il sistema come un sistema lineare nelle tre incognite (w, x, y) i cui coefficienti dipendono dal parametro reale z.

7.2) Determinare le coordinate del **punto medio** del segmento di estremi $P_1(1/2, -1, 2/3)$ e $P_2(1, -1/2, 0)$.

7.15) Determinare l'equazione del **piano** passante per la retta $r : x - 2y + z - 1 = 3x - 2z = 0$ e per il punto $A(2, -3, 1)$.

7.16) Determinare l'equazione del **piano** della stella $a(x - 2) + b(y - 1) + cz = 0$ passante per la retta $r : x - y = x - z = 0$.

7.17) Determinare l'equazione del **piano** passante per il punto $A(2, -1, 1)$ e per la retta $r : x + 2z - 1 = 0$ del piano $y = 0$.

7.18) Determinare le equazioni del **fascio di rette** che appartiene al piano $\pi : x - 3y + z - 1 = 0$ e ha centro nel punto $P(2, 1, 2)$ di π.

7.19) Determinare le equazioni della **retta** passante per il punto $P(1, 2, 3)$ che si appoggia alle rette $r : x - 3z - 2 = y - z + 3 = 0$ e all'asse Z.

7.20) Determinare le equazioni della **retta** passante per $P(-1, 0, 0)$ che si appoggia alle rette $r : x - 2y + 1 = 2x - 3z - 1 = 0$ e $s : x - z + 3 = y - 2z + 2 = 0$.

7.21) Determinare le equazioni della **retta** del piano $\pi : x - 2y = 0$ che si appoggia alle rette $r : x + y - z = x + 2y = 0$ e $s : x - 2 = y - z + 1 = 0$.

7.22) Determinare l'equazione del **piano** passante per il punto $A(2, 0, 1/2)$ e parallelo al piano $\pi : 3x - y + z - 1 = 0$.

7.23) Determinare l'equazione del **piano** γ simmetrico del piano $\alpha : 4x - 2y + 5z - 1 = 0$ rispetto al piano $\beta : 4x - 2y + 5z + 4 = 0$.

7.24) Determinare l'equazione del **piano** passante per i punti $P_1(2, 1, 0)$ e $P_2(-1, 0, 1)$ e parallelo alla retta $r : x - z = y - 3z - 1 = 0$.

7.25) Determinare l'equazione del **piano** passante per la retta $r : x - 2z = y - z + 3 = 0$ e parallelo alla retta $s : x - 2y + z = x - y = 0$.

7.26) Determinare le equazioni della **retta** passante per il punto $A(2, 1, 0)$ e parallela alla retta $r : x - y - z - 2 = 2x - y - 3z = 0$.

7.27) Dopo aver verificato che le due rette $r : x + y - 2z = x - y = 0$ e $s : x + 2y - 3z - 7 = 2x + y - 3z + 1 = 0$ sono parallele, determinare l'equazione della **mediana** della striscia di piano compresa tra r e s.

7.28) Determinare h e k in modo che la **retta** $r : x + (k - 1)y + hz - 1 = 2x + ky + (k + 3)z + 1 = 0$ risulti parallela alla retta $s : x - y = x - z = 0$.

7.29) Determinare le equazioni della **retta** passante per il punto $A(1, 0, -2)$, parallela al piano $\pi : x - 2z + 3 = 0$ e incidente la retta $r : x - 2z = y + z + 3 = 0$.

7.30) Determinare le equazioni della **retta** parallela all'asse Y e appoggiata alle rette $r : x - y = y - z + 2 = 0$ e $s : x - 3z - 1 = y + 2z - 3 = 0$.

7.31) Determinare l'equazione del **piano** passante per il punto $A(2, 1, 3)$ e parallelo all'asse Z e alla retta $r : 2x - z - 2 = y - 2z + 1 = 0$.

7.32) Determinare l'equazione del **piano** che incontra l'asse X in $P(3, 0, 0)$ ed è parallelo a $r : x - 2y + z = x + y - 2z - 1 = 0$ e $s : x - y = x + y - 3z + 1 = 0$.

2.2) Determinare il **coseno** dell'angolo formato dalle due rette

$r : x - z + 1 = y - z - 3 = 0$ $s : x - y - 2z + 1 = x - 3z - 3 = 0$.

2.3) Determinare il **coseno** dell'angolo formato dai due piani $\alpha : x + 2y = 0$ e

$\beta : 3x - 2y + z = 0$

2.4) Determinare le equazioni delle **rette** passanti per il punto A(1, 2, 1) incidenti l'asse z e formanti con esso un angolo di $\pi/4$.

2.5) Determinare le equazioni delle **rette** passanti per l'origine, parallele al piano $\alpha : x - 2y + z - 1 = 0$ e formanti un angolo $\pi/6$ col piano $z = 0$.

2.6) Determinare le equazioni dei **piani** passanti per la retta $r : 2x - 3z + 2 = y = 0$ e formanti un angolo di $\pi/6$ col piano $\alpha : x - z = 0$.

2.7) Determinare le equazioni dei **piani** passanti per l'asse Z e formanti un angolo di $\pi/4$ con la retta $r : x - 3z + 1 = y - 2z - 1 = 0$.

2.8) Determinare le equazioni della **retta** passante per A(–1, 2, 1) e perpendicolare al piano $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$.

2.9) Determinare l'equazione del **piano** passante per il punto A(–3, 2, –1) e perpendicolare alla retta $r : x + 2z - 1 = y - 3z + 2 = 0$.

2.10) Determinare l'equazione del **piano** passante per l'asse X e perpendicolare al piano $\pi : x - 2y + 3z + 5 = 0$.

2.11) Determinare le equazioni della **retta** passante per l'origine O(0, 0, 0), incidente e perpendicolare alla retta passante per i punti A(2, 1, 1) e B(0, –1, 0).

2.12) Determinare le equazioni della **retta** proiezione ortogonale sul piano $\alpha : 2x - z - 1 = 0$ della retta $r : x = y = z$.

2.13) Determinare l'equazione del **piano** passante per il punto A(0, 0, 3), parallelo alla retta $r : x + y - 1 = 2x - 3z - 1 = 0$ e perpendicolare al piano $\pi : x - 2y + 3z = 0$.

2.14) Determinare le equazioni della **retta** perpendicolare al piano $\pi : 3x + 2y - 4z + 1$ e incidente l'asse Z e la retta $r : x - 2z + 1 = y - z - 3 = 0$.

2.15) Determinare l'equazione del **piano** perpendicolare al segmento di estremi A(3, –1, 2) e B(–1, 2, 3) nel suo punto medio.

2.16) Determinare la **distanza** fra i due piani paralleli $\alpha : x - 2y + z = 0$ e $\beta : x - 2y + z - 3 = 0$

2.17) Determinare le equazioni dei **piani** perpendicolari alla retta $r : x + z = y - 2z = 0$ e aventi distanza 2 dall'origine.

2.18) Determinare la **distanza** del punto A(–1, 3, 1) dalla retta $r : x + y - 1 = 2x - y - z = 0$

2.19) Determinare la **distanza** fra le due rette parallele $r : x - 2z = y - 3z = 0$ e $s : x - 2z + 1 = y - 3z - 1 = 0$.

2.20) Determinare la minima **distanza** delle due rette sghembe $r : x = y = 0$ e $s : x - z - 2 = y - z - 3 = 0$.

2.21) Determinare le equazioni della **retta** di minima distanza delle due rette sghembe r : asse Y e $s : y = x + z - 1 = 0$.

2.22) Determinare le equazioni delle **bisettrici** degli angoli formati dalle due rette incidenti $r : x + z = y + z + 1 = 0$ e $s : x - y - 1 = 2x - z - 1 = 0$.

SFERA

14.01.2009

10) Studiare la mutua posizione delle sfere:

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 2y - 18z + 82 = 0$ e $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 10z + 26 = 0$

$C_1 = (-5, 1, 9)$ $R_1 = 5$ $C_2 = (-1, -1, 5)$ $R_2 = 1$ $d(C_1, C_2) = 6$ tangenti esternamente

11.02.2009

9) Trovare il **centro** e il **raggio** della sfera passante per l'origine O e i punti A, B, e C di intersezione del piano $\pi : x - 2y - z - 18 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente.

$S : x^2 + y^2 + z^2 - 18x + 9y + 18z = 0$

23.06.2010

6) Scrivere l'**equazione** della **sfera** tangente in O(0,0,0) al piano $\pi : 6x + 5y + 3z = 0$ e avente il centro sul piano $\pi' : 2y - 5 = 0$

$S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5y - 3z = 0$

06.07.2010

6) Stabilire la **mutua posizione** delle sfere seguenti:

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 4z = 0$ e

$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 6y + 12z + 77 = 0$

$C_1 = (2, -1, -2)$ $R_1 = 3$ $C_2 = (6, -3, -6)$ $R_2 = 2$ $d(C_1, C_2) = 6$ esterne

21.07.2010

6) Trovare le **coordinate** dei **centri** delle <u>due</u> sfere di raggio $R = 27$ che secano il piano $\pi : x + 4y + 3z = 0$ nella circonferenza di centro H(0, 3, –4) e raggio $r = 25$.

16.09.2010

6) Scrivere l'**equazione** della **sfera** che ha il centro sul piano $\pi : 2z - 3 = 0$ ed è tangente al piano $\pi' : 4x + y - 3z = 0$ nel punto A(–1, 4, 0).

CIRCONFERENZA NELLO SPAZIO

14.01.2009

9) Trovare le equazioni della circonferenza che giace sul piano $3x + y - 2z = 0$, ha il centro nel punto C(0, 2, 1) e passa per l'origine O(0, 0, 0).

28.01.2009

9) Trovare il **centro** e il **raggio** della **circonferenza** C_1 ottenuta secando la sfera di centro l'origine O e raggio $\sqrt{27}$ con il piano $\pi : x + 2y + 2z - 9 = 0$.

10) Siano π e C_1 quelli dell'esercizio (9). Sia C_2 la circonferenza ottenuta secando con il piano π la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 18x - 81 = 0$. Stabilire su π la **posizione** di C_1 rispetto a C_2.

11.02.2009

10) Trovare le **equazioni** di un piano e di una sfera la cui intersezione sia la circonferenza passante per i punti O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(0, 3,–7).

06.05.2009

6) Trovare il **centro** e il **raggio** della **circonferenza** ottenuta secando la sfera di centro l'origine O e raggio $\sqrt{38}$ con il piano $\pi : 2x + y - 2z - 18 = 0$.

05.07.2011

6) Sia π il piano per i punti O(0, 0, 0), A(0, 2,–5) e C(3, 0, 0). Trovare le equazioni della circonferenza che giace su π, ha il centro in C e passa per O.

8.1. Esercizio. Trovare le coordinate del centro e il raggio delle seguenti sfere:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 1 = 0$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 8z - 3 = 0$.

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x + 6y - 14z + 61 = 0$.

8.2. Esercizio. Trovare per quali valori del parametro reale k il piano $2x - z + k' = 0$ risulta rispettivamente secante, tangente o esterno alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z - 3 = 0$.

8.3. Esercizio. Verificare che il piano $3x - y - 2z + 5 = 0$ è tangente alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5 = 0$, e trovare le coordinate del punto di contatto.

8.4. Esercizio. Scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $A(\frac{1}{2}, 1, 2\sqrt{3})$ alla sfera

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 48x - 16y - 13 = 0$$

8.5. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera di centro C(1, 0, –2) e raggio R = 1.

8.6. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera di centro C(–2, 1, 3) e passante per l'origine .

8.7. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera passante per i quattro punti A(0, 0, 1), B(1, –1, 1), C(–1, 2, 0) e D(2, 1, –1).

8.8. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera passante per l'origine e per il punto P(2, –3, –1) e con il centro sull'asse Z.

8.9. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente all'asse X nel punto A(2, 0, 0) e tangente alla retta $x - z + 1 = y - 2z + 1 = 0$ nel punto B(–1, –1, 0).

8.10. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $2x + 3y - 7z = 0$ nel suo punto A(2, 1, 1) e passante per il punto B(1, –2, 3).

8.11. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $x - z - 1 = 0$ nel suo punto A(0, 1, –1) e avente il centro sul piano XY.

8.12. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente nell'origine al piano $x - 2y = 0$ e passante per il punto A(2, 3, 1).

8.13. Esercizio. Scrivere le equazioni delle sfere di raggio R = 2 e passanti per la circonferenza

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x + 2y - z = 0$$

8.14. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera passante per la circonferenza comune alle due sfere $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 + 4x = 0$ e con il centro C sul piano $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

8.15. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera passante per il punto A(2, −3, −1) e passante per la circonferenza di equazioni $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y = 3x - z = 0$.

8.16. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $x + 2y + 3z - 7 = 0$ nel suo punto P(2, 1, 1) e passante per l'origine.

8.17. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ nel suo punto P(0, 0, 1) e passante per l'origine.

8.18. Esercizio. Determinare le coordinate del centro C' e il raggio r della circonferenza

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 1 = x - 2y = 0$$

8.19. Esercizio. Determinare le coordinate del centro C' e il raggio r della circonferenza

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 13 = y + 3 = 0$$

8.20. Esercizio. Scrivere le equazioni della circonferenza appartenente al piano $2x - 3y - 2z = 0$ e avente centro in C(1, 0, 1) e raggio r = 3.

8.21. Esercizio. Scrivere le equazioni della circonferenza passante per i tre punti A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) e C(0, 0, 3).

8.22. Esercizio. Scrivere le equazioni della circonferenza tangente alla retta $x = y = z$ nel suo punto A(1, 1, 1) e passante per il punto P(3, 1, 0).

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

24 Gennaio 2013 Ingegneria ..... Matricola .....

In caso di esito sufficiente, desidero sostenere la **prova orale** [ ] **oggi** (aula I.12 ore 15.00)

[ ] **Mercoledì 13/02/2013** (per l'esito, l'ora e l'aula leggere gli avvisi nei prossimi giorni)

1) Trovare una base per **OGNUNO** degli autospazi della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

.....

2) Del sistema $3x - y + 11z - 19 = x - y + 9z - 7 = 2x + y - 6z - 11 = 0$ trovare una soluzione particolare X_P ed una base B dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

.....

3) Sia $A(1, \sqrt{47}, -10)$. Sulla retta $r : y = z + 9 = 0$ trovare due punti B e C tali che il triangolo ABC sia equilatero.

.....

4) Siano $A(-1, 0, 0)$, $B(0, t, 0)$ e $C(0, 0, \sqrt{11})$. Trovare i valori del parametro reale t per i quali il piano passante per A, B e C forma col piano XZ un angolo di $\frac{2}{3}\pi$ radianti.

.....

5) Se esiste una conica passante per i punti $A(-6, 3)$, $B(-6, -1)$, $C(-3, 1)$, $D(0, 1)$, $E(0, -1)$, $F(6, 3)$ allora scrivere la sua equazione. Altrimenti spiegare brevemente il motivo per cui non esiste.

.....

6) Sia S la sfera di centro $C(-20, 1, 5)$ e passante per il punto $A(-18, 1, -4)$. Scrivere l'equazione della sfera S e del piano π tangente ad S nel punto A.

GEOMETRIA Nome ..... COGNOME .....

13 Febbraio 2013 Ingegneria ..... Matricola .....

L'esito dello scritto verrà comunicato domani alle ore 15 in aula I.10. Subito dopo inizierà l'orale.

1) Sia A la matrice avente (1, –2, 5), (0, 0, 0) e (0, 0, 0) come I, II e III riga rispettivamente.
Se esiste scrivere una **base** di R^3 costituita da **autovettori** di A. Altrimenti motivare la risposta.

.....

2) Trovare i **valori del parametro** reale t per i quali la retta r : $3x + (t+1)y + (t^2-10)z = x + 17 = 0$ è parallela alla retta passante per i punti A(6, 5t+1, –6) e B(6, 2t+1, –t–7).

.....

3) Sia A il punto di intersezione tra il piano $3x + 17y + z - 9 = 0$ e l'asse X. Sia r la retta per l'origine O e perpendicolare al piano $5y + 2z + 11 = 0$. Sia h la distanza di A dalla retta r. Siano B e C i punti di r aventi distanza 2h da A. Calcolare l'**area** del triangolo ABC.

.....

4) Trovare i **parametri direttori** delle rette che si trovano sul piano $x - 4y + 12 = 0$ e formano un angolo di $\pi/6$ radianti col piano $z + 3 = 0$.

.....

5) Trovare l'**equazione canonica** della conica $x^2 - 10xy + y^2 + 10x - 2y + 3 = 0$.
Poi classificarla.

.....

6) Sia Σ la sfera di centro l'origine O(0, 0, 0) e passante per A(3, 0, 0). Sia π il piano parallelo al piano XZ e passante per il punto B(–2, 1, –6). Trovare il **centro** e il **raggio** della **circonferenza** C ottenuta intersecando la sfera Σ col piano π.

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

13 Giugno 2013 Ingegneria ..... Matricola .....

In caso di esito sufficiente, desidero sostenere la **prova orale** [ ] **OGGI** (aula I.12 ore 15.00)

[ ] **Giovedì 27 Giugno** (aula I.12 ore 11.30) [ ] **Mercoledì 17 Luglio** (aula I.12 ore 11.30)

1) Sia A la matrice avente come righe i vettori $(t, t^2, 0, 36, -6)$, $(1, 6, 0, t, -1)$ e $(0, 0, 9, -4, 0)$. Determinare, al variare del parametro reale t, il rango della matrice A.

.....

2) Trovare i parametri direttori della retta r passante per il punto A(2, 0, 0) ed incidente le rette $s : z + 2 = y - 10x = 0$ e $t : y - 5 = z + 20x = 0$.

.....

3) Trovare per quali valori del parametro reale t l'area del triangolo di vertici O(0,0,0), A(t,–t, t) e B(0, –11, 11) vale 154.

.....

4) Scrivere l'equazione del piano perpendicolare al piano $4x + 2y + 30z + 3 = 0$, parallelo alla retta $x - 2y + 11 = z - 6y + 19 = 0$ e passante per il punto A(10, 5, –2).

.....

5) Sulla retta passante per l'origine O(0, 0, 0) e perpendicolare al piano $5x - 4y + z + 17 = 0$, trovare i punti che distano 10 dal piano $x - 2y + 2z = 0$.

.....

6) Trovare l'equazione canonica della seguente conica $4x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 2y^2 - 8x + 2\sqrt{3}\,y - 1 = 0$. Poi, classificarla.

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

27 Giugno 2013 Ingegneria ..... Matricola .....

In caso di esito sufficiente, desidero sostenere la **prova orale** [ ] **OGGI** (aula I.12 ore 16.00)

[ ] **Mercoledì 17 Luglio** (aula I.12 ore 11.30)

1) Determinare per quali **valori** del parametro reale t la matrice $A(t) = \begin{bmatrix} t-2 & 2 & 2 \\ 0 & t+2 & 0 \\ 0 & 2 & t^2-4 \end{bmatrix}$

non ha tre autovalori reali a due a due distinti tra loro. Inoltre, per ognuno di tali valori, scrivere gli **autovalori** distinti di A(t).

.....

2) Trovare una **base** per lo spazio U(w, x, y, z) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$w - 2y = w - x + 2y + 3z = 2w - x + 3z = 0$. (**non cambiare l'ordine delle incognite**)

.....

3) Siano A, B e C i punti di intersezione del piano di equazione $2x + y - z + 12 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente. Determinare l'**ortocentro** (punto d'incontro delle altezze) del triangolo ABC.

.....

4) Scrivere l'equazione del **piano** passante per il punto A(1, –1, 1), perpendicolare al piano $x + 2y - 3z = 0$ e parallelo alla retta $y = x - 3z = 0$.

.....

5) Trovare la **distanza** tra le rette:

r : $4x - 2y + z = 2x - y - 2z = 0$ e s : $9x + 3y + z - 2 = 3x + y + z + 2 = 0$.

.....

6) Trovare l'equazione **canonica** della seguente conica $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 12x - 4y + 8 = 0$.

Poi, classificarla.

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

17 Luglio 2013 Ingegneria ..... Matricola .....

L'esito dello scritto verrà comunicato **OGGI** in aula I.12 alle ore 15.00; **subito dopo** inizierà la prova orale per coloro che avranno conseguito una votazione sufficiente.

1) Determinare per quale valore del parametro reale t la matrice $A(t) = \begin{bmatrix} t^2+t & 0 & t+1 \\ 2 & t^3+1 & -1 \\ 0 & 0 & t^2-1 \end{bmatrix}$

ha lo zero come **unico** autovalore. Poi, per tale valore, scrivere una base per l'autospazio.

.....

2) Sia $S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x - 2y - 3z = 0\}$. Sia $B = \{(t^3, t^2, t(2-t)), (16, 8, 0)\}$. Determinare per quali valori del parametro reale t l'insieme B è una **base** del sottospazio S.

.....

3) Determinare per quali valori del parametro reale t le equazioni $\pi 1 : tx + t^2y + tz = 0$, $\pi 2 : x + 5y + t = 0$ e $\pi 3 : z - 5 = 0$ rappresentano tre **piani** appartenenti ad **uno stesso** fascio.

.....

4) Scrivere i parametri direttori della retta passante per l'origine O ed incidente la retta r: $x = x - 2y + 3z + 12 = 0$ e la retta s: $2x + y = x + y - 12z - 17 = 0$.

.....

5) Trovare i piani contenenti l'asse X e formanti un angolo di $\pi/3$ radianti col piano $\sqrt{3}\,y + z = 0$.

.....

6) Trovare l'equazione canonica della conica $9x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 11y^2 + 6x - 22\sqrt{3}\,y + 33 = 0$

Poi, classificarla.

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

12 Settembre 2013 Ingegneria ..... Matricola .....

L'esito dello scritto verrà comunicato **OGGI** in aula I.12 alle ore 14.00; subito dopo inizierà la prova orale per coloro che avranno conseguito una votazione sufficiente.

1) Siano $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 7 & -41 \end{bmatrix}$. Trovare la **MATRICE** $C = (A^{-1}) \times (B^{-1})$.

.....

2) Trovare una **BASE** per ogni autospazio della matrice

$$D = \begin{bmatrix} -9 & 32 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 4 & -32 & -5 \end{bmatrix}.$$

.....

3) Trovare la **DISTANZA** tra le rette $r : 5y + z + 1 = x - 1 = 0$ e $s : 5y + z = x + 5y + z = 0$.

.....

4) Trovare i **PARAMETRI DIRETTORI** della retta di minima distanza tra le rette $r : 8x - z = y = 0$ e $s : y - 4z = x - 17 = 0$.

.....

5) Sulla retta r passante per il punto A(1, 0, –3) e perpendicolare al piano $\pi : x + y - 2z = 0$, trovare i **PUNTI** che distano 6 dal piano $\pi' : x - 2 = 0$.

.....

6) Trovare l'**EQUAZIONE CANONICA** della conica $x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y - 2 = 0$. Poi, classificarla.

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... corso seguito nell'A.A. .....

27 Gennaio 2011 Ingegneria ..... **Matricola** .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la prova orale: [ ] in questo appello

[ ] nell'appello del 14 Febbraio 2011

1) Trovare una base per ogni autospazio della matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

.....

2) **Al variare** del parametro reale t, stabilire **quante e quali** sono le soluzioni del sistema lineare nelle incognite (x, y): $12x - tx + ty - t = tx - 12x + 2y + t = 0$.

.....

3) Scrivere le equazioni dei piani paralleli al piano YZ e aventi da esso una distanza uguale a quella tra l'origine O(0,0,0) e la retta r di equazione $5x - 3y - 34 = z = 0$

.....

4) Siano A(0, ,–3, $\sqrt{3}$) e B(t, 0, 0). Trovare i valori del parametro reale t per i quali la retta r passante per A e B forma col piano YZ un angolo di $\pi/6$ radianti.

.....

5) Trovare l'equazione canonica e classificare la conica di equazione

$$7x^2 - 2\sqrt{21}\,xy + 3y^2 + 2\sqrt{21}\,x - 6y + 23 = 0$$

.....

6) Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $\pi : 6x + 5y + 3z = 0$ in O(0,0,0) e avente il centro sul piano $\pi' : 2y - 5 = 0$

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... CFU .....

21 Giugno 2011 Ingegneria ..... Matricola .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la **prova orale**: [ ] **OGGI** h. 15.00

[ ] **5 Luglio** 2011 h. 11.00 [ ] **20 Luglio** 2011 h. 11.00 [ ] **8 Settembre** 2011 h. 11.00

1) Siano $B_1 = \{(1, 1), (1, 2)\}$ e $B_2 = \{(6, 7), (13, 15)\}$ due basi di R^2.
Trovare la **MATRICE** del cambiamento di base da B_1 a B_2 (**in quest'ordine**).

.....

2) Sia la matrice A avente (–3, 20, 0), (0, 7, 0) e (10, –20, 7) come I, II e III riga rispettivamente.
Trovare una **BASE** per ogni autospazio di A.

.....

3) Trovare la **DISTANZA** tra le rette $r : 5y - z + 1 = x - 1 = 0$ e $s : 5y - z = x + 5y - z = 0$.

.....

4) Trovare i **PARAMETRI DIRETTORI** della retta di minima distanza tra le rette
$r : 2x - z = y = 0$ e $s : y - 10z = x - 11 = 0$.

.....

5) Sulla retta r passante per il punto A(2, 0,–1) e perpendicolare al piano $\pi : x + 2y - z = 0$, trovare i **PUNTI** che distano 5 dal piano $\pi' : x - 3 = 0$.

.....

6) Trovare l'equazione **CANONICA** della conica $x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y - 2 = 0$.
Poi, classificarla.

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

12 Gennaio 2011 Ingegneria .....Matricola .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la **prova orale**:

[ ] oggi

[ ] Giovedì 27 Gennaio ore 11.00

[ ] Mercoledì 19 Gennaio ore 15.00

[ ] Lunedì 14 Febbraio ore 11.00

1) Trovare una base per lo spazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo:
$3x - y + 11z = x - y + 9z = 2x + y - 6z = 0.$

.....

2) Tra le rette passanti per il punto A(3,0,–1) trovare, se esiste, quella che si appoggia all'asse X e alla retta $r : x = z + 7 = 0$.

.....

3) Trovare la distanza tra le seguenti rette:
$r : x - 3z = y = 0$ e $s : x - 3z + 10 = y - 3 = 0$.

.....

4) Sulla retta r passante per il punto A(–3, 2, 5) e parallela all'asse Z trovare i punti che distano 1 dal piano $\pi : 2x - 2y + z - 5 = 0$.

.....

5) Trovare l'equazione canonica e classificare la conica di equazione
$4x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 2y^2 - 8x + 2\sqrt{3}\,y - 1 = 0.$

.....

6) Sia Σ la sfera di centro l'origine O(0,0,0) e passante per A(0,–5,0). Sia π il piano parallelo al piano YZ e passante per il punto B(–4,–3, 2). Trovare il centro e il raggio della circonferenza C ottenuta secando la sfera Σ col piano π.

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... CFU .....

20 Luglio 2011 Ingegneria ..... Matricola .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la **prova orale**: [ ] **oggi** [ ] **8 Settembre**

1) Sia A la matrice avente (–1, 0, h), (1, –2, 4) e (0, k, 1) come I, II e III riga rispettivamente. Se esistono, trovare i **valori dei parametri** reali h e k per i quali il vettore (–4, –1, 1) è un autovettore di A. Scrivere anche il suo **autovalore**.

.....

2) Sia A(1, $\sqrt{47}$,–10). Sulla retta $y = z + 9 = 0$ trovare **due punti** B e C tali che il triangolo ABC sia equilatero.

.....

3) Siano $r : 2x + 7 = 2x + 5z + 7 = 0$ e $s : 3y + 20 = 3y + 5z = 0$. Sia t la retta di minima distanza tra r e s. Sia d la distanza tra i punti A e H di intersezione di t con r e s rispettivamente. Siano B e C i punti di s aventi distanza 2d da A. Calcolare l'**area** del triangolo ABC.

.....

4) Trovare i **parametri direttori** delle rette che si trovano sul piano $4x – y + 10 = 0$ e formano un angolo di $\pi/4$ radianti col piano $z + 5 = 0$.

.....

5) Trovare i **punti d'intersezione** con gli assi coordinati X e Y della parabola avente come direttrice la retta $x = 2$ e come fuoco il punto F(0, –3).

.....

6) Trovare le equazioni delle **sfere** di raggio 1, aventi il centro sulla retta passante per A(–3, 2, 5) e parallela all'asse Z e tangenti al piano $\pi : 2x – 2y + z + 1 = 0$.

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... corso seguito nell'A.A. .....

14 Febbraio 2011 Ingegneria ..... **Matricola** .....

1) Trovare autovalori ed autovettori della matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

.....

2) Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $A(\sqrt{19}, -25, 12)$, parallelo alla retta $r: 4x + z + 10 = 3x + y - 2 = 0$ e perpendicolare al piano $\pi: 3y + 4z + 1 = 0$.

.....

3) Trovare la distanza tra le rette $r: 3x - 2y - 72 = x + z = 0$ e $s: 5y + 2z = x - 2y - 2z = 0$.

.....

4) Sia r la retta parallela all'asse Y e passante per $A(6, 1, -2\sqrt{3})$. Trovare i piani che contengono r e formano un angolo di $\pi/3$ radianti con il piano YZ.

.....

5) Trovare l'equazione canonica della conica: $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 18x + 2\sqrt{3}y + 24 = 0$

Poi, classificarla.

.....

6) Scrivere l'equazione di una sfera e l'equazione del piano la cui intersezione sia la circonferenza che passa per i punti O(0, 0, 0), A(0, 2, 0) e B(0, 0, –17).

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... CFU .....

22 Novembre 2011 Ingegneria ..... Matricola .....

1) Sia $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ (t-4) & -3 & 0 \\ 1 & -t & 2 \end{bmatrix}$ con t parametro reale. Se esistono, trovare i **valori di t** per i quali esiste una base di R^3 formata da autovettori di A, cioè A è diagonalizzabile (*non è necessario trovare la base*). Altrimenti motivare la risposta.

.....

2) Trovare i **parametri direttori** della retta che passa per A(4, 0, 0) e si appoggia alle rette: $r: x-3=y-5=0$ e $s: x-5=z+6=0$.

.....

3) Scrivere delle **equazioni** per la retta di minima distanza delle rette (*sghembe*)
$r: x+1=7x+y=0$ e $s: x-2=2x+z=0$.

.....

4) Sia α il piano passante per i punti A(–2, 0, 0), B(0, t, 0) e C(0, 0, $2\sqrt{2}$). Trovare i **valori di t** per i quali il piano α forma una angolo di $\pi/3$ radianti con l'asse Y (*non è necessario trovare il piano* α).

.....

5) Trovare l'**equazione canonica** della conica $7x^2 + 10\sqrt{3}xy - 3y^2 - 30x + 6\sqrt{3}y - 13 = 0$.
Poi, dire di che conica si tratta.

.....

6) Stabilire la **mutua posizione** delle sfere seguenti:
$S_1: x^2+y^2+z^2-4x+8y-8z=0$ e $S_2: x^2+y^2+z^2-10x+20y-20z+216=0$

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... CFU .....

5 Luglio 2011 Ingegneria ..... Matricola .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la **prova orale**: [ ] **OGGI** h. 15.00

[ ] **20 Luglio** 2011 h. 11.00 [ ] **8 Settembre** 2011 h. 11.00

1) Sia A la matrice avente come righe i vettori $(t, t^2, 0, 36, -6)$, $(1, 6, 0, t, -1)$ e $(0, 0, 9, -4, 0)$. Determinare, al variare del parametro reale t, il rango della matrice A.

- .....

2) **Se esistono**, determinare i valori del parametro reale t per i quali l'origine O(0, 0, 0) e i punti A(–2,0,0), B(3,–8,1) e $C(6, t^2-5t, 5-t)$ sono complanari.

.....

3) Scrivere i parametri direttori della retta passante per l'origine O(0, 0, 0) ed incidente la retta r: $x = x - 2y + 3z + 12 = 0$ e la retta s: $2x + y = x + y - 12z - 17 = 0$.

.....

4) Scrivere l'equazione del piano passante per l'origine O(0, 0, 0), perpendicolare al piano $2x - 3y + z = 0$ e parallelo alla retta $x = 2x - 3y + z = 0$.

.....

5) **Se esiste** una conica passante per i seguenti punti O(0, 0), A(2, 0), B(2, 2), C(0, 2) e D(2, 11), trovarne l'equazione. **Altrimenti** motivare brevemente la risposta.

.....

6) Sia π il piano per i punti O(0, 0, 0), A(0, 2,–5) e C(3, 0, 0). Trovare le equazioni della circonferenza che giace su π, ha il centro in C e passa per O.

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... corso seguito nell'A.A. .....

27 Gennaio 2011 Ingegneria ..... **Matricola** .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la prova orale: [ ] in questo appello

[ ] nell'appello del 14 Febbraio 2011

1) Trovare una base per ogni autospazio della matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

.....

2) **Al variare** del parametro reale t, stabilire **quante e quali** sono le soluzioni del sistema lineare nelle incognite (x, y): $12x - tx + ty - t = tx - 12x + 2y + t = 0$.

.....

3) Scrivere le equazioni dei piani paralleli al piano YZ e aventi da esso una distanza uguale a quella tra l'origine O(0,0,0) e la retta r di equazione $5x - 3y - 34 = z = 0$

.....

4) Siano A(0, ,–3, $\sqrt{3}$) e B(t, 0, 0). Trovare i valori del parametro reale t per i quali la retta r passante per A e B forma col piano YZ un angolo di $\pi/6$ radianti.

.....

5) Trovare l'equazione canonica e classificare la conica di equazione

$$7x^2 - 2\sqrt{21}\,xy + 3y^2 + 2\sqrt{21}\,x - 6y + 23 = 0$$

.....

6) Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $\pi : 6x + 5y + 3z = 0$ in O(0,0,0) e avente il centro sul piano $\pi' : 2y - 5 = 0$

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... CFU .....

8 Settembre 2011 Ingegneria ..... Matricola .....

In caso di esito sufficiente la prova **orale** può essere sostenuta **SOLO** in **questo appello.**

1) Se possibile, scrivere una **base di R^3** formata da autovettori della matrice

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. Altrimenti motivare la risposta.

.....

2) Sia s la retta passante per il **punto** A(9, 0, –5), parallela al piano π: $2x + 3z + 17 = 0$ e perpendicolare alla retta r: $x + 2y - 11 = 3y + z + 9 = 0$. Trovare le **coordinate del punto A** d'intersezione tra la retta s e il piano YZ.

.....

3) Trovare la **distanza** e i **parametri direttori** della retta di minima distanza tra le rette sghembe r: $2x - 3y + 12 = y + z = 0$ e s: $x + 7z = 2x - y + 2z = 0$.

.....

4) Sia r la retta parallela all'asse Z e passante per A($4\sqrt{3}$, 12, $-2\sqrt{3}$). Trovare le **equazioni dei piani** che contengono r e formano un angolo di $\pi/3$ radianti con l'asse X.

.....

5) Trovare l'**equazione canonica** della seguente conica $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

.....

6) Trovare le **equazioni delle sfere** di raggio 1, tangenti al piano $\pi : 2x - 2y + z + 1 = 0$ e aventi il centro sulla retta passante per A(–3, 2, 5) e parallela all'asse Z.

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... CFU .....

21 Giugno 2011 Ingegneria ..... Matricola .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la **prova orale:** [ ] **OGGI** h. 15.00

[ ] **5 Luglio** 2011 h. 11.00 [ ] **20 Luglio** 2011 h. 11.00 [ ] **8 Settembre** 2011 h. 11.00

1) Siano $B_1 = \{(1, 1), (1, 2)\}$ e $B_2 = \{(6, 7), (13, 15)\}$ due basi di R^2.
Trovare la **MATRICE** del cambiamento di base da B_1 a B_2 (**in quest'ordine**).

.....

2) Sia la matrice A avente (–3, 20, 0), (0, 7, 0) e (10, –20, 7) come I, II e III riga rispettivamente.
Trovare una **BASE** per ogni autospazio di A.

.....

3) Trovare la **DISTANZA** tra le rette $r : 5y - z + 1 = x - 1 = 0$ e $s : 5y - z = x + 5y - z = 0$.

.....

4) Trovare i **PARAMETRI DIRETTORI** della retta di minima distanza tra le rette
$r : 2x - z = y = 0$ e $s : y - 10z = x - 11 = 0$.

.....

5) Sulla retta r passante per il punto A(2, 0,–1) e perpendicolare al piano $\pi : x + 2y - z = 0$, trovare i **PUNTI** che distano 5 dal piano $\pi' : x - 3 = 0$.

.....

6) Trovare l'equazione **CANONICA** della conica $x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y - 2 = 0$.
Poi, classificarla.

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

12 Gennaio 2011 Ingegneria .....Matricola .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la **prova orale**:

[ ] oggi

[ ] Giovedì 27 Gennaio ore 11.00

[ ] Mercoledì 19 Gennaio ore 15.00

[ ] Lunedì 14 Febbraio ore 11.00

1) Trovare una base per lo spazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo:
$3x - y + 11z = x - y + 9z = 2x + y - 6z = 0.$

.....

2) Tra le rette passanti per il punto A(3,0,–1) trovare, se esiste, quella che si appoggia all'asse X e alla retta $r : x = z + 7 = 0$.

.....

3) Trovare la distanza tra le seguenti rette:
$r : x - 3z = y = 0$ e $s : x - 3z + 10 = y - 3 = 0.$

.....

4) Sulla retta r passante per il punto A(–3, 2, 5) e parallela all'asse Z trovare i punti che distano 1 dal piano $\pi : 2x - 2y + z - 5 = 0$.

.....

5) Trovare l'equazione canonica e classificare la conica di equazione
$4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 2y^2 - 8x + 2\sqrt{3}y - 1 = 0.$

.....

6) Sia Σ la sfera di centro l'origine O(0,0,0) e passante per A(0,–5,0). Sia π il piano parallelo al piano YZ e passante per il punto B(–4,–3, 2). Trovare il centro e il raggio della circonferenza C ottenuta secando la sfera Σ col piano π.

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... CFU .....

20 Luglio 2011 Ingegneria ..... Matricola .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la **prova orale**: [ ] **oggi** [ ] **8 Settembre**

1) Sia A la matrice avente (–1, 0, h), (1, –2, 4) e (0, k, 1) come I, II e III riga rispettivamente. Se esistono, trovare i **valori dei parametri** reali h e k per i quali il vettore (–4, –1, 1) è un autovettore di A. Scrivere anche il suo **autovalore**.

.....

2) Sia A(1, $\sqrt{47}$,–10). Sulla retta $y = z + 9 = 0$ trovare **due punti** B e C tali che il triangolo ABC sia equilatero.

.....

3) Siano r : $2x + 7 = 2x + 5z + 7 = 0$ e s : $3y + 20 = 3y + 5z = 0$. Sia t la retta di minima distanza tra r e s. Sia d la distanza tra i punti A e H di intersezione di t con r e s rispettivamente. Siano B e C i punti di s aventi distanza 2d da A. Calcolare l'**area** del triangolo ABC.

.....

4) Trovare i **parametri direttori** delle rette che si trovano sul piano $4x – y + 10 = 0$ e formano un angolo di $\pi/4$ radianti col piano $z + 5 = 0$.

.....

5) Trovare i **punti d'intersezione** con gli assi coordinati X e Y della parabola avente come direttrice la retta $x = 2$ e come fuoco il punto F(0, –3).

.....

6) Trovare le equazioni delle **sfere** di raggio 1, aventi il centro sulla retta passante per A(–3, 2, 5) e parallela all'asse Z e tangenti al piano $\pi : 2x – 2y + z + 1 = 0$.

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... corso seguito nell'A.A. .....

14 Febbraio 2011 Ingegneria ..... **Matricola** .....

1) Trovare autovalori ed autovettori della matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

.....

2) Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $A(\sqrt{19}, -25, 12)$, parallelo alla retta $r: 4x + z + 10 = 3x + y - 2 = 0$ e perpendicolare al piano $\pi: 3y + 4z + 1 = 0$.

.....

3) Trovare la distanza tra le rette $r: 3x - 2y - 72 = x + z = 0$ e $s: 5y + 2z = x - 2y - 2z = 0$.

.....

4) Sia r la retta parallela all'asse Y e passante per $A(6, 1, -2\sqrt{3})$. Trovare i piani che contengono r e formano un angolo di $\pi/3$ radianti con il piano YZ.

.....

5) Trovare l'equazione canonica della conica: $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 18x + 2\sqrt{3}y + 24 = 0$

Poi, classificarla.

.....

6) Scrivere l'equazione di una sfera e l'equazione del piano la cui intersezione sia la circonferenza che passa per i punti O(0, 0, 0), A(0, 2, 0) e B(0, 0, –17).

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... CFU .....

22 Novembre 2011 Ingegneria ..... Matricola .....

1) Sia $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ (t-4) & -3 & 0 \\ 1 & -t & 2 \end{bmatrix}$ con t parametro reale. Se esistono, trovare i **valori di t** per i quali esiste una base di R^3 formata da autovettori di A, cioè A è diagonalizzabile (*non è necessario trovare la base*). Altrimenti motivare la risposta.

.....

2) Trovare i **parametri direttori** della retta che passa per A(4, 0, 0) e si appoggia alle rette: $r: x-3=y-5=0$ e $s: x-5=z+6=0$.

.....

3) Scrivere delle **equazioni** per la retta di minima distanza delle rette (*sghembe*)
$r: x+1=7x+y=0$ e $s: x-2=2x+z=0$.

.....

4) Sia α il piano passante per i punti A(–2, 0, 0), B(0, t, 0) e C(0, 0, $2\sqrt{2}$). Trovare i **valori di t** per i quali il piano α forma una angolo di $\pi/3$ radianti con l'asse Y (*non è necessario trovare il piano* α).

.....

5) Trovare l'**equazione canonica** della conica $7x^2 + 10\sqrt{3}\,xy - 3y^2 - 30x + 6\sqrt{3}\,y - 13 = 0$.
Poi, dire di che conica si tratta.

.....

6) Stabilire la **mutua posizione** delle sfere seguenti:
$S_1: x^2+y^2+z^2-4x+8y-8z=0$ e $S_2: x^2+y^2+z^2-10x+20y-20z+216=0$

GEOMETRIA Nome ..... **Cognome** .....

Prof. ..... CFU .....

8 Settembre 2011 Ingegneria ..... Matricola .....

In caso di esito sufficiente la prova **orale** può essere sostenuta **SOLO** in **questo appello**.

1) Se possibile, scrivere una **base di R^3** formata da autovettori della matrice

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. Altrimenti motivare la risposta.

.....

2) Sia s la retta passante per il punto A(9, 0, –5), parallela al piano π: $2x + 3z + 17 = 0$ e perpendicolare alla retta r: $x + 2y - 11 = 3y + z + 9 = 0$. Trovare le **coordinate del punto A** d'intersezione tra la retta s e il piano YZ.

.....

3) Trovare la **distanza** e i **parametri direttori** della retta di minima distanza tra le rette sghembe r: $2x - 3y + 12 = y + z = 0$ e s: $x + 7z = 2x - y + 2z = 0$.

.....

4) Sia r la retta parallela all'asse Z e passante per A($4\sqrt{3}$, 12, $-2\sqrt{3}$). Trovare le **equazioni dei piani** che contengono r e formano un angolo di $\pi/3$ radianti con l'asse X.

.....

5) Trovare l'**equazione canonica** della seguente conica $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

.....

6) Trovare le **equazioni delle sfere** di raggio 1, tangenti al piano π : $2x - 2y + z + 1 = 0$ e aventi il centro sulla retta passante per A(–3, 2, 5) e parallela all'asse Z.

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

Prof. ..... C.F.U. ..... Immatricolato nell'A.A. .....

18 Febbraio 2010 Ingegneria ..... **MATRICOLA** .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la prova orale: **[ ] in questo** appello

[ ] nell'appello del 25 Febbraio

1) Trovare una **base** per <u>ogni</u> **autospazio** della matrice $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 20 & -30 & -3 \end{bmatrix}$.

.....

2) Trovare i **parametri direttori** della retta che passa per A(1, 0, 0) e si appoggia alle rette: $r: x = y - 7 = 0$ e $s: x - 2 = z + 4 = 0$.

.....

3) Scrivere l'**equazione** del **piano** passante per il punto A(1, 0, 0), perpendicolare al piano $5x + y + 2z = 0$ e parallelo alla retta $x - 1 = y + 2z + 5 = 0$.

.....

4) Calcolare la **distanza** tra le rette $r: 4x - z = y + 10 = 0$ e $s: x = 2y - z - 1 = 0$.

.....

5) Scrivere l'**equazione** <u>**canonica**</u> della conica $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y - 44 = 0$.
<u>Poi</u>, classificarla.

.....

6) Trovare le **coordinate** dei **centri** delle <u>due</u> sfere di raggio $R = 22$ che secano il piano $\pi: 4x - 2y + z = 0$ nella circonferenza di centro H(1, 0, – 4) e raggio $r = 20$.

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

Prof. ..... C.F.U. ..... Immatricolato nell'A.A. .....

4 Febbraio 2010 Ingegneria ..... **MATRICOLA** .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la prova orale: [ ] in **questo** appello

[ ] nell'appello del **18** Febbraio [ ] nell'appello del **25** Febbraio

1) Trovare gli **autovalori** e gli **autovettori** della matrice $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

.....

2) Scrivere l'**equazione** del **piano** che contiene le seguenti rette:
$r: 2x + 5y - z - 1 = x - 1 = 0$ e $s: 5y - z = 3x + 10y - 2z = 0$.

.....

3) Scrivere delle **equazioni** per la **retta** passante per il punto $A(1, 0, 0)$, parallela al piano $5x + y + 2z = 0$ e perpendicolare alla retta $x - 1 = y + 2z + 5 = 0$.

.....

4) Calcolare la **distanza** tra le rette $r: 2x - y = z - 3 = 0$ e $s: z = 2x - y + 5 = 0$.

.....

5) Scrivere l'**equazione canonica** della conica $x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y - 2 = 0$.
Poi, classificarla.

.....

6) Scrivere l'**equazione** della **sfera** che ha il centro sul piano $\pi: 2y + 5 = 0$ ed è tangente al piano $\pi': x + 5y - 3z = 0$ nel punto $A(3, 0, 1)$.

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

Prof. ..... C.F.U. ...

23 Giugno 2010 Ingegneria ..... **MATRICOLA** .....

In caso di esito sufficiente (o quasi) desidero sostenere la **prova orale** [ ] in questo appello

[ ] Martedì **6 Luglio** 2010 [ ] Mercoledì **21 Luglio** 2010

1) Trovare una **base** per **ogni autospazio** della matrice A avente (8, 0, 0), (4, 0, 0) e (–5, 16, 0) come I, II e III riga rispettivamente. Poi, dire se la matrice A è diagonalizzabile.

.....

2) Sia s la retta perpendicolare (in senso lato) alla retta r: $x + 3y - 7 = 2y + z + 9 = 0$, parallela al piano π: $3x + 2z + 13 = 0$ e passante per il punto A(10, 0, –7).
Trovare le **coordinate** del **punto** B d'intersezione tra la retta s e il piano YZ.

.....

3) Trovare la **distanza** tra le rette r: $2x + 7z + 24 = y + 3z = 0$ e s: $2x - 7y = 2x - 2y + z = 0$.

.....

4) Trovare le **equazioni** dei due **piani** che sono paralleli all'asse X, passano per A($7\sqrt{3}$, –9, $3\sqrt{3}$) e formano un angolo di $\pi/6$ radianti con l'asse Y.

.....

5) Trovare l'**equazione canonica** della conica $4x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 2y^2 - 8x + 2\sqrt{3}\,y - 1 = 0$.
Poi, dire di che conica si tratta.

.....

6) Scrivere l'**equazione** della **sfera** tangente in O(0,0,0) al piano π: $6x + 5y + 3z = 0$ e avente il centro sul piano π' : $2y - 5 = 0$

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

Prof. ..... C.F.U. ..... Immatricolato nell'A.A. .....

25 Febbraio 2010 Ingegneria ..... **MATRICOLA** .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la prova orale: [ ] **oggi** pomeriggio (e domani)

[ ] Mercoledì **3 Marzo** (ore 10.00) [ ] Giovedì **4 Marzo** (ore 9.30)

1) Sia $A=\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ (t+6) & 1 & 0 \\ -1 & -t & -6 \end{bmatrix}$ con t parametro reale. Se esistono, trovare i **valori di t** per i quali la matrice A è diagonalizzabile (cioè esiste una base di R^3 formata da autovettori di A).

.....

2) Scrivere delle **equazioni** per la retta di minima distanza delle rette (sghembe)
$r : x + 1 = 7x + y = 0$ e $s : x - 2 = 2x + z = 0$.

.....

3) Trovare le **coordinate dei punti** della retta $r : 3x - 2y = 2z + 5 = 0$ che si trovano a distanza 1 dal piano $\alpha : x - 4 = 0$.

.....

4) Sia α il piano passante per i punti A(t, 0, 0), B(0, $\sqrt{3}$, 0) e C(0, 0, – 3). Trovare i **valori di t** per i quali il piano α forma una angolo di $\pi/6$ radianti con l'asse X.

.....

5) Scrivere l'**equazione canonica** della conica $x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.
Poi, classificarla.

.....

6) Stabilire la **mutua posizione** delle sfere seguenti:

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 16y + 16z = 0$ e

$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 24y + 24z + 299 = 0$

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

Prof. ..... C.F.U. ...

21 Luglio 2010 Ingegneria ..... **MATRICOLA** .....

In caso di esito sufficiente (o quasi) desidero sostenere la prova orale: [ ] in **questo** appello

[ ] nell'appello del **16** Settembre (**SOLO** in caso di esito **PIENAMENTE** sufficiente)

1) Trovare una **base** per ogni **autospazio** della matrice $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 20 & -30 & -3 \end{bmatrix}$.

.....

2) Scrivere l'**equazione** del **piano** che contiene le seguenti rette:

$r: 2x + 5y - z - 1 = x - 1 = 0$ e $s: 5y - z = 3x + 10y - 2z = 0$.

.....

3) Scrivere delle **equazioni** per la **retta** passante per il punto A(4, 0, 0), parallela al piano $3x + y - 5z = 0$ e perpendicolare alla retta $z - 4 = 3x + y - 20 = 0$.

.....

4) Scrivere delle **equazioni** per la retta di minima distanza delle rette (sghembe)

$r: x + 1 = 7x + y = 0$ e $s: x - 2 = 2x + z = 0$.

.....

5) Scrivere l'**equazione** canonica della conica $x^2 - 10xy + y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$.

Poi, classificarla.

.....

6) Trovare le **coordinate** dei **centri** delle due sfere di raggio $R = 27$ che secano il piano $\pi: x + 4y + 3z = 0$ nella circonferenza di centro H(0, 3, –4) e raggio $r = 25$.

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

Prof. ..... C.F.U. ...

6 Luglio 2010 Ingegneria ..... **MATRICOLA** .....

In caso di esito sufficiente (o quasi) desidero sostenere la prova orale: [ ] in **questo** appello

[ ] nell'appello del **21** Luglio

1) Trovare gli **autovalori** e gli **autovettori** della matrice $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

.....

2) Scrivere l'**equazione** del **piano** passante per il punto A(1, 0, 0), perpendicolare al piano $5x + y + 2z = 0$ e parallelo alla retta $x - 1 = y + 2z + 5 = 0$.

.....

3) Trovare le **coordinate dei punti** della retta $r : 3x - 2y = 2z + 5 = 0$ che si trovano a distanza 1 dal piano $\alpha : x - 4 = 0$.

.....

4) Calcolare la **distanza** tra le rette $r : y - 4z = x - 2 = 0$ e $s : x = y - 4z - 17 = 0$.

.....

5) Scrivere l'**equazione <u>canonica</u>** della conica $x^2 + 8xy + 16y^2 + 2x + 8y + 35 = 0$.
<u>Poi</u>, classificarla.

.....

6) Stabilire la **mutua posizione** delle sfere seguenti:

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 4z = 0$ e

$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 6y + 12z + 77 = 0$

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

23 Novembre 2010

Prof. ..... Ingegneria ..... **MATRICOLA** .....

1) Determinare per quali **valori** del parametro reale t il sistema lineare

$$\begin{cases} 3tx - 6y + t = 0 \\ 6x - 3ty - t = 0 \end{cases}$$

ammette esattamente una soluzione. Poi, scrivere tale **soluzione** (in funzione di t).

.....

2) Trovare le **equazioni** della retta di minima distanza tra le rette sghembe

$r : 6x - 2y + z = 3x - y - 2z = 0$ e $s : 6x + 3y - z - 4 = 2x + y - z - 2 = 0$.

.....

3) Calcolare la **distanza** tra le rette $r : 2x - y = z = 1$ e $s : z = 2x - y + 2 = 0$.

.....

4) Siano A, B e C i punti di intersezione del piano di equazione $2x + y + z - 12 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente. Determinare le **coordinate** dell'ortocentro (punto d'incontro delle altezze) del triangolo ABC.

.....

5) Siano $r : x + 4 = x + 3z + 4 = 0$ e $s : 2y + 21 = 2y + 7z = 0$. Sia t la retta di minima distanza tra r e s. Siano A e H i punti di intersezione di t con r e s rispettivamente. Siano B e C i punti di s tali che $d(A,B) = d(A,C) = 2d(A,H)$.
Calcolare l' **area del triangolo** ABC.

.....

6) Scrivere l'**equazione canonica** della conica $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 5x + 7y + 3 = 0$.
Poi, classificarla.

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

16 Settembre 2010

Prof. ..... Ingegneria ..... **MATRICOLA** .....

In caso di esito sufficiente (o quasi) desidero sostenere la prova orale: [ ] **oggi** pomeriggio

[ ] **Mercoledì 29** Settembre ore 9.00 (per l'esito e l'aula vedere gli avvisi sul sito web di Facoltà)

1) Sia $A=\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ (t+6) & 1 & 0 \\ -1 & -t & -6 \end{bmatrix}$ con t parametro reale. Se esistono, trovare i **valori di t** per i quali la matrice A è diagonalizzabile (cioè esiste una base di R^3 formata da autovettori di A).

.....

2) Trovare i **parametri direttori** della retta che passa per A(1, 0, 0) e si appoggia alle rette: $r: x = y - 7 = 0$ e $s: x - 2 = z + 4 = 0$.

.....

3) Calcolare la **distanza** tra le rette $r: x + 3z = y - 7 = 0$ e $s: x = 4y + 3z - 2 = 0$.

.....

4) Sia α il piano passante per i punti A(t, 0, 0), B(0, – 1, 0) e C(0, 0, $-\sqrt{2}$). Trovare i **valori di t** per i quali il piano α forma una angolo di $\pi/3$ radianti con l'asse X.

.....

5) Scrivere l'**equazione canonica** della conica $x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y - 2 = 0$.
Poi, classificarla.

.....

6) Scrivere l'**equazione** della **sfera** che ha il centro sul piano $\pi: 2z - 3 = 0$ ed è tangente al piano $\pi': 4x + y - 3z = 0$ nel punto A(–1, 4, 0).

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

C.F.U. .....

28 Gennaio 2009 Matricola ..... Ingegneria .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la prova orale: **[ ] domani** (ore 9.30)

[ ] Mercoledì 4 Febbraio (ore 9.30) **[ ] Mercoledì 11 Febbraio** (ore 15.30)

1) Trovare le **equazioni** del **sottospazio** $V(w, x, y, z) \leq R^4$ generato dalle quaterne $\mathbf{a_1} = (0, 1, -1, 0)$ e $\mathbf{a_2} = (-2, 0, 1, 0)$.	
2) Scrivere la soluzione (w, x, y, z) **generale** del seguente sistema lineare: $w - 2y + z - 3 = 2w - x + 3y + 1 = w - x + 5y - z + 4 = 0$.	
3) Trovare una **base** per ogni **autospazio** della matrice A avente (0, 0, 2), (12, 0, –3) e (0, 0, 3) come I, II e III riga rispettivamente. Poi, dire se A è diagonalizzabile.	
4) Calcolare l'**area** del **triangolo** di vertici A(0, 2, –1), B(2, 0, –3) e C(1, –3, 0). Poi, trovare l'**equazione** del **piano** per A, B e C.	
5) Siano A, B e C i punti di intersezione del piano $\pi : 2x + y + z - 12 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente. Determinare l'**ortocentro** (punto incontro altezze) del triangolo ABC.	
6) Trovare la **distanza** e i **parametri direttori** della retta di minima distanza tra le rette sghembe $r : 2x - 3y + 12 = y + z = 0$ e $s : x + 7z = 2x - y + 2z = 0$.	
7) Sia r la retta parallela all'asse Y e passante per $A(-\sqrt{5}, 7, \sqrt{5})$. Trovare le **equazioni** dei **piani** che contengono r e formano un angolo di $\pi/4$ radianti con l'asse Z.	
8) Trovare l'**equazione canonica** e, poi, classificare la seguente conica: $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$.	
9) Trovare il **centro** e il **raggio** della **circonferenza** C_1 ottenuta secando la sfera di centro l'origine O e raggio $\sqrt{27}$ con il piano $\pi : x + 2y + 2z - 9 = 0$.	
10) Siano π e C_1 quelli dell'esercizio (9). Sia C_2 la circonferenza ottenuta secando con il piano π la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 18x - 81 = 0$. Stabilire su π la **posizione** di C_1 rispetto a C_2.	

GEOMETRIA Nome ..... COGNOME .....

14 Gennaio 2009 Matricola ..... Ingegneria .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere la prova orale: **[ ] OGGI** (pomeriggio)

[ ] domani **[ ] Mercoledì 28 Gennaio** **[ ] Mercoledì 11 Febbraio**

1) Sia A la matrice avente $(t^2-1, t(t+1), 0)$ e $(t^2+t, (t-1)(t+1), 0)$ come I e II riga rispettivamente. Studiare, al variare del parametro reale t, il rango della matrice A.	
2) Trovare una base dello spazio $V(w, x, y, z) \leq R^4$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $w - x + z = 4x - y + 2z = 0$.	
3) Sia A la matrice avente (2,–9, 0), (0,–1, 0) e (–3, 9,–1) come I, II e III riga rispettivamente. **Se esistono**, trovare una matrice C invertibile ed una matrice Λ diagonale che diagonalizzano A.	
4) Scrivere le equazioni della retta passante per l'origine O(0, 0, 0) che si appoggia alla retta $r : x = x - 2y + 3z + 12 = 0$ e alla retta $s : 2x + y = x + y - 12z - 17 = 0$.	
5) Scrivere l'equazione del piano passante per l'origine O(0, 0, 0), perpendicolare al piano $2x - 3y + z = 0$ e parallelo alla retta $x = 2x - 3y + z = 0$.	
6) Sulla retta passante per l'origine O(0, 0, 0) e perpendicolare al piano $x - 2y - 2z + 13 = 0$, determinare le coordinate dei punti che distano 4 dal piano $2x - 2y + z = 0$.	
7) Calcolare la distanza tra le due rette $r : x - y - 5 = 5y - z - 1 = 0$ e $s : x - y = 5x - z = 0$.	
8) Trovare l'equazione canonica e, poi, classificare la seguente conica: $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 18x + 2\sqrt{3}y + 24 = 0$	
9) Trovare le equazioni della circonferenza che giace sul piano $3x + y - 2z = 0$, ha il centro nel punto C(0, 2, 1) e passa per l'origine O(0, 0, 0).	
10) Studiare la mutua posizione delle sfere: $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 2y - 18z + 82 = 0$ e $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 10z + 26 = 0$	

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

6 Maggio 2009 Matricola ..... Ingegneria .....

1) Sia A la matrice avente (2,–9, 0), (0,–1, 0) e (–3, 9,–1) come I, II e III riga rispettivamente. **Se esistono**, trovare una matrice C invertibile ed una matrice Λ diagonale che diagonalizzano A.	
2) Scrivere l'equazione del **piano** passante per l'origine O(0, 0, 0), perpendicolare al piano $5x - y + 2z = 0$ e parallelo alla retta $x = 5x - y + 2z = 0$.	
3) Se esiste, trovare il **piano** che contiene le rette $r : 5y - z + 2 = x + 1 = 0$ e $s : 5y - z = x = 0$.	
4) Trovare la **distanza** tra le rette $r : 4x - z = y = 0$ e $s : y - 8z = x - 13 = 0$.	
5) Trovare l'**equazione canonica** e, poi, classificare la seguente conica: $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$.	
6) Trovare il **centro** e il **raggio** della **circonferenza** ottenuta secando la sfera di centro l'origine O e raggio $\sqrt{38}$ con il piano $\pi : 2x + y - 2z - 18 = 0$.	

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

C.F.U. .....

11 Febbraio 2009 Matricola ..... Ingegneria .....

1) Sia $S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + 5y + z = 0\}$. Sia $B = \{(t^3 - 5t^2, t^2 - t, t), (6, -1, -1)\}$. Determinare **per quali valori** del parametro reale t l'insieme B è una base del sottospazio S.	
2) Sia A la matrice avente (t, t – 2) e (2, 2) come I e II riga rispettivamente. Determinare **per quali valori** del parametro reale t la matrice A risulta diagonalizzabile.	
3) Sia r la retta passante per $A(0, t^2, t)$ e $B(1, t^2, -2)$ e π il piano di equazione $(t+2)x + 4y + tz - 20 = 0$. Studiare, al variare del parametro reale t, la **mutua posizione** della retta r e il piano π.	
4) Siano A, B, e C i punti di intersezione del piano $\pi : 2x + y - z - 2 = 0$ con gli assi X, Y e Z rispettivamente. Trovare il **circocentro** (punto d'incontro degli assi dei lati) del triangolo ABC.	
5) Se esiste, trovare il **piano** che contiene le rette $r : 5y - z + 2 = x + 1 = 0$ e $s : 5y - z = x = 0$.	
6) Trovare la **distanza** tra le rette $r : 3x - z = y = 0$ e $s : y - 9z = x - 12 = 0$.	
7) Sulla retta r passante per il punto A(0, –3, 1) e perpendicolare al piano $\pi : x + 2y - z = 0$, trovare i **punti** che distano **3** dal piano $\pi' : z + 1 = 0$.	
8) Trovare l'**equazione canonica** e, poi, classificare la seguente conica: $x^2 + 10xy + y^2 + 10x + 2y - 1 = 0$.	
9) Trovare il **centro** e il **raggio** della sfera passante per l'origine O e i punti A, B, e C di intersezione del piano $\pi : x - 2y - z - 18 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente.	
10) Trovare le **equazioni** di un piano e di una sfera la cui intersezione sia la circonferenza passante per i punti O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(0, 3, –7).	

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

C.F.U. .....

24 Giugno 2009 Matricola ..... Ingegneria .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere l'orale: ☐ **OGGI** ☐ **in un prossimo appello**

1) Sia A la matrice avente $(0, t^2-16, t(t-4), 0)$ e $(0, t^2-4t, (t-4)(t+4), 0)$ come I e II riga rispettivamente. Studiare, al variare del parametro reale t, il **rango** della matrice A.	
2) Trovare i **parametri direttori** della retta passante per l'origine O(0, 0, 0) che si appoggia alla retta $r: z = 4x - y + 7z + 11 = 0$ e alla retta $s: 11x + y - 3z - 14 = x + 3y = 0$.	
3) Calcolare l'**area** del triangolo di vertici A(0, 4,–5), B(4, 0,–3) e C(5,–3, 0). Poi, scrivere l'equazione del **piano** che contiene il triangolo ABC.	
4) Siano A, B, C i punti d'intersezione del piano $\pi: x - y + 2z - 24 = 0$ con gli assi X, Y, Z rispettivamente. Trovare l'**ortocentro** (punto d'incontro delle altezze) del triangolo ABC.	
5) Trovare l'**equazione canonica** della conica: $4x^2 + 6xy + 4y^2 + 8x + 6y + 11 = 0$. Poi, classificarla.	
6) Trovare le equazioni del **piano** e di una **sfera** la cui intersezione sia la circonferenza passante per i punti O(0, 0, 0), A(–7, 0, 0) e B(0, 1, 3).	

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

C.F.U. .....

24 Settembre 2009 Matricola ..... Ingegneria .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere l'orale: ☐ **oggi** ☐ **il 15 Ottobre 2009**

1) Del sistema lineare $3x - y + 10z - 22 =$ $= x - y + 8z - 8 = 2x + y - 5z - 13 = 0$ trovare: • una soluzione particolare X_P ; • una base B dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo ad esso associato.	
2) **Se esiste**, trovare una coppia $(h, k) \in R^2$ tale che la matrice $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$ **NON** abbia tre autovalori reali a due a due distinti e, allo stesso tempo, sia diagonalizzabile.	
3) Date le rette $r : x = x - 2y + 3z + 12 = 0$ e $s : 2x + y = x + y - 12z - 12 = 0$, sia t la retta per l'origine O che si appoggia in A alla retta r e in B alla retta s. Trovare le coordinate di A e B.	
4) Sia $A(-2, 3\sqrt{11}, 8)$. Sulla retta $y = z - 11 = 0$ trovare due punti B e C tali che il triangolo ABC sia equilatero.	
5) Siano $A(t, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, -\sqrt{23})$. Trovare i valori del parametro reale t per i quali il piano passante per A, B e C forma col piano YZ un angolo di $2\pi/3$ radianti.	
6) Sia Σ la sfera che ha il centro in $C(4,-7,-16)$ e passa per il punto $A(4,-12,-10)$. Trovare l'equazione del piano π tangente a Σ in A.	

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

C.F.U. .....

15 Ottobre 2009 Matricola ..... Ingegneria .....

1) Del sistema lineare $3x - y + 11z - 19 =$ $= x - y + 9z - 7 = 2x + y - 6z - 11 = 0$ trovare: • una soluzione particolare X_P ; • una base B dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo ad esso associato.	
2) Sia $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. **Se possibile**, trovare una matrice diagonale Λ e una matrice invertibile C tali che $AC = C\Lambda$. **Altrimenti**, motivare la risposta.	
3) **Se esiste**, trovare il piano che contiene le seguenti rette: r : $4x + z - 3 = y + 1 = 0$ s : $4x + z = y = 0$	
4) Sia H la proiezione ortogonale del punto $A(2\sqrt{26}, 2, -5)$ sulla retta r : $x = z + 7 = 0$. Su r trovare (almeno) un altro punto B tale che l'area del triangolo rettangolo AHB valga $9\sqrt{3}$.	
5) Sia r : $4x + 3y - 10 = 0$ la direttrice delle parabole passanti per l'origine O(0, 0) e aventi i fuochi sull'asse Y delle ordinate. Trovare le coordinate dei loro fuochi.	
6) Scrivere l'equazione della sfera Σ che ha il centro in C(–10, 3, 15) ed è tangente al piano $\pi : 4x + 7z = 0$.	

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

C.F.U. .....

16 Luglio 2009 Matricola ..... Ingegneria .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere l'orale: ☐ **OGGI** ☐ **in un prossimo appello**

1) Sia A la matrice avente (t, t – 2) e (2, 2) come I e II riga rispettivamente. Determinare per quali **valori del parametro** reale t esiste una base dello spazio R^2 formata da autovettori di A.	
2) Trovare una **base** dello spazio V(w, x, y, z) (sottospazio di R^4) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo: $w - x + z = 4x - y + 2z = 0$.	
3) Trovare la **distanza** tra le rette sghembe $r : 2x - 3y + 12 = y + z = 0$ $s : x + 7z = 2x - y + 2z = 0$ e i **parametri direttori** della retta di minima distanza.	
4) Sia r la retta parallela all'asse X e passante per $A(\sqrt{3}, 15, -5\sqrt{3})$. Trovare le equazioni dei **piani** che contengono r e formano un angolo di $\pi/6$ radianti con l'asse Y.	
5) Siano A, B, e C i punti di intersezione del piano $\pi : x - 2y - z - 18 = 0$ con gli assi X, Y e Z rispettivamente. Trovare il **circocentro** (punto d'incontro degli assi dei lati) del triangolo ABC.	
6) Scrivere le equazioni della **circonferenza** che giace sul piano $x - y + z = 0$, ha il centro nel punto C(1, 2, 1) e passa per l'origine O(0, 0, 0).	

GEOMETRIA Nome ..... **COGNOME** .....

C.F.U. .....

30 Luglio 2009 Matricola ..... Ingegneria .....

In caso di esito sufficiente desidero sostenere l'orale: ☐ **OGGI** ☐ **in un prossimo appello**

1) Sia $S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + 6y - 10z = 0\}$. Sia $B = \{(t^3 - 6t^2, t^2 - t, t), (8,-3,-1)\}$. Determinare per quali **valori** del parametro reale t l'insieme B è una **base** del sottospazio S.	
2) Scrivere la **soluzione** (w, x, y, z) **generale** del seguente sistema lineare: $w + y - 3z + 2 = 3w + x - y + 1 = 2w + x - 2y + 3z - 1 = 0$.	
3) Sulla retta passante per il punto A(–7, 3, 0) e perpendicolare al piano $x - 2y + 2z + 14 = 0$, determinare le coordinate dei **punti** che distano 8 dal piano $2x - 2y - z = 0$.	
4) Calcolare la **distanza** tra le due rette $r : x - y - 5 = 5y - z - 1 = 0$ e $s : 5x - z = x - y = 0$.	
5) Se esiste una conica passante per i punti A(0, 0), B(0,–1), C(1,–1), D(1,–2), E(2,–2), scrivere la sua **equazione**. Altrimenti, **motivare** brevemente la risposta.	
6) Trovare il **centro** e il **raggio** della sfera passante per l'origine O e i punti A, B, e C di intersezione del piano $\pi : x - 2y - z - 18 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente.	