

Soluzioni dello scritto di Geometria del 4 Febbraio 2010

1) Trovare gli autovalori e gli autovettori della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.	$p_A(\lambda) = (-\lambda)[(1-\lambda)(-\lambda) - 20] = \lambda(5-\lambda)(\lambda+4)$ $\lambda_1 = 0 \quad Au_1 = 0 \quad \mathbf{u}_1 = \alpha(0, 1, 0) \quad \forall \alpha \neq 0$ $\lambda_2 = 5 \quad (A - 5I)u_2 = 0 \quad \mathbf{u}_2 = \alpha(5, 0, 4) \quad \forall \alpha \neq 0$ $\lambda_3 = -4 \quad (A + 4I)u_3 = 0 \quad \mathbf{u}_3 = \alpha(1, 0, -1) \quad \forall \alpha \neq 0$
2) Scrivere l'equazione del piano π che contiene le seguenti rette: $r : 2x + 3y - 3z - 3 = x - 3 = 0$ e $s : y - z = x + 2y - 2z = 0$. $\pi : x + 3y - 3z = 0$	<u>Dal testo si ha che r e s sono complanari.</u> Combinando linearmente le equazioni di r e imponendo il passaggio per il punto O (che appartiene a s ma non a r) si ottiene l'equazione $x + 3y - 3z = 0$ del piano π. [Poi, è facile <u>verificare</u> che s è contenuta in π. Infatti, oltre al punto O, anche il punto A(0, 1, 1) di s appartiene a π.]
3) Scrivere delle equazioni per la retta r passante per il punto A(0, 0, 3), parallela al piano $\pi : 2x - 3y + z = 0$ e perpendicolare alla retta s : $x + 3 = 3y + z - 6 = 0$. $x = 4t \quad y = 3t \quad z = t + 3$	I parametri direttori della retta s sono (0, 1, -3). Per cui i parametri direttori di r (perpendicolare a s) sono (ℓ, 3, 1). Imponendo la condizione di parallelismo col piano π si ha che $2\ell - 8 = 0$ da cui $\ell = 4$. Poiché r passa per A(0, 0, 3) le sue equazioni parametriche sono $(x, y, z) = (4t, 3t, t + 3)$. Da queste si può passare alle due equazioni cartesiane seguenti $x - 4z + 12 = y - 3z + 9 = 0$.
4) Calcolare la distanza tra le rette $r : x - 3y = z + 3 = 0$ e $s : z = x - 3y - 10 = 0$. $d(r, s) = \sqrt{19}$	Le due rette sono parallele tra loro in quanto entrambe hanno parametri direttori proporzionali a (3, 1, 0). Il piano π passante per il punto A(0, 0, -3) di r e ortogonale ad r (e ad s) ha equazione $3x + y = 0$. L'intersezione tra s e π è il punto B(1, -3, 0). La distanza tra le due rette è uguale alla distanza tra i due punti A e B.
5) Scrivere l'equazione canonica della conica $x^2 - 10xy + y^2 + 10x - 2y + 3 = 0$. Poi, classificarla. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad p_A(\lambda) = [(\lambda - 1)^2 - 25] = (\lambda + 4)(\lambda - 6)$ $\lambda_1 = -4 \quad \text{Base di } E_{(-4)} = \{(1, 1)\}$ $\lambda_2 = 6 \quad \text{Base di } E_6 = \{(-1, 1)\}$	Moltiplicando per $1/\sqrt{2}$ si ottengono i versori. Rotazione $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}$ $-4\underline{x}^2 + 6\underline{y}^2 + 4\sqrt{2}\underline{x} - 6\sqrt{2}\underline{y} + 3 = 0$ $-4(\underline{x} - 1/\sqrt{2})^2 + 6(\underline{y} - 1/\sqrt{2})^2 + 2 = 0$ Traslazione $X = \underline{x} - 1/\sqrt{2} \quad \text{e} \quad Y = \underline{y} - 1/\sqrt{2}$ $2X^2 - 3Y^2 = 1 \quad \text{iperbole}$
6) Scrivere l'equazione della sfera che ha il centro sul piano $\pi : 2y - 3 = 0$ ed è tangente nel punto A(4, 0, -2) al piano $\pi' : 2x - 3y + 4z = 0$. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 3y + 8z + 20 = 0$	La retta r (ortogonale a π' e passante per A) ha equazioni parametriche $(x, y, z) = (2t + 4, -3t, 4t - 2)$ e incontra il piano $\pi : 2y - 3 = 0$ nel centro C(3, 3/2, -4) della sfera. Quindi, l'equazione è $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 3y + 8z + d = 0$. Imponendo il passaggio per A si ha che $d = 20$. Oppure, si calcola $R^2 = [d(C, A)]^2 = 29/4$ e si scrive l'equazione $(x - 3)^2 + (y - 3/2)^2 + (z + 4)^2 = 29/4$

Soluzioni dello scritto di Geometria del 18 Febbraio 2010

1) Trovare una base per <u>ogni</u> autospazio della matrice $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.	L'autospazio relativo a $\lambda_1 = 1$ ha equazioni $x = y + 5z = 0$. Quindi, una sua base è costituita da <u>un qualunque</u> vettore non nullo proporzionale al vettore $(0, -5, 1)$. L'autospazio relativo a $\lambda_2 = -4$ ha equazione $2x + y = 0$ per cui è $m_g(\lambda_2) = 2$ e una sua base è <u>una qualunque coppia ordinata</u> di suoi vettori linearmente indipendenti, ad esempio $(1, -2, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda + 4)^2$ $\lambda_1 = 1 \quad m_a(\lambda_1) = 1 \Rightarrow m_g(\lambda_1) = 1$ $\lambda_2 = -4 \quad m_a(\lambda_2) = 2$	2) Trovare i parametri direttori della retta che passa per $A(0, 2, 0)$ e si appoggia alle rette: $r: x - 2 = y - 1 = 0$ e $s: y - 3 = z - 9 = 0$. $\alpha(2, -1, -9) \quad \forall \alpha \neq 0$
3) Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $A(0, 2, 0)$, perpendicolare al piano $\pi: x + 3y - 4z = 0$ e parallelo alla retta $r: y + 2 = x + 4z + 6 = 0$. $x + 5y + 4z - 10 = 0$	Poiché passa per $A(0, 2, 0)$ il piano ha un'equazione del tipo $ax + b(y - 2) + cz = 0$ con i coefficienti $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ da determinare. Imponendo la condizione di parallelismo con la retta r si ha che $c = 4a$. Imponendo, poi, la condizione di perpendicolarità col piano π si ottiene $b = 5a$. Quindi, si ha l'equazione $ax + 5ay + 4az - 10a = 0 \quad \forall a \neq 0$.
4) Calcolare la distanza tra le rette $r: 2x - 3y = z + 9 = 0$ e $s: y = 2x - 2z - 1 = 0$. $d(r, s) = \sqrt{17}$	Combinando linearmente le equazioni di s si ottiene il fascio di piani $2\mu x + \lambda y - 2\mu z - \mu = 0$. Imponendo la condizione di parallelismo con la retta r si ha che $\lambda = -3\mu$. Scelto $\mu = 1$, si ha che il piano $\pi: 2x - 3y - 2z - 1 = 0$ è l'<u>unico</u> piano per s parallelo ad r. Quindi, le due rette non sono parallele e la loro distanza è uguale alla distanza di un qualsiasi punto di r - ad esempio $A(0, 0, -9)$ - dal piano π.
5) Scrivere l'equazione canonica della conica $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 6y + 66 = 0$. <u>Poi</u>, classificarla.	Moltiplicando per $1/\sqrt{13}$ si ottengono i versori. Rotazione $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}$ $13\underline{x}^2 - 2\sqrt{13}\underline{x} + 66 = 0 \quad 13(\underline{x} - 1/\sqrt{13})^2 + 65 = 0$ $(\underline{x} - 1/\sqrt{13})^2 + 5 = 0$ Traslazione $X = \underline{x} - 1/\sqrt{13}$ $X^2 + 5 = 0$ conica senza punti reali
$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \quad p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 13)$ $\lambda_1 = 13 \quad \text{Base di } E_{13} = \{(2, -3)\}$ $\lambda_2 = 0 \quad \text{Base di } E_0 = \{(3, 2)\}$ 6) Trovare le coordinate dei centri delle <u>due</u> sfere di raggio $R = 15$ che secano il piano $\pi: 2x + 3y - z = 0$ nella circonferenza di centro $H(3, -2, 0)$ e raggio $r = 13$. $C_1(7, 4, -2) \quad C_2(-1, -8, 2)$	I centri $C_{1/2}$ delle sfere si trovano sulla retta s passante per H e ortogonale a π le cui equazioni parametriche sono $(x, y, z) = (2t + 3, 3t - 2, -t)$. Per cui $[d(C_{1/2}, H)]^2 = 14t^2$. D'altronde è anche $[d(C_{1/2}, H)]^2 = R^2 - r^2 = (R-r)(R+r) = 56$. Da $14t^2 = 56$ si ha $t^2 = 4$ e, quindi, $t_{1/2} = \pm 2$. Sostituendo tali valori nelle equazioni parametriche di s si trovano i centri.

Soluzioni dello scritto di Geometria del 25 Febbraio 2010

1) Sia $A = \begin{bmatrix} -4 & (t+3) & -2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ con t parametro reale. <u>Se esistono</u>, trovare i valori di t per i quali la matrice A è diagonalizzabile (cioè esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A). $t_1 = 2 \quad t_2 = -5$	Si ha subito che $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda + 4)^2$. Quindi, A è diagonalizzabile se e solo se $m_g(-4) = m_a(-4) = 2$, cioè se e solo se il rango di $(A + 4I) = \begin{bmatrix} 0 & (t+3) & -2 \\ 0 & 5 & -t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è uguale a 1, ovvero $\det \begin{bmatrix} (t+3) & -2 \\ 5 & -t \end{bmatrix} = (2-t)(t+5) = 0$.
2) Scrivere delle equazioni per la <u>retta di minima distanza</u> delle rette (sghembe) $r : x - 3 = 5x - 3y = 0$ e $s : x - 5 = x + 5z = 0$. $y - 5 = z + 1 = 0$	Dalle equazioni di r e s si vede che tali rette si trovano su due piani paralleli al piano $\alpha : x = 0$. Quindi, la retta di minima distanza si può ottenere come intersezione del piano $\beta : y - 5 = 0$ contenente r e perpendicolare a α e del piano $\gamma : z + 1 = 0$ contenente s e perpendicolare a α.
3) Trovare le coordinate dei punti della retta $r : 3x - 5z = 4y + 3 = 0$ che si trovano a distanza 4 dal piano $\alpha : x - 3 = 0$. $(7, -3/4, 21/5) \quad (-1, -3/4, -3/5)$	I punti di r hanno coordinate $(x, y, z) = (t, -3/4, 3t/5)$. Utilizzando la formula della distanza punto-piano si ha che $t - 3 = 4$ da cui $t_1 = 7$ e $t_2 = -1$.
4) Sia α il piano passante per i punti $A(\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, t, 0)$ e $C(0, 0, -5)$. Trovare i valori di t per i quali il piano α forma un angolo di $\pi/6$ radianti con l'asse Y. $t = \pm 5\sqrt{2}/3$	Il vettore $\mathbf{v} = (5t, 5\sqrt{2}, -t\sqrt{2})$, risultato del prodotto vettoriale di $\mathbf{CB} = (0, t, 5)$ e $\mathbf{CA} = (\sqrt{2}, 0, 5)$, è perpendicolare al piano α. Il vettore $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ è parallelo all'asse Y. Utilizzando il fatto che il seno dell'angolo (retta-piano) tra l'asse Y e il piano α è uguale al valore assoluto del coseno dell'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si perviene all'equazione $9t^2 = 50$.
5) Scrivere l'equazione canonica della conica $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x - 10y + 5 = 0$. <u>Poi</u>, classificarla.	Moltiplicando per $1/\sqrt{2}$ si ottengono i versori. Rotazione $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad p_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 6)$ $\lambda_1 = 4 \quad \text{Base di } E_4 = \{(1, 1)\}$ $\lambda_2 = 6 \quad \text{Base di } E_6 = \{(-1, 1)\}$	$4\underline{x}^2 + 6\underline{y}^2 - 4\sqrt{2}\underline{x} - 6\sqrt{2}\underline{y} + 5 = 0$ $4(\underline{x} - 1/\sqrt{2})^2 + 6(\underline{y} - 1/\sqrt{2})^2 = 0$ Traslazione $X = \underline{x} - 1/\sqrt{2} \quad Y = \underline{y} - 1/\sqrt{2}$ $2X^2 + 3Y^2 = 0 \quad \text{conica con un solo punto reale}$
6) Stabilire la mutua posizione delle sfere: $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 8z = 0$ $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 20y - 20z + 216 = 0$ tangenti esternamente	La sfera S_1 ha centro $C_1(2, -4, 4)$ e raggio $R_1 = 6$. La sfera S_2 ha centro $C_2(5, -10, 10)$ e raggio $R_2 = 3$. La distanza tra i due centri è $d(C_1, C_2) = 9$. Poiché $d(C_1, C_2) = R_1 + R_2$ le due sfere sono tangenti esternamente.