

Soluzioni dello scritto di Geometria del 28 Maggio 2009

1) Trovare le equazioni del sottospazio $V(w, x, y, z) \leq \mathbb{R}^4$ generato dalle quaterne $c_1 = (0, 0, 2, -1)$ e $c_2 = (0, -1, 1, 0)$.	$(w, x, y, z) \in V \Leftrightarrow \operatorname{rg} \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$ Applicando il teorema degli orlati al minore $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ si ottengono le equazioni $\mathbf{w} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + 2\mathbf{z} = \mathbf{0}$
2) Trovare una base per OGNI autospazio della matrice A avente (0, -3, 12), (0, 4, 0) e (0, 3, 0) come I, II e III riga rispettivamente. Poi, dire se A è diagonalizzabile.	$p_A(\lambda) = (4 - \lambda)\lambda^2$ Base di $E_0 = \{(1, 0, 0)\}$ Base di $E_4 = \{(6, 4, 3)\}$ A non è diagonalizzabile in quanto non è possibile trovare tre suoi autovettori linearmente indipendenti
3) Sia r la retta per A(0, t², t) e B(-5, t², 1) e π il piano $(t-1)x + 9y + tz - 10 = 0$. Studiare, al variare del parametro reale t, la mutua posizione della retta r e il piano π.	$BA = (5, 0, t-1) \quad v_\pi = (t-1, 9, t)$ $r // \pi \Leftrightarrow BA \perp v_\pi \Leftrightarrow (t-1)(t+5) = 0$ t = 1 ($A \in \pi$) r è contenuta in π t = -5 ($A \notin \pi$) r è strett. parallela a π $\forall t \in \mathbb{R} - \{1, -5\}$ r è incidente π
4) Sulla retta r passante per il punto A(-3, 1, 0) e perpendicolare al piano $\pi: x - 2y + z = 0$, trovare i punti che distano 6 dal piano $\pi': y + 1 = 0$.	$r \perp \pi \Rightarrow (l_r, m_r, n_r) = (1, -2, 1)$ $P(x, y, z) \in r \Leftrightarrow (x, y, z) = (t-3, -2t+1, t)$ $d(P, \pi') = 6 \Leftrightarrow (-2t+1)+1 = 6$ $t_1 = 4 \Rightarrow \mathbf{P_1(1, -7, 4)} \quad t_2 = -2 \Rightarrow \mathbf{P_2(-5, 5, -2)}$
5) Trovare l'equazione canonica e, poi, classificare la seguente conica: $9x^2 - 10xy + 9y^2 + 44x - 12y + 32 = 0$ ----- $A = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 9 \end{bmatrix} \quad p_A(\lambda) = (\lambda-4)(\lambda-14)$ $\lambda_1 = 4 \quad \text{Base di } E_4 = \{(1, 1)\}$ $\lambda_2 = 14 \quad \text{Base di } E_{14} = \{(-1, 1)\}$	Rotazione $\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}$ $4\underline{x}^2 + 14\underline{y}^2 + 16\sqrt{2}\underline{x} - 28\sqrt{2}\underline{y} + 32 = 0$ $4(\underline{x} + 2\sqrt{2})^2 + 14(\underline{y} - \sqrt{2})^2 - 28 = 0$ Traslazione $X = \underline{x} + 2\sqrt{2} \quad e \quad Y = \underline{y} - \sqrt{2}$ $4X^2 + 14Y^2 = 28$ $\frac{X^2}{7} + \frac{Y^2}{2} = 1 \quad \mathbf{ELLISSE}$
6) Studiare la mutua posizione delle sfere: $S_1: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 2z - 6 = 0$ e $S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$	$C_1 = (3, -3, 1) \quad R_1 = 5 \quad C_2 = (1, -2, 3) \quad R_2 = 2$ $D = d(C_1, C_2) = 3$ $D = R_1 - R_2 \Rightarrow \mathbf{S_2 \text{ è interna e tangente ad } S_1}$

Soluzioni dello scritto di Geometria del 24 Giugno 2009

1) Sia A la matrice avente $(0, t^2 - 16, t(t - 4), 0)$ e $(0, t^2 - 4t, (t - 4)(t + 4), 0)$ come I e II riga rispettivamente. Studiare, al variare del parametro reale t, il rango della matrice A.	$\det B = 8(t + 2)(t - 4)^2$ (minore di ordine 2 di A) $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\} \Rightarrow \det B \neq 0 \Rightarrow \mathbf{rg}(A) = 2$ $t = -2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -12 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{rg}(A) = 1$ $t = 4 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{rg}(A) = 0$
Sia $B = \begin{bmatrix} t^2 - 16 & t(t - 4) \\ t^2 - 4t & (t - 4)(t + 4) \end{bmatrix}$ (sottomatrice di A)	
2) Trovare i parametri direttori della retta passante per l'origine $O(0, 0, 0)$ che si appoggia alla retta $r : z = 4x - y + 7z + 11 = 0$ e alla retta $s : 11x + y - 3z - 14 = x + 3y = 0$.	Dalle equazioni delle rette r ed s si ha subito che il piano contenente r e O è $z = 0$ e il piano contenente s e O è $x + 3y = 0$ per cui la retta è $z = x + 3y = 0$. Quindi, i parametri direttori sono $(3, -1, 0)$
3) Calcolare l'area del triangolo di vertici $A(0, 4, -5)$, $B(4, 0, -3)$ e $C(5, -3, 0)$. Poi, scrivere l'equazione del piano che contiene il triangolo ABC.	$AC \wedge AB = 2\mathbf{v}$ con $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ area ABC = $\ AC \wedge AB\ /2 = \ \mathbf{v}\ = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ $\mathbf{v} \perp \pi$ e $A \in \pi \Rightarrow \pi : 3x + 5y + 4z = 0$
4) Siano A, B, C i punti d'intersezione del piano $\pi : x - y + 2z - 24 = 0$ con gli assi X, Y, Z rispettivamente. Trovare l'ortocentro (punto d'incontro delle altezze) del triangolo ABC.	$BA \parallel \mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ $BC \parallel \mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ $\pi_1 : A \in \pi_1$ e $\pi_1 \perp BC \Rightarrow \pi_1 : 2y + z = 0$ $\pi_2 : C \in \pi_2$ e $\pi_2 \perp BA \Rightarrow \pi_2 : x + y = 0$ $\pi \cap \pi_1 \cap \pi_2 = \{(4, -4, 8)\}$
5) Trovare l'equazione canonica della conica: $4x^2 + 6xy + 4y^2 + 8x + 6y + 11 = 0$. Poi, <u>classificarla</u>.	Rotazione $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}$ $\underline{x}^2 + 7\underline{y}^2 + \sqrt{2}\underline{x} + 7\sqrt{2}\underline{y} + 11 = 0$ $(\underline{x} + 1/\sqrt{2})^2 + 7(\underline{y} + 1/\sqrt{2})^2 + 7 = 0$ Traslazione $X = \underline{x} + 1/\sqrt{2}$ e $Y = \underline{y} + 1/\sqrt{2}$ $X^2 + 7Y^2 = -7$ $\frac{X^2}{7} + Y^2 = -1$ Ellisse immaginaria
$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 7)$ $\lambda_1 = 1$ Base di $E_1 = \{(1, -1)\}$ $\lambda_2 = 7$ Base di $E_7 = \{(1, 1)\}$ Moltiplicando per $1/\sqrt{2}$ si ottengono i versori.	
6) Trovare le equazioni del piano e di una sfera la cui intersezione sia la circonferenza passante per i punti $O(0, 0, 0)$, $A(-7, 0, 0)$ e $B(0, 1, 3)$. [solo per il corso da 8 C.F.U.]	Imponendo il passaggio della sfera per O, A e B, dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ si ottiene $d = 0$, $a = 7$ e $b = -(10 + 3c)$. Per cui $\forall c \in \mathbb{R}$ $x^2 + y^2 + z^2 + 7x - (10 + 3c)y + cz = 0$
Il piano per O, A e B è $\pi : 3y - z = 0$	Ora, si scelga, <u>a piacere</u>, un valore per $c \in \mathbb{R}$.

Soluzioni dello scritto di Geometria del 16 Luglio 2009

1) Sia A la matrice avente $(t, t-2)$ e $(2, 2)$ come I e II riga rispettivamente. Determinare per quali valori del parametro reale t esiste una base dello spazio R^2 formata da autovettori di A.	$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (t+2)\lambda + 4 \quad \Delta = (t+6)(t-2)$ Esiste una base di R^2 formata da autovettori di A $\Leftrightarrow$ A ha due autovalori reali distinti $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow$ $t < -6 \quad \text{vel} \quad t > 2$
2) Trovare una base dello spazio $V(w, x, y, z)$ (sottospazio di R^4) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo: $w - x + z = 4x - y + 2z = 0.$	Poiché le due equazioni sono indipendenti, la dimensione di V è uguale a 2. Per cui una sua base è una <u>qualunque</u> coppia di suoi vettori linearmente indipendenti. <u>Per esempio:</u> $(1, 0, -2, -1)$ $(1, 1, 4, 0)$
3) Trovare la distanza tra le rette sghembe $r : 2x - 3y + 12 = y + z = 0$ $s : x + 7z = 2x - y + 2z = 0$ e i parametri direttori della retta di minima distanza. $d(r, s) = 4 \quad (l, m, n) = (2, -1, 2)$	Combinando linearmente le equazioni della retta r si ottiene l'equazione del fascio $F(r) : 2\lambda x + (\mu - 3\lambda)y + \mu z + 12\lambda = 0.$ Imponendo il parallelismo con la retta s si ottiene $\mu - 2\lambda = 0.$ Quindi, il piano $\pi_1 \in F(r)$ con $\pi_1 \parallel s$ è $\pi_1 : 2x - y + 2z + 12 = 0.$ La distanza tra r ed s è uguale alla distanza tra π_1 e $O(0,0,0) \in s.$ Retta w di minima distanza $\perp \pi_1 \Rightarrow w \parallel \mathbf{v}_{\pi_1} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
4) Sia r la retta parallela all'asse X e passante per $A(\sqrt{3}, 15, -5\sqrt{3})$. Trovare le equazioni dei piani che contengono r e formano un angolo di $\pi/6$ radianti con l'asse Y.	$A \in \pi$ e asse X $\parallel r \subset \pi \Rightarrow \pi : b(y-15) + c(z+5\sqrt{3})$ Applicando la formula dell'angolo retta-piano all'asse Y e al piano π si ottiene $c^2 = 3b^2$. Scegliendo $b = 1$ si ha $c = \pm\sqrt{3}.$ $\pi_1 : y + \sqrt{3}z = 0$ $\pi_2 : y - \sqrt{3}z - 30 = 0$
5) Siano A, B, e C i punti di intersezione del piano $\pi : x - 2y - z - 18 = 0$ con gli assi X, Y e Z rispettivamente. Trovare il circocentro (punto d'incontro degli assi dei lati) del triangolo ABC.	$M(9, -9/2, 0)$ punto medio di AB $\parallel \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ $H(9, 0, -9)$ punto medio di AC $\parallel \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ $\pi_1 : M \in \pi_1$ e $\pi_1 \perp AB \Rightarrow \pi_1 : 4x + 2y - 27 = 0$ $\pi_2 : H \in \pi_2$ e $\pi_2 \perp AC \Rightarrow \pi_2 : x + z = 0$ $\pi \cap \pi_1 \cap \pi_2 = \left\{ \left(\frac{15}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{15}{2} \right) \right\}$
$A(18, 0, 0) \quad B(0, -9, 0) \quad C(0, 0, -18)$	
6) Scrivere le equazioni della circonferenza che giace sul piano $x - y + z = 0$, ha il centro nel punto $C(1, 2, 1)$ e passa per l'origine $O(0, 0, 0)$. <i>[solo per il corso da 8 C.F.U.]</i>	In generale, si possono prendere le equazioni di <u>due qualsiasi</u> sfere <u>distinte</u> passanti per O e aventi il centro sulla retta r passante per C e perpendicolare a π. Usando le equazioni parametriche di r, il centro di tali sfere ha coordinate $(t+1, -t+2, t+1)$ con $t \in R$.
Le due equazioni "più semplici" sono quella del piano $x - y + z = 0$ e quella della sfera passante per O e di centro C $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = 0$	Tenendo, inoltre, conto del fatto che le sfere passano per O si ha $x^2 + y^2 + z^2 - 2(t+1)x - 2(2-t)y - 2(t+1)z = 0$ Ora si scelgano, <u>a piacere</u>, due valori <u>distinti</u> di $t \in R$.

Soluzioni dello scritto di Geometria del 30 Luglio 2009

1) Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 6y - 10z = 0\}$. Sia $B = \{(t^3 - 6t^2, t^2 - t, t), (8, -3, -1)\}$. Determinare per quali valori del parametro reale t l'insieme B è una base del sottospazio S.	$\mathbf{v} = (t^3 - 6t^2, t^2 - t, t) \in S \Leftrightarrow t(t-4)(t+4) = 0$ $t = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = (0, 0, 0)$ <u>NON</u> accettabile per la base $t = 4 \Rightarrow \mathbf{v} = (-32, 12, 4) = -4\mathbf{u}$ <u>NON</u> accettabile per la base $t = -4 \Rightarrow \mathbf{v} = (-160, 20, -4) = -4(40, -5, 1)$ accettabile per la base in quanto $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti. Quindi, l'<u>unico</u> valore accettabile è $\mathbf{t} = -4$
E' <u>necessario</u> (ma non sufficiente) che i vettori di B appartengano a S. Si vede subito che $\mathbf{u} = (8, -3, -1) \in S$	
2) Scrivere la soluzione (w, x, y, z) generale del seguente sistema lineare: $w + y - 3z + 2 = 3w + x - y + 1 = 2w + x - 2y + 3z - 1 = 0$.	Utilizzando il metodo di riduzione a gradino si perviene al sistema equivalente: $w + y - 3z + 2 = x - 4y + 9z - 5 = 0$. <u>Scegliendo</u>, per esempio, y e z come parametri <u>possiamo</u> scrivere la soluzione generale nel seguente modo:
Poiché le equazioni indipendenti sono 2 e le incognite 4 è <u>necessario</u> che la soluzione dipenda da due parametri. Ovviamente, il <u>modo</u> di rappresentare la soluzione generale <u>non è unico</u>.	$(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (-2, 5, 0, 0) + \mathbf{y}(-1, 4, 1, 0) + \mathbf{z}(3, -9, 0, 1)$
3) Sulla retta passante per il punto $A(-7, 3, 0)$ e perpendicolare al piano $x - 2y + 2z + 14 = 0$, determinare le coordinate dei punti che distano 8 dal piano $2x - 2y - z = 0$.	Usando per la retta le equazioni parametriche, i suoi punti hanno coordinate $(t-7, -2t+3, 2t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Applicando la formula della distanza punto-piano al punto $(t-7, -2t+3, 2t)$ e al piano $2x - 2y - z = 0$ (con distanza 8) si ottiene l'equazione $t-5 = 6$. $t_1 = -1 \Rightarrow \mathbf{P}_1(-8, 5, -2)$ $t_2 = 11 \Rightarrow \mathbf{P}_2(4, -19, 22)$
4) Calcolare la distanza tra le due rette $r: x - y - 5 = 5y - z - 1 = 0$ e $s: 5x - z = x - y = 0$. $\mathbf{d}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \sqrt{26}$	Le due rette sono parallele, avendo gli stessi parametri direttori $(1, 1, 5)$. Il piano π perpendicolare alle due rette e passante per il punto $O(0, 0, 0) \in s$ ha equazione $x + y + 5z = 0$. Con semplici calcoli si trova che il punto d'intersezione tra r e π è $A(5, 0, -1)$. La distanza tra le due rette è uguale alla distanza tra O e A.
5) <u>Se esiste</u> una conica passante per i punti $A(0, 0)$, $B(0, -1)$, $C(1, -1)$, $D(1, -2)$, $E(2, -2)$, scrivere la sua equazione. <u>Altrimenti</u>, motivare brevemente la risposta.	La conica è una conica degenera unione della retta $r: x + y = 0$ per A, C ed E e un'altra retta s. Poiché i punti B e D della conica non stanno su r, essi devono stare sulla retta s che, quindi, ha equazione $x + y + 1 = 0$. Perciò, l'equazione della conica sarà $(x + y)(x + y + 1) = 0$.
Si vede subito che i <u>tre punti</u> A, C ed E sono <u>allineati</u>.	$\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{xy} + \mathbf{y}^2 + \mathbf{x} + \mathbf{y} = 0$
6) Trovare il centro e il raggio della sfera passante per l'origine O e i punti A, B, e C di intersezione del piano $\pi: x - 2y - z - 18 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente.	Si ha $A(18, 0, 0)$, $B(0, -9, 0)$ e $C(0, 0, -18)$. Imponendo il passaggio della sfera $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ per O, A, B, e C, si ottiene $d = 0$, $a = -18$, $b = 9$ e $c = 18$. Quindi, la sfera ha equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 18x + 9y + 18z = 0$. Da cui $\mathbf{C}(9, -9/2, -9) \quad \mathbf{r} = 27/2$

Soluzioni dello scritto di Geometria del 24 Settembre 2009

1) Del sistema lineare $3x - y + 10z - 22 = x - y + 8z - 8 = 2x + y - 5z - 13 = 0$ trovare: • una soluzione particolare X_p ; • una base B dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo ad esso associato. $X_p = (7, -1, 0)$ $B = \{(-1, 7, 1)\}$	Utilizzando il metodo di riduzione a gradino si perviene ad un sistema equivalente con due equazioni indipendenti. Ad esempio $x - y + 8z - 8 = y - 7z + 1 = 0$. Scegliendo z come parametro possiamo scrivere la soluzione generale nel modo seguente: $(x, y, z) = (7, -1, 0) + z(-1, 7, 1)$. A questo punto si può scegliere una delle infinite soluzioni e uno degli infiniti vettori del tipo $z(-1, 7, 1)$ con $z \neq 0$.
2) Se esiste, trovare una coppia $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tale che la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$ NON abbia tre autovalori reali a due a due distinti e, <u>allo stesso tempo</u>, sia diagonalizzabile. $(h, k) = (3, -7)$	$p_A(\lambda) = (h - \lambda)(5 - \lambda)(3 - \lambda)$ quindi $h = 5$ o $h = 3$ $h = 5 \Rightarrow m_a(3) = 1$ e $m_a(5) = 2$ $\text{rg}(A - 5I) = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow m_g(5) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{R}$ quindi, per $h = 5$ A non è diagonalizzabile $h = 3 \Rightarrow m_a(5) = 1$ e $m_a(3) = 2$ $m_g(3) = 2 \Leftrightarrow \text{rg}(A - 3I) = 1 \Leftrightarrow k = -7$ quindi, A è diagonalizzabile per $h = 5$ e $k = -7$
3) Date le rette $r: x = x - 2y + 3z + 12 = 0$ e $s: 2x + y = x + y - 12z - 12 = 0$, sia t la retta per l'origine O che si appoggia in A alla retta r e in B alla retta s. Trovare le coordinate di A e B. $A(0, 0, -4)$ $B(0, 0, -1)$	$\pi_1: O \in \pi_1$ e $r \subset \pi_1 \Rightarrow \pi_1: x = 0$ $\pi_2: O \in \pi_2$ e $s \subset \pi_2 \Rightarrow \pi_2: 2x + y = 0$ $t = \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow t: x = y = 0$ (asse Z) $t \cap r = \{A\} \qquad t \cap s = \{B\}$
4) Sia $A(-2, 3\sqrt{11}, 8)$. Sulla retta $y = z - 11 = 0$ trovare due punti B e C tali che il triangolo ABC sia equilatero. $B = (4, 0, 11)$ $C = (-8, 0, 11)$	$\pi: A \in \pi$ e $r \perp \pi \Rightarrow \pi: x + 2 = 0$ $\pi \cap r = \{H\}$ $H(-2, 0, 11)$ AH altezza di ABC $d(A, H) = 6\sqrt{3} \Rightarrow d(H, B) = d(H, C) = 6$ $B = (-2+6, 0, 11)$ $C = (-2-6, 0, 11)$
5) Siano $A(t, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, -\sqrt{23})$. Trovare i valori del parametro reale t per i quali il piano passante per A, B e C forma col piano YZ un angolo di $2\pi/3$ radianti. $t = \pm 2\sqrt{23}/3$	$\mathbf{u} := AB \wedge CB = 2\sqrt{23}\mathbf{i} + t\sqrt{23}\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$ $\mathbf{u} \perp \pi_1 \quad \mathbf{i} \perp \pi_2$ applicando la formula dell'angolo tra due piani con $(a_1, b_1, c_1) = (2\sqrt{23}, t\sqrt{23}, -2t)$ e $(a_2, b_2, c_2) = (1, 0, 0)$ ed elevando al quadrato si ottiene $9t^2 = 92$
6) Sia Σ la sfera che ha il centro in $C(4, -7, -16)$ e passa per il punto $A(4, -12, -10)$. Trovare l'equazione del piano π tangente a Σ in A. $\pi: 5y - 6z = 0$	$\pi: A \in \pi$ e $\pi \perp AC$ $AC = 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \Rightarrow \pi: 5(y + 12) - 6(z + 10) = 0$

Soluzioni dello scritto di Geometria del 15 Ottobre 2009

1) Del sistema lineare $3x - y + 11z - 19 = x - y + 9z - 7 = 2x + y - 6z - 11 = 0$ trovare: • una soluzione particolare X_p ; • una base B dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo ad esso associato. $X_p = (6, -1, 0)$ $B = \{(1, -8, -1)\}$	Utilizzando il metodo di riduzione a gradino si perviene ad un sistema equivalente con due equazioni indipendenti. Ad esempio $x - y + 9z - 7 = y - 8z + 1 = 0$. Scegliendo z come parametro possiamo scrivere così la soluzione generale $(x, y, z) = (6, -1, 0) + z(-1, 8, 1)$. A questo punto si può scegliere (preso un valore a piacere per z) una delle infinite soluzioni e (sempre a piacere) uno degli infiniti vettori del tipo $z(-1, 8, 1)$ con $z \neq 0$.
2) Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Se possibile, trovare una matrice diagonale Λ e una matrice invertibile C tali che $AC = CA$. Altrimenti, motivare la risposta.	$p_A(\lambda) = \lambda(\lambda + 2)(2 - \lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$ $u_1 = (1, 0, -2)$ base dell'autospazio E_0 $u_2 = (1, -2, 2)$ base dell'autospazio $E_{(-2)}$ $u_3 = (1, 2, 2)$ base dell'autospazio E_2 Come matrice diagonale possiamo prendere la matrice diagonale che ha λ_1, λ_2 e λ_3 sulla diagonale principale. Come matrice C prendiamo la matrice che ha i vettori u_1, u_2 e u_3 come 1^a, 2^a e 3^a colonna rispettivamente
3) Se esiste, trovare il piano che contiene le seguenti rette: $r : 4x + z - 3 = y + 1 = 0$ e $s : 4x + z = y = 0$ $\pi : 4x + 3y + z = 0$	Dalle equazioni si vede subito che r ed s sono parallele e, quindi, complanari. Il piano richiesto è il piano del fascio (proprio) di piani contenenti una delle due rette che passa per un punto qualsiasi dell'altra retta. Quindi, possiamo combinare linearmente le equazioni di r e imporre il passaggio per $O(0, 0, 0) \in s$.
4) Sia H la proiezione ortogonale del punto $A(2\sqrt{26}, 2, -5)$ sulla retta $r : x = z + 7 = 0$. Su r trovare (almeno) un altro punto B tale che l'area del triangolo rettangolo AHB valga $9\sqrt{3}$.	Il piano per A è perpendicolare a r è $\pi : y - 2 = 0$. Da $\pi \cap r = \{H\}$ si ha $H(0, 2, -7)$ e $d(A, H) = 6\sqrt{3}$. Da $d(A, H)d(H, B)/2 = \text{area} = 9\sqrt{3}$ si ha $d(H, B) = 3$. Essendo $r \parallel$ asse Y si ha $B(0, 2 \pm 3, -7)$. $B_1 = (0, 5, -7)$ $B_2 = (0, -1, -7)$
5) Sia $r : 4x + 3y - 10 = 0$ la direttrice delle parabole passanti per l'origine $O(0, 0)$ e aventi i fuochi sull'asse Y delle ordinate. Trovare le coordinate dei loro fuochi.	Essendo sull'asse Y i fuochi hanno coordinate del tipo $(0, \alpha)$. La distanza dell'origine dai fuochi è α. La distanza (punto-retta) dell'origine dalla direttrice è 2. Uguagliando queste distanze si ottiene $\alpha = \pm 2$. $F_1 = (0, 2)$ $F_2 = (0, -2)$
6) Scrivere l'equazione della sfera Σ che ha il centro in $C(-10, 3, 15)$ ed è tangente al piano $\pi : 4x + 7z = 0$. $x^2 + y^2 + z^2 + 20x - 6y - 30z + 269 = 0$	Il raggio R della sfera è uguale alla distanza (punto-piano) di C da π. Per cui $R = d(C, \pi) = \sqrt{65}$. Con il centro e il raggio si scrive subito l'equazione della sfera: $(x + 10)^2 + (y - 3)^2 + (z - 15)^2 = 65$