

70 DOMANDE DI GEOMETRIA

Esercizi svolti

1) **Se possibile**, trovare un insieme di 2 generatori di $\mathbb{R}^3$. **Altrimenti, motivare il perché.**

Impossibile in quanto $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ il che significa che 3 è: sia il minimo numero di generatori in $\mathbb{R}^3$, sia il massimo numero di vettori linearmente indipendenti

2) **Se possibile**, trovare un insieme di 3 generatori di $\mathbb{R}^3$ in modo che uno di essi sia il vettore nullo. **Altrimenti, motivare il perché.**

Impossibile in quanto la dimensione dello spazio vettoriale generato dai tre vettori (di cui uno è quello nullo) è 2, e dato che $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, i dati forniti non permettono di scrivere 3 generatori

3) **Se possibile**, trovare un insieme di 3 generatori di $\mathbb{R}^3$ in modo che uno di essi sia il vettore $(1, 0, 2)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

L'insieme dei generatori è $\{(1, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

4) **Se possibile**, trovare un insieme di 3 generatori di $\mathbb{R}^3$ in modo che due di essi siano i vettori $(1, 0, 2)$, $(2, 0, 4)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

Impossibile in quanto $v_2 = 2 \cdot v_1$, quindi v_2 è combinazione lineare di v_1 , quindi v_2 è linearmente dipendente.

5) **Se possibile**, trovare un insieme di 3 generatori di $\mathbb{R}^3$ in modo che due di essi siano i vettori $(1, 0, 2)$, $(1, 0, 4)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

L'insieme dei generatori è $\{(1, 0, 2), (1, 0, 4), (0, 1, 0)\}$

6) **Se possibile**, trovare un insieme di 4 generatori di $\mathbb{R}^3$ in modo che uno di essi sia il vettore nullo. **Altrimenti, motivare il perché.**

L'insieme dei generatori è $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$

7) **Se possibile**, trovare un insieme di 4 generatori di $\mathbb{R}^3$ in modo che due di essi siano i vettori $(1, 0, 2)$, $(2, 0, 4)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

L'insieme dei generatori è $\{(1, 0, 2), (2, 0, 4), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

8) **Se possibile**, trovare un insieme di 4 generatori di $\mathbb{R}^3$ in modo che due di essi siano i vettori $(1, 0, 2)$, $(1, 0, 4)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

L'insieme dei generatori è $\{(1, 0, 2), (1, 0, 4), (0, 1, 0), (a, b,$

$$c)\}, \text{ con } (a, b, c) \in \mathbb{R}$$

9) **Se possibile**, trovare un insieme di 5 generatori di $\mathbb{R}^3$ in modo che uno di essi sia il vettore nullo.

Altrimenti, motivare il perché.

L'insieme dei generatori è $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0), (a, b, c)\}$, con $(a, b, c) \in \mathbb{R}$

10) **Se possibile**, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il vettore nullo. **Altrimenti, motivare il perché.**

Anche se una base deve contenere solo elementi linearmente indipendenti, per definizione non può contenere il vettore nullo.

11) **Se possibile**, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ contenente i vettori $(1, 0, 1), (2, 0, 2)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

Anche se una base deve contenere solo elementi linearmente indipendenti. Infatti $v_2 = 2 \cdot v_1$, quindi v_2 è combinazione lineare di v_1 , quindi v_2 è linearmente dipendente.

12) **Se possibile**, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ contenente i vettori $(1, 0, 1), (1, 0, 2)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$B = \{(1, 0, 2), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

13) **Se possibile**, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ contenente i vettori $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 0, 3)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

Impossibile in quanto costruendo una matrice A contenenti i vettori forniti dalla consegna si vede che A ha una colonna nulla e quindi il rango non è massimo. Pertanto i vettori non sono linearmente indipendenti (contro la definizione di base)

14) **Se possibile**, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ contenente i vettori $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(0, 3, 0)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$B = \{(1, 0, 1), (1, 0, 2), (0, 3, 0)\}$$

15) **Se possibile**, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 2, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$B = \{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

16) **Se possibile**, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori $(1, 0, 1, -1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(1, -1, 0, -1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

Impossibile in quanto costruendo una matrice A contenenti i vettori forniti dalla consegna si vede che A ha una colonna nulla e quindi il rango non è massimo. Pertanto i vettori non sono linearmente indipendenti (contro la definizione di base)

17) **Se possibile**, scrivere due matrici A e B dello stesso tipo tali che $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 1$ e $\text{rg}(A+B) = 1$.
Altrimenti, motivare il perché.

Se $A = [1, 1; 0, 0]$ $\det(A) = 0$, quindi $\text{rg}(A) = 1$
e se $B = [0, 1; 0, 0]$ $\det(B) = 0$, quindi $\text{rg}(B) = 1$

allora $(A + B) = [1, 2; 0, 0]$ $\det(A + B) = 0$, $\text{rg}(A + B) = 1$

18) **Se possibile**, scrivere due matrici A e B dello stesso tipo tali che $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 1$ e $\text{rg}(A+B) = 2$.
Altrimenti, motivare il perché.

Se $A = [1, 0; 0, 0]$ $\det(A) = 0$, quindi $\text{rg}(A) = 1$
e se $B = [0, 0; 0, 1]$ $\det(B) = 0$, quindi $\text{rg}(B) = 1$

Allora $(A + B) = [1, 0; 0, 1]$ $\det(A + B) = 1$, quindi $\text{rg}(A + B) = 2$

19) **Se possibile**, scrivere due matrici A e B dello stesso tipo tali che $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 1$ e $\text{rg}(A+B) = 3$.
Altrimenti, motivare il perché.

È impossibile. Perché se $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 1$, allora $\text{rg}(A + B)$ può essere 1, al più 2.

20) **Se possibile**, scrivere due matrici A e B dello

stesso tipo tali che $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2$ e $\text{rg}(A+B) = 1$.
Altrimenti, motivare il perché.

Se $A = [1, 0; 0, 1]$ $\det(A) = 1$, quindi $\text{rg}(A) = 2$
e se $B = [0, 1; 1, 0]$ $\det(B) = -1$, quindi $\text{rg}(B) = 2$

Allora $(A + B) = [1, 1; 1, 1]$ $\det(A + B) = 0$, $\text{rg}(A + B) = 1$

21) **Se possibile**, scrivere due matrici A e B dello stesso tipo tali che $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2$ e $\text{rg}(A+B) = 2$.
Altrimenti, motivare il perché.

Se $A = [1, 0; 0, 1]$ $\det(A) = 1$, quindi $\text{rg}(A) = 2$
e se $B = [0, 1; 2, 0]$ $\det(B) = -1$, quindi $\text{rg}(B) = 2$

Allora $(A + B) = [1, 1; 2, 1]$ $\det(A + B) = -1$, quindi $\text{rg}(A + B) = 2$

22) **Se possibile**, scrivere due matrici A e B dello stesso tipo tali che $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2$ e $\text{rg}(A+B) = 3$.
Altrimenti, motivare il perché.

Se $A = [1, 0, 1; 0, 1, 0; 1, 0, 1]$ $\det(A) = 0$, quindi $\text{rg}(A) = 2$
e se $B = [1, 0, -1; 0, 1, 0; -1, 0, 1]$ $\det(B) = 0$, quindi $\text{rg}(B) = 2$

Allora $(A + B) = [2, 0, 0; 0, 2, 0; 0, 0, 2]$ $\det(A + B) = 8$,
quindi $\text{rg}(A + B) = 3$

23) **Se possibile**, scrivere due matrici A e B dello stesso tipo tali che $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2$ e $\text{rg}(A+B) = 4$.

Altrimenti, motivare il perché.

Se $A = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0]$ $\det(A) = 0$,
quindi $\text{rg}(A) = 2$
e se $B = [0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 1]$ $\det(B) = 0$,
quindi $\text{rg}(B) = 2$

Allora $(A + B) = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0; 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 1]$
 $\det(A + B) = 1$, quindi $\text{rg}(A + B) = 4$

24) Se possibile, scrivere due matrici A e B dello stesso tipo tali che $\text{rg}(A) = 2$, $\text{rg}(B) = 3$ e $\text{rg}(A+B) = 4$. **Altrimenti, motivare il perché.**

Se $A = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0]$ $\det(A) = 0$,
quindi $\text{rg}(A) = 2$
e se $B = [0, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0; 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 1]$ $\det(B) = 0$,
quindi $\text{rg}(B) = 3$

Allora $(A + B) = [1, 0, 0, 0; 0, 2, 0, 0; 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 1]$
 $\det(A + B) = 2$, quindi $\text{rg}(A + B) = 4$

25) Se possibile, scrivere una matrice triangolare superiore che non sia una matrice a scalini (per righe). **Altrimenti, motivare il perché.**

Una matrice a scalino è sempre triangolare superiore, ma non viceversa.

E.G.

$$A = [0, 2; 0, 3]$$
$$B = [0, 0, 1, 1; 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0]$$

26) Sia A una matrice quadrata di ordine 3 ad elementi reali, e sia $B = (-3) \cdot A$. Se $\det(B) = 18$, quanto vale il determinante dell'inversa di A?

Spiegare la risposta.

$$\text{Essendo } B = (-3) \cdot A$$

$$\text{Allora } \det(B) = \det((-3) \cdot A) = 18$$

$$\det((-3) \cdot A) = 18$$

$$(-3)^3 \cdot \det(A) = 18$$

$$\det(A) = -2/3$$

$$\text{Essendo } (AA^{-1}) = I$$

$$\text{allora } \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

Per il teorema di Binet: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ diventa

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1, \det(A) = -2/3$$

$$(-2/3) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = (-2/3)^{-1}$$

$$\det(A^{-1}) = (-3/2)$$

27) Sia A una matrice quadrata di ordine 4 ad elementi reali, e sia $B = (-2) \cdot A$. Se $\det(B) = -12$, quanto vale il determinante dell'inversa di A?

Spiegare la risposta.

$$\text{Essendo } B = (-2) \cdot A$$

$$\text{Allora } \det(B) = \det((-2) \cdot A) = -12$$

$$\det((-2) \cdot A) = -12$$

$$(-2)^4 \cdot \det(A) = -12$$

$$\det(A) = -3/8$$

$$\text{Essendo } (AA^{-1}) = I$$

$$\text{allora } \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

Per il teorema di Binet: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ diventa

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1, \quad \det(A) = -\frac{3}{4}$$

$$(-\frac{3}{4}) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = (-\frac{3}{4})^{-1}$$

$$\det(A^{-1}) = (-4/3)$$

28) Sia A una matrice quadrata di ordine 5 ad elementi reali, e sia $B = (-2) \cdot A$. Se $\det(B) = 100$, quanto vale il determinante dell'inversa di A?

Spiegare la risposta.

$$\text{Essendo } B = (-2) \cdot [A]$$

$$\text{Allora } \det(B) = \det((-2) \cdot A) = 100$$

$$\det((-2) \cdot A) = 100$$

$$(-2)^5 \cdot \det(A) = 100$$

$$\det(A) = -25/8$$

$$\text{Essendo } (AA^{-1}) = I$$

$$\text{allora } \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

Per il teorema di Binet: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ diventa

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1, \quad \det(A) = -25/8$$

$$(-25/8) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = (-25/8)^{-1}$$

$$\det(A^{-1}) = (-8/25)$$

29) **Se possibile**, scrivere due matrici quadrate dello stesso ordine **non nulle** A e B tali che $\det(A) + \det(B) = \det(A + B) \neq 0$. **Altrimenti, motivare il**

perché.

$$\begin{aligned}\text{Se } A &= [1, 0; 0, 1] \quad \det(A) = 1 \\ \text{e se } B &= [0, -1; 1, 0] \quad \det(B) = 1 \\ \text{Allora } (A + B) &= [1, -1; 1, 1] \quad \det(A + B) = 2 \\ \text{Quindi } \det(A) + \det(B) &= \det(A + B) ? \\ 1 + 1 &= 2 \neq 0\end{aligned}$$

30) **Se possibile**, scrivere due matrici quadrate dello stesso ordine **non singolari** A e B tali che $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$. **Altrimenti, motivare il perché.** (Matrice singolare: matrice quadrata con $\det(M) = 0$)

$$\begin{aligned}\text{Se } A &= [1, 0; 0, 1] \quad \det(A) = 1 \\ \text{e se } B &= [0, -1; 1, 0] \quad \det(B) = 1 \\ \text{Allora } (A + B) &= [1, -1; 1, 1] \quad \det(A + B) = 2 \\ \text{Quindi } \det(A) + \det(B) &= \det(A + B) ? \\ 1 + 1 &= 2\end{aligned}$$

31) **Se possibile**, scrivere due matrici quadrate dello stesso ordine **non nulle** A e B tali che $\det(A + B) = \det(A)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$\begin{aligned}\text{Se } A &= [1, 0; 0, 1] \quad \det(A) = 1 \\ \text{e se } B &= [-1, -1; 1, -1] \\ \text{Allora } (A + B) &= [0, -1; 1, 0] \quad \det(A + B) = 1 \\ \text{Quindi } \det(A + B) &= \det(A)? \\ 1 &= 1\end{aligned}$$

32) **Se possibile**, scrivere un sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite avente la coppia (0, 0) come unica soluzione. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Essendo A matrice dei coefficienti e b matrice dei termini noti, definiamo $C := [A|b]$, ed essendo il $\text{rg}(A) = \text{rg}(C)$ allora, per il teorema di Rouché - Capelli, il sistema è compatibile, e la sua unica soluzione è la coppia $(x, y) = (0, 0)$

33) Se esiste, quante equazioni deve avere un sistema lineare in 2 incognite per avere esattamente 2 soluzioni? **Altrimenti, motivare il perché.**

Non esiste in quanto un sistema lineare ammette: o nessuna soluzione (sistema incompatibile), o una soluzione (Teorema di Cramer), ∞^n , $n \in \mathbb{N}_1$, soluzioni.

34) Se possibile, scrivere un sistema lineare quadrato omogeneo avente ∞^2 soluzioni. **Altrimenti, motivare il perché.**

Impossibile in quanto un sistema lineare quadrato omogeneo, per il teorema di Cramer, ammetta una e una sola soluzione.

35) Se possibile, scrivere un sistema lineare di 2 equazioni in 4 incognite tale che $(0, 0, 0, 0)$ e $(1, 2, 1, 2)$ siano due delle sue soluzioni. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$\begin{cases} x - 2w - 2y + z = 0 \\ 2w - x = 0 \end{cases}$$

Essendo A matrice dei coefficienti e b matrice dei termini noti, definiamo $C := [A|b]$, ed essendo $\text{rg}(A) = \text{rg}(C)$ allora, per il teorema di Rouché - Capelli, il sistema è compatibile, e la sua unica soluzione è la coppia $(x, y) = (0, 0)$

36) Se possibile, scrivere un sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in 4 incognite tale che la quaterna $(1, 2, -1, 0)$ sia una delle sue autosoluzioni. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$\begin{cases} 2w - x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Essendo A matrice dei coefficienti e b matrice dei termini noti, definiamo $C := [A|b]$, ed essendo $\text{rg}(A) = \text{rg}(C)$ allora, per il teorema di Rouché - Capelli, il sistema è compatibile, e la sua unica soluzione è la terna $(w, x, y, z) = (1, 2, -1, 0)$

37) Se possibile, scrivere un sistema lineare omogeneo di 6 equazioni in 2 incognite avente un'unica soluzione. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 4x + y = 0 \\ 5x + y = 0 \\ 6x + y = 0 \end{cases}$$

Essendo A matrice dei coefficienti e b matrice dei termini noti, definiamo $C := [A|b]$, ed essendo $\text{rg}(A) = \text{rg}(C)$ allora, per il teorema di Rouché - Capelli, il sistema è compatibile, e la sua unica soluzione è la coppia $(x, y) = (0, 0)$

38) Se possibile, scrivere un sistema lineare non

omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite avente un'unica soluzione. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$\begin{cases} 5x - 2y - 2z = 1 \\ 6x - 3y - 2z = 1 \\ 7x - 3y - 3z = 1 \\ 8x - 4y - 3z = 1 \\ 9x - 4y - 4z = 1 \end{cases}$$

Essendo A matrice dei coefficienti e b matrice dei termini noti, definiamo $C := [A|b]$, ed essendo il $\text{rg}(A) = \text{rg}(C)$ allora, per il teorema di Rouché - Capelli, il sistema è compatibile, e la sua unica soluzione è la terna $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

39) **Se possibile**, scrivere una matrice quadrata ad elementi reali non avente alcuni autovalore reale. **Altrimenti, motivare il perché.**

Sia $A = [n, n]$

i. Se n è pari: $A = [0, -1; 1, 0]$ $\det(A - \lambda I): \lambda^2 + 1 = 0$,
impossibile

ii. Se n è dispari: Impossibile perché, svolgendo $\det(A - \lambda I)$, un'equazione di grado dispari che ha sempre *almeno* una soluzione reale

40) **Se possibile**, scrivere una matrice quadrata ad elementi reali non avente alcuni autovalore reale. **Altrimenti, motivare il perché.**

Se $A = [0, -1; 1, 0]$ allora $\det(A - \lambda I): \lambda^2 + 1 = 0$, impossibile in $\mathbb{R}$, ma possibile in $\mathbb{C}$.

41) **Se possibile**, scrivere una matrice quadrata di

ordine 3 ad elementi reali non avente alcuni autovalore reale. **Altrimenti, motivare il perché.**

Impossibile perché, svolgendo $\det(A - \lambda I)$, si ottiene un'equazione di 3° grado che ha sempre *almeno* una soluzione reale

42) **Se possibile**, scrivere una matrice quadrata di ordine 3 ad elementi reali tale che il suo polinomio caratteristico abbia una sola radice reale e inoltre tale autovalore abbia molteplicità algebrica 2.

Altrimenti, motivare il perché.

Impossibile perché, svolgendo $\det(A - \lambda I)$, si ottiene un'equazione di 3° grado da cui risultano 3 soluzioni che possono essere: una soluzione reale e due complesse oppure tre soluzioni reali (talvolta coincidenti). Il problema chiede di trovare un'equazione di 3° grado (tre soluzioni totali) con una soluzione reale e due complesse, tale che la soluzione reale abbia $m_a = 2$ (quindi ripetuta algebricamente due volte). È, quindi, impossibile perché contro la definizione di soluzione di equazione di 3° grado.

43) **Se possibile**, scrivere una matrice quadrata di ordine 4 ad elementi reali **non nulla** tale che il suo polinomio caratteristico abbia lo zero come unica radice reale e inoltre tale autovalore abbia molteplicità algebrica 4. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora $\det(A - \lambda I): \lambda^4 = 0$, quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

44) **Se possibile**, scrivere una matrice quadrata di ordine 3 ad elementi reali tale che 7 sia un suo autovalore reale avente molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica 2. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$\text{Se } A = [7, 1, 0; 0, 7, 0; 0, 0, 7]$$

Allora $\det(A - \lambda I): (7 - \lambda)^3 = 0$, quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 7$. $m_a(7) = 3$

$$E_7 : (x, y, z) = (1, 0, 0) + (0, 0, 1). \quad m_g(7) = 2$$

45) **Se possibile**, scrivere una matrice quadrata di ordine 3 ad elementi reali **non nulla**, avente una colonna nulla, tale che sia diagonalizzabile.

Altrimenti, motivare il perché. (Una matrice è diagonalizzabile $\Leftrightarrow a$. il suo polinomio caratteristico ammette solo radici reali λ , b . $\forall \lambda \quad m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$)

$$\text{Se } A = [1, 0, 0; 0, 0, 1; 0, 0, 2]$$

Allora $\det(A - \lambda I): -\lambda(1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$, quindi $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$

$$E_0 : (x, y, z) = (0, 1, 0), \quad m_a(0) = m_g(0) = 1$$

$$E_1 : (x, y, z) = (1, 0, 0), \quad m_a(1) = m_g(1) = 1$$

$$E_2 : (x, y, z) = (0, 1, 2), \quad m_a(2) = m_g(2) = 1$$

Quindi A è diagonalizzabile

46) **Se possibile**, scrivere una matrice quadrata di ordine 3 ad elementi reali **non nulla**, avente due colonne nulle, tale che sia diagonalizzabile.

Altrimenti, motivare il perché. (Una matrice è diagonalizzabile $\Leftrightarrow a$. il suo polinomio caratteristico ammette solo radici reali λ , b . $\forall \lambda \ m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$)

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora $\det(A - \lambda I)$: $\lambda^2(1 - \lambda) = 0$, quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 1$.

$$m_a(0) = 2 \text{ e } m_a(1) = 1$$

$$E_0 : (x, y, z) = (0, 1, 0) + (0, 0, 1), \ m_a(0) = m_g(0) = 2$$

$$E_1 : (x, y, z) = (1, 2, 3), \ m_a(1) = m_g(1) = 1$$

47) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali coincidenti e passi per i punti $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ e $B(1, 1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

Comunque presi due punti tra O , A e B si può costruire una retta che, però non conterrà mai il terzo (O , A , B non sono allineati). Per verificare l'allineamento di due o più punti si devono sostituire i valori delle coordinate nell'equazione di allineamento di tre punti, qualora non si ottengano identità i punti non sono allineati.

48) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali coincidenti e passi per i punti $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ e $B(0, 1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

Comunque presi due punti tra O , A e B si può costruire una retta che, però non conterrà mai il terzo (O , A , B non sono allineati). Per verificare l'allineamento di due o più punti si devono sostituire i valori delle coordinate nell'equazione di

allineamento di tre punti, qualora non si ottengano identità i punti non sono allineati.

49) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali coincidenti e passi per i punti $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ e $B(2, 4)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

I punti sono allineati quindi è possibile costruire una coppia di rette coincidenti che contenga O , A , B .

$$(x - 1)/(2 - 1) = (y - 2)/(4 - 2)$$

Da cui si ottiene la retta $2x - y = 0$

L'equazione della conica è $(2x - y)^2 = 0$

$$4x^2 - 4xy + y^2 = 0$$

50) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali coincidenti che contenga tutti i punti della retta $r : 2x - y + 1 = 0$ e passi per il punto $A(0, 1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$A \in r$, quindi l'equazione della conica è $(2x - y + 1)^2 = 0$

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

51) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali coincidenti che contenga tutti i punti della retta $r : 2x - y + 1 = 0$ e passi per il punto $A(1, 1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$A \notin r$ ed è quindi impossibile scrivere l'equazione di una

conica che sia l'unione di r e un'altra retta coincidente ad r (ovvero r stessa).

52) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali distinte parallele e passi per i punti $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ e $B(2, 1)$.

Altrimenti, motivare il perché.

$$O, A \in r : x - y = 0$$

$$B \in s : x - y - 1 = 0$$

L'equazione della conica è $(x - y)(x - y - 1) = 0$

$$x^2 - 2xy + y^2 - x + y = 0$$

53) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali distinte parallele e passi per i punti $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ e $B(1, 1)$.

Altrimenti, motivare il perché.

$$O, A \in r : y = 0$$

$$B \in s : y - 1 = 0$$

L'equazione della conica è $y(y - 1) = 0$

$$y^2 - y = 0$$

54) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali distinte non parallele e passi per i punti $O(0, 0)$, $A(0, 1)$ e $B(1, 1)$.

Altrimenti, motivare il perché.

$$O, B \in r : y - x = 0$$

$$A \in s : x = 0$$

L'equazione della conica è $x(y - x) = 0$

$$x^2 - xy = 0$$

55) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali distinte non parallele e passi per i punti $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ e $B(1, 1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$O, B \in r : y - x = 0$$

$$A \in s : x - 1 = 0$$

L'equazione della conica è $(y - x)(x - 1) = 0$

$$x^2 - xy - x + y = 0$$

56) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali distinte parallele che contenga tutti i punti della retta $r : 2x - y + 1 = 0$ e passi per il punto $A(1, 1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$A \notin r : 2x - y + 1 = 0$$

$$A \in s : 2x - y - 1 = 0$$

L'equazione della conica è $(2x - y + 1)(2x - y - 1) = 0$

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$$

57) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali distinte parallele che contenga tutti i punti della retta $r : 2x - y + 1 = 0$ e passi per il punto $A(0, 1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$A \in r : 2x - y + 1 = 0$$

$$s : 2x - y = 0$$

L'equazione della conica è $(2x - y + 1)(2x - y) = 0$
 $4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - y = 0$

58) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali distinte non parallele che contenga tutti i punti della retta $r : 2x - y + 1 = 0$ e passi per il punto $A(1, 1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$r : 2x - y + 1 = 0$$

$$A \in s : y - x = 0$$

L'equazione della conica è $(2x - y + 1)(y - x) = 0$
 $2x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0$

59) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica che sia l'unione di due rette reali distinte non parallele che contenga tutti i punti della retta $r : 2x - y + 1 = 0$ e passi per il punto $A(0, 1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$r : 2x - y + 1 = 0$$

$$A \in s : x + y - 1 = 0$$

L'equazione della conica è $(2x - y + 1)(x + y - 1) = 0$
 $2x^2 + xy - y^2 - x + 2y - 1 = 0$

60) **Se possibile**, scrivere l'equazione di una conica contenente l'asse X e il punto $A(1, 1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$X \in r : x = 0$$

$$A \in s : y - x = 0$$

L'equazione della conica è $x(y - x) = 0$

$$x^2 - xy = 0$$

61) **Se esistono**, scrivere le equazioni delle coniche degeneri ognuna delle quali contenga i seguenti punti $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ e $C(0, 1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$O, B \in r : y - x = 0$$

$$A, C \in s : y + x - 1 = 0$$

L'equazione della conica è $(y - x)(y + x - 1) = 0$

$$x^2 - y^2 - x + y = 0$$

62) **Se esistono**, scrivere le equazioni delle coniche degeneri ognuna delle quali contenga i seguenti punti $A(1, 1)$, $B(1, -1)$ e $C(-1, -1)$, $D(-1, 1)$. **Altrimenti, motivare il perché.**

$$\text{i. } A, C \in r : y - x = 0$$

$$B, D \in s : y + x = 0$$

L'equazione della conica è $(y - x)(y + x) = 0$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$\text{ii. } A, D \in r : y - 1 = 0$$

$$B, C \in s : y + 1 = 0$$

L'equazione della conica è $(y - 1)(y + 1) = 0$

$$y^2 - 1 = 0$$

$$\text{iii. } A, B \in r : x - 1 = 0$$

$$C, D \in s : x + 1 = 0$$

L'equazione della conica è $(x - 1)(x + 1) = 0$

$$x^2 - 1 = 0$$

63) **Se esistono**, scrivere le equazioni di due coniche

distinte ognuna delle quali contenga tutti i punti della retta $r : x + y = 0$ e passi per il punto $A(1, 1)$.

Altrimenti, motivare il perché.

i. $(x + y)(x - 1) = 0$

$$x^2 + xy - x - y = 0$$

ii. $(x + y)(y - 1) = 0$

$$y^2 + xy - x - y = 0$$

64) **Se possibile**, scrivere le equazioni di due coniche distinte tali che la loro intersezione sia costituita da tutti e soli punti dell'asse X. **Altrimenti, motivare il perché.**

i. $y(y - 1) = 0$

$$y^2 - y = 0$$

ii. $y(y + 1) = 0$

$$y^2 + y = 0$$

65) **Se possibile**, scrivere le equazioni di due coniche distinte tali che la loro intersezione sia costituita da tutti e soli punti dell'asse X. **Altrimenti, motivare il perché.**

i. $x(x - 1) = 0$

$$x^2 - x = 0$$

ii. $x(x + 1) = 0$

$$x^2 + x = 0$$

66) **Se possibile**, scrivere le equazioni di una parabola passante per il punto $A(0, 1)$, avente $F(1, 1)$ come fuoco e la retta di equazione $x + y = 0$ come

direttrice. **Altrimenti, motivare il perché.**

Per definizione la parabola è il luogo geometrico dei punti del piano euclideo $\mathbb{E}$ che hanno uguale distanza da un punto fisso F (detto *fuoco*) e da una retta fissa (detta *direttrice*).

Controlliamo che $d(A, F) = d(A, d)$

$$d(A, F) = 1$$

$$d(A, d) = \sqrt{2}/2$$

Essendo $d(A, F) \neq d(A, d)$, per definizione non è possibile scrivere l'equazione di una parabola.

67) **Se possibile**, scrivere le equazioni di una parabola passante per il punto $A(2, 0)$, avente $O(0, 0)$ come fuoco e la retta di equazione $y + 1 = 0$ come direttrice. **Altrimenti, motivare il perché.**

Per definizione la parabola è il luogo geometrico dei punti del piano euclideo $\mathbb{E}$ che hanno uguale distanza da un punto fisso F (detto *fuoco*) e da una retta fissa (detta *direttrice*).

Controlliamo che $d(A, F) = d(A, d)$

$$d(A, F) = 2$$

$$d(A, d) = 1$$

Essendo $d(A, F) \neq d(A, d)$, per definizione non è possibile scrivere l'equazione di una parabola.

68) **Se possibile**, scrivere le equazioni di un'ellisse immaginaria che passi per l'origine $O(0, 0)$.
Altrimenti, motivare il perché.

Per definizione un'ellisse immaginaria è il luogo geometrico dei punti del piano euclideo $\mathbb{E}$ le cui distanze da due punti dati

F_1 e F_2 (detti *fuochi*) hanno somma costante. Essendo immaginaria lavora nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e quindi non potrà mai passare per il punto $O(0, 0)$ che appartiene all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Quindi è impossibile.

69) **Se possibile**, scrivere le equazioni di una conica avente $A(-2, 1)$ come unico punto reale. **Altrimenti, motivare il perché.**

Impossibile in quanto l'unica conica ad avere uno e un solo punto reale (l'origine) è: $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 = 0$, con $(x, y) = (0, 0)$.

70) **Classificare le seguenti coniche:**

- | | |
|--|--------------|
| a) $y^2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 = 0$
rette reali e coincidenti | Coppia di |
| b) $y^2 = 1 \Rightarrow y_{1,2} = \pm 1$
rette parallele e distinte | Coppia di |
| c) $y^2 = -1$
di punti reali | Conica priva |
| d) $y^2 = x$
l'asse coincidente con l'asse X, vertice coincidente con $O(0, 0)$ e concavità verso destra | Parabola con |
| e) $y^2 = -x$
l'asse coincidente con l'asse X, vertice coincidente con $O(0, 0)$ e concavità verso sinistra | Parabola con |
| f) $y^2 = x^2 \Rightarrow (y - x)(y + x) = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \pm x$
rette incidenti | Coppia di |
| g) $y^2 = -x^2 \Rightarrow (x + iy)(x - iy) = 0$
degenerare in due rette complesse e coniugate | Conica |

Realizzato da R. B. & L. M. All rights are reserved ©.
(I creatori si sollevano da eventuali e potenziali errori presenti
nel testo)