

1) Dopo aver dato la **definizione** di “*dependenza lineare di n vettori*”, **completare e dimostrare** la proposizione seguente: “Sia V_R uno spazio vettoriale reale. Se i vettori $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n$ di V_R sono linearmente dipendenti, allora comunque si scelgano altri p vettori $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{p-1}, v_p$ di V_R si ha che i vettori $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{p-1}, v_p$ sono linearmente DIPENDENTI...”.

Definizione: n vettori si dicono linearmente dipendenti se esiste una loro combinazione lineare, con scalari non tutti nulli, che dà il vettore nullo.

Esiste un teorema che afferma: Se i vettori $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n$ di V_R sono linearmente dipendenti, allora comunque si scelgano altri p vettori $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{p-1}, v_p$ di V_R si ha che gli $(n + p)$ vettori sono ancora linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Per ipotesi esistono n scalari a_i non tutti nulli tali che

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots + a_{n-1} u_{n-1} + a_n u_n = \mathbf{0}.$$

La combinazione lineare seguente:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots + a_{n-1} u_{n-1} + a_n u_n + 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_{p-1} + 0v_p$$

è una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli (almeno uno degli a_i è non nullo) il cui risultato è il vettore nullo $\mathbf{0}$. Quindi, gli $(n + p)$ vettori sono linearmente dipendenti.

2) Dopo aver dato la **definizione** di “*dependenza lineare di n vettori*”, **dimostrare** il teorema di “*caratterizzazione della lineare dipendenza*”.

Definizione: n vettori si dicono linearmente dipendenti se esiste una loro combinazione lineare, con scalari non tutti nulli, che dà il vettore nullo.

Teorema: I vettori $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se (almeno) uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti.

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Se $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n$ sono L. Dip., allora esiste una loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli che è uguale al vettore nullo, cioè $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \dots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + \alpha_n u_n = \mathbf{0}$. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che sia $\alpha_1 \neq 0$. Si ha $u_1 = \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \dots + \beta_{n-1} u_{n-1} + \beta_n u_n$ con $\beta_i = (-\alpha_i / \alpha_1) \forall i \in [2, n]$. Quindi, u_1 è combinazione lineare dei vettori $u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n$.

$\Leftarrow$ Se uno dei vettori è combinazione lineare dei rimanenti allora supponiamo che questo sia u_1 .

Da $u_1 = \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \dots + \beta_{n-1} u_{n-1} + \beta_n u_n$ si ha che $(-1)u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \dots + \beta_{n-1} u_{n-1} + \beta_n u_n = \mathbf{0}$.

Poichè, esiste una C.L. a coefficienti non tutti nulli ($-1 \neq 0$) degli n vettori che ha come risultato il vettore nullo si ha che essi sono L. Dip.

3) Dopo aver **SOLO enunciato** il teorema di “*caratterizzazione di un sottospazio*”, **completare e dimostrare** la proposizione seguente: “Sia V_R uno spazio vettoriale reale. Comunque presi n vettori $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n$ di V_R il sottoinsieme U contenente tutti e soli i vettori di V_R che sono combinazioni lineari dei vettori $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n$ è un SOTTOINSIEME E UN SOTTOSPAZIO DI V_R ”.

Teorema. Sia U un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale V_R . U è un sottospazio di V se e solo se valgono le tre condizioni:

(1) U è non vuoto;

(2) U è chiuso rispetto alla somma (cioè $\forall u, v \in U \ u + v \in U$);

(3) U è chiuso rispetto al prodotto (cioè $\forall \alpha \in R, \forall u \in U \ \alpha * u \in U$).

Esiste un teorema che afferma: Comunque presi n vettori $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n$ di V_R , l'insieme $\langle u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n \rangle$ è un sottospazio di V_R (con il simbolo $\langle \rangle$ si indica sottoinsieme).

Dimostrazione.

(1) Ovviamente, $U := \langle u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n \rangle \neq \emptyset$.

(2) Proviamo che U è chiuso rispetto a $+$, cioè che $\forall v, w \in U$ si ha che $(v+w) \in U$.

$$\mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{w} \in U \Rightarrow \mathbf{w} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n) + (\beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n)$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \beta_1 \mathbf{u}_1) + (\alpha_2 \mathbf{u}_2 + \beta_2 \mathbf{u}_2) + (\alpha_3 \mathbf{u}_3 + \beta_3 \mathbf{u}_3) + \dots + (\alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}) + (\alpha_n \mathbf{u}_n + \beta_n \mathbf{u}_n)$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \gamma_1 \mathbf{u}_1 + \gamma_2 \mathbf{u}_2 + \gamma_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \gamma_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \gamma_n \mathbf{u}_n \Rightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in U.$$

(3) Proviamo che U è chiuso rispetto a $*$, cioè che $\forall \mathbf{v} \in U$ e $\forall \delta \in \mathbb{R}$ si ha che $(\delta \mathbf{v}) \in U$.

$$\mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

$$\delta \mathbf{v} = \delta(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n) = (\delta \alpha_1) \mathbf{u}_1 + (\delta \alpha_2) \mathbf{u}_2 + (\delta \alpha_3) \mathbf{u}_3 + \dots + (\delta \alpha_{n-1}) \mathbf{u}_{n-1} + (\delta \alpha_n) \mathbf{u}_n$$

$$\delta \mathbf{v} = \omega_1 \mathbf{u}_1 + \omega_2 \mathbf{u}_2 + \omega_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \omega_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \omega_n \mathbf{u}_n \Rightarrow (\delta \mathbf{v}) \in U.$$

4) Dopo aver dato la **definizione** di “sottospazio generato da n vettori”, **dimostrare** la proposizione seguente: “Sia V_R uno spazio vettoriale reale. Se U è il sottospazio di V_R generato dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ e W è il sottospazio di V_R generato dai vettori $\mathbf{w}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ allora $U = W$ se e solo se $\mathbf{w} \in U$.”

Definizione. Dati n vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ di V_R , il sottospazio

$$U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$$

si dice (sotto) spazio generato dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ (che vengono detti generatori di U).

c'è un teorema che afferma: Se $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \leq V_R$ e $T = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \leq V_R$, allora:

(1) $U \subseteq T$ e, quindi, $U \leq T$

(2) $U = T \Leftrightarrow \mathbf{v} \in U$

Dimostrazione.

(1) Preso $\mathbf{w} \in U$ si ha che $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$.

Ovviamente, è anche $\mathbf{w} = 0\mathbf{v} + \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$. Quindi, $\mathbf{w} \in T$.

(2 $\Rightarrow$) $\mathbf{v} \in T$ et $T = U \Rightarrow \mathbf{v} \in U$.

(2 $\Leftarrow$) Per ipotesi $\mathbf{v} \in U$, cioè $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$.

Poiché per la (1) è già $U \subseteq T$, resta da provare che $T \subseteq U$.

Sia $\mathbf{w} \in T$. Quindi, $\mathbf{w} = \omega \mathbf{v} + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n$.

$$\mathbf{w} = \omega(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n) + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n.$$

$$\mathbf{w} = (\omega \alpha_1 + \beta_1) \mathbf{u}_1 + (\omega \alpha_2 + \beta_2) \mathbf{u}_2 + (\omega \alpha_3 + \beta_3) \mathbf{u}_3 + \dots + (\omega \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) \mathbf{u}_{n-1} + (\omega \alpha_n + \beta_n) \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{w} = \delta_1 \mathbf{u}_1 + \delta_2 \mathbf{u}_2 + \delta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \delta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \delta_n \mathbf{u}_n. \text{ Quindi, } \mathbf{w} \in U.$$

5) Dopo aver dato la **definizione** di “*dipendenza lineare di n vettori*”, enunciare la condizione affinché n vettori siano linearmente indipendenti. Poi, **completare e dimostrare** la proposizione seguente: “Sia V_R uno spazio vettoriale reale. Sia U il sottospazio di V_R generato dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ e sia $\mathbf{v} \notin U$. Se i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono linearmente indipendenti, allora i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}$ sono linearmente **INDIPENDENTI**”.

Definizione: n vettori si dicono linearmente dipendenti se esiste una loro combinazione lineare, con scalari non tutti nulli, che dà il vettore nullo; la condizione affinché n vettori siano linearmente indipendenti è che la loro unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella con coefficienti tutti nulli.

C'è un teorema che afferma: Siano $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \in V_R$ e $U := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$. Si ha che $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono L. Indip. et $\mathbf{v} \notin U \Leftrightarrow \mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono L. Indip.

Dimostrazione.

Dobbiamo provare che l'unica combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ che ha come risultato il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli. Cioè, dobbiamo provare che se si ha

$$\omega \mathbf{v} + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \quad (\#)$$

allora necessariamente sono nulli sia il coefficiente ω che tutti i coefficienti β_i .

Se fosse $\omega \neq 0$, allora $\mathbf{v} = (-\omega^{-1}\beta_1)\mathbf{u}_1 + (-\omega^{-1}\beta_2)\mathbf{u}_2 + (-\omega^{-1}\beta_3)\mathbf{u}_3 + \dots + (-\omega^{-1}\beta_{n-1})\mathbf{u}_{n-1} + (-\omega^{-1}\beta_n)\mathbf{u}_n$ e, quindi, $\mathbf{v} \in U$ contro l'ipotesi $\mathbf{v} \notin U$. Per cui è $\omega = 0$. Sostituendo $\omega = 0$ in (#) si ottiene

$$\beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

Essendo, per ipotesi, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ L. Indip. si ha che tutti i coefficienti β_i sono nulli.

6) Dopo aver dato la **definizione** di “base di uno spazio vettoriale”, **dimostrare** il teorema di “caratterizzazione di una base” (o il teorema di “caratterizzazione della lineare indipendenza”).

Definizione. Diremo base di uno spazio vettoriale reale finitamente generato un insieme ordinato di generatori linearmente indipendenti, che vengono anche detti elementi della base.

Teorema di caratterizzazione di una base. Sia V_R è uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Un insieme ordinato $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ è una base di V_R se e solo se ogni vettore di V_R si può scrivere in modo unico (**teorema di caratterizzazione della lineare indipendenza**) come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$.

Dimostrazione. Se l'insieme B è una base di V_R allora (poiché i suoi elementi sono generatori di V_R) per ogni vettore $\mathbf{v}$ di V_R si ha che $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$. Ci resta da provare che tale scrittura è unica. Supponiamo che sia anche $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n$. Da

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n$$

$$\text{si ottiene } (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{u}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{u}_2 + (\alpha_3 - \beta_3)\mathbf{u}_3 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})\mathbf{u}_{n-1} + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

Poiché gli elementi di una base sono linearmente indipendenti, si ha che tutti i coefficienti $(\alpha_i - \beta_i)$ sono nulli, da cui $\alpha_i = \beta_i$. Quindi, le due scritture coincidono.

Viceversa, supponiamo che ogni vettore (anche quello nullo) di V_R si possa scrivere in modo unico come combinazione lineare degli elementi di B . Ovviamente, questo vuol dire che gli elementi di U sono generatori dello spazio V_R . Inoltre, $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 + \dots + 0\mathbf{u}_{n-1} + 0\mathbf{u}_n$ è un modo di scrivere il vettore nullo come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$. Poiché, per ipotesi, tale modo di scrivere il vettore nullo è unico, abbiamo che i vettori di B sono linearmente indipendenti.

7) Dopo aver dato la **definizione** di “matrice invertibile”, **dimostrare** che “se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine e invertibili, allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ”.

Definizione. Diremo che una matrice A quadrata di ordine n ad elementi reali è invertibile se esiste una matrice B quadrata di ordine n ad elementi reali tale che $AB = I_n = BA$. Ovviamente, anche la matrice B è invertibile.

C'è un teorema che afferma che se A e B sono due matrici invertibili dello stesso ordine, allora anche la matrice AB è invertibile ed è $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$. Quindi, l'inversa di un prodotto di due matrici invertibili è uguale al prodotto delle inverse delle due matrici prese in ordine “inverso”.

Dimostrazione. Poiché A e B sono invertibili esiste la matrice $C := B^{-1}A^{-1}$. Si ha che:

$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A I_n A^{-1} = A A^{-1} = I_n$$

$$C(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n$$

Quindi, per la Definizione di matrice invertibile B è invertibile e la matrice $C = B^{-1}A^{-1}$ è la sua unica inversa. Per cui $(AB^{-1}) = (B^{-1})(A^{-1})$.

8) Dopo aver dato la **definizione** di “matrice invertibile” e di “trasposta di una matrice”, **dimostrare** che “se A è una matrice invertibile, allora $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ”.

Definizione. Diremo che una matrice A quadrata di ordine n ad elementi reali è invertibile se esiste una matrice B quadrata di ordine n ad elementi reali tale che $AB = I_n = BA$. Ovviamente, anche la matrice B è invertibile.

Definizione. Si dice trasposta di una matrice A quadrata la matrice che si indica con A^T che si ottiene da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne.

Dimostrazione. Per ipotesi $(A \cdot A^{-1}) = I_n$ quindi $(A \cdot A^{-1})^T = I_n^T \Rightarrow A^{-1T} \cdot A^T = I_n \Rightarrow$ moltiplicando entrambi i membri per A^{T-1} ottengo $A^{T-1} \cdot A^{-1T} \cdot A^T = A^{T-1} \cdot I_n \Rightarrow A^{-1T} \cdot I_n = A^{T-1}$

9) **Enunciare e dimostrare** il “1° teorema di Laplace” (in alternativa alla dimostrazione, illustrare le altre proprietà del determinante).

Teorema. Il determinante di una matrice quadrata è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) moltiplicati per i propri complementi algebrici.

13.17. Teorema (1° di Laplace). Se A è una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$, allora per ogni indice

di riga $h = 1, 2, 3, \dots, (n-1), n$ si ha che $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj}$

Dimostrazione. Per $h = 1$ la tesi è vera per definizione. Sia ora $2 \leq h \leq n$.

Siano $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_{h-1} \\ A_h \\ A_{h+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} A_h \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ \cdot \\ A_{h-1} \\ A_{h+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$. Si osservi che:

- B si ottiene da A mediante $(h-1)$ scambi di righe, quindi, $\det A = (-1)^{h-1} \det B$;
- per ogni $j = 1, 2, 3, \dots, n$ è $b_{1j} = a_{hj}$
- per ogni $j = 1, 2, 3, \dots, n$ è $B_{1j} = A_{hj}$

Tenendo conto di tali osservazioni si ha:

$$\det A = (-1)^{h-1} \det B = (-1)^{h-1} \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} b_{1j} \det B_{1j} \right] = (-1)^{h-1} \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{hj} \det A_{hj} \right] =$$

$(-1)^{h-1}$ non dipende dall'indice di sommatoria, quindi per la proprietà (2) del Lemma 13.3 $\uparrow$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{h-1} (-1)^{1+j} a_{hj} \det A_{hj} = \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj} \quad \blacksquare$$

10) **Enunciare e dimostrare** il “2° *teorema di Laplace*” (in alternativa alla dimostrazione, illustrare le altre proprietà del determinante).

Teorema. La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) moltiplicati per i complementi algebrici di un'altra riga (o colonna) è zero.

13.34 Teorema (2° di Laplace). Se A è una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$, allora per ogni coppia di indici di riga $h, k = 1, 2, 3, \dots, (n-1), n$ con $h \neq k$ si ha che

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj} = 0.$$

Dimostrazione. Siano A e B due matrici tali che sia $B_k = A_h$ e per ogni $i \neq k$ sia $B_i = A_i$. Cioè,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ A_h \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_h = A_h \\ \vdots \\ B_k = A_h \\ \vdots \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Si osservi che per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$ si ha che:

- $b_{kj} = a_{hj}$
- $B_{kj} = A_{kj}$

Per il 1° teorema di Laplace applicato alla k -esima riga di B si ha:

$$\det B = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} b_{kj} \det B_{kj} = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj}$$

D'altronde, si ha anche che $\det B = 0$ poiché B ha due righe uguali (la h -esima e la k -esima).

Quindi, $\sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj} = 0. \blacksquare$

11) Dopo aver dato la **definizione** di “*soluzione*” di un sistema lineare, **enunciare e dimostrare** il teorema di “*Rouché-Capelli*”.

Definizione. Dato un sistema lineare $AX = B$ nelle incognite $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$ diremo che la n -upla ordinata di numeri reali $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$ è UNA soluzione del sistema se sostituendo ordinatamente i numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$ alle incognite $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ in ognuna delle equazioni si ottengono sempre delle identità.

Teorema di Rouché - Capelli. Un sistema lineare ha almeno una soluzione se e solo se il rango della sua matrice incompleta è uguale al rango della sua matrice completa.

Dimostrazione. Sia $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + \dots + A_nx_n = B$ e $C := [A|B]$.

Il sistema ha almeno una soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 + A_4\alpha_4 + \dots + A_n\alpha_n = B \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow B$ è una combinazione lineare delle colonne di $A \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow B \in \langle A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n \rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n \rangle = \langle A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n, B \rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{C}_A = \mathbf{C}_C \Leftrightarrow \dim \mathbf{C}_A = \dim \mathbf{C}_C \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(C)$$

12) Dopo aver dato la **definizione** di “*sistema lineare normale*”, **enunciare e dimostrare** il teorema di “*Cramer*”.

Definizione. Un sistema lineare $AX = B$ si dice normale se $\text{rg}(A) =$ numero righe di A .

Teorema. (Cramer) Un sistema di Cramer (sistema lineare normale con A quadrata) ha un'unica soluzione.

Dimostrazione. Se $AX = B$ è un sistema di Cramer allora, per definizione, A è quadrata di rango massimo. Per cui A è non singolare (cioè $\det A \neq 0$) e, quindi, invertibile. E' facile verificare che la colonna $Y := A^{-1}B$ è una soluzione del sistema $AX = B$. Infatti, moltiplicando la matrice A per la colonna $Y := A^{-1}B$ si ottiene $AY = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$. Quindi, sostituendo la colonna X con la colonna $Y := A^{-1}B$ si ottiene l'identità $B = B$. Per cui, la colonna Y è una soluzione del sistema $AX = B$. Proviamo che tale soluzione Y è unica. Se Z fosse un'altra soluzione del sistema $AX = B$, allora si avrebbe l'identità $AZ = B$. Da cui si avrebbe $A^{-1}(AZ) = A^{-1}B$. Cioè $(A^{-1}A)Z = Y$ ovvero $IZ = Y$ e, infine $Z = Y$.

13) Dopo aver dato la **definizione** di “*autosoluzione*”, **enunciare e dimostrare** una condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare omogeneo abbia autosoluzioni.

Definizione. Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo in n incognite. La sua soluzione data dalla n -upla nulla $(0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ viene detta soluzione banale. Ogni altra sua soluzione (quindi diversa da quella banale) viene detta autosoluzione.

Una condizione necessaria e sufficiente affinché abbia autosoluzioni ce la fornisce il seguente teorema: Un sistema lineare omogeneo ha autosoluzioni se e solo se il rango della matrice incompleta (matrice dei coefficienti) è minore del numero delle incognite.

Dimostrazione. Sia $A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \dots + A^nx_n = 0$.

Il sistema ha almeno una autosoluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, 0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + A^4\alpha_4 + \dots + A^n\alpha_n = 0 \text{ è un'identità} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ le n colonne di A sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A \text{ ha } s < n \text{ colonne linearmente indipendenti} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \dim \mathbf{C}_A = s < n \Leftrightarrow \text{rg}(A) < n$$

14) Dopo aver dato la **definizione** di sistema lineare “*omogeneo*”, **completare e dimostrare** la proposizione: “*L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un SOTTOINSIEME*”.

Definizione. Sia $AX = B$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Se la (matrice) colonna B dei termini noti è la colonna 0 nulla, ovvero sono nulli tutti i termini noti, allora diremo che il sistema è omogeneo e scriveremo $AX = 0$.

Esiste un teorema che afferma: Se $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo in n incognite, allora l'insieme delle soluzioni è un sottoinsieme di R^n . (per definizione indichiamo con S_{AB} l'insieme delle soluzioni di un sistema)

Dimostrazione. L'insieme S_{A0} è non vuoto poiché la n -upla nulla 0 è una soluzione di $AX = 0$. Proviamo ora che S_{A0} è chiuso rispetto alla somma di due n -uple, cioè che se Y e Z sono due n -uple di S_{A0} allora anche $(Y+Z)$ è una n -upla di S_{A0} . Se Y e Z sono due n -uple di S_{A0} allora $AY = 0$ e $AZ = 0$ sono due identità. Sommandole membro a membro si ottiene l'identità $AY + AZ = 0 + 0$ da cui l'identità $A(Y+Z) = 0$. Per cui $(Y+Z)$ è una soluzione di $AX = 0$ e, quindi, $(Y+Z)$ è una n -upla di S_{A0} .

Infine, proviamo che S_{A0} è chiuso rispetto al prodotto di un numero reale (scalare) per una n -upla, cioè se α è un numero reale e Y è una n -upla di S_{A0} allora anche (αY) è una n -upla di S_{A0} . Se Y è una n -upla di S_{A0} allora $AY = 0$ è un'identità. Moltiplicando entrambe i membri di tale identità per α si ottiene l'identità $\alpha(AY) = \alpha 0$ da cui l'identità $A(\alpha Y) = 0$. Per cui αY è una soluzione di $AX = 0$ e, quindi, (αY) è una n -upla di S_{A0} .

15) Dopo aver dato la **definizione** di “sistema omogeneo associato” ad un sistema lineare $AX = B$, **dimostrare** la seguente proposizione: “Sia $AX = B$ un sistema lineare compatibile in n incognite e sia Y_p una sua soluzione. Una n -upla Z è una soluzione del sistema $AX = B$ se e solo se esiste una soluzione X_0 del sistema omogeneo associato tale che $Z = Y_p + X_0$ ”.

Definizione. Se $AX = B$ è un sistema lineare non omogeneo (cioè con $B \neq 0$), allora il sistema lineare omogeneo $AX = 0$ (cioè avente la stessa matrice A dei coefficienti) viene detto sistema omogeneo associato al sistema lineare non omogeneo $AX = B$.

Dimostrazione. Poiché Y_p è una soluzione del sistema $AX = B$ si ha che $AY_p = B$ è un'identità.

$\Rightarrow$) Supponiamo che $Z \in S_{AB}$ cioè che $AZ = B$ sia un'identità. Sottraendo membro a membro da tale identità l'identità $AY_p = B$ otteniamo l'identità $AZ - AY_p = B - B$ da cui l'identità $A(Z - Y_p) = 0$. Per cui la n -upla $(Z - Y_p)$ è una soluzione del sistema omogeneo associato $AX = 0$, cioè $(Z - Y_p) \in S_{A0}$. Posto $X_0 := (Z - Y_p) \in S_{A0}$ si ha che $Z = Y_p + (Z - Y_p) = Y_p + X_0$.

$\Leftarrow$) Consideriamo, ora, una n -upla di R^n del tipo $Z = Y_p + X_0$ dove X_0 è una soluzione del sistema omogeneo associato $AX = 0$. Poiché $X_0 \in S_{A0}$ si ha che $AX_0 = 0$ è un'identità. Sommando membro a membro a tale identità l'identità $AY_p = B$ otteniamo l'identità $AY_p + AX_0 = B + 0$ da cui l'identità $A(Y_p + X_0) = B$. Quindi, la n -upla $Z = (Y_p + X_0)$ è una soluzione del sistema $AX = B$.

16) Dopo aver dato la **definizione** di autovalore e di autovettore, **dimostrare** che “gli autovalori reali di una matrice quadrata sono tutte e solo le radici reali del suo polinomio caratteristico”.

Definizione. Sia A una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n . Se esistono un numero reale β e una matrice (colonna) ad elementi reali non nulla H di tipo $n \times 1$ tali che $AH = \beta H$ allora diremo che β è un autovalore di A e che H è un autovettore di A relativo all'autovalore β . Quindi, $H \neq 0$ è un autovettore di A se e solo se AH è un multiplo di H .

Il teorema afferma: Sia A una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n . Un numero reale β è un autovalore di A se e solo se esso è una radice del polinomio caratteristico di A , cioè $p_A(\beta) = 0$.

Dimostrazione. Un numero reale β è un autovalore di $A \Leftrightarrow \exists H \neq 0 : AH = \beta H \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists H \neq 0 : AH = \beta(In)H \Leftrightarrow \exists H \neq 0 : AH - (\beta In)H = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists H \neq 0 : (A - \beta In)H = 0 \Leftrightarrow H$ è un'autosoluzione del sistema $(A - \beta In)X = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ il sistema lineare omogeneo **quadrato** $(A - \beta In)X = 0$ ha autosoluzioni $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det(A - \beta I_n) = 0 \Leftrightarrow p_A(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta$ è una radice del polinomio caratteristico di A.

17) Dopo aver dato la **definizione** di autovalore e di autovettore, **completare** e **dimostrare** la seguente proposizione: “se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ sono s autovalori a due a due distinti tra loro e se $V_1, V_2, V_3, \dots, V_{s-1}, V_s$ sono s autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ rispettivamente, allora i vettori $V_1, V_2, V_3, \dots, V_{s-1}, V_s$ sono linearmente INDIPENDENTI”.

Definizione. Sia A una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n. Se esistono un numero reale β e una matrice (colonna) ad elementi reali non nulla H di tipo $n \times 1$ tali che $AH = \beta H$ allora diremo che β è un autovalore di A e che H è un autovettore di A relativo all’autovalore β . Quindi, $H \neq 0$ è un autovettore di A se e solo se AH è un multiplo di H.

Il teorema afferma che Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ s autovalori di A a due a due distinti tra loro, cioè $i \neq j \Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$.

Se $H_1, H_2, H_3, \dots, H_{s-1}, H_s$ sono s autovettori di A relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ rispettivamente, allora gli autovettori $H_1, H_2, H_3, \dots, H_{s-1}, H_s$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. (per induzione sul numero s di autovalori a due a due distinti tra loro)

Se $s = 1$ allora l’autovettore H_1 è certamente linearmente indipendente in quanto diverso dal vettore nullo. Quindi, per $s = 1$ la tesi è vera (base induttiva).

Ora, nell’ipotesi (induttiva) che la tesi sia vera per $(s - 1)$ proviamo la tesi per s. A tal fine dobbiamo provare che se

$$(\heartsuit) \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3 + \dots + \alpha_{s-1} H_{s-1} + \alpha_s H_s = 0$$

allora deve necessariamente essere $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{s-1} = \alpha_s = 0$.

Moltiplicando entrambe i membri dell’identità $(\heartsuit)$ a sinistra per la matrice A otteniamo le identità

$$A(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3 + \dots + \alpha_{s-1} H_{s-1} + \alpha_s H_s) = A0$$

$$A(\alpha_1 H_1) + A(\alpha_2 H_2) + A(\alpha_3 H_3) + \dots + A(\alpha_{s-1} H_{s-1}) + A(\alpha_s H_s) = 0$$

$$\alpha_1 (AH_1) + \alpha_2 (AH_2) + \alpha_3 (AH_3) + \dots + \alpha_{s-1} (AH_{s-1}) + \alpha_s (AH_s) = 0$$

Poiché $H_1, H_2, H_3, \dots, H_{s-1}, H_s$ sono autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ si ha

$$\alpha_1 (\lambda_1 H_1) + \alpha_2 (\lambda_2 H_2) + \alpha_3 (\lambda_3 H_3) + \dots + \alpha_{s-1} (\lambda_{s-1} H_{s-1}) + \alpha_s (\lambda_s H_s) = 0$$

$$(\clubsuit) (\alpha_1 \lambda_1) H_1 + (\alpha_2 \lambda_2) H_2 + (\alpha_3 \lambda_3) H_3 + \dots + (\alpha_{s-1} \lambda_{s-1}) H_{s-1} + (\alpha_s \lambda_s) H_s = 0$$

Moltiplicando entrambe i membri dell’identità $(\heartsuit)$ per lo scalare λ_s otteniamo le identità

$$\lambda_s (\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3 + \dots + \alpha_{s-1} H_{s-1} + \alpha_s H_s) = \lambda_s 0$$

$$\lambda_s (\alpha_1 H_1) + \lambda_s (\alpha_2 H_2) + \lambda_s (\alpha_3 H_3) + \dots + \lambda_s (\alpha_{s-1} H_{s-1}) + \lambda_s (\alpha_s H_s) = 0$$

$$(\spadesuit) (\alpha_1 \lambda_s) H_1 + (\alpha_2 \lambda_s) H_2 + (\alpha_3 \lambda_s) H_3 + \dots + (\alpha_{s-1} \lambda_s) H_{s-1} + (\alpha_s \lambda_s) H_s = 0$$

Sottraendo membro a membro l’identità $(\spadesuit)$ dall’identità $(\clubsuit)$ otteniamo l’identità

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_s) H_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_s) H_2 + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_s) H_3 + \dots + \alpha_{s-1} (\lambda_{s-1} - \lambda_s) H_{s-1} = 0$$

Poiché, per ipotesi, gli $(s - 1)$ autovettori $H_1, H_2, H_3, \dots, H_{s-1}$, sono linearmente indipendenti si ha

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_s) = \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_s) = \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_s) = \dots = \alpha_{s-1} (\lambda_{s-1} - \lambda_s) = 0$$

Ma, per ogni $h \neq s$ è $(\lambda_h - \lambda_s) \neq 0$, quindi deve essere $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{s-1} = 0$.

Sostituendo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{s-1} = 0$ nella $(\heartsuit)$ si ottiene l’identità $\alpha_s H_s = 0$. Essendo $H_s \neq 0$

(poiché H_s è un autovettore), si ha che deve essere $\alpha_s = 0$.

18) Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n e sia β un suo autovalore reale. Dare la **definizione** di “molteplicità algebrica” $m_a(\beta)$ e “molteplicità geometrica” $m_g(\beta)$ dell’autovalore β ed **enunciare** la relazione tra le due molteplicità. Infine, **enunciare** le condizioni necessarie e sufficienti affinché esista una base di R_n formata da autovettori di A.

Definizione molteplicità algebrica. Diremo molteplicità algebrica di un autovalore β , e la indicheremo col simbolo $m_a(\beta)$, di una matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n la

molteplicità di β come radice del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ della matrice A.

Definizione molteplicità geometrica. Se β è un autovalore di una matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n, allora la dimensione dell'autospazio $E(\beta)$ viene detta molteplicità geometrica dell'autovalore β e viene indicata col simbolo $mg(\beta)$. Quindi,
 $mg(\lambda) := \dim E(\lambda) = n - rg(A - \lambda I_n) \geq 1$

La relazione che intercorre tra le due molteplicità è enunciata dal seguente teorema: Se β è un autovalore della matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n, allora la sua molteplicità geometrica è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica, cioè $1 \leq mg(\beta) \leq ma(\beta)$.

C'è un **teorema** che ci dà le condizioni necessarie e sufficienti affinché esista una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A: Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n. Esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A se e solo se sono soddisfatte entrambe le condizioni seguenti:
 (1) le radici del polinomio caratteristico di A sono tutte reali (non ci sono radici complesse);
 (2) per ogni autovalore la sua molteplicità algebrica è uguale alla sua molteplicità geometrica.

19) Dopo aver dato la **definizione** di “*prodotto scalare di due vettori liberi*” illustrarne le **proprietà**

Definizione. Il prodotto scalare è una legge che associa ad ogni coppia di vettori u, v un numero reale che si indica col simbolo $u \cdot v$ così definito:

- a) se uno almeno dei vettori è nullo si pone $u \cdot v = 0$
- b) se u e v sono non nulli $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \alpha$

Proprietà.

- I) commutativa $u \cdot v = v \cdot u$
- II) di omogeneità $(\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v) = \lambda (u \cdot v) \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- III) distributiva $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

20) Dopo aver dato la **definizione** di “*prodotto vettoriale di due vettori liberi*” illustrarne le **proprietà**, con particolare attenzione al significato geometrico del modulo.

Definizione. Il prodotto vettoriale di due vettori liberi è una legge che associa ad ogni coppia di vettori u, v un vettore che si indica col simbolo $u \wedge v$ così definito:

- a) se u, v sono paralleli (e quindi in particolare se uno dei due vettori è nullo): $u \wedge v = 0$
- b) se u e v non sono paralleli:
 - $u \wedge v$ è ortogonale sia ad u che a v
 - il verso di $u \wedge v$ è tale che la terna $u, v, u \wedge v$ sia positiva,
 - il modulo è dato da $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin \alpha$

si verifica facilmente che il modulo di $u \wedge v$ è l'area del parallelogramma avente come lati consecutivi i rappresentanti di u, v applicati ad uno stesso punto.

Proprietà.

- I) anticommutativa $u \wedge v = -v \wedge u$
- II) di omogeneità $(\lambda u) \wedge v = u \wedge (\lambda v) = \lambda (u \wedge v)$
- III) distributiva $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$

21) Dopo aver dato la **definizione** di “*prodotto misto di tre vettori liberi*”, **dimostrare** il significato geometrico del suo valore assoluto.

Definizione. Il prodotto misto della terna ordinata di vettori u, v, w è il numero reale $u \wedge v \cdot w$. Il valore assoluto del prodotto misto rappresentati dai segmenti orientati OA, OB, OC ha il seguente significato geometrico: è il volume del parallelepipedo avente come spigoli concorrenti nello stesso vertice i rappresentanti dei tre vettori. Si ha infatti che $|u \wedge v \cdot w| = \|u \wedge v\| \|w\| \cos \phi = \|u \wedge v\| OH$ con $OH = \|w\| \cos \phi$ e ϕ angolo fra $u \wedge v$ e w .

22) Enunciare e dimostrare la condizione necessaria e sufficiente di complanarità di 4 punti.

Siano $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ e $P_4(x_4, y_4, z_4)$ quattro punti dello spazio.

$$P_1, P_2, P_3 \text{ e } P_4 \text{ sono complanari} \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

Dimostrazione. Si ha che $[P_1P_2] = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $[P_1P_3] = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ e $[P_1P_4] = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$. Sia H la matrice avente come righe le componenti dei tre vettori $[P_1P_2]$, $[P_1P_3]$ e $[P_1P_4]$, cioè

$$H = \begin{bmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

I quattro punti P_1, P_2, P_3 e P_4 sono complanari $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ i tre vettori $[P_1P_2]$, $[P_1P_3]$ e $[P_1P_4]$ sono complanari $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ i tre vettori $[P_1P_2]$, $[P_1P_3]$ e $[P_1P_4]$ linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le tre righe di H sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow \text{rg}(H) < 3 \Leftrightarrow \det H = 0$.

23) Studiare (analiticamente) la mutua posizione di due piani.

Siano $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ed $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ due piani.

$$\text{Ponendo } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix} \text{ si ha che}$$

- 1) i due piani sono lo stesso piano ($\pi_1 \equiv \pi_2$) $\Leftrightarrow \text{rg} C = 1 = \text{rg} A$ (il sistema ha infinite soluzioni)
- 2) i due piani non hanno alcun punto in comune ($\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$) $\Leftrightarrow \text{rg} C = 2$ et $\text{rg} A = 1$ (il sistema non ha alcuna soluzione)
- 3) i due piani hanno una retta in comune ($\pi_1 \cap \pi_2 = r$) $\Leftrightarrow \text{rg} A = 2 = \text{rg} C$ (il sistema ha una sola soluzione)

24) Studiare (analiticamente) la mutua posizione di una retta ed un piano.

Sia π un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e sia r una retta parallela al vettore (l, m, n) e passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Si ha che:

- (1) la retta r e il piano π sono paralleli se e solo se $al + bm + cn = 0$;
- (2) la retta è contenuta nel piano se e solo se $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$;
- (3) la retta e il piano non hanno alcun punto in comune se e solo se $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$;
- (4) r è incidente π in un punto se e solo se $al + bm + cn \neq 0$.

25) Studiare (analiticamente) la mutua posizione di due rette nello spazio.

Consideriamo due rette $r: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ e $s: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$.

$$\text{Ponendo } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \text{ si ha che le due rette sono}$$

- 1) coincidenti $\Leftrightarrow \text{rg} C = 2 = \text{rg} A$ (il sistema ha infinite soluzioni)
- 2) parallele in senso stretto $\Leftrightarrow \text{rg} A = 2 \neq 3 = \text{rg} C$ (il sistema non ha soluzioni)
- 3) incidenti in un punto $\Leftrightarrow \text{rg} A = 3 = \text{rg} C$ (il sistema ha una sola soluzione)
- 4) sghembe $\Leftrightarrow \text{rg} C = 4$ e $\text{rg} A = 3$ (il sistema non ha soluzioni)

26) Enunciare e **dimostrare** il significato geometrico dei coefficienti delle incognite nell'equazione cartesiana di un piano.

Se $ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ è l'equazione cartesiana di un piano π , allora il vettore libero non nullo $\mathbf{u} := a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ è perpendicolare al piano π .

Dimostrazione. Sia r una (qualsiasi) retta di π . Siano $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ due punti distinti della retta r . Si hanno le seguenti identità $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ e $ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$. Inoltre, $[P_1P_2] = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$. Per cui si ha che $\mathbf{u} \cdot [P_1P_2] = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = (ax_2 + by_2 + cz_2) + (-ax_1 - by_1 - cz_1) = -d + d = 0$. Da $\mathbf{u} \cdot [P_1P_2] = 0$ si ha che $\mathbf{u} \perp [P_1P_2]$ ovvero $\mathbf{u} \perp r$. Quindi, $\mathbf{u} \perp \pi$.

27) Enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo della distanza di un punto da un piano.

La distanza tra un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e un piano π di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è data da

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dimostrazione. Sia H la proiezione ortogonale del punto P_0 sul piano π e sia A un punto (qualsiasi) del piano π . Si vede subito che la distanza tra P_0 e π è uguale alla lunghezza della proiezione AB del vettore $[AP_0]$ lungo la direzione perpendicolare a π .

Se utilizziamo il vettore libero non nullo $\mathbf{u} := a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ perpendicolare al piano π si ha che $d(P_0, \pi) = d(P_0, H) = d(A, B) = |[AB]| = |[AP_0]|_{\mathbf{u}} = |\mathbf{u} \cdot [AP_0]| / |\mathbf{u}|$.

Dall'identità $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$ si ha che $d = -ax_A - by_A - cz_A$. Per cui

$$\mathbf{u} \cdot [AP_0] = a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) + c(z_0 - z_A) = ax_0 + by_0 + cz_0 + (-ax_A - by_A - cz_A)$$

$$\text{Quindi, } d(P_0, \pi) = |[AP_0]|_{\mathbf{u}} = |\mathbf{u} \cdot [AP_0]| / |\mathbf{u}| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

28) Dopo aver spiegato cosa si intende per “angolo tra due rette (nello spazio)” enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo dell'angolo tra due rette.

Definizione. Siano r e s due rette (dello spazio). Sia π un piano parallelo ad entrambe. Siano r_π e s_π le proiezioni ortogonali di r e s sul piano π . Diremo *angolo fra le due rette r e s (dello spazio)*, e lo indicheremo con il simbolo (r, s) , l'angolo fra le due rette r_π e s_π **nel piano π** .

Se r e s sono due rette di parametri direttori (l_1, m_1, n_1) e (l_2, m_2, n_2) si ha

$$\cos(r, s) = \pm \cos(v_1, v_2) = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

Dimostrazione. Dalla formula del prodotto scalare tra due vettori $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \angle$ ottengo che

$\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$ applicando questa formula ai vettori dei parametri direttori ottengo la formula dell'angolo fra due rette.

29) Dopo **aver spiegato** cosa si intende per “angolo tra due piani” enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo dell'angolo tra due piani.

Siano π_1 e π_2 due piani e sia π un piano perpendicolare ad entrambe i piani π_1 e π_2 .

Siano r la retta intersezione di π e π_1 e s la retta intersezione di π e π_2 .

Diremo *angolo fra i due piani π_1 e π_2* , e lo indicheremo con il simbolo (π_1, π_2) , l'angolo fra le due rette r e s **nel piano π** .

Se $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, allora

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \pm \cos(u_1, u_2) = \pm \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Dimostrazione. Dalla formula del prodotto scalare tra due vettori $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \varphi$ ottengo che

$\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$ applicando questa formula ai vettori dei parametri direttori ottengo la formula dell'angolo fra due rette.

30) Dopo **aver spiegato** cosa si intende per “angolo tra una retta e un piano”, enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo dell'angolo tra una retta e un piano.

Siano r una retta e π un piano. Sia π' un piano contenente r e perpendicolare a π e sia $r_\pi := \pi \cap \pi'$.

Si osservi che:

- se r non è perpendicolare a π allora r_π è proprio la proiezione ortogonale di r su π ;
- se r è perpendicolare a π allora r_π è una delle rette di π appartenenti al fascio di rette di centro P_0 .

Diremo *angolo fra la retta r e il piano π* , e lo indicheremo con il simbolo (r, π) , l'angolo minore o uguale all'angolo retto formato dalle due rette r e r_π nel piano π' .

Sia π un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e sia r una retta di parametri direttori (l, m, n) .

allora $\sin(r, \pi) = |\cos(u, v)| = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$

Dimostrazione. Dalla formula del prodotto scalare tra due vettori $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \varphi$ ottengo che

$\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$ applicando questa formula ai vettori dei parametri direttori ottengo la formula dell'angolo fra due rette.