P.Mazzoldi – M. Nigro – C. Voci

Fisica Vol. I

Meccanica – Termodinamica

EdiSES Edizioni

INDICE

Capitolo 1 Cinematica del punto Pag. 3
1.1 Introduzione " 3
1.2 Moto rettilineo " 4
1.3 Velocità nel moto rettilineo " 6
1.4 Accelerazione nel moto rettilineo " 8
1.5 Moto verticale di un corpo " 10
1.6 Moto armonico semplice " 12
1.7 Moto rettilineo smorzato esponenzialmente " 15
1.8 Paradosso di Zenone " 16
1.9 Moto nel piano. Posizione e velocità " 17
1.10 Accelerazione nel moto piano " 20
1.11 Moto circolare " 23
1.12 Moto parabolico dei corpi " 27
1.13 Moto nello spazio. Composizione di moti " 29
1.14 Riepilogo " 31

Capitolo 2 Dinamica del punto " 34
2.1 Principio d'inerzia. Introduzione al concetto di forza " 34
2.2 Legge di Newton " 35
2.3 Quantità di moto. Impulso " 36
2.4 Risultante delle forze. Equilibrio. Reazioni vincolari " 38
2.5 Classificazione delle forze " 39
2.6 Azione dinamica delle forze " 40
2.7 Forza peso " 40
2.8 Forza di attrito radente " 41
2.9 Forza elastica " 43
2.10 Forza di attrito viscoso " 45
2.11 Piano inclinato " 46
2.12 Forze centripete " 47
2.13 Pendolo semplice " 49
2.14 Tensione dei fili " 51
2.15 Lavoro. Potenza. Energia cinetica " 55
2.16 Lavoro della forza peso " 57
2.17 Lavoro di una forza elastica " 57
2.18 Lavoro di una forza di attrito radente Pag. 58
2.19 Forze conservative. Energia potenziale " 58
2.20 Conservazione dell'energia meccanica " 60
2.21 Relazione tra energia potenziale e forza " 63
2.22 Momento angolare. Momento della forza " 65
2.23 Forze centrali " 67
2.24 Riepilogo " 69
Capitolo 3 Moti relativi " 72
3.1 Sistemi di riferimento. Velocità e accelerazione relative " 72
3.2 Sistemi di riferimento inerziali. Relatività Galileiana " 76
3.3 Moto di trascinamento rettilineo uniforme " 78
3.4 Moto di trascinamento rettilineo accelerato " 80
3.5 Moto di trascinamento rotatorio uniforme " 83
3.6 Il moto rispetto alla terra " 85
3.7 Commenti e note " 87
3.8 Cenni di teoria della relatività " 90

Capitolo 4 Oscillatore armonico " 94
4.1 Richiamo delle proprietà già viste " 94
4.2 Proprietà dell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico " 95
4.3 Energia dell'oscillatore armonico " 97
4.4 Somma dei moti armonici sullo stesso asse " 100
4.5 Somma di moti armonici su assi ortogonali " 103
4.6 Oscillatore armonico smorzato da una forza di attrito costante " 106
4.7 [illegible] Pag. 108
4.8 [illegible] " 112
4.9 [illegible] " 116

[illegible] " 119
5.1 [illegible] " 119
5.2 [illegible] " 121
5.3 [illegible] " 123
5.4 [illegible] " 124
5.5 [illegible] " 126
5.6 [illegible] " 129
5.7 Sistema di riferimento del centro di massa " 129
5.8 Teorema di Koenig " 131
5.9 Ulteriori osservazioni sulle proprietà del centro di massa " 132
5.10 Il teorema dell'energia " 134
5.11 Urti tra due punti materiali " 136
5.12 Urto completamente anelastico " 138
5.13 Urto elastico " 140
5.14 Urto anelastico " 143
5.15 Proprietà dei sistemi di forze applicate a punti diversi " 145

Capitolo 6 Dinamica del corpo rigido. Cenni di statica " 149
6.1 Definizione di corpo rigido. Prime proprietà " 149
6.2 Moto di un corpo rigido " 151
6.3 Corpo continuo. Densità " 152
6.4 Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale " 155
6.5 Momento d'inerzia " 161
6.6 Teorema di Huygens-Steiner " 166
6.7 Pendolo composto " 168
6.8 Moto di puro rotolamento " 169
6.9 Momento dell'impulso " 175
6.10 Teorema di Poinsot. Ellissoide d'inerzia " 177

6.11 Giroscopi " 181
6.12 Corpo rigido libero " 183
6.13 Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido Pag. 184
6.14 Urti tra punti materiali e corpi rigidi o tra corpi rigidi " 186
6.15 Statica " 191
6.16 Riepilogo " 194

Capitolo 7 Gravitazione " 195
7.1 La forza gravitazionale " 195
7.2 Massa inerziale e massa gravitazionale " 198
7.3 Campo gravitazionale " 198
7.4 Energia potenziale gravitazionale " 200
7.5 Teorema di Gauss. Distribuzione sferica di massa " 204
7.6 Determinazione della traiettoria " 208
7.7 Considerazioni conclusive " 214

Capitolo 8 Proprietà meccaniche dei solidi " 215
8.1 Deformazione elastica " 215
8.2 Deformazione plastica. Rottura. Isteresi elastica " 219
8.3 Scorrimento " 221
8.4 Torsione. Pendolo e bilancia di torsione " 222
8.5 Pressione. Compressione uniforme " 223
8.6 Durezza " 225
8.7 Onde elastiche in una sbarra solida " 226
8.8 Onde in una corda tesa " 230
8.9 Alcune considerazioni sulle onde " 232

Capitolo 9 Proprietà meccaniche dei fluidi " 234
9.1 Generalità sui fluidi. Pressione " 234
9.2 Equilibrio statico di un fluido " 235
9.3 Equilibrio in presenza della forza peso " 237
9.4 Principio di Archimede " 242
9.5 Liquido in rotazione " 243
9.6 Attrito interno. Viscosità. Fluido ideale " 245
9.7 Moto di un fluido. Regime stazionario. Portata " 247
9.8 Teorema di Bernoulli " 249
9.9 Applicazioni del teorema di Bernoulli " 250
9.10 Effetti dinamici. Vortici " 254
9.11 Moto laminare
9.12 Moto vorticoso. Numero di Reynolds
9.13 Moto in un fluido. Resistenza di mezzo
9.14 Effetto Magnus. Portanza
9.15 Fenomeni di superficie " 260
9.16 Forze di coesione e adesione. Fenomeni di capillarità " 263
Problemi di meccanica " 266

Guida alla risoluzione dei problemi. Risultati numerici " 280

INDICE

Capitolo 10 *Primo principio della termodinamica* " 289
10.1 Sistemi e stati termodinamici " 289
10.2 Equilibrio termodinamico. Principio dell'equilibrio termico " 291
10.3 Definizione di temperatura. Termometri " 293
10.4 Sistemi adiabatici. Esperimenti di Joule. Calore " 295
10.5 Primo principio della termodinamica. Energia interna " 297
10.6 Trasformazioni termodinamiche. Lavoro e calore " 300
10.7 Calorimetria " 303
10.8 Processi isotermi. Cambiamenti di fase " 309
10.9 Trasmissione del calore " 311
10.10 Dilatazione termica di solidi e liquidi " 316
10.11 Conclusioni riassuntive " 318

Capitolo 11 Gas ideali e reali " 320
11.1 Leggi dei gas. Equazione di stato dei gas ideali " 320
11.2 Termometro a gas ideale a volume costante " 325
11.3 Trasformazioni di un gas. Lavoro " 327
11.4 Calore. Calori specifici " 330
11.5 Energia interna di un gas ideale " 331
11.6 Studio di alcune trasformazioni " 334
11.7 Trasformazioni cicliche " 342
11.8 Gas reali. Equazione di stato. Energia interna " 350
11.9 Diagrammi *pV*. Diagrammi *pT*. Formula di Clayperon " 352
11.10 Teoria cinetica dei gas " 359
11.11 Cenni di teoria cinetica dei gas reali " 368
11.12 Significato cinetico di temperatura e calore Pag. 369
11.13 [illegible] cinetiche dei gas " 370
11.14 [illegible] onde in un gas " 372

Capitolo 12 *Secondo principio della termodinamica* 376
12.1 Enunciati del secondo principio della termodinamica " 376
12.2 Reversibilità e irreversibilità " 379
12.3 Teorema di Carnot " 380
12.4 Temperatura termodinamica assoluta " 383
12.5 Teorema di Clausius " 385
12.6 La funzione di stato entropia " 387
12.7 Il principio di aumento dell'entropia. Calcoli di variazioni di entropia " 390
12.8 Entropia del gas ideale " 397
12.9 Energia inutilizzabile " 401
12.10 Conclusioni termodinamiche sull'entropia " 403
12.11 Entropia e probabilità " 408
12.12 Cenni sul terzo principio della termodinamica " 408
12.13 Potenziali termodinamici " 409
12.14 Proprietà generali dei sistemi *p V T* " 415
12.15 Relazioni di Maxwell " 422
12.16 Espansione di Joule-Thomson " 428
12.17 Miscele di gas ideali " 431
12.18 Sistemi aperti. Potenziale chimico. Regola delle fasi " 434
Problemi di termodinamica " 440
Guida alla risoluzione dei problemi
Risultati numerici " 449
Appendice A " 456
Appendice B " 464
Appendice C " 470
Indice Analitico " 487

CINEMATICA DEL PUNTO 1

1.1 INTRODUZIONE

La meccanica riguarda lo studio del moto di un corpo: essa spiega la relazione che esiste tra le cause che generano il moto e le caratteristiche di questo e la esprime con leggi quantitative. Se il corpo è esteso, come lo sono tutti i corpi materiali, il moto può risultare notevolmente complicato.

Per questa ragione, seguendo un processo molto comune in Fisica, iniziamo lo studio del moto dal più semplice corpo, quello puntiforme, detto *punto materiale* o spesso anche *particella*: si tratta di un corpo privo di dimensioni ovvero che presenti dimensioni trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui può muoversi o degli altri corpi con cui può interagire.

L'introduzione di tale concetto rende innanzitutto più semplice la trattazione di alcuni aspetti di certi problemi. Per esempio, se siamo interessati a studiare il moto della luna intorno alla terra, possiamo considerare in prima approssimazione sia la terra che la luna come punti materiali, dato che le loro dimensioni sono trascurabili rispetto alla distanza.

Inoltre, più in generale, lo studio del sistema *punto materiale* permette di definire nel modo più facile alcune grandezze meccaniche fondamentali e di capirne il significato con immediatezza, in assenza delle complicazioni che deriverebbero dalla struttura estesa del corpo.

D'altra parte un corpo esteso solo eccezionalmente si muove come un punto materiale (si parla in tal caso di *traslazione*, come vedremo in seguito); esso può compiere contemporaneamente altri tipi di moto, come *rotazioni* (ad esempio una ruota) o *vibrazioni* (una goccia di liquido che cade). Studieremo pertanto anche il moto dei corpi non puntiformi e capiremo allora l'utilità dello studio preliminare del punto materiale.

L'analisi completa del moto riguarda sia il collegamento del moto stesso alle interazioni del corpo con i corpi circostanti che la descrizione geometrica dell'evoluzione temporale del fenomeno di movimento. Questa parte della meccanica, descrittiva del moto di un corpo, indipendentemente dalle cause che lo determinano, viene detta *cinematica*, mentre il perché del moto viene studiato nella *dinamica*.

CINEMATICA
studio del moto senza considerare le forze che entrano in gioco

Noi cominceremo il nostro studio della meccanica dalla *cinematica del punto*, lo proseguiremo con la *dinamica del punto* e lo concluderemo con la trattazione più generale della *dinamica dei sistemi di punti*, che applicheremo a casi molto diversi tra loro, come i corpi solidi e i fluidi.

Il moto di un punto materiale è determinato se è nota la sua posizione in funzione del tempo in un determinato *sistema di riferimento*, ossia ad esempio le sue coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ in un sistema di riferimento cartesiano. Questa scelta, anche

se è la più comune, non è unica; in determinate situazioni fisiche possono essere più idonei altri sistemi di riferimento, come quelli basati su coordinate polari.

La *traiettoria* è il luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento e costituisce una curva continua nello spazio. Lo studio delle variazioni di posizione lungo la traiettoria nel tempo porterà a definire il concetto di *velocità*, mentre lo studio delle variazioni della velocità con il tempo introdurrà la grandezza *accelerazione*; si noti che l'occuparsi di variazioni comporterà necessariamente il collegamento con il concetto matematico di derivata.

Le *grandezze fondamentali* in cinematica sono pertanto lo *spazio*, la *velocità*, l'*accelerazione* e il *tempo*; quest'ultimo in sostanza rappresenta la variabile indipendente.

La *quiete* è un particolare tipo di moto in cui le coordinate restano costanti e quindi velocità e accelerazione sono nulle. Dobbiamo però sottolineare, e riprenderemo in dettaglio questo aspetto successivamente, che è necessario specificare sempre il sistema di riferimento rispetto a cui si osserva il moto.

Un punto in quiete in un sistema di riferimento può apparire in moto rispetto ad un altro. Oppure si pensi al volo di un uccello visto da una persona ferma o da un'altra persona in un'auto in movimento.

Di norma dunque la traiettoria di una particella in moto ha una forma diversa ed è rappresentata da un'equazione diversa in diversi sistemi di riferimento.

Nei paragrafi successivi svilupperemo i concetti di velocità e accelerazione, considerando in generale le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ continue e derivabili. Più avanti, dopo aver trattato la dinamica del punto, ci occuperemo del problema del *moto relativo*, cioè delle relazioni che esistono tra le descrizioni di uno stesso moto visto da due sistemi di riferimento in movimento l'uno rispetto all'altro.

1.2 MOTO RETTILINEO

Il primo moto che prendiamo in considerazione, sempre iniziando dal caso più semplice, è quello rettilineo. Esso si svolge lungo una retta sulla quale vengono fissati arbitrariamente un'origine e un verso; il moto del punto è descrivibile tramite una sola coordinata $x(t)$. La geometria del moto rettilineo è rappresentata in figura 1.1.

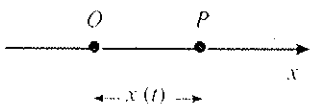


Fig. 1.1

Sperimentalmente $x(t)$ può essere determinata ponendo lungo la retta dei traguardi con dispositivi a cellula fotoelettrica collegati ad un cronometro o per via televisiva o per mezzo di fotografia rapida. Con questi sistemi possiamo ottenere coppie di valori x_i, t_i e ricercare una relazione tra x e t, cioè la funzione $x(t)$. Anche la scelta dell'origine dei tempi è arbitraria: $t = 0$ può coincidere con l'inizio della nostra osservazione, ma ciò non è assolutamente necessario.

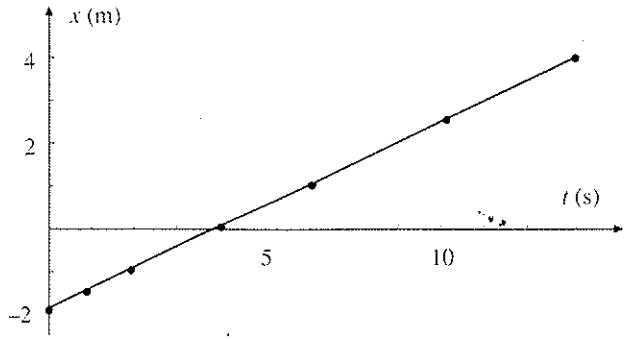
Diagramma orario

Le misure ottenute possono essere rappresentate in un sistema con due assi cartesiani. Sull'asse delle ordinate riportiamo i valori di x e su quello delle ascisse i corrispondenti valori del tempo: la figura si chiama *diagramma orario*. È necessario ovviamente introdurre delle unità di riferimento nei due assi, ad esempio la lunghezza corrispondente ad un intervallo di tempo di un secondo nelle ascisse e quella relativa ad uno spostamento di un metro nelle ordinate.

Nelle figure 1.2, 1.3, 1.4, sono riportate le misure e i diagrammi orari corrispondenti a tre diversi moti di un punto materiale.

Vogliamo sottolineare che in una misura fisica reale ciascun dato è affetto da errori e pertanto i punti che rappresentano le varie misure non si dispongono esattamente su una retta, una parabola o su altri tipi di curve. L'espressione di $x(t)$ è ottenibile solo tramite opportuni metodi di ottimizzazione analitica.

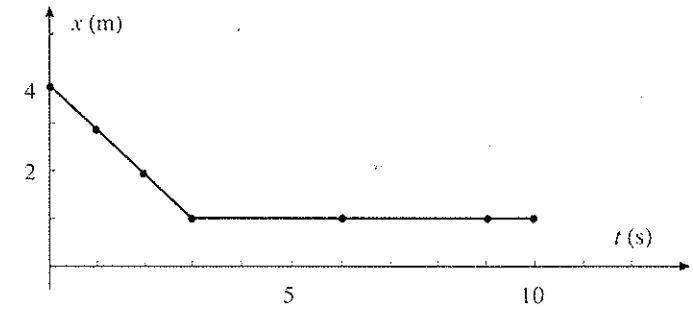
tempo	posizione
0 s	– 2.0 m
1 s	– 1.5 m
2 s	– 1.0 m
4 s	0.0 m
6 s	1.0 m
9 s	2.5 m
12 s	4.0 m



Al tempo $t = 4$s il punto passa per l'origine; il moto è rappresentabile tramite una relazione lineare tra x e t del tipo $x = a\,t + b$, dove a e b sono due costanti che assumono i valori $a = 0.5$ ms^{-1}, $b = -2$m.

Fig. 1.2

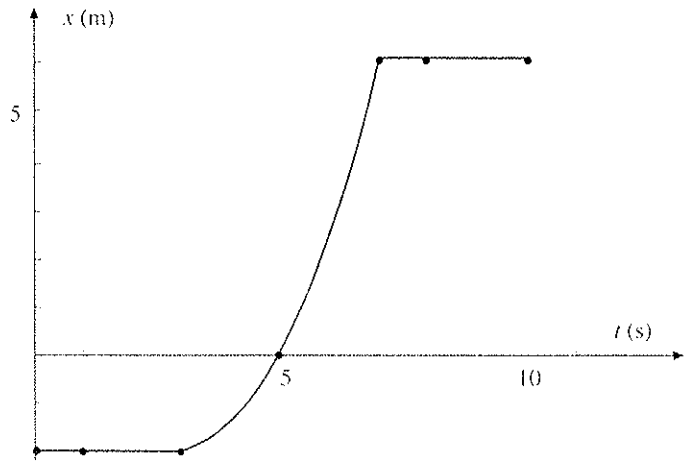
tempo	posizione
0 s	4 m
1 s	3 m
2 s	2 m
3 s	1 m
6 s	1 m
9 s	1 m
10 s	1 m



Il punto nel suo moto si avvicina all'origine con una relazione lineare tra x e t del tipo $x = at + b$, con $a = -1$ ms^{-1}, $b = 4$ m. Raggiunta la posizione $x = 1$ m si ferma, restando in tale posizione.

Fig. 1.3

tempo	posizione
0 s	–2.0 m
1 s	–2.0 m
3 s	–2.0 m
4 s	–1.5 m
5 s	0.0 m
6 s	2.5 m
7 s	6.0 m
8 s	6.0 m
10 s	6.0 m



Nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = 3$ s il punto rimane fermo nella posizione $x = -2$ m, successivamente si muove secondo il verso positivo della retta con una relazione quadratica tra x e t del tipo $x = a + b\,(t - t_0)^2$, in cui $a = -2$ m, $b = 0.5$ ms^{-2}, $t_0 = 3$ s. Nella posizione $x = 6$ m il punto si ferma.

Fig. 1.4

1.3 VELOCITÀ NEL MOTO RETTILINEO

Introduciamo ora il concetto di *velocità media* e *velocità istantanea* nel moto rettilineo. Se al tempo $t = t_1$ il punto si trova nella posizione $x = x_1$ e al tempo $t = t_2$ nella posizione $x = x_2$, $\Delta x = x_2 - x_1$ rappresenta lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Possiamo caratterizzare la rapidità con cui avviene lo spostamento tramite la velocità media

Velocità media

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \; .$$

Tale grandezza però fornisce una informazione *complessiva*, ma non dà quasi nessuna indicazione sulle caratteristiche effettive del moto.

Per individuare la funzione $x(t)$ e le sue variazioni aumentiamo il numero di misure nell'intervallo di spazio Δx, cioè suddividiamo l'intervallo Δx in numerosi piccoli intervalli $(\Delta x)_1, (\Delta x)_2, \ldots, (\Delta x)_i, \ldots, (\Delta x)_n$ percorsi rispettivamente negli intervalli di tempo $(\Delta t)_1, (\Delta t)_2, \ldots, (\Delta t)_i, \ldots, (\Delta t)_n$. Le corrispondenti velocità medie sono $v_i = (\Delta x)_i / (\Delta t)_i$; in generale $v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_n$ non sono eguali tra loro e a v_m. Infatti in un generico moto rettilineo la velocità non è costante nel tempo (ciò comporterebbe appunto $v_1 = v_2 = \ldots = v_i = \ldots = v_n = v_m$).

Il processo di suddivisione in spazi sempre più piccoli può essere continuato e il limite a tale procedura è posto dalla capacità di apprezzare piccoli intervalli da parte degli strumenti utilizzati per la misura degli intervalli di spazio e di tempo. In ogni caso se Δx risulta suddiviso in un numero elevatissimo di intervallini dx, ciascuno percorso nel tempo dt, si può definire la velocità istantanea, ad un istante t, del punto in movimento come il rapporto $v = dx/dt$, calcolato in quel determinato istante.

Il metodo che abbiamo descritto in un modo abbastanza semplice consiste matematicamente nel calcolare il limite per $\Delta t \to 0$ del rapporto incrementale $\Delta x/\Delta t$. Pertanto la velocità di un punto nel moto rettilineo è data dalla derivata dello spazio rispetto al tempo:

Velocità istantanea

$$v = \frac{dx}{dt} \quad ; \tag{1.1}$$

la *velocità istantanea*, cioè, *rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerato.*

Il segno della velocità indica il verso del moto sull'asse x: se $v > 0$ la coordinata x cresce (nella figura 1.1 il punto va da sinistra verso destra), mentre se $v < 0$ il moto avviene nel verso opposto.

A sua volta la velocità può essere funzione del tempo $v(t)$: vedremo esempi specifici nei paragrafi 1.5, 1.6, 1.7. Nel caso particolare in cui sia v = costante si parla di *moto rettilineo uniforme*.

In conclusione, se è nota, perché calcolata o misurata, la funzione $x(t)$ ovvero, come si dice, se è nota la legge oraria, si può ottenere la velocità istantanea con l'operazione di derivazione (1.1).

Possiamo d'altra parte risolvere il problema inverso, cioè ricavare la funzione $x(t)$ se è nota la dipendenza dal tempo della velocità istantanea, $v(t)$. Supponiamo che il punto materiale si trovi nella posizione x al tempo t e nella posizione $x + dx$ al tempo $t + dt$; dalla (1.1) vediamo che lo spostamento infinitesimo dx è eguale al prodotto del tempo dt impiegato a percorrerlo per il valore della velocità al tempo

t: $dx = v(t)\,dt$, qualunque sia la dipendenza della velocità dal tempo. Lo spostamento complessivo sulla retta su cui si muove il punto, in un intervallo finito di tempo $\Delta t = t - t_0$, è dato dalla somma di tutti i successivi valori dx. Per fare il calcolo utilizziamo l'operazione di integrazione: $\Delta x = \int_{t_0}^{t} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$. Il primo integrale è immediato e vale $x - x_0$; pertanto

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \qquad (1.2)$$

Questa è la relazione generale che permette il calcolo dello spazio percorso nel moto rettilineo, qualunque sia il tipo di moto. Il termine x_0 rappresenta la *posizione iniziale* del punto, occupata nell'istante iniziale t_0. Pertanto per calcolare $x(t)$, nota $v(t)$, è necessario conoscere la condizione iniziale del moto. Matematicamente la presenza della costante x_0 è la conseguenza del fatto che abbiamo risolto un'equazione differenziale del primo ordine, quale è la (1.1); si veda a questo proposito l'appendice A.

Osserviamo esplicitamente che Δx rappresenta lo spostamento complessivo e non lo spazio percorso, nel senso che ora precisiamo: se per esempio il punto avesse eseguito una serie di spostamenti che alla fine l'avessero riportato alla posizione iniziale, Δx risulterebbe nullo, anche se il punto nel suo movimento ha percorso vari spazi; Δx cioè non è la somma dei moduli degli spostamenti, bensì la somma algebrica (si vede l'importanza del segno della velocità).

Ricordando la definizione di velocità media, $v_m = (x - x_0)/(t - t_0)$, da (1.2) ricaviamo la relazione tra velocità media e velocità istantanea:

$$v_m = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \qquad (1.3)$$

Come prima applicazione di (1.2) consideriamo il caso particolare del moto rettilineo uniforme, in cui v = costante. Si ha:

$$x(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v\,(t - t_0) \qquad (1.4)$$

Moto rettilineo uniforme

se $t_0 = 0$ $\qquad x(t) = x_0 + v\,t$.

Nel moto rettilineo uniforme lo spazio è una funzione lineare del tempo (si rivedano le figure 1.2 e 1.3): la velocità istantanea coincide con la velocità media.

ESEMPIO 1.1

Il punto P, che al tempo $t = 0$ si trova nella posizione $x_{1,0}$, si muove con velocità costante $v_1 > 0$. Il punto Q, in $x_{2,0} < x_{1,0}$ per $t = 0$, si muove con velocità costante $v_2 > 0$ e raggiunge P al tempo $t = t^*$.
Che relazione esiste tra v_1 e v_2?

Soluzione
Si scrive la (1.4) per entrambi i punti: $x_P = x_{1,0} + v_1 t$, $x_Q = x_{2,0} + v_2 t$ e si impone $x_P(t^*) = x_Q(t^*)$, cioè l'eguaglianza delle posizioni nell'istante in cui Q raggiunge P. Si trova

$$v_2 - v_1 = \frac{|x_{1,0} - x_{2,0}|}{t^*}$$

1.4 ACCELERAZIONE NEL MOTO RETTILINEO

Abbiamo detto che nel caso più generale di moto rettilineo la velocità è funzione del tempo, $v\ (t)$. Se in un determinato intervallo di tempo Δt essa varia di una quantità Δv, possiamo definire la grandezza *accelerazione media* come $a_m = \Delta v/\Delta t$. Con un procedimento analogo a quello utilizzato per passare dal concetto di velocità media a quello di velocità istantanea definiamo l'*accelerazione istantanea*, cioè la *rapidità di variazione temporale della velocità*, come

Accelerazione istantanea

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{1.5}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato (1.1).

Se $a = 0$ la velocità è costante (moto rettilineo uniforme); quando a è positiva la velocità cresce nel tempo mentre per $a < 0$ la velocità decresce. Si faccia attenzione che è il segno algebrico della velocità istantanea e non quello dell'accelerazione a fornire il verso del moto.

Nota la dipendenza della velocità dal tempo abbiamo dunque visto come con l'operazione di derivazione si ottenga la funzione $a\ (t)$. Se invece conosciamo $a\ (t)$ possiamo ricavare $v\ (t)$ tramite l'integrazione dell'equazione differenziale (1.5): da $dv = a\ (t)\ dt$ scriviamo $\Delta v = \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\ (t)\ dt$ e pertanto

$$v\ (t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\ (t)\ dt \tag{1.6}$$

relazione generale che permette il calcolo della velocità se è nota l'accelerazione in funzione del tempo. Come visto precedentemente, dato che è stata risolta un'equazione differenziale del prim'ordine abbiamo nella soluzione una costante v_0, che rappresenta la velocità del punto all'istante iniziale t_0. Per calcolare esplicitamente $v\ (t)$ si devono conoscere la forma analitica di $a\ (t)$ e la *velocità iniziale* v_0. Vale inoltre per Δv la stessa osservazione fatta per Δx calcolato con (1.2): si tratta sempre di variazioni algebriche complessive.

Riassumendo, il moto rettilineo più generale è *vario*, intendendo con questo termine che l'accelerazione non è costante; se invece l'accelerazione è costante durante il moto, questo si dice *uniformemente accelerato* e la dipendenza della velocità dal tempo è lineare, come si ricava da (1.6):

Moto uniformemente accelerato

$$v\ (t) = v_0 + a\ (t - t_0) \tag{1.7}$$

se $t_0 = 0$ $\qquad v\ (t) = v_0 + a\ t$

Utilizzando (1.2) e (1.7) si calcola la posizione $x\ (t)$:

$$x\ (t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a\ (t - t_0)]\ dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0\ dt + \int_{t_0}^{t} a\ (t - t_0)\ dt\ ,$$

$$x\ (t) = x_0 + v_0\ (t - t_0) + \frac{1}{2}\ a\ (t - t_0)^2 \tag{1.8}$$

se $t_0 = 0$ $\qquad x\ (t) = x_0 + v_0\ t + \frac{1}{2}\ a t^2$

Dunque nel moto rettilineo uniformemente accelerato la velocità è una funzione lineare del tempo mentre lo spazio è una funzione quadratica del tempo (si riveda la figura 1.4).

Anticipando quanto vedremo nel capitolo 2, osserviamo che l'accelerazione è una grandezza molto importante in quanto essa è legata dalla legge di Newton, $F = m\,a$, all'interazione del punto materiale di massa m con l'esterno, espressa dalla forza F. Quindi la conoscenza della legge oraria $x\,(t)$ ci permette di ricavare, derivando, $v\,(t)$ e $a\,(t)$ e conseguentemente la forza $F\,(t)$ che agisce sul punto. Viceversa se è nota la forza agente $F\,(t)$ determiniamo $a\,(t)$ e da questa, integrando, $v\,(t)$ e $x\,(t)$ purché siano note le condizioni iniziali, cioè i valori della velocità e della posizione del punto nell'istante iniziale t_0.

Supponiamo ora di trovarci in una situazione fisica in cui sia nota la dipendenza dell'accelerazione dalla posizione, cioè la funzione $a\,(x)$. In tal caso è possibile ricavare il valore della velocità in ogni posizione x, $v\,(x)$, utilizzando il concetto matematico di funzione di funzione.

Infatti se ad un certo istante t il punto occupa una deteminata posizione x, con un valore v della velocità e a dell'accelerazione, queste si possono pensare come funzioni della posizione oltre che del tempo e si può scrivere $v\,(t) = v\,[x\,(t)]$, $a\,(t) = a\,[x(t)]$. Derivando la prima rispetto al tempo e sfruttando la regola di derivazione delle funzioni di funzioni

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\,v\,[x\,(t)] = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt}.$$

Quindi $a = v\,\frac{dv}{dx}$, che scriviamo $a\,dx = v\,dv$: se dalla posizione x, dove il punto possiede la velocità v e l'accelerazione a, si ha uno spostamento dx, il punto subisce una variazione di velocità dv; dx e dv sono legati dalla relazione data. Integrando $\int_{x_0}^{x} a\,(x)\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv$ ed esplicitando il secondo integrale

Unità di misura

Quando si introduce una nuova grandezza fisica bisogna sempre precisare come si misura e in che unità è espresso il risultato numerico della misura. Trattiamo questo argomento nell'appendice B, che consigliamo di leggere subito per fissare le idee sulle grandezze assunte come fondamentali e sulla nozione di dimensioni di una grandezza fisica: essa servirà poi come quadro riassuntivo delle unità delle varie grandezze, che definiremo di volta in volta nel testo.

Il moto di un punto è espresso dalla conoscenza della posizione nel tempo e queste due grandezze si misurano, nel sistema internazionale delle unità di misura (S.I.), in metri (m) e in secondi (s) rispettivamente, come già detto nel paragrafo 1.2 a proposito dei diagrammi orari. La velocità e l'accelerazione si possono determinare con misure di spazi percorsi e di tempi impiegati a percorrerli, secondo le definizioni (1.1) e (1.5). Di conseguenza l'unità di misura della velocità è

$$\text{metro/secondo} = \text{m/s} = \text{ms}^{-1}$$

dell'accelerazione è

$$(\text{metro/secondo})/\text{secondo} = \text{m/s}^2 = \text{ms}^{-2}$$

Le unità suddette, per quanto molto usate, non hanno un nome particolare. Esistono poi per la velocità altre unità pratiche:

$$1\,\frac{\text{km}}{\text{ora}} = \frac{10^3}{3.6 \cdot 10^3}\,\text{ms}^{-1} = 0.278\,\text{ms}^{-1} \Rightarrow 1\,\text{ms}^{-1} = 3.6\,\frac{\text{km}}{\text{ora}}$$

MACH 1 = $1193\,\frac{\text{km}}{\text{ora}} = 331.7\,\text{ms}^{-1}$ (velocità del suono nell'aria)

$$\int_{x_0}^{x} a\,(x)\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \qquad (1.9)$$

v_0 è la velocità del punto nella posizione x_0.

La conoscenza della dipendenza dell'accelerazione dalla posizione, $a(x)$, cioè di come varia l'interazione del punto materiale con l'esterno, $F(x)$, permette il calcolo della variazione della velocità nel passaggio del punto dalla posizione x_0 alla posizione x. Poiché la relazione è quadratica non si ha però l'informazione sul segno della velocità.

Nel moto uniformemente accelerato (a = costante) si ha

$$v^2 = v_0^2 + 2a\,(x - x_0) \qquad (1.10)$$

ESEMPIO 1.2

Un punto passa per l'origine al tempo $t = 0$ con velocità $v_0 > 0$; per $t > 0$ la dipendenza dell'accelerazione dalla posizione è data da $a = -A\,x - B$, con A e B costanti positive. Si determini la posizione in cui il punto si ferma.

Soluzione

Applichiamo la relazione (1.9) con $x_0 = 0$ e velocità finale $v = 0$, dato che il problema richiede la posizione in cui il punto si ferma.

Abbiamo

$$\int_0^x (-Ax - B)\,dx = -\frac{1}{2}v_0^2$$

e integrando

$$\frac{1}{2}A x^2 + B x = \frac{1}{2}v_0^2 .$$

Dalla soluzione di questa equazione di secondo grado si ha la posizione cercata: $x = \dfrac{-B + \sqrt{B^2 + A\,v_0^2}}{A}$;

l'altra soluzione dà $x < 0$ e non ha significato fisico nel nostro specifico problema. Non possiamo invece calcolare l'istante in cui il punto si ferma perché non conosciamo $a(t)$ o $x(t)$.

1.5 MOTO VERTICALE DI UN CORPO.

Se trascuriamo l'attrito con l'aria, *un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con una accelerazione costante che vale in modulo* $g = 9.8\ \mathrm{ms^{-2}}$; il moto osservato sperimentalmente è dunque rettilineo uniformemente accelerato.

Prendiamo un sistema di riferimento con origine al suolo e asse x rivolto verso l'alto, come in figura 1.5. In questo sistema $a = -g = -9.8\ \mathrm{ms^{-2}}$: lo capiamo, per esempio, considerando che il corpo cadendo si muove lungo il verso negativo dell'asse x per cui la velocità è negativa e negativa deve essere l'accelerazione, in quanto la velocità nel tempo diventa sempre più negativa. Questi segni dipendono dalla scelta del verso dell'asse x; se fosse orientato verso il basso a sarebbe positiva.

Esaminiamo alcune possibili situazioni, cominciando dalla caduta da un'altezza h con velocità iniziale nulla: le condizioni iniziali sono perciò $x_0 = h$ e $v_0 = 0$ per $t = t_0 = 0$. Da (1.7) si ricavava $v(t) = -g\,t$: la velocità aumenta in modulo durante la caduta. La dipendenza della posizione dal tempo si ottiene da (1.8):

$$x = h - \frac{1}{2}g\,t^2$$

e quindi il punto arriva al suolo, dove $x = 0$, nel tempo $t_c = \sqrt{2h/g}$. La velocità in funzione della posizione si calcola da (1.10): $v^2 = 2\,g\,(h - x)$ per cui il punto arriva al suolo con

$$v_c = \sqrt{2gh} \quad .$$

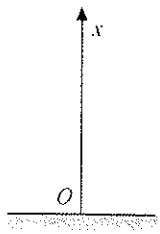


Fig. 1.5

Posto ad esempio $h = 10$ m, si ha $t_c = 1.4$ s e $v_c = 14$ ms^{-1} (= 38.9 km/ora).

Se invece il punto è lanciato verso il basso (condizioni iniziali $x_0 = h$ e $v_0 = v_1$ per $t = 0$), la dipendenza della velocità dal tempo è $v\,(t) = -v_1 - g\,t$ e la legge oraria

$$x = h - v_1\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \quad .$$

Da questa si ha

$$t\,(x) = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2\,g\,(h - x)}}{g} \quad ,$$

avendo scartato la soluzione negativa che nel nostro caso non ha alcun significato. Il tempo di caduta, per $x = 0$, è

$$t_c = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2\,g\,h}}{g}$$

e risulta minore di quello calcolato nell'esempio precedente proprio perché il punto possiede una velocità iniziale rivolta verso il basso. Da (1.10) $v^2 = v_1^2 + 2\,g\,(h - x)$ e al suolo

$$v_c^2 = v_1^2 + 2\,g\,h \quad ,$$

maggiore che nel caso precedente. Ovviamente, se $v_1 = 0$ si riottengono i risultati visti prima.

Infine lanciamo il punto verso l'alto, con velocità v_2, ma partendo dal suolo: le condizioni iniziali sono $x_0 = 0$ e $v_0 = v_2 > 0$ per $t = 0$.

Questa volta $v = v_2 - g\,t$ e

$$x = v_2\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \quad .$$

Il punto inizialmente sale verso l'alto con velocità che decresce progressivamente ($v > 0$, ma $a < 0$: il punto viene frenato): esso si ferma, cioè ha una velocità nulla, nell'istante $t_M = v_2/g$ e nella posizione $x_M = x\,(t_M) = v_2^2 / 2\,g$. Per $t \geq t_M$ siamo nella stessa situazione del primo esempio, punto che cade da un'altezza x_M con velocità iniziale nulla: risulta $t_c = \sqrt{2x_M/g} = t_M$ e la durata complessiva del moto è pertanto $2\,t_M = 2\,v_2/g$. Se ricaviamo $t\,(x)$ dalla legge oraria e $v\,(x)$ da (1.10) otteniamo:

$$t(x) = \frac{v_2 \pm \sqrt{v_2^2 - 2\,g\,x}}{g} = t_M \pm \sqrt{t_M^2 - \frac{2\,x}{g}} \qquad v(x) = \pm\sqrt{v_2^2 - 2\,g\,x}$$

Il doppio segno è legato al fatto che il punto passa due volte nella stessa posizione, una volta salendo (segno negativo per il tempo, segno positivo per la velocità) e una volta scendendo (segni opposti). In particolare $x = 0$ è occupato alla partenza ($t = 0, v = v_2$) e all'arrivo ($t = 2\,t_M, v = -v_2$): il punto ritorna nell'origine con velocità eguale in modulo a quella di partenza, ma ovviamente di segno opposto.

In conclusione, siamo partiti dalla conoscenza dell'accelerazione, $a = -g$, e con due successive integrazioni abbiamo ottenuto

$$v(t) = v_0 - g\,t \quad , \quad x(t) = x_0 + v_0\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \quad .$$

Queste formule generali sono state adattate a tre diverse situazioni, verificando che i termini v_0 e $x_0 + v_0\,t$ dipendono dalle condizioni iniziali, mentre $-g\,t$ e $-\frac{1}{2}\,g\,t^2$ si trovano in tutte le soluzioni: essi sono infatti caratteristici del moto uniformemente accelerato con accelerazione $-g$. Ripetiamo che con l'asse x orientato verso il basso accelerazione e velocità cambiano di segno, però i procedimenti e i risultati fisici sono gli stessi.

1.6 MOTO ARMONICO SEMPLICE

Il *moto armonico semplice* lungo un asse rettilineo è un moto vario la cui legge oraria è definita dalla relazione

$$x(t) = A\,\text{sen}\,(\omega\,t + \phi) \tag{1.11}$$

A, ω, ϕ sono grandezze costanti: A è detta *ampiezza del moto*, $\omega\,t + \phi$ *fase del moto*, ϕ *fase iniziale*, ω *pulsazione*.

Discutiamo le caratteristiche di questo moto. I valori estremi assunti dalla funzione seno sono $+1$ e -1: pertanto il punto che obbedisce alla (1.11) percorre un segmento di ampiezza $2\,A$ con centro nell'origine; il massimo spostamento dall'origine è pari ad A, donde il nome di ampiezza del moto. Al tempo $t = 0$ il punto occupa la posizione $x(0) = A\,\text{sen}\,\phi$: note le costanti A e ϕ, determiniamo la posizione iniziale del punto (solo se $\phi = 0$ o $\phi = \pi$ il punto è nell'origine per $t = 0$).

Il moto armonico, considerando che la funzione seno è periodica con periodo $2\,\pi$, risulta essere *periodico*: in effetti il punto descrive oscillazioni di ampiezza A rispetto al centro O, tutte eguali tra loro e caratterizzate dalla durata, detta *periodo* T del moto armonico. Ciò rientra nella definizione generale: il moto di un punto si dice periodico quando ad intervalli di tempo eguali il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità (e questo avviene per qualsiasi posizione). Si osservi che la realizzazione di moti o più in generale di fenomeni caratterizzati da una periodicità è fondamentale per la misura del tempo.

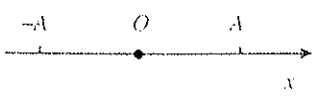


Fig. 1.6

Per determinare il periodo T consideriamo due tempi t' e t, con $t' - t = T$; per definizione $x(t') = x(t)$ e quindi da (1.11), dovendo le fasi nei due istanti differire di 2π, periodo della funzione seno, abbiamo $\omega\,t' + \phi = \omega\,t + \phi + 2\,\pi$: ne segue che $T = t' - t$ vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ovvero} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \,. \tag{1.12}$$

Capiamo così il significato di ω: il moto si ripete velocemente (piccoli valori di T) quando la pulsazione è grande mentre il moto è lento (T grande) per bassi valori della pulsazione.

Si definisce *frequenza* ν del moto il numero di oscillazioni in un secondo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \,.$$

È molto importante osservare che il periodo, e quindi la frequenza, di un moto armonico semplice sono indipendenti dall'ampiezza del moto.

Fissato il valore della pulsazione abbiamo una classe di moti armonici, caratterizzati dallo stesso periodo, che differiscono tra loro per i diversi valori dell'ampiezza e della fase iniziale, cioè, come vedremo, per le diverse condizioni iniziali.

La velocità del punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando $x\,(t)$:

$$v\,(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi) \,. \tag{1.13}$$

Con una ulteriore derivazione si ottiene l'accelerazione del punto:

$$a\,(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -\omega^2 x \,. \tag{1.14}$$

In figura 1.7 sono rappresentate le funzioni $x\,(t)$, $v\,(t)$, $a\,(t)$; si è posto $\phi = 0$.

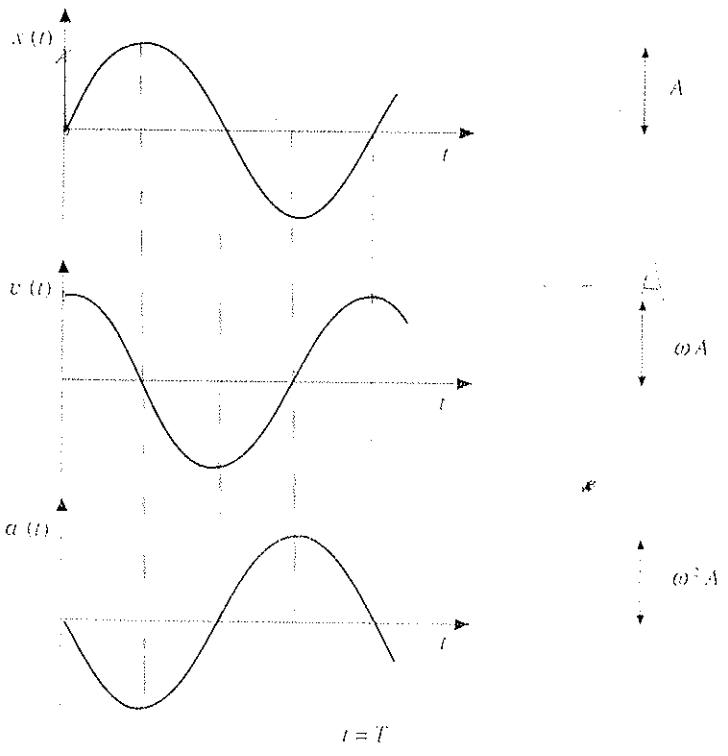


Fig. 1.7

La velocità assume il valore massimo nel centro di oscillazione (assunto come origine O) dove vale ωA e si annulla agli estremi ($x = A$ e $x = -A$) dove si inverte il senso del moto. L'accelerazione si annulla nel centro di oscillazione e assume il valore massimo in modulo ($\omega^2 A$) agli estremi, dove si inverte la velocità; inoltre essa è *sempre proporzionale ed opposta allo spostamento dal centro di oscillazione.*

A parte il valore dell'ampiezza, le tre funzioni $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ mostrano lo stesso andamento temporale: la forma e il periodo sono eguali, c'è solo uno spostamento di una rispetto all'altra lungo l'asse dei tempi. Quest'ultima caratteristica viene indicata dicendo che le funzioni sono sfasate tra di loro. In particolare la velocità è sfasata di $\pi / 2$ rispetto allo spostamento (è in *quadratura di fase*), mentre l'accelerazione è sfasata di π sempre rispetto allo spostamento (è in *opposizione di fase*).

Le costanti A e ϕ individuano le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 = A \operatorname{sen} \phi \quad , \qquad v(0) = v_0 = \omega A \cos \phi \quad .$$

Viceversa, note le condizioni iniziali x_0 e v_0, si calcolano A e ϕ:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega x_0}{v_0} \quad , \qquad A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \quad .$$

Inserendo (1.14) in (1.9) si può calcolare la dipendenza della velocità dalla posizione, $v(x)$:

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\, dx = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x\, dx = \frac{1}{2}\, \omega^2 (x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2}\, v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

e quindi $v^2 = v_0^2 + \omega^2 (x_0^2 - x^2)$. Con riferimento al centro, dove $x_0 = 0$ e $v_0 = \omega A$

$$v^2(x) = \omega^2 (A^2 - x^2) \quad . \tag{1.15}$$

Nel centro $v = \omega A$ oppure $v = -\omega A$ a seconda del verso di passaggio.

Dalla legge oraria (1.11) abbiamo ricavato che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento, con segno negativo: $a = -\omega^2 x$. Se invece si trova che in un certo moto l'accelerazione risulta proporzionale allo spostamento con costante di proporzionalità negativa si dimostra che quel moto è armonico semplice. In altre parole, la condizione necessaria e sufficiente perché un moto sia armonico è data dall'equazione

Equazione differenziale del moto armonico

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{1.16}$$

Unità di misura

Elenchiamo le nuove grandezze introdotte e le loro unità di misura:

- ampiezza : stessa unità di x, metri
- periodo : è un tempo, si esprime in secondi
- frequenza : inverso del tempo, si esprime in s^{-1}; questa unità ha un nome, hertz: $1\ Hz = 1\ s^{-1}$
- fase : argomento del seno o del coseno, dimensionalmente è un angolo e si misura in radianti (rad)
- pulsazione ω: $2\pi/T$ unità di misura rad/s = rad s^{-1}

detta *equazione differenziale del moto armonico*. Le funzioni seno e coseno, e le loro combinazioni lineari, sono *tutte e sole* le funzioni che soddisfano alla condizione (1.16) nel campo reale.

Quest'ultimo fatto ci porta a osservare esplicitamente che le proprietà generali del moto armonico semplice restano eguali se invece della funzione seno utilizziamo la funzione coseno. Le due funzioni differiscono solo per un termine di sfasamento $\frac{\pi}{2}$: $\text{sen}(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \zeta)$ con $\zeta = \phi - \frac{\pi}{2}$. Ovvero, $x = A \text{ sen}(\omega t + \phi)$ e $x = A \cos(\omega t + \phi)$ rappresentano lo stesso moto, solo che per esempio il primo è visto a partire dall'istante t_0 e il secondo dall'istante $t_0 + \frac{T}{4}$.

In questo paragrafo abbiamo sempre parlato di moto; però se in un diverso fenomeno fisico si trova una grandezza f che obbedisce a un'equazione con la struttura di (1.16), $\frac{d^2 f}{dz^2} + k^2 f = 0$, la soluzione è sempre $f(z) = A \text{ sen}(k z + \phi)$ cioè f descrive un'oscillazione rispetto alla variabile z, il cui periodo dipende da k. Può trattarsi di oscillazioni elettriche in un circuito o di oscillazioni di pressione in un gas interessato da un fenomeno sonoro, però la base matematica è la stessa. Riprenderemo l'argomento nel capitolo quarto dove trattiamo più in generale l'*oscillatore armonico semplice*, come si chiama un sistema che obbedisce a (1.16).

1.7 MOTO RETTILINEO SMORZATO ESPONENZIALMENTE

Consideriamo un altro esempio di moto vario, in cui l'accelerazione soddisfa alla condizione $a = -k v$, con k costante positiva (che si misura in s^{-1} essendo pari a un rapporto a/v). L'accelerazione in questo moto è sempre contraria alla velocità, che perciò deve necessariamente diminuire, e varia con la stessa legge con cui varia la velocità. La condizione si traduce nell'equazione differenziale

$$\frac{dv}{dt} = -k v$$

che si integra col metodo della *separazione delle variabili*, vedi appendice A:

$$\frac{dv}{v} = -k\,dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt \Rightarrow \log \frac{v}{v_0} = -k t \quad ;$$

v_0 è la velocità del punto nell'istante iniziale $t = 0$ (deve essere $v_0 \neq 0$ altrimenti nell'istante iniziale si avrebbe $v = 0$, $a = 0$ e non potrebbe esserci moto). Passando agli esponenziali

$$v(t) = v_0 e^{-kt} \quad ;$$

la velocità decresce esponenzialmente nel tempo e quindi il punto alla fine si ferma.

Calcoliamo anche come varia la velocità con la posizione, con un metodo analogo a quello seguito nel paragrafo 1.4:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -k v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -k$$

$$\Rightarrow dv = -k\,dx \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = -k \int_0^x dx$$

e risulta un andamento lineare decrescente $v\,(x) = v_0 - k\,x$; la velocità si annulla per $x = v_0 / k$ e in questa posizione il punto si ferma.

La legge oraria si ricava per integrazione da $v\,(t)$ secondo (1.2):

$$x\,(t) = x_0 + \int_0^t v(t)\,d\,t = \int_0^t v_0\,e^{-kt}\,d\,t = -\frac{v_0}{k}\,\left[\,e^{-kt}\,\right]_0^t = \frac{v_0}{k}\,(1 - e^{-kt})\ ;$$

il punto tende asintoticamente alla posizione v_0 / k. La stessa espressione per $x\,(t)$ si ottiene eguagliando $v\,(t) = v_0\,e^{-kt}$ e $v\,(x) = v_0 - k\,x$. In figura 1.8 sono mostrati andamenti di $v\,(t)$, $v\,(x)$, $x\,(t)$.

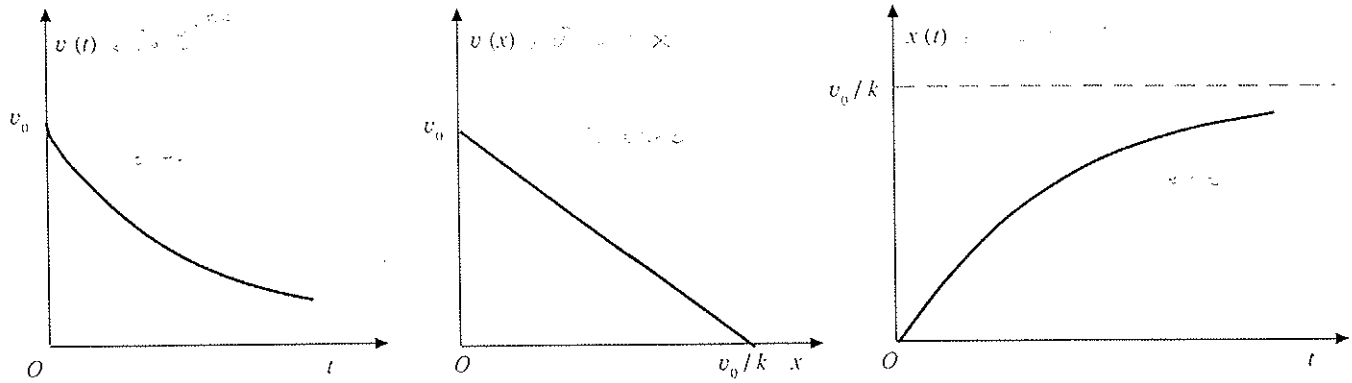


Fig. 1.8

Osserviamo che la rapidità di variazione della funzione e^{-kt} è determinata dal valore di k. Posto $\tau = 1/k$, in un intervallo di tempo pari a τ la funzione si riduce di un fattore $e \cong 2.72$:

$$e^{-k\,(t\,+\,\tau)} / e^{-kt} = e^{-k\,\tau} = e^{-1} \quad ;$$

τ si chiama *costante di tempo* e si misura ovviamente in secondi. Se k è grande τ è piccola e la decrescita è rapida; viceversa se k è piccola τ è grande e la decrescita è lenta. In pratica dopo un tempo di $\approx 5\,\tau$ il fenomeno si può considerare terminato. Analogamente, la funzione $1 - e^{-kt}$ si avvicina a 1 con rapidità che è sempre determinata da k. Nella figura 1.9 sono mostrati i grafici delle due funzioni, con il tempo misurato in unità di τ .

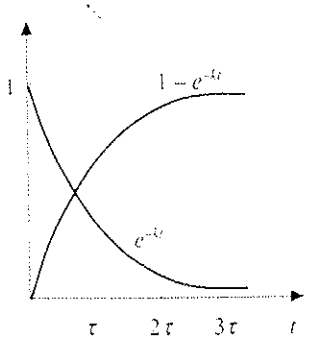


Fig. 1.9

1.8 PARADOSSO DI ZENONE

Riprendiamo l'esempio del paragrafo 1.3, così formulato: all'istante $t = 0$ il punto P_1 passa nell'origine con velocità $v_1 > 0$ mentre P_2 si trova in $x_0 > 0$ con velocità positiva $v_2 < v_1$; dove e quando P_1 raggiungerà P_2 ? Dall'esempio già visto abbiamo le risposte

$$x^* = \frac{v_1 x_0}{v_1 - v_2} \quad , \qquad t^* = \frac{x_0}{v_1 - v_2} \quad .$$

La soluzione è molto semplice. Tuttavia possiamo affrontare il problema in modo più contorto come ha fatto Zenone, nel quinto secolo A.C..

Quando P_1 è giunto in x_0 al tempo t_0, P_2 è avanzato di s_0:

$$t_0 = \frac{x_0}{v_1} \quad , \quad s_0 = t_0 v_2 = x_0 \frac{v_2}{v_1} \quad .$$

Quando P_1 ha percorso il tratto ulteriore s_0 nel tempo t_1, P_2 è avanzato di s_1:

$$t_1 = \frac{s_0}{v_1} = x_0 \frac{v_2}{v_1^2} \quad , \quad s_1 = t_1 v_2 = x_0 \frac{v_2^2}{v_1^2} \quad .$$

E così via... Per raggiungere P_2, P_1 deve percorrere

lo spazio $x_0 + s_0 + s_1 + \ldots = x_0 \left[1 + \frac{v_2}{v_1} + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 + \ldots \right]$

nel tempo $t_0 + t_1 + t_2 + \ldots = \frac{x_0}{v_1} \left[1 + \frac{v_2}{v_1} + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 + \ldots \right]$

Zenone non sapeva che la somma di un numero infinito di termini può avere un limite finito (del resto il calcolo infinitesimale è stato sviluppato da Leibniz e Newton nel settecento); così concludeva paradossalmente che Achille pié veloce (P_1) non avrebbe mai raggiunto la tartaruga (P_2) o che una freccia non può raggiungere il bersaglio, pur sapendo che ciò è contrario all'evidenza sperimentale.

Invece noi sappiamo che, essendo $v_2/v_1 < 1$, la somma tra parentesi quadre vale $(1 - v_2/v_1)^{-1}$ e si ritrova $x = x_0 v_1/(v_1 - v_2)$, $t = x_0/(v_1 - v_2)$. Dividere un intervallo in un numero infinito di tratti non vuol dire che occorre un tempo infinito per percorrerlo.

Abbiamo ripreso questo esempio nella visuale di Zenone per esporre la soluzione corretta, basata sul calcolo infinitesimale (che in realtà non è nemmeno necessario nella soluzione semplice), e mettere quindi in evidenza come sia necessario ricorrere ai concetti dell'analisi matematica per una rappresentazione corretta dei fenomeni di movimento: del resto lo si capisce chiaramente se si riesaminano le connessioni tra spazio percorso, velocità e accelerazione nei vari casi trattati di moto rettilineo.

1.9 MOTO NEL PIANO. POSIZIONE E VELOCITÀ.

Nel caso che il moto sia vincolato a svolgersi su di un piano la traiettoria del punto P, mostrata in figura 1.10, è in generale una *linea curva*. La descrizione del moto diventa subito più complessa e necessita di un numero maggiore di informazioni rispetto al caso del moto rettilineo. Pensando per esempio a come avviene lo spostamento di P ad un certo istante, non basta specificare il valore numerico dello spostamento, ma occorre precisare in quale direzione sta avvenendo il moto e con quale verso; e in generale questa direzione istantanea cambia continuamente lungo la traiettoria.

Grandezze con caratteristiche direzionali oltre che numeriche si chiamano *vettori*; la definizione è meglio precisata nell'appendice C insieme alle principali proprietà algebriche e alle operazioni di derivazione e integrazione fatte su vettori. Consigliamo di leggere attentamente questa appendice prima di proseguire nello

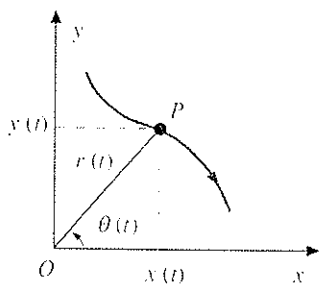


Fig. 1.10

studio del moto nel piano.

Vedremo tra poco che anche la velocità e l'accelerazione nel moto piano sono grandezze vettoriali e questa caratteristica è vera più in generale per qualsiasi tipo di moto in una, due o tre dimensioni; nel caso unidimensionale del moto rettilineo la direzione è fissata e la natura vettoriale, che non è stata messa esplicitamente in evidenza, si manifesta nel segno, cioè nel verso: infatti bisogna sempre precisare il verso del moto sulla retta (segno della velocità) e il segno dell'accelerazione.

Ritornando al moto su di un piano la posizione del punto viene individuata da due coordinate. Esse possono essere, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, $x(t)$ e $y(t)$ oppure, in termini di coordinate polari nel piano, $r(t)$ e $\theta(t)$. Le relazioni che intercorrono tra le coordinate cartesiane e quelle polari sono, come si deduce subito dalla figura 1.10,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \quad , \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \ \text{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x} \ . \end{cases}$$

La posizione del punto P può anche essere individuata per mezzo del *raggio vettore* (vedi appendice C)

Raggio vettore

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{OP} = x(t)\,\mathbf{u}_x + y(t)\,\mathbf{u}_y$$

dove $\mathbf{u}_x$ e $\mathbf{u}_y$ rappresentano i *versori degli assi cartesiani*, che si considerano fissi nel tempo. Se è nota la dipendenza dal tempo di $\mathbf{r}$, cioè la funzione $\mathbf{r}(t)$, è individuato il moto del punto P: conoscere $\mathbf{r}(t)$ significa ovviamente dare $x(t)$ e $y(t)$ oppure $r(t)$ e $\theta(t)$; ed è vero il viceversa.

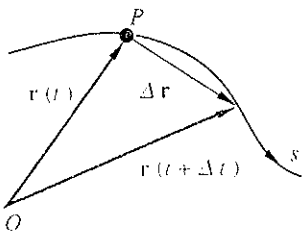


Fig. 1.11

La posizione del punto lungo la traiettoria può anche essere data da una coordinata curvilinea s, misurata a partire da un'origine arbitraria. Il valore di s esprime la lunghezza della traiettoria e varia nel tempo durante il moto: ds/dt indica la variazione temporale della posizione lungo la traiettoria cioè la velocità istantanea del punto, come definita nel modo rettilineo. Se diamo la forma della traiettoria e la velocità con cui viene percorsa abbiamo fornito una descrizione completa del moto. Questa può essere riassunta nella grandezza *velocità vettoriale* che ora definiamo.

Consideriamo due posizioni occupate dal punto P al tempo t e al tempo $t + \Delta t$: esse sono individuate dai vettori $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}$.

Si costruisce il rapporto incrementale $\dfrac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ e si definisce velocità vettoriale il limite per $\Delta t \to 0$:

Velocità vettoriale

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{1.17}$$

La velocità vettoriale è la derivata del raggio vettore rispetto al tempo. Osserviamo che al limite l'incremento $d\mathbf{r}$ del raggio vettore risulta in direzione tangente alla traiettoria nel punto P e in modulo eguale allo spostamento infinitesimo ds lungo la traiettoria, per cui possiamo scrivere $d\mathbf{r} = ds\,\mathbf{u}_t$ dove $\mathbf{u}_t$ è il versore della tangente alla curva, variabile nel tempo man mano che il punto avanza lungo la traiettoria. In sostanza pensiamo il moto come una successione di spostamenti rettilinei infinitesimi con direzione variabile: la direzione istantanea del moto

coincide con quella della tangente alla traiettoria nel punto occupato all'istante considerato. La (1.17) diventa più esplicita:

$$\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt}\,\mathbf{u}_T = v\,\mathbf{u}_T \quad ; \tag{1.18}$$

pertanto la velocità vettoriale $\boldsymbol{v}$ individua in ogni istante con la sua direzione e verso la direzione e il verso del moto e con il suo modulo $v = \frac{ds}{dt}$ la velocità istantanea con cui è percorsa la traiettoria.

Abbiamo visto che a livello infinitesimo $d\,\mathbf{r} = ds\,\mathbf{u}_T$; però dalla figura 1.11 si vede che per uno spostamento finito l'incremento del raggio vettore $\Delta\,\mathbf{r}$ è ben diverso dallo spazio effettivamente percorso lungo la curva (uno è la corda, l'altro l'arco). Si faccia quindi attenzione a non confondere i due concetti, raggio vettore e suoi incrementi finiti da una parte, percorso effettivo dall'altra; per esempio un punto potrebbe percorrere un'orbita chiusa ritornando al punto di partenza e in tal caso il raggio vettore non cambia, ma il punto ha percorso una traiettoria finita ($\Delta\,\mathbf{r} = 0$, $\Delta\,s \neq 0$) con velocità vettoriale istantanea diversa da zero (semmai, con ovvia estensione dal moto rettilineo, risulta nulla la velocità vettoriale media).

Vogliamo ora sottolineare una proprietà fondamentale delle relazioni vettoriali come (1.18) con l'aiuto anche della figura 1.11. La traiettoria del moto e il fatto che la velocità si scrive $v\mathbf{u}_T$ sono caratteristiche *intrinseche*, che cioè non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento. Si può spostare l'origine O in un'altra posizione, si possono ruotare gli assi, ma la curva (non la sua espressione analitica), la direzione, il verso, il modulo della velocità restano gli stessi. In figura 1.11 per esempio se si sposta l'origine cambia certamente $\mathbf{r}$, ma non $\Delta\,\mathbf{r}$ e quindi $d\,\mathbf{r}$. Si parla di *invarianza* delle relazioni vettoriali rispetto alla scelta del sistema di riferimento.

D'altra parte un vettore si scrive esplicitamente attraverso le sue componenti e queste sì dipendono dal sistema di riferimento. Calcoliamo le componenti della velocità nelle due situazioni più comuni.

Componenti cartesiane

Poiché $\mathbf{r} = x\,\mathbf{u}_x + y\,\mathbf{u}_y$,

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{u}_y = v_x\,\mathbf{u}_x + v_y\,\mathbf{u}_y \quad .$$

La velocità del punto P, che si muove lungo la traiettoria, ha come componenti cartesiani le velocità v_x e v_y dei due moti rettilinei descritti dai punti proiezione di P sugli assi cartesiani. Quindi $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ e, detto ϕ l'angolo tra il vettore $\boldsymbol{v}$ e l'asse x, $\operatorname{tg}\phi = v_y / v_x$: date le componenti possiamo ricostruire il vettore. Si osservi che se ruotiamo gli assi cambiano v_x e v_y.

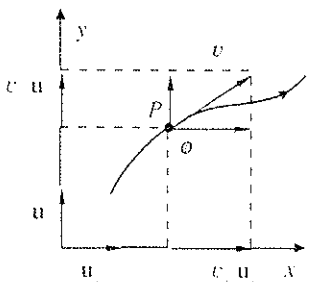


Fig. 1.12

Componenti polari

Introduciamo i vettori $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_\theta$, rispettivamente versore della direzione di r e versore ortogonale alla stessa, come in figura 1.13; si noti che questi versori cambiano direzione (ruotano) durante il moto.

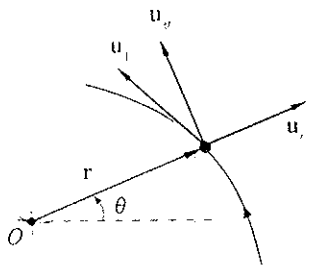
Il raggio vettore $\mathbf{r}$ può essere espresso come $r\,\mathbf{u}_r$ e pertanto:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{u}_r + r\,\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{u}_r + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_\theta = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\theta \qquad (1.19)$$

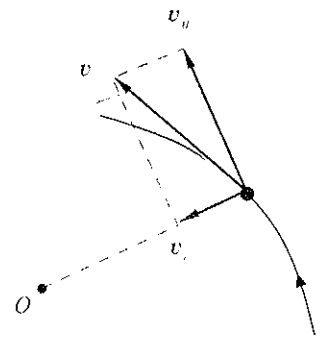
Si è utilizzato per la derivata del vettore $\mathbf{u}_r$ il risultato ricavato in appendice C.

Velocità radiale
Velocità trasversa

La velocità che, si ricordi, è sempre tangente alla traiettoria si scompone in due componenti: la *velocità radiale* $\boldsymbol{v}_r$, diretta lungo $\mathbf{r}$ e di modulo dr/dt e la *velocità trasversa* $\boldsymbol{v}_\theta$, ortogonale a $\mathbf{r}$ e di modulo $r\,d\theta/dt$; $\boldsymbol{v}_r$ dipende dalle variazioni del modulo del raggio vettore, $\boldsymbol{v}_\theta$ è collegata alle variazioni di direzione dello stesso. Il risultato della scomposizione si può anche ottenere considerando che lo spostamento infinitesimo $d\,\mathbf{r}$ ha le componenti $d\,r$ e $r\,d\,\theta$ (a meno di infinitesimi di ordine superiore): dividendo per $d\,t$ si hanno le componenti della velocità.



versori



velocità

Fig. 1.13

Il modulo della velocità è, con queste componenti,

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\ .$$

In definitiva abbiamo mostrato come si determina la velocità se è nota la posizione, in coordinate cartesiane o polari. Analogamente a quanto fatto per il moto rettilineo, ci poniamo il problema inverso e la soluzione si ricava da (1.17) integrando:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)\,d\,t\ . \qquad (1.20)$$

L'integrazione esplicita può essere effettuata ricorrendo alle componenti, per esempio cartesiane, e ricadiamo nella (1.2), applicata ai moti rettilinei *componenti*; calcolate $x\,(t)$ e $y\,(t)$ abbiamo $\mathbf{r}\,(t)$. Resta essenziale la conoscenza delle condizioni iniziali.

1.10 ACCELERAZIONE NEL MOTO PIANO.

L'accelerazione nel moto piano deve esprimere le variazioni della velocità sia come modulo che direzione e quindi ci aspettiamo che abbia due componenti, una legata alla variazione del modulo della velocità e la seconda al cambiamento di direzione del moto. Nel moto rettilineo, dove la velocità mantiene sempre la stessa direzione, l'accelerazione è espressa da un solo termine.

Nella figura 1.14 è mostrata la situazione in modo qualitativo, ma già si capisce che l'accelerazione non è parallela alla velocità ed è diretta verso la concavità della curva che rappresenta la traiettoria.

Anche nel moto piano l'accelerazione si definisce come derivata della velocità rispetto al tempo (ed è una grandezza vettoriale):

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\,\boldsymbol{v}}{d\,t} = \frac{d^2\mathbf{r}}{d\,t^2} \qquad (1.21)$$

Utilizziamo (1.18) e la regola di derivazione di un vettore:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(v\,\mathbf{u}_T) = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{u}_T + v\,\frac{d\,\mathbf{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{u}_T + v\,\frac{d\phi}{dt}\,\mathbf{u}_N \quad .$$

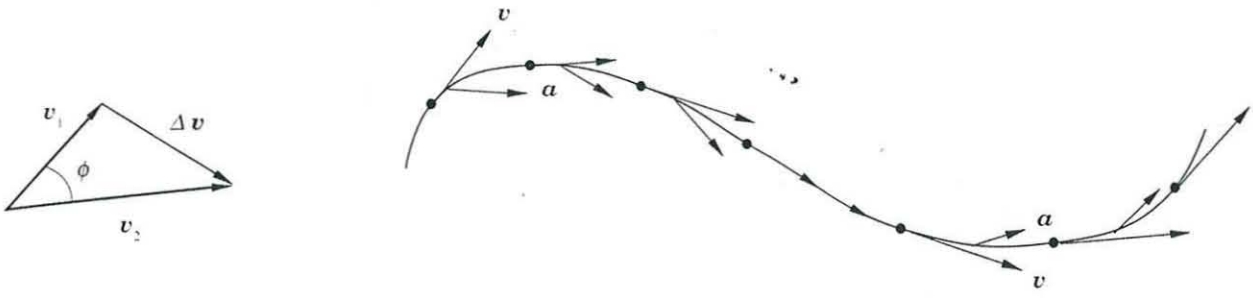


Fig. 1.14

La prima componente, parallela alla velocità, esprime la variazione del modulo della velocità; il secondo termine, dipendente dalla variazione di direzione della velocità, è ortogonale a questa: $\mathbf{u}_N$ è un vettore ortogonale a $\mathbf{u}_T$ diretto verso la concavità della traiettoria, e $d\phi/dt$ dice quanto rapidamente cambia la direzione di $\mathbf{u}_T$ e quindi di $\mathbf{u}_N$. Per esprimere in maniera più significativa la componente normale, ricorriamo alla figura 1.15 che mostra il moto durante un istante dt. Al limite per $\Delta t \to 0$ le rette normali alla traiettoria in due punti molto vicini tra loro si incontrano nel punto C, che coincide con il centro della circonferenza tangente alla traiettoria nel punto P (circonferenza osculatrice) e si chiama anche *centro di curvatura* della traiettoria nel punto P. L'arco di traiettoria ds è pari a $R\,d\phi$ con $R = CP$ *raggio di curvatura* (da non confondere con il raggio vettore). Al variare di P lungo la traiettoria variano sia il valore di R che la posizione di C, che può passare da una parte all'altra della curva come in figura 1.14 e andare all'infinito nei tratti rettilinei. Pertanto

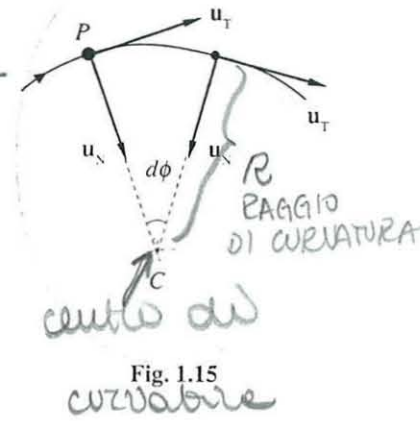


Fig. 1.15

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\,v$$

e sostituendo nell'espressione dell'accelerazione trovata prima

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\mathbf{u}_N = \boldsymbol{a}_T + \boldsymbol{a}_N \quad , \qquad (1.22)$$

in modulo $$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

Le due componenti si chiamano *accelerazione tangenziale* e *accelerazione normale* o *centripeta* (perché diretta sempre verso il centro di curvatura).

Accelerazione tangenziale
Accelerazione centripeta

In un moto curvilineo vario entrambe le componenti sono diverse da zero; se però il moto curvilineo è uniforme è nulla a_T: se invece il moto è rettilineo vario è nulla a_N e solo nel moto rettilineo uniforme $a_T = a_N = 0$. In altre parole con $a_T \neq 0$ il moto è sempre vario, con $a_N \neq 0$ è sempre curvilineo.

Le proprietà discusse finora non hanno bisogno del supporto di un sistema di

riferimento (sono invarianti). Determiniamo adesso le componenti cartesiane e polari dell'accelerazione, come fatto per la velocità.

Componenti cartesiane

Le componenti cartesiane dell'accelerazione sono le accelerazioni dei due moti rettilinei proiezioni sugli assi del moto di P lungo la traiettoria curva:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\,\mathbf{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\,\mathbf{u}_y = \frac{d^2x}{dt^2}\,\mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\mathbf{u}_y = a_x\,\mathbf{u}_x + a_y\,\mathbf{u}_y \quad .$$

Se ϕ è l'angolo che $\mathbf{u}_t$ forma con $\mathbf{u}_x$, si deduce dalla figura 1.16 che:

$$\underline{a_x = \frac{dv}{dt}\cos\phi - \frac{v^2}{R}\,\operatorname{sen}\phi \;;}$$

$$\underline{a_y = \frac{dv}{dt}\,\operatorname{sen}\phi + \frac{v^2}{R}\cos\phi \;.}$$

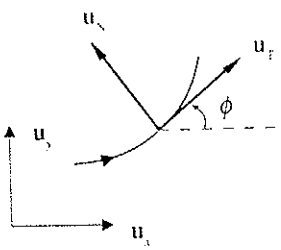


Fig. 1.16

Dalle componenti tangenziale e centripeta si ricavano subito quelle cartesiane; e viceversa, basta risolvere il sistema lineare nelle incognite dv/dt e v^2/R.

Componenti polari

Ci serviamo di (1.19) e ricordiamo che $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_\theta$ non sono fissi:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\,\mathbf{u}_r + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_\theta\right) =$$
$$= \frac{d^2r}{dt^2}\,\mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_\theta + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\mathbf{u}_\theta + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} \quad .$$

Considerando che $\dfrac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_\theta$ e che $\dfrac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_r$ (infatti dalla figura 1.13 si vede che per una variazione positiva di θ $d\mathbf{u}_\theta$ è opposto a $\mathbf{u}_r$) si ha

$$\boldsymbol{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{u}_r + \left[2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\mathbf{u}_\theta$$

da cui

$$\boldsymbol{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{u}_r + \left[\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\mathbf{u}_\theta \quad . \tag{1.23}$$

Accelerazione radiale
Accelerazione trasversa

Il primo termine rappresenta l'*accelerazione radiale* e il secondo l'*accelerazione trasversa*. Anche a_r e a_θ si possono mettere in relazione con a_x e a_y o a_t e a_N.

In base al particolare problema fisico da affrontare si utilizzerà una delle rappresentazioni trovate. Comunque sia, l'effettiva presenza di una delle compo-

nenti dell'accelerazione implica l'esistenza di una forza, agente sul punto materiale, con componente non nulla parallela a quella dell'accelerazione.

Come già fatto in relazione a (1.17) e (1.20), da (1.21) si deduce in generale che, nota l'accelerazione e il valore della velocità all'istante t_0, la velocità in un istante t è data da

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(t)\, dt \qquad (1.24)$$

e valgono le stesse considerazioni fatte in proposito di (1.20) per il calcolo effettivo dell'integrale.

1.11 MOTO CIRCOLARE

Si chiama *moto circolare* un moto piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza. Considerando che la velocità varia continuamente in direzione l'accelerazione centripeta è sempre diversa da zero (e quindi agisce una forza, detta centripeta, diretta verso il centro della circonferenza). Nel moto circolare uniforme la velocità è costante in modulo e l'accelerazione tangente è nulla per cui $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_N$; se invece il modulo della velocità cambia nel tempo il moto circolare non è uniforme e $\boldsymbol{a}_T$ è diversa da zero; in questo caso la direzione dell'accelerazione non passa per il centro della circonferenza (oltre alla forza centripeta agisce anche una forza tangenziale).

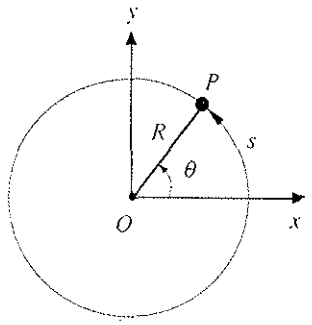


Fig. 1.17

Il moto circolare può essere descritto facendo riferimento allo spazio percorso sulla circonferenza $s(t)$ oppure utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso dall'arco $s(t)$, con $\theta(t) = s(t)/R$.

L'assumere come variabile l'angolo $\theta(t)$ significa in sostanza porsi in un sistema di coordinate polari di centro in O in cui il moto avviene con $r(t) = R$ = costante e $\theta(t)$ variabile. Anche la rappresentazione in coordinate cartesiane è legata come sappiamo a $\theta(t)$: $x(t) = R \cos \theta(t)$, $y(t) = R \operatorname{sen} \theta(t)$.

Siamo naturalmente interessati alle variazioni dell'angolo nel tempo e pertanto definiamo la *velocità angolare* come la derivata dell'angolo rispetto al tempo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} \qquad (1.25)$$

Velocità angolare

Risulta che la velocità angolare è proporzionale alla velocità con cui è descritta la circonferenza; se v è variabile lo è anche ω.

Ricollegandoci a (1.19), nel moto circolare la velocità radiale è identicamente nulla perché il raggio vettore è costante in modulo e la velocità trasversa coincide con la velocità: da $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$ ritroviamo $v = R\omega$ (tutto ciò è vero se l'origine coincide col centro della circonferenza).

Il moto circolare più semplice è quello uniforme: v e ω sono costanti e le leggi orarie, con riferimento alle due variabili utilizzate, si scrivono

$$s(t) = s_0 + vt \qquad s = s_0 \quad \text{per} \quad t = 0$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t \qquad \theta = \theta_0 \quad \text{per} \quad t = 0$$

Ripetiamo che il termine uniforme significa esclusivamente costanza del modu-

lo della velocità: il moto circolare uniforme è un moto accelerato con accelerazione costante, ortogonale alla traiettoria,

$$a = a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \tag{1.26}$$

Si tratta inoltre di un moto periodico con periodo $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$, corrispondente al tempo necessario per compiere un giro completo. I moti proiettati sugli assi cartesiani sono

$$x = R\cos\theta = R\cos(\omega t + \theta_0) \quad ,$$

$$y = R\,\text{sen}\,\theta = R\,\text{sen}\,(\omega t + \theta_0) \quad ,$$

cioè due moti armonici di eguale ampiezza e fase iniziale, sfasati tra loro di $\pi/2$, e con periodo coincidente con quello del moto circolare uniforme. Numericamente la velocità angolare è eguale alla pulsazione, anche se il significato fisico delle due grandezze è diverso.

Nel caso del moto circolare non uniforme oltre all'accelerazione centripeta, che è variabile perché la velocità varia anche in modulo, dobbiamo considerare anche l'accelerazione tangenziale $a_T = dv/dt$. Siccome è variabile anche ω definiamo l'accelerazione angolare

Accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R} \tag{1.27}$$

Se è nota la legge oraria angolare $\theta(t)$ con le due derivazioni successive (1.25) e (1.27) determiniamo le variazioni dell'angolo e della velocità angolare. Viceversa, nota la funzione $\alpha(t)$, possiamo integrare ottenendo:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt \tag{1.28}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt \quad . \tag{1.29}$$

Qualora in un particolare problema sia nota la funzione $\alpha(\theta)$, invece di $\alpha(t)$, possiamo calcolare l'incremento della velocità angolare in corrispondenza all'incremento angolare $\theta - \theta_0$. Infatti

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega\,d\theta}{d\theta\,dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \alpha\,d\theta = \omega\,d\omega \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 \tag{1.30}$$

Si noti ancora una volta come siano importanti, quando si integra, le condizioni iniziali, cioè i valori di ω e θ nell'istante iniziale o di ω nella posizione iniziale.

Un caso particolare di moto circolare non uniforme è costituito dal moto circolare uniformemente accelerato in cui α = costante ovvero a_T = costante. Da (1.28) e (1.29) abbiamo, posto $t_0 = 0$,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

L'accelerazione centripeta vale $a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$.

Si sarà certamente notata la completa analogia matematica tra la trattazione del moto rettilineo e quella del moto circolare fatta tramite $\theta(t)$: il significato fisico e la geometria sono diversi, ma le equazioni a cui si arriva hanno la stessa struttura. Ciò deriva dal fatto che con la scelta della descrizione angolare abbiamo ridotto un problema bidimensionale a un problema unidimensionale. Mentre però nel moto rettilineo la descrizione unidimensionale è ovviamente completa, nel moto circolare con $\omega(t)$ e $\alpha(t)$ descriviamo solo l'evoluzione temporale del moto, che è legato esclusivamente al modulo della velocità, e non rendiamo conto delle variazioni di direzione che portano all'accelerazione centripeta. E infatti $\boldsymbol{a}_N = \frac{v^2}{R}\,\mathbf{u}_N$ è stata calcolata con un ragionamento giustamente bidimensionale nel paragrafo 1.9.

Ad ogni modo, la comodità dell'uso di $\theta(t)$ è innegabile, perché si risolvono i problemi di moto circolare con formule analoghe a quelle del moto rettilineo; basta poi ricordare che istante per istante ad $\boldsymbol{a}_T = \alpha R\,\mathbf{u}_T$ bisogna sommare vettorialmente $\boldsymbol{a}_N = \omega^2 R\,\mathbf{u}_N$ per avere il corretto valore dell'accelerazione (e quindi il corretto legame con le forze agenti).

ESEMPIO 1.3

Descrivere il moto circolare in cui $\alpha = -k\omega$, con k costante positiva.

Soluzione
È un moto circolare vario, con equazione differenziale

$$\frac{d\omega}{dt} = -k\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -k\,dt \Rightarrow \omega = \omega_0 e^{-kt}.$$

Il moto è smorzato esponenzialmente (vedi paragrafo 1.7). Da (1.29) si ricava inoltre $\omega(\theta) = \omega_0 - k\theta$ e si calcola l'angolo di arresto $\theta = \omega_0/k$.

ESEMPIO 1.4

Descrivere il moto circolare in cui $\alpha = -k^2\theta$.

Soluzione
È ancora un moto vario, che obbedisce all'equazione $\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta = 0$: la soluzione è $\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(kt + \phi)$. Il punto descrive un arco di circonferenza di ampiezza angolare $2\theta_0$ con moto armonico semplice. La velocità angolare di questo moto è $\omega = \frac{d\theta}{dt} = k\theta_0 \cos(kt + \phi)$, variabile nel tempo; la pulsazione è k, costante.

Notazione vettoriale

Ampliamo il concetto di velocità angolare del moto circolare mostrando come le si possono associare caratteristiche vettoriali. Si definisce velocità angolare il vettore $\boldsymbol{\omega}$ che ha queste proprietà: il modulo è $\omega = d\theta/dt$, la direzione è perpendicolare al piano in cui giace la circonferenza e il verso è tale che dall'estremo del vettore $\boldsymbol{\omega}$ il moto appaia antiorario (vedi figura 1.18). In base alla definizione risulta evidente che

$$\boldsymbol{v} = \omega \times \mathbf{r} \tag{1.31}$$

Di norma ω si pensa applicata nel centro della circonferenza, nel qual caso $r = R$. La (1.31) resta però valida se ω è applicata in un qualsiasi altro punto dell'*asse di rotazione* (retta ortogonale al piano del moto e passante per il centro della circonferenza); infatti direzione e verso di $\boldsymbol{v}$ restano eguali e il modulo vale ancora $v = \omega r \operatorname{sen} \phi = \omega R$.

Se diamo ω, individuiamo pertanto l'asse di rotazione e il piano del moto circolare, con quale verso è percorsa la circonferenza e come varia l'angolo nel tempo. Da ω, per derivazione rispetto al tempo, si ottiene il vettore accelerazione angolare α che risulta parallelo a ω, dato che questa ha direzione costante, e ha verso determinato dalla variazione del modulo di ω e modulo $\alpha = d\omega/dt$.

Tramite α e ω si può esprimere l'accelerazione del moto circolare:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \times \boldsymbol{r}) = \frac{d\omega}{dt} \times \boldsymbol{r} + \omega \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \underbrace{\alpha \times \boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{a}_T} + \underbrace{\omega \times \boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{a}_N} \tag{1.32}$$

Il primo termine $\alpha \times \boldsymbol{r}$ è l'accelerazione tangenziale $\boldsymbol{a}_T$ (modulo αR), il secondo $\omega \times \boldsymbol{v}$ è l'accelerazione centripeta $\boldsymbol{a}_N$ (modulo $\omega^2 R$).

Nel moto circolare uniforme ω è un vettore costante anche in modulo, α è nulla e $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_N = \omega \times \boldsymbol{v}$.

Osservando la figura 1.18 notiamo una proprietà importante: il vettore $\boldsymbol{r}$ applicato in O' ha modulo costante e descrive un moto rotatorio attorno all'asse di rotazione, ovvero alla direzione di ω, formando un angolo ϕ costante con l'asse stesso; la sua derivata $d\boldsymbol{r}/dt$ si può scrivere $\omega \times \boldsymbol{r}$. Anche il vettore $\boldsymbol{v}$, che nel moto

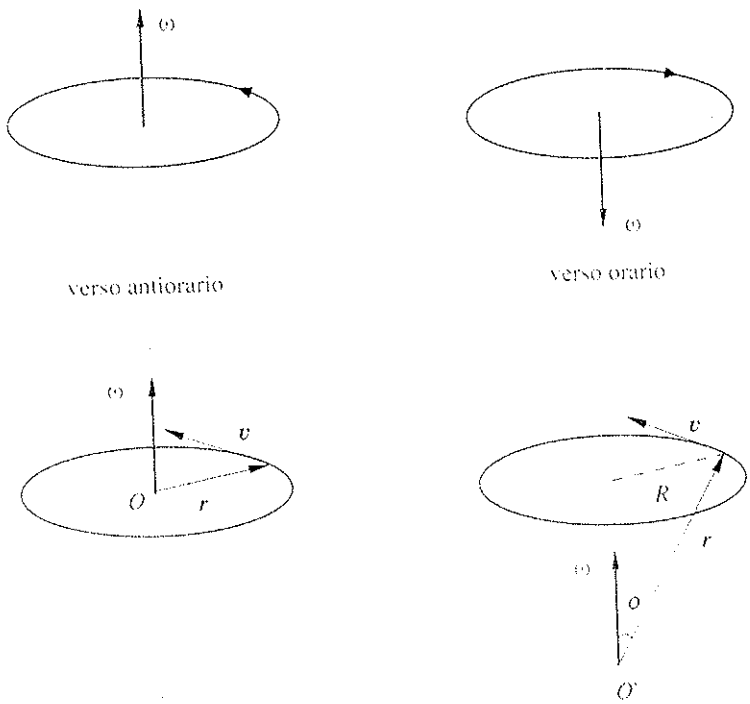


Fig. 1.18

circolare uniforme ha modulo costante, descrive una rotazione attorno ad ω, con cui forma l'angolo $\phi = \pi/2$, e la sua derivata $d\boldsymbol{v}/dt$ si può scrivere $\omega \times \boldsymbol{v}$. A questo tipo di moto, rotazione di un asse rispetto ad un altro asse fisso, con cui forma un angolo costante e ha un punto in comune, si dà il nome di *moto di precessione*.

Moto di precessione

La proprietà importante è la seguente: dato un vettore di modulo costante **A**, che descrive un moto di precessione con velocità angolare ω, la sua derivata temporale può sempre essere scritta

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \omega \times \mathbf{A} \,. \tag{1.33}$$

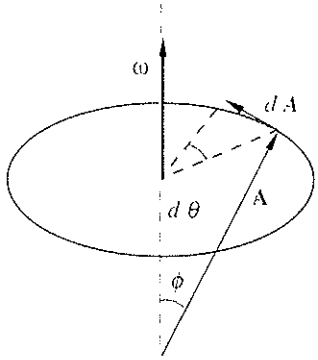


Fig. 1.19

Vediamo che $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ risulta ortogonale ad **A** come deve essere per un vettore di modulo costante (vedi appendice C); inoltre, per quanto riguarda direzione e verso, la (1.33) si verifica subito guardando la figura 1.19; in modulo, $dA = A \text{ sen } \phi \, d\theta$ e $dA/dt = A \text{ sen } \phi \, d\theta/dt = \omega A \text{ sen } \phi = |\omega \times \mathbf{A}|$.

Abbiamo considerato finora solo un moto circolare che si svolge sempre nello stesso piano; più in generale può avvenire che per un tempo dt la rotazione avvenga rispetto ad un certo asse e in un istante successivo rispetto ad un altro asse, cioè che ω sia funzione del tempo anche in direzione; pure in tal caso (1.33) resta valida.

1.12 MOTO PARABOLICO DEI CORPI.

Studiamo, come estensione di quanto trattato nel paragrafo 1.5, il moto (nel vuoto) di un punto P lanciato dall'origine O con velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$ formante un

Unità di misura			
velocità angolare	rad/s = rad s^{-1}	accelerazione angolare	rad/s^2 = rad s^{-2}

angolo α con l'asse delle ascisse (asse orizzontale). In particolare vogliamo calcolare la traiettoria, la massima altezza raggiunta e la posizione G in cui il punto ricade sull'asse x ovvero la *gittata* OG. Il moto è caratterizzato da un'accelerazione costante $\boldsymbol{a} = \mathbf{g} = -g\,\mathbf{u}_y$ e le condizioni iniziali sono $\mathbf{r} = 0$ e $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$ al tempo $t = 0$, istante di lancio.

Secondo (1.24)

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \int_0^t \boldsymbol{a}(t)\, dt = \boldsymbol{v}_0 - g\, t\, \mathbf{u}_y \,.$$

Vediamo innanzitutto che la velocità sta sempre nel piano individuato dai vettori costanti $\boldsymbol{v}_0$ e **g**, che è il piano x, y della figura 1.20. Poiché $\boldsymbol{v}_0 = v_0 \cos\alpha\, \mathbf{u}_x + v_0 \text{ sen } \alpha\, \mathbf{u}_y$

$$\boldsymbol{v}(t) = v_0 \cos\alpha\, \mathbf{u}_x + (v_0 \text{ sen } \alpha - g\, t)\, \mathbf{u}_y \,.$$

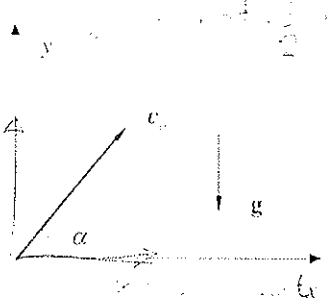


Fig. 1.20

Le velocità dei moti proiettati sugli assi sono $v_x = v_0 \cos\alpha$ (costante) e $v_y = v_0 \text{ sen } \alpha - g\, t$. Quindi le leggi orarie dei moti proiettati sono

$$x = v_0 \cos\alpha\, t \qquad y = v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \ ;$$

sull'asse x il moto è uniforme, sull'asse y uniformemente accelerato (eguale a quello del terzo caso del paragrafo 1.5). Si noti che abbiamo applicato (1.20) integrando direttamente sulle componenti della velocità per ottenere le componenti x e y di $\mathbf{r}(t)$.

La traiettoria viene ricavata eliminando il tempo tra $x(t)$ e $y(t)$ e ottenendo così la funzione $y(t)$: $t = x/v_0 \cos\alpha$ e

TRAIETTORIA

$$y(x) = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2$$

che è l'equazione di una *parabola*.

La direzione del moto, in funzione del tempo o della coordinata x, può essere caratterizzata dall'angolo ϕ che il vettore velocità forma con l'asse orizzontale:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{v_0 \cos\alpha}\, t = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}\, x$$

Per calcolare la *gittata OG* imponiamo $y(x) = 0$ e otteniamo due soluzioni: $x = 0$ ovviamente e

Gittata

$$x_G = \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha \operatorname{tg}\alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha}{g} = 2 x_M$$

con $x_M = v_0^2 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha / g$ coordinata del punto di mezzo del segmento OG e quindi, per la simmetria della parabola, ascissa del punto di massima altezza. L'*altezza massima* raggiunta è pertanto

Altezza massima

$$y(x_M) = y_M = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2 g}$$

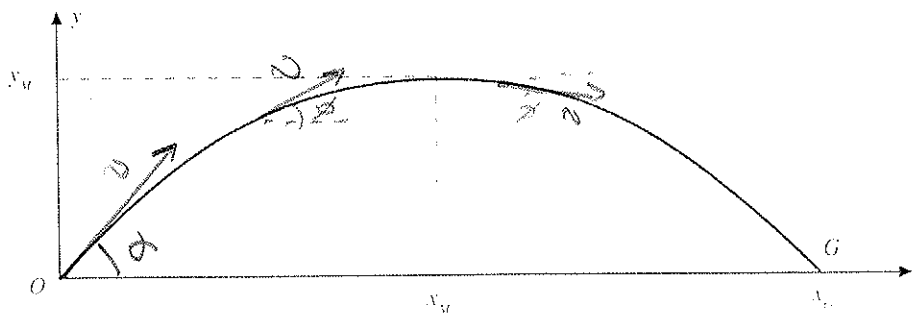


Fig. 1.21

L'angolo di lancio per cui si ha la gittata massima si ottiene con la condizione $\frac{dx_G}{d\alpha} = 0$, cioè $\frac{2 v_0^2}{g}(-\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0$: risulta $\alpha = 45°$.

L'altezza massima y_M può ottenersi anche in altri modi: per esempio si annulla

dy/dx, cioè si impone $\text{tg}\,\alpha - (g/v_0^2 \cos^2\alpha)\,x = 0$, si ricava l'ascissa del massimo x_M e si calcola $y(x_M)$; oppure si sfrutta il fatto che nel punto di massima altezza la velocità è orizzontale e quindi $v_y = 0$, cioè $t = t_M = v_0 \,\text{sen}\,\alpha / g$: sostituendo in $x(t)$ e $y(t)$ si ritrovano x_M e y_M.

Il tempo totale di volo t_G è pari al tempo impiegato a percorrere OG con velocità costante $v_x = v_0 \cos\alpha$: $t_G = 2\,x_M / v_0 \cos\alpha = 2v_0 \,\text{sen}\,\alpha / g = 2\,t_M$; evidentemente t_G coincide con il tempo necessario per salire all'altezza y_M e ritornare al suolo.

Notiamo infine che nella posizione G la velocità è la stessa in modulo che alla partenza, ma è posta simmetricamente rispetto all'asse x:

$$v_x(t_G) = v_0 \cos\alpha \quad , \quad v_y(t_G) = -v_0 \,\text{sen}\,\alpha \quad , \quad \text{tg}\,\phi = -\,\text{tg}\,\alpha \,.$$

Le caratteristiche geometriche del moto parabolico di un corpo vicino alla superficie terrestre si comprendono chiaramente nel sistema cartesiano adottato che è in definitiva il più naturale in questo problema in cui c'è una direzione di particolare importanza, quella di **g**, a 90° con una direzione di uso pratico molto comune, quella orizzontale. Invece, per esempio, nella trattazione del moto circolare è certamente più semplice servirsi di un sistema di coordinate polari con centro nel centro di simmetria del sistema, mentre non hanno particolare significato gli assi x e y. È dunque la situazione fisica a suggerire la scelta del sistema di riferimento più adatto; se però non ci sono motivi di preferenza di un dato sistema, conviene scegliere un sistema cartesiano.

1.13 MOTO NELLO SPAZIO. COMPOSIZIONE DI MOTI.

Nel caso più generale il punto P descrive una traiettoria curva nello spazio; questo moto tridimensionale può essere rappresentato, in coordinate cartesiane, come la somma di tre moti rettilinei lungo gli assi di riferimento per cui scriviamo:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{u}_x + y(t)\,\mathbf{u}_y + z(t)\,\mathbf{u}_z$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{u}_y + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{u}_z = v_x\,\mathbf{u}_x + v_y\,\mathbf{u}_y + v_z\,\mathbf{u}_z$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\mathbf{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathbf{u}_z = a_x\,\mathbf{u}_x + a_y\,\mathbf{u}_y + a_z\,\mathbf{u}_z \,.$$

Secondo la procedura già nota da $\boldsymbol{a}(t)$ risaliamo a $\mathbf{r}(t)$ con due successive integrazioni, note le condizioni iniziali $\mathbf{r}_0$ e $\boldsymbol{v}_0$. La velocità $\boldsymbol{v}$ è sempre tangente alla traiettoria, indica il verso del moto e in modulo vale ds/dt, l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ non è parallela a $\boldsymbol{v}$ e indica, fisicamente, la direzione e il verso della forza agente che incurva la traiettoria.

Non sviluppiamo ulteriormente la cinematica nello spazio perché non ne avremo bisogno nel seguito della trattazione. Ci occupiamo invece, con vari esempi, della composizione di moti. Richiamiamo i due casi già visti: nel paragrafo 1.11 abbiamo mostrato che un moto circolare uniforme si scompone in due moti armonici semplici su assi ortogonali, di eguale ampiezza e periodo, sfasati di $\pi/2$, nel paragrafo 1.12 che il moto di un punto lungo un arco di parabola ha come moti componenti un moto rettilineo lungo l'asse orizzontale e un moto uniformemente accelerato lungo l'asse verticale. Adesso impostiamo il problema inverso: prendiamo due moti lungo gli assi x, y e calcoliamo il moto risultante nel piano.

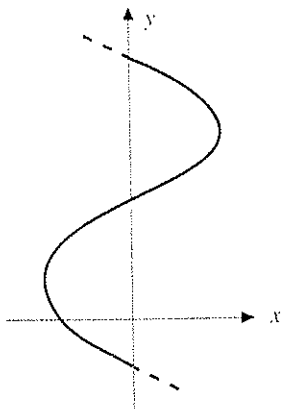


Fig. 1.22

a) Se i due moti sono uniformi con velocità v_x e v_y, il moto risultante è un moto uniforme lungo una retta che forma un angolo ϕ con l'asse delle x, tale che tg $\phi = v_y / v_x$.

b) I due moti sono uniformemente accelerati con accelerazioni a_x e a_y: allora $\boldsymbol{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y$ è un vettore costante. La velocità si scrive $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\, t$: se $\boldsymbol{v}_0$ è nulla oppure parallela ad $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}$ risulta costante in direzione e verso in quanto parallela all'accelerazione. Il moto è quindi uniformemente accelerato lungo una retta che forma con l'asse x un angolo tale che tg $\phi = a_y / a_x = v_y / v_x$.
Si noti che il risultato dipende dalle condizioni iniziali; in effetti negli altri casi il moto risultante è più complesso.

c) Il moto lungo l'asse x è armonico semplice, $x = A$ sen $(\omega t + \phi)$, lungo l'asse y è uniforme, $y = v\, t$. Eliminando il tempo tra $x(t)$ e $y(t)$ si ottiene l'equazione della traiettoria che è una sinusoide, figura 1.22, avente come asse l'asse delle ordinate:

$$x(y) = A \text{ sen } \left(\frac{\omega}{v} y + \phi\right) .$$

d) Il moto lungo l'asse x ha l'espressione $x = R$ sen $\omega t + \omega R\, t$, somma di un moto armonico semplice e di un moto uniforme con velocità ωR; lungo l'asse y abbiamo $y = R \cos \omega t + R$, moto armonico semplice con centro in $y = R$ (invece che in $y = 0$). La traiettoria del punto che descrive il moto risultante è mostrata in figura 1.23: si tratta di una cicloide. Questo moto è descritto, ad esempio, da un punto posto sul bordo di una ruota di raggio R che rotola senza strisciare lungo l'asse x con velocità costante $v = \omega R$ (argomento che verrà ripreso nel capitolo 6). Si può anche dire sinteticamente che il moto risultante è la somma di un moto circolare e di un moto rettilineo uniforme del centro della circonferenza.

e) In coordinate polari le equazioni del moto sono $r = vt$, $\theta = \omega t$: un moto rettilineo uniforme lungo un asse che ruota rispetto all'origine con velocità angolare costante (disco che ruota rispetto al centro con una scanalatura radiale lungo cui si muove il punto). In coordinate cartesiane

$$x = r \cos \theta = vt \cos \omega t \quad , \qquad y = r \text{ sen } \theta = vt \text{ sen } \omega t \quad .$$

I due moti non sono armonici semplici perché l'ampiezza è funzione del tempo. La traiettoria è la spirale mostrata in figura 1.24 insieme ai grafici di $x(t)$ e $y(t)$.

Dopo questi esempi nel piano trattiamo un solo caso in tre dimensioni, il moto di un punto somma di un moto armonico lungo l'asse x, $x = R \cos \omega t$, di un moto

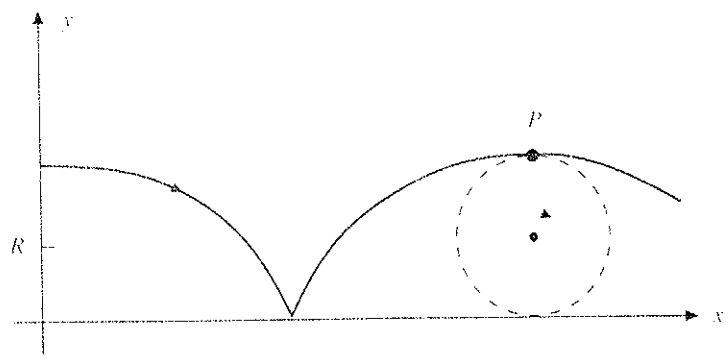


Fig. 1.23

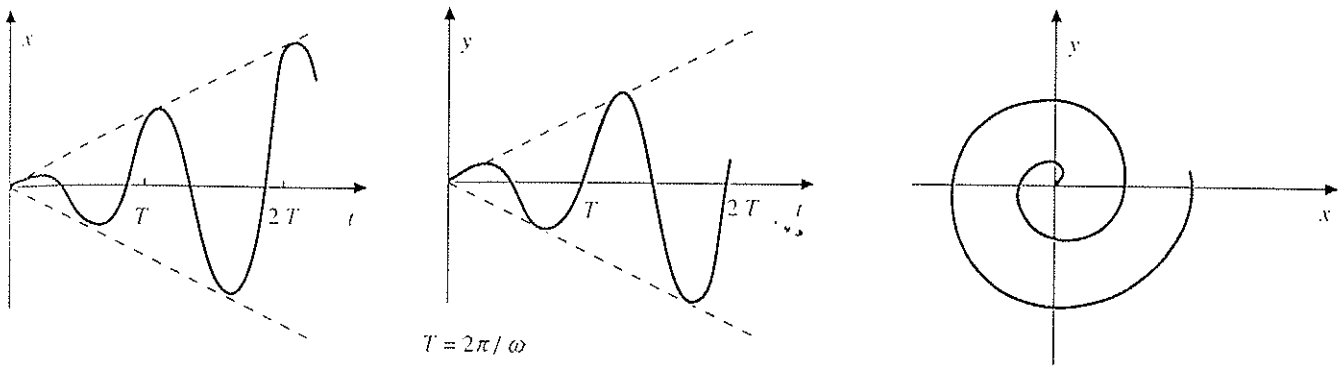


Fig. 1.24

armonico lungo l'asse y con le caratteristiche del precedente, ma sfasato di $\pi / 2$, $y = R \text{ sen } \omega t$, e di un moto uniforme lungo l'asse z, $z = v_z t$. Abbiamo cioè la somma di un moto circolare uniforme nel piano x, y e di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse z.

Il moto risultante è un *moto elicoidale* uniforme la cui traiettoria è costituita da un'elica cilindrica con passo costante, figura 1.25.

Le componenti della velocità sono:

$$v_x = -\omega R \text{ sen } \omega t \quad , \quad v_y = \omega R \cos \omega t \quad , \quad v_z \text{ (costante)}.$$

Da esse si può determinare la direzione istantanea del moto e il modulo della velocità

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + v_z^2} \quad , \quad \text{costante} \ .$$

L'accelerazione ha solo le componenti a_x e a_y, vale in modulo $\omega^2 R$ e in qualsiasi istante del moto è diretta verso l'asse z.

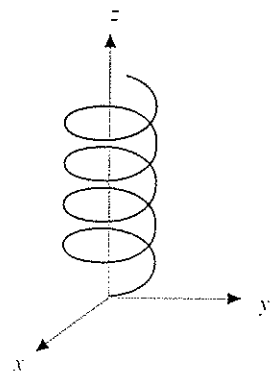


Fig. 1.25

Dall'esame degli esempi che abbiamo descritto risulta l'utilità del procedimento di composizione: infatti spesso è più semplice studiare le caratteristiche di un moto attraverso l'analisi delle componenti. Inoltre ci rendiamo conto che componendo opportunamente due o tre moti rettilinei lungo gli assi possiamo descrivere qualsiasi moto nel piano o nello spazio e ciò ha importanti conseguenze pratiche per la progettazione di particolari tipi di moto.

D'altra parte bisogna fare attenzione a non perdere di vista la situazione fisica e quindi ricordare sempre che il moto reale è quello che il punto descrive nel piano o nello spazio e non quello proiettato sugli assi.

1.14 RIEPILOGO.

Ripercorriamo gli argomenti presentati nel capitolo per mettere in evidenza i concetti più importanti e le procedure più significative.

Lo scopo iniziale del nostro studio della meccanica è di fissare il quadro della descrizione cinematica del moto di un punto precisando quali sono le grandezze fondamentali e come sono legate tra loro; per sviluppare questo programma risultano subito necessari strumenti forniti dall'analisi matematica e dal calcolo vettoriale.

Elenchiamo in maniera schematica i punti salienti:

- La descrizione del moto consiste nel determinare *come varia la posizione del punto in funzione del tempo*; se conosciamo la posizione ad un certo istante possiamo sapere come si sviluppa il moto se abbiamo la direzione istantanea del moto e la rapidità con cui avviene lo spostamento: ciò porta al concetto di *velocità* e possiamo concepire il moto come una successione di spostamenti infinitesimi $d\,\mathbf{r} = \boldsymbol{v}\,d\,t$.
- La *velocità* a sua volta *può cambiare* durante il moto e *le sue variazioni sono espresse dall'accelerazione*: $d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\,d\,t$.
- La *traiettoria* è il luogo dei punti occupati in funzione del tempo dalla punta del vettore $\mathbf{r}\,(t)$: questo dà la posizione del punto, ma non la direzione del moto espressa, come detto sopra, da $d\mathbf{r}$ e quindi da $\boldsymbol{v}$.
- *La velocità $\boldsymbol{v}$ è dunque sempre tangente alla traiettoria; l'accelerazione in generale non è parallela alla velocità*. La componente di $\boldsymbol{a}$ ortogonale a $\boldsymbol{v}$ descrive le variazioni della direzione del moto e non ha alcun legame con le variazioni del modulo di $\boldsymbol{v}$. Nel moto curvilineo c'è sempre una componente dell'accelerazione ortogonale alla traiettoria, nel moto rettilineo questa componente è sempre nulla.
- Da $\mathbf{r}\,(t)$ si passa a $\boldsymbol{v}\,(t)$ e ad $\boldsymbol{a}\,(t)$ derivando rispetto al tempo; se invece è data $\boldsymbol{a}\,(t)$ il passaggio inverso si fa integrando ed è essenziale la conoscenza delle condizioni iniziali.
- Le *grandezze cinematiche fondamentali* sono dunque *posizione, velocità, accelerazione* e sono legate tra loro da operazioni di derivazione e di integrazione, conseguenza del fatto che lo studio dell'evoluzione del moto comporta il concetto di variazione che è espresso matematicamente dall'operazione di derivazione.
- $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ sono *grandezze vettoriali*: nella loro definizione oltre ad un numero bisogna dare una direzione e un verso; pertanto le variazioni di posizione e di velocità sono espresse completamente solo se si tiene conto sia della variazione del modulo che della variazione della direzione.
- È necessario specificare sempre in quale sistema di riferimento si descrive il moto: le coordinate del punto, le componenti di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{a}$, l'espressione analitica della traiettoria dipendono dal sistema di riferimento. Però le *relazioni più generali tra le grandezze cinematiche sono relazioni vettoriali* e in quanto tali sono *invarianti rispetto alla scelta del sistema di riferimento, cioè valgono in qualsiasi sistema di riferimento*. Quindi, se $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, questo comporta sempre $b_x = c_x$, $b_y = c_y$, $b_z = c_z$, ma i valori (b_x, b_y, b_z) e (c_x, c_y, c_z) cambiano col sistema di riferimento.

Questo è il quadro generale. Si vede così che parallelamente all'introduzione delle grandezze fisiche citate abbiamo dovuto richiamare i concetti matematici che ne permettono la spiegazione. Per non appesantire la trattazione i richiami matematici sono contenuti nelle appendici A e C che vanno lette e studiate adesso e saranno utilizzate per tutto il resto del volume.

Gli argomenti esposti sono stati chiariti con vari esempi: tra questi rivestono particolare importanza il *moto armonico semplice* e il *moto circolare* che ritroveremo rispettivamente nello studio dei fenomeni di oscillazione e di rotazione. Sempre a scopo di chiarezza e di semplicità abbiamo iniziato lo studio dal moto rettilineo che in realtà è un caso abbastanza particolare; però, a parte l'utilità didattica, vediamo che la sua conoscenza è essenziale nella composizione di moti.

Infine vogliamo attirare l'attenzione su un argomento di carattere diverso dai precedenti. Se da una parte la cinematica ha una struttura analitica che permette di calcolare le caratteristiche del moto, dall'altra alla base del calcolo devono esserci

state delle *misure* che, tanto per fissare due estremi, o hanno permesso di determinare $\mathbf{r}(t)$ oppure hanno fornito $\boldsymbol{a}(t)$ e le condizioni iniziali. La procedura di misura produce dei valori numerici (con un certo errore) ai quali bisogna associare una *unità di misura*. Per questa ragione ogni qual volta introduciamo nuove grandezze diciamo subito in che unità di misura vanno espresse. Il quadro completo delle grandezze e delle relative unità si trova in appendice B.

Ritorniamo, per concludere, al paragrafo 1.1: ci proponevamo di studiare il moto indipendentemente dalle cause che lo determinano e ora sappiamo come avviene il moto e come caratterizzarlo. Però la questione fondamentale è perché avviene il moto, quali sono le cause fisiche per cui un corpo entra in movimento e descrive un certo tipo di moto invece di un altro. Abbiamo già detto che la variabile cinematica che indica come un punto risponde a una sollecitazione esterna è l'accelerazione. Il prossimo capitolo è dedicato alla formulazione quantitativa di tale *legge del moto* per il punto materiale e alle sue più importanti conseguenze. Questa parte della meccanica si chiama *dinamica del punto* e contiene in particolare anche il problema dell'equilibrio statico, cioè lo studio delle condizioni per cui un punto resta in quiete.

2 DINAMICA DEL PUNTO

2.1 PRINCIPIO D'INERZIA. INTRODUZIONE AL CONCETTO DI FORZA.

L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa come già abbiamo anticipato nel capitolo precedente dal concetto di forza, determina la variazione dello stato di moto.

Galileo, estrapolando il risultato di prove sperimentali, formulò il *principio di inerzia: un corpo non soggetto a forze permane nel suo stato di moto*. Se il corpo è in moto con una certa velocità, questa rimane costante vettorialmente, $\boldsymbol{v}$ = costante (il corpo mantiene un moto rettilineo uniforme), mentre se è in quiete resta in tale stato, $\boldsymbol{v} = 0$.

E' evidente che il moto circolare uniforme non segue il principio d'inerzia in quanto la velocità rimane costante in modulo, ma varia in direzione a ciascun istante per effetto dell'accelerazione centripeta, e quindi di una forza. Se improvvisamente si annullasse tale forza il punto cesserebbe il moto circolare uniforme e inizierebbe un moto rettilineo uniforme con direzione secondo la tangente alla circonferenza nella posizione ove è cessata l'azione della forza.

Sottolineamo come tramite la formulazione del principio di inerzia, risultato notevolissimo in relazione ai mezzi di indagine assai limitati, Galileo avesse già anticipato l'idea, sviluppata nella legge di Newton, che l'interazione ossia l'*azione di una forza porta a una variazione della velocità*: l'azione di una forza cioè è quella di variare la velocità di un corpo, in modulo o in direzione o in entrambi.

La nozione primordiale di forza era legata alla sensazione di sforzo muscolare e successivamente allo sforzo esercitato da sistemi meccanici semplici, come ad esempio per effetto di una molla compressa o estesa o di una leva. In seguito tale concetto si è affinato con la constatazione che non è necessario un contatto per esercitare una forza, come avviene attraverso una interazione a distanza per le forze di attrazione gravitazionale o per quelle elettrostatiche, che si manifestano tra corpi carichi elettricamente.

La forza dunque *è la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici*. Intuitivamente possiamo affermare che alla forza è associata la nozione di intensità e di direzionalità. L'effetto di una forza cambia con la direzione, come viene evidenziato in figura 2.1. Nel caso a) si ha in generale un moto, nella situazione b) non si ha moto, ma solamente una deformazione del corpo e del supporto, nel caso c) infine non si manifesta alcun moto.

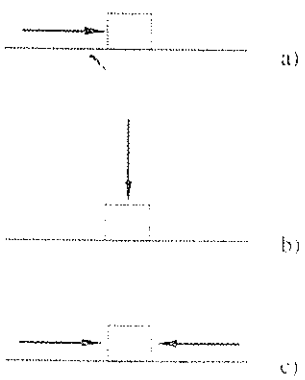


Fig. 2.1

Quest'ultimo caso introduce la nozione di eguaglianza di due forze e di *equilibrio*. Anche nel caso b) possiamo supporre che il piano orizzontale deformandosi produca una forza che fa equilibrio a quella applicata dall'esterno (tale reazione del

supporto è indicata come *reazione vincolare*, vedi paragrafo 2.4).

La forza può essere misurata staticamente tramite un *dinamometro*. Una molla estesa esercita una forza di richiamo che entro certi limiti di allungamento (limiti di elasticità) è proporzionale all'allungamento stesso. Se appendiamo ad una estremità della molla un corpo di massa m, che risente della forza di attrazione della terra $m\,\mathbf{g}$ (vedi paragrafo 2.7), in condizioni di equilibrio la forza $\mathbf{F}$ sviluppata dalla molla eguaglia quella esercitata dalla terra, che attira il corpo. Supponiamo ora di sospendere alla molla (dinamometro) un corpo campione e di misurare l'allungamento x_c della molla in condizioni di equilibrio. Indicata come forza campione F_c quella che produce l'allungamento x_c, per ogni altra forza, sia dovuta all'attrazione terrestre che ad un qualsiasi altro meccanismo applicabile al dinamometro col risultato di provocare l'allungamento x si ha $F/F_c = x/x_c$. E' possibile quindi misurare il modulo della forza F in termini della forza campione F_c e il dinamometro può essere tarato direttamente in unità di forza.

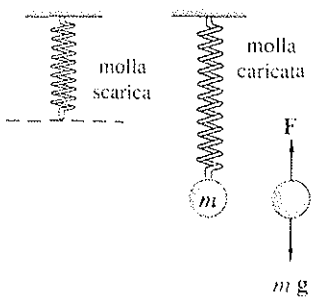


Fig. 2.2

2.2 LEGGE DI NEWTON

La formulazione quantitativa del legame tra la forza e lo stato del moto è data dalla *legge di Newton*

$$\mathbf{F} = m\,\boldsymbol{a} \tag{2.1}$$

Seconda legge di Newton

L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa tramite la forza $\mathbf{F}$, *determina l'accelerazione del punto ovvero la variazione della sua velocità nel tempo*; m rappresenta la *massa inerziale del punto*.

Fissata una determinata forza $\mathbf{F}$, l'effetto dinamico è tanto maggiore quanto minore è la massa del punto. Per un punto materiale che si muove con una determinata accelerazione $\boldsymbol{a}$, la forza necessaria a mantenere tale moto è tanto maggiore quanto maggiore è il valore di m.

Il termine *massa inerziale* è legato al fatto che la massa esprime l'inerzia del punto, cioè la sua resistenza a variare il proprio stato di moto, ossia a modificare la velocità (in modulo, direzione e verso).

Massa inerziale

Si giustifica così anche il nome *punto materiale*: per descrivere il comportamento dinamico del punto occorre conoscere la sua massa; si può cioè semplificare al massimo concependo un corpo privo di struttura, ma non si può rinunciare alla massa che è un concetto dinamico fondamentale per qualsiasi corpo.

In assenza di interazione con l'esterno la forza è nulla e quindi $\boldsymbol{a} = 0$, $\boldsymbol{v}$ = costante: la legge di Newton contiene, come caso particolare, il principio d'inerzia. Spesso la (2.1) viene indicata come *seconda legge di Newton*, mentre ci si riferisce al principio d'inerzia come *prima legge di Newton*.

La legge (2.1), che si può anche scrivere

$$\mathbf{F} = m\,\frac{d\,\boldsymbol{v}}{d\,t} = m\,\frac{d^2\,\mathbf{r}}{d\,t^2}\,,$$

esprime la legge fondamentale della dinamica del punto ; da essa vengono ricavate tutte le proprietà relative al moto di un punto materiale e in particolare, attraverso (1.24) e (1.20), la legge oraria $\mathbf{r}\,(t)$, qualora naturalmente si conoscano la funzione $\mathbf{F}\,(t)$ e le condizioni iniziali del moto. Viceversa è possibile, da misure di accelerazione compiute lungo la traiettoria del punto, determinare la forza agente, nota la

massa del punto. Si realizza in tal modo una misura dinamica della forza. Concettualmente è stato con tale metodo che si sono ricavate le proprietà della forza di gravitazione universale (capitolo 7).

La seconda legge di Newton è una legge sperimentale dedotta dall'analisi del moto di un punto soggetto a una determinata forza. Bisogna dire che, a posteriori, la miglior verifica di (2.1) è costituita dalla correttezza di tutte le deduzioni fatte a partire da essa. Sempre l'esperienza conferma che (2.1) è una legge vettoriale, fatto che va sempre tenuto presente. Nella pratica ciò vuol dire che la legge di Newton equivale, per esempio, a tre equazioni differenziali che danno i tre moti proiettati sugli assi.

Notiamo infine una caratteristica che verrà chiarita nel prossimo capitolo, relativa ai limiti di validità della legge di Newton nella forma (2.1), o (2.2) che vedremo tra poco: tali forme semplici sono valide solo se il moto è studiato in una particolare classe di sistemi di riferimento, i cosiddetti *sistemi di riferimento inerziali*; altrimenti compaiono nelle formule termini correttivi (capitolo 3).

2.3 QUANTITÀ DI MOTO. IMPULSO

Si definisce *quantità di moto* di un punto materiale il vettore

Quantità di moto

$$\mathbf{p} = m\,\boldsymbol{v} \quad ;$$

se la massa è costante la (2.1) si può allora scrivere

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\mathbf{a} \tag{2.2}$$

In realtà questa relazione è la forma più generale della legge di Newton, utilizzabile anche se la massa non è costante.

La massa può variare durante il moto per due motivi:

a) modifica della massa di un sistema macroscopico, approssimabile ai fini del moto ad un punto materiale, come avviene per esempio in un veicolo a motore che brucia carburante o in una scala mobile;
b) dipendenza della massa dalla velocità: secondo la *teoria della relatività ristretta* la massa varia al variare della sua velocità in accordo con la legge

Massa relativistica

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

dove m_0 rappresenta la massa a riposo ($v = 0$) e $c = 3 \times 10^8$ m s^{-1} è la velocità della luce nel vuoto.

Per renderci conto quantitativamente dell'effetto osserviamo la tabella, dove riportiamo la variazione relativa di massa $(m - m_0)/m_0$ per un punto materiale che si muova con velocità v.

	v(ms^{-1})	$\Delta m/m_0$
velocità del suono nell'aria	300	zero
velocità di fuga dalla terra	10^4	1×10^{-10}
particelle lente	10^6	6×10^{-6}
particelle relativistiche	10^8	6×10^{-2}

Risulta che la variazione è importante solo per velocità prossime a c e pertanto nelle condizioni sperimentali che incontreremo in questo testo possiamo assumere la massa indipendente dalla velocità.

Quindi nel seguito, poiché non tratteremo mai casi del tipo a), la massa sarà considerata sempre costante e (2.1) e (2.2) equivalenti.

Dalla (2.2) si ha $\mathbf{F}\,dt = d\mathbf{p}$; vediamo che l'azione di una forza durante un tempo dt provoca una variazione infinitesima della quantità di moto del punto. In termini finiti si ha

$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{F}\,dt = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} d\,\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\,\mathbf{p} \quad . \qquad (2.3)$$

Teorema dell'impulso

Il termine vettoriale $\mathbf{J}$, integrale della forza nel tempo, è chiamato *impulso della forza* e la relazione (2.3) esprime il *teorema dell'impulso*: *l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto; con m costante si ha ovviamente* :

$$\mathbf{J} = m\,(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) = m\,\Delta\,\boldsymbol{v} \quad .$$

Unità di misura

Ricordiamo che la *massa* è assunta come *grandezza fondamentale* e che la relativa unità di misura è il chilogrammo kg (appendice B).

L'unità di forza, secondo (2.1) è il kg m s^{-2}: questa unità, molto importante, si chiama newton e ha il simbolo N. Una forza di 1 N provoca su un punto di massa 1 kg un'accelerazione di 1 m s^{-2}.

Quantità di moto e impulso hanno la stessa unità di misura:

$$\text{kg m s}^{-1} = (\text{kg m s}^{-2})\ \text{s} = \text{N s} \quad .$$

Non c'è un nome particolare per il *newton per secondo*.

La variazione della quantità di moto è tanto maggiore quanto più elevato è il valore dell'impulso ovvero, per una determinata forza costante, quanto maggiore è il tempo in cui agisce la forza. Questo è il motivo per cui i fucili a canna lunga, a parità di forza esercitata dai gas di esplosione sul proiettile, hanno un tiro con gittata superiore a quella dei fucili a canna corta.

Il teorema dell'impulso è utilizzabile per calcolare effettivamente $\Delta\,\mathbf{p}$ solo se si conosce la funzione $\mathbf{F}(t)$; in particolare, se $\mathbf{F}$ = costante, si ottiene subito

$$\mathbf{F}\,t = m\,(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) \quad .$$

Se invece misuriamo $\Delta\,\mathbf{p}$, applicando il teorema della media all'integrale $\int_0^t \mathbf{F}\,dt$,

possiamo sempre calcolare il valore medio $\mathbf{F}_m$ della forza agente nell'intervallo di tempo t : $\mathbf{F}_m = \Delta \mathbf{p}/t$.

Quando $\mathbf{F}$ è nulla, $\Delta \mathbf{p} = 0$ e pertanto $\mathbf{p}$ = costante: *in assenza di forza applicata la quantità di moto di un punto materiale rimane costante* o, come si dice utilizzando una terminologia propria della Fisica, *la quantità di moto si conserva*. Si tratta evidentemente di un'altra formulazione del principio di inerzia.

Conservazione della quantità di moto

2.4 RISULTANTE DELLE FORZE. EQUILIBRIO. REAZIONI VINCOLARI

Su un punto materiale possono agire contemporaneamente più forze: si constata che il moto del punto ha luogo come se agisse una sola forza, la *risultante vettoriale delle forze* applicate al punto

Risultante delle forze

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \Sigma_i \mathbf{F}_i \quad ;$$

è questa una conferma della natura vettoriale di (2.1).

Di conseguenza dallo studio del moto di un punto materiale otteniamo informazioni solo sulla risultante delle forze agenti sul punto stesso, $\mathbf{R}$, e non sulle singole forze che concorrono a formare la forza risultante.

In particolare, affermare che la forza agente su un punto è nulla non significa necessariamente che il punto non risente di alcuna interazione con l'esterno, ma spesso indica che la somma delle forze agenti su di esso, cioè la risultante, è nulla.

Se $\mathbf{R} = 0$ e il punto ha inizialmente velocità nulla, esso rimane in quiete: sono realizzate le condizioni di equilibrio statico del punto. Devono quindi essere nulle le componenti stesse della risultante ovvero, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani,

$$\begin{aligned} &\mathbf{R} = \Sigma_i \mathbf{F}_i = 0 \qquad \Rightarrow \quad R_x = R_y = R_z = 0 \\ &\Rightarrow \ \Sigma_i F_{ix} = 0 \qquad \Sigma_i F_{iy} = 0 \qquad \Sigma_i F_{iz} = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

essendo F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} le componenti lungo gli assi della forza i-esima.

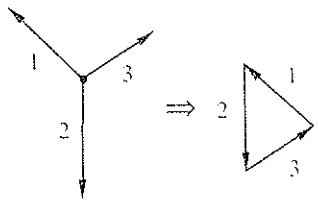


Fig. 2.3

In figura 2.3 è mostrata la condizione di equilibrio statico con due forze, che devono essere necessariamente eguali ed opposte, e con tre forze, che devono essere complanari e disposte secondo i lati di un triangolo; ciascuna forza deve infatti essere opposta e, in modulo, eguale alla risultante delle altre due. Se le forze agenti sono in numero superiore a tre, esse devono poter essere disposte, in base alla regola di somma vettoriale, in modo tale da formare una poligonale chiusa.

Reazioni vincolari

Se un corpo, soggetto all'azione di una forza o della risultante non nulla di un'insieme di forze, rimane fermo, dobbiamo dedurre che l'azione della forza provoca una reazione dell'ambiente circostante (reazione vincolare) che si esprime tramite una forza, eguale e contraria alla forza o alla risultante delle forze agenti, applicata al corpo stesso in modo tale che esso rimanga in quiete. Torneremo più in generale su questo argomento all'inizio del capitolo 5 quando parleremo del principio di azione e reazione o terza legge di Newton. Facciamo ora alcuni esempi di reazioni vincolari.

Il caso del corpo posato su di un tavolo, con il piano di appoggio orizzontale, lo abbiamo già incontrato nel paragrafo 2.1, figura 2.1 caso b). Il corpo è soggetto all'azione di attrazione della terra, perpendicolarmente al piano, e per effetto di tale forza preme sulla superficie del tavolo deformandola. Il tavolo deve produrre, viste le condizioni di quiete del corpo, una forza uguale e contraria alla forza di attrazione terrestre che chiamiamo reazione vincolare **N**. Se applichiamo ulteriori forze al corpo, normali al piano del tavolo, la reazione vincolare deve equilibrare la risultante **R** di tali forze: $\mathbf{R} + \mathbf{N} = 0$.

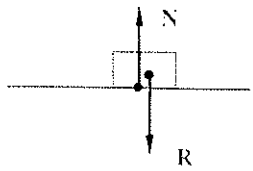


Fig. 2.1 b

Assumendo positivo il verso della forza verso l'alto, qualora per soddisfare la condizione di equilibrio **N** risultasse negativa (cioè rivolta verso il basso) significherebbe che il tavolo per mantenere il corpo fermo dovrebbe esercitare una forza di attrazione sul corpo. Tale situazione si presenta quando le forze applicate al corpo, con risultante diretta verso l'alto, hanno in modulo un valore superiore a quello della forza di attrazione terrestre. In queste condizioni il corpo non rimane appoggiato sul tavolo e non ha senso parlare di reazione vincolare del piano in quanto non esiste più una superficie di contatto tra corpo e piano di appoggio.

Un altro esempio di reazione vincolare è quello che si manifesta nella situazione fisica di un corpo appeso tramite un filo. Il corpo è in condizioni di equilibrio statico, soggetto all'attrazione terrestre e alla reazione del sistema filo-punto di aggancio (vedi più avanti paragrafo 2.14).

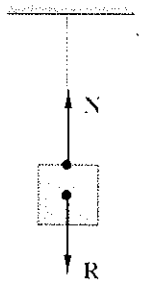


Fig. 2.4

In generale la reazione vincolare non è determinabile a priori, utilizzando una data formula, ma deve essere calcolata caso per caso dall'esame delle condizioni fisiche.

Il concetto di reazione vincolare ossia, come detto, di reazioni dell'ambiente circostante (tavolo o sistema filo-punto di aggancio nei due esempi discussi) non è tipico soltanto dell'equilibrio statico, ma, come vedremo, si estende anche al caso di corpi in moto lungo una superficie. E se durante il moto risultasse che ad un certo istante la reazione vincolare si annulla per diventare poi una forza attrattiva, nel senso appena discusso, vorrebbe dire che in quell'istante avviene il distacco del corpo dalla superficie.

2.5 CLASSIFICAZIONE DELLE FORZE.

Se consideriamo le forze responsabili di gran parte dei fenomeni studiati nella fisica classica, o anche in altre discipline quali la biologia, la chimica, l'ingegneria, esse sono tutte riconducibili a poche interazioni fondamentali, *l'interazione gravitazionale* e *l'interazione elettromagnetica*.

A livello nucleare e subnucleare si presentano altri due tipi di interazione, *l'interazione forte* e *l'interazione debole*, però tali argomenti non fanno parte dei contenuti di questo testo.

La scoperta che l'apparente grande varietà di tipi di forze è il manifestarsi, in fenomeni anche molto differenti, di poche interazioni fondamentali assume una grande rilevanza concettuale ed è il risultato di una lunga indagine sperimentale e teorica rivolta all'unificazione delle interazioni. Già nel 1800 si arrivò a dimostrare che i fenomeni elettrici e magnetici, di cui ci occuperemo nel testo di Fisica II, potevano essere unificati in un'unica teoria, che permetteva anche la spiegazione della propagazione della luce. Più recentemente si è compreso che è possibile operare un'ulteriore unificazione, a livello microscopico, tra interazione elettromagnetica e interazione debole (interazione elettrodebole).

Dell'altra *interazione fondamentale classica*, quella *gravitazionale*, daremo una descrizione in seguito nell'ambito di questo corso.

Il nostro studio però è ora rivolto ad individuare il tipo di moto di un punto o più in generale di un sistema di punti in interazione tra loro e col resto del mondo. L'interazione sarà esprimibile tramite una o più forze, la conoscenza della cui origine non rientra nei nostri scopi e non influenza per ora il nostro studio. Sarà invece essenziale poter esprimere queste forze con opportune espressioni analitiche da introdurre nella (2.1).

2.6 AZIONE DINAMICA DELLE FORZE.

Nel capitolo 1, dedicato alla cinematica del punto, abbiamo esaminato alcuni tipi di moto. Vediamo ora di individuare quali forze possono produrre tali moti.

Nel caso del moto rettilineo uniforme ($\boldsymbol{v}$ = costante, $\boldsymbol{a} = 0$) si ha ovviamente $\mathbf{F} = 0$; ripetiamo che questa situazione si può ottenere anche se agiscono varie forze purché la loro risultante sia nulla.

Se il moto è uniformemente accelerato ($\boldsymbol{a}$ = costante) la forza agente è vettorialmente costante (quindi in direzione, verso e modulo). Più in generale, se agisce una forza $\mathbf{F}$ = costante, la componente del moto nella direzione parallela alla forza è uniformemente accelerata con $a = F/m$. Lungo le altre due direzioni (ortogonali tra loro e alla forza) non c'è moto se le relative velocità iniziali sono nulle oppure si ha un moto rettilineo uniforme se le velocità iniziali lungo tali direzioni sono diverse da zero. Il moto risultante viene ottenuto componendo i moti sui tre assi ortogonali.

Quando $\mathbf{F}$ è variabile si ha un moto vario. Come abbiamo visto nel caso specifico del moto piano curvilineo (paragrafo 1.10), l'accelerazione presenta due componenti $\boldsymbol{a}_T$ e $\boldsymbol{a}_N$. Pertanto da (1.22)

$$\mathbf{F} = m\,\boldsymbol{a}_T + m\,\boldsymbol{a}_N = m\,\frac{dv}{dt}\,\mathbf{u}_T + m\,\frac{v^2}{R}\,\mathbf{u}_N \quad .$$

La risultante delle forze agenti sul punto materiale deve avere una componente ortogonale alla traiettoria, $\mathbf{F}_N$, per provocare la variazione di direzione della velocità. La componente tangenziale $\mathbf{F}_T$ della forza determina invece la variazione del modulo della velocità.

Forza centripeta

$\mathbf{F}_N$ si chiama *forza centripeta* ed è sempre diversa da zero in un moto curvilineo. Si faccia attenzione al fatto che la *forza centripeta non è un tipo particolare di forza*, come lo sono la forza peso, la forza elastica, le forze di attrito (che studieremo nei prossimi paragrafi), ma è *semplicemente il nome che si dà alla componente ortogonale alla traiettoria della risultante delle varie forze agenti.*

2.7 FORZA PESO.

Iniziamo l'esame dei tipi più comuni di forze che incontreremo nell'ambito del corso occupandoci della *forza peso*.

Sperimentalmente si osserva che in uno stesso luogo tutti i corpi, qualunque sia la massa inerziale, assumono se lasciati liberi la stessa accelerazione, detta di gravità, diretta verticalmente verso il suolo il cui modulo, che varia leggermente da posto a posto sulla terra, vale in media $g = 9{,}8\ \mathrm{ms}^{-2}$. Tale accelerazione è conseguenza della forza di attrazione terrestre, cioè dell'interazione gravitazionale tra la terra e il corpo.

Dalla (2.1) se agisce solo la forza peso **P** abbiamo $\mathbf{P} = m\,\boldsymbol{a} = m\,\mathbf{g}$, visto che $\boldsymbol{a} = \mathbf{g}$. Pertanto la forza peso risulta proporzionale alla massa e si scrive sempre $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}$. Si tratta di una forza costante e in assenza di altre forze il moto è uniformemente accelerato nella direzione parallela a **g**.

Forza peso

$\vec{P} = m\vec{g}$

Se invece agiscono anche altre forze in generale si ha $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{g}$. In particolare un corpo che cade nell'aria presenta un'accelerazione minore di quella di gravità a causa dell'attrito con l'aria (si veda il paragrafo 2.10).

La forza peso per un corpo di massa $m = 1$ kg è di 9.8 N. Praticamente 1 N corrisponde alla forza peso di un corpo con massa pari a circa 0.1 kg.

2.8 FORZA DI ATTRITO RADENTE

Applichiamo ad un corpo appoggiato su un tavolo, con il piano di appoggio orizzontale, una forza **F** tale da presentare una componente $\mathbf{F}_1$ normale al piano di appoggio e una $\mathbf{F}_2$ parallela al piano stesso. Si osserva sperimentalmente che il corpo non entra in movimento, per effetto della componente $\mathbf{F}_2$ della forza applicata, fino a che il modulo di $\mathbf{F}_2$ non superi il valore $\mu_s N$, dove μ_s è il *coefficiente di attrito statico* ed N, come già indicato nel paragrafo 2.4, è il modulo della componente normale al piano di appoggio della reazione vincolare. La condizione perché il corpo possa essere messo in movimento per effetto della forza applicata è quindi data da $F_2 > \mu_s N$.

Forza di attrito radente statico

Supponiamo che la forza **F** formi un angolo α con la direzione normale al piano di appoggio (direzione verticale: si veda la figura 2.5, in cui **P** è la forza peso del corpo). Pertanto $F_1 = F\cos\alpha$, $F_2 = F\,\text{sen}\,\alpha$. La reazione **R** del piano, in condizioni di equilibrio statico del corpo, è tale che

$$\mathbf{R} + \mathbf{P} + \mathbf{F} = 0 \qquad (2.5)$$

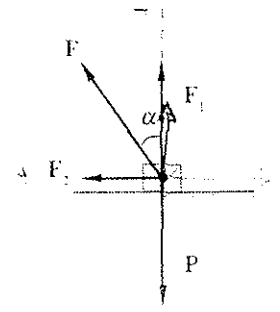


Fig. 2.5

Proiettiamo la (2.5) secondo le due direzioni ortogonali tra loro, quella normale al piano di appoggio assunta positiva verso l'alto e quella parallela al piano stesso (positiva nel verso di $\mathbf{F}_2$): chiamiamo N e F_a le corrispondenti componenti di **R**. La (2.5) fornisce

NORMALE $\quad N - P + F_1 = 0 \longrightarrow N = P - F_1 = P - F\cos\alpha$

PARALLELA $\quad F_a + F_2 = 0 \qquad F_a = -F_2 = -F\,\text{sen}\,\alpha$

$F_1 = F\cos\alpha$

$F_2 = F\,\text{sen}\,\alpha$

La condizione di appoggio del corpo è data da $N > 0$ cioè $P > F\cos\alpha$; se questa è soddisfatta (cioè la forza non solleva il corpo) la componente parallela al piano di appoggio della reazione vincolare controbilancia, quando il corpo è in quiete, la componente orizzontale della forza applicata. Dovendo essere, come detto sopra, $F_2 \leq \mu_s N$, la condizione di quiete si scrive

$$F\,\text{sen}\,\alpha \leq \mu_s (P - F\cos\alpha)$$

N

quiete $F_2 \leq \mu_s (P - F_1)$

Quando il corpo entra in movimento si osserva che si oppone al moto la *forza di attrito radente dinamico* $F_a = \mu_d N$ dove μ_d rappresenta il *coefficiente di attrito dinamico*; risulta sempre $\mu_d \leq \mu_s$. L'equazione del moto è pertanto

Forza di attrito radente dinamico

$\mu_d < \mu_s$

$$F\,\text{sen}\,\alpha - \mu_d N = m\,a$$

$F_2 - \mu_d N = ma$

La forza di attrito dinamico non dipende dalla velocità del corpo rispetto al piano di appoggio ed ha verso contrario alla direzione del moto e quindi al versore della velocità, $\mathbf{u}_v$. Vettorialmente

$$\mathbf{F}_d = -\mu_d N \mathbf{u}_v \quad . \tag{2.6}$$

Forze di coesione

Le forze di attrito radente hanno origine dalle *forze di coesione* tra due materiali; il valore del coefficiente di attrito dipende dallo stato delle superficie a contatto e dalla loro composizione chimica. Una eccessiva levigatura fa aumentare la coesione e quindi l'attrito; se le superficie vengono invece bagnate come si realizza nel caso di organi meccanici in movimento mediante l'utilizzazione di lubrificanti, la forza di attrito diminuisce notevolmente.

Concludiamo con due osservazioni. Ricordando quanto detto nel paragrafo 2.4, sottolineamo come la forza di attrito radente, che è una reazione vincolare, non dipende soltanto dalle due superfici a contatto (questa è la parte espressa dal coefficiente di attrito), ma anche da quanto è premuto il corpo contro il piano (e questa parte è espressa da N); essa cioè non è determinabile a priori, dato il corpo e il piano, ma necessita dell'esame completo delle forze agenti.

In secondo luogo si tenga presente che le forze di attrito radente sono sempre presenti, per quanto si possa tentare di ridurle. Quindi se vogliamo realizzare un moto uniforme dobbiamo applicare una forza eguale e contraria alla forza di attrito in modo che la risultante sia nulla. E' questa la condizione pratica che deve essere realizzata in ogni moto uniforme al fine di ottenere una situazione di equilibrio dinamico.

ESEMPIO 2.1

Un corpo di massa $m = 2$ kg è appoggiato su di un piano orizzontale. I coefficienti di attrito statico e dinamico relativi alle due superfici di contatto valgono rispettivamente 0.5 e 0.3. Si applica al corpo una forza $\mathbf{F}$ di modulo pari a 20 N. Determinare le componenti della reazione vincolare e il modulo della stessa nei due casi mostrati nella figura 2.6:

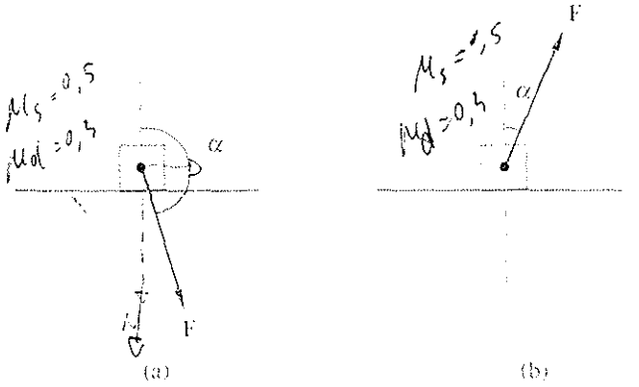


Fig. 2.6

a) l'angolo α vale 150°;
b) l'angolo α vale 30°.

Nel caso a) la componente della reazione vincolare normale al piano vale in modulo $N = m\,g + F \cos 30° =$ 36.9 N per cui $\mu_s N = 18.5$ N; la componente parallela al piano della forza applicata è F sen 30° = 10 N. Il corpo pertanto rimane in quiete e la componente della reazione vincolare parallela al piano vale in modulo 10 N; abbiamo

$$R = \sqrt{36.9^2 + 10^2} = 38.2 \text{ N}$$

Nel caso b) $N = m\,g - F \cos 30° = 2.3$ N (c'è appoggio), valore minore del precedente in quanto ora la componente normale di F è opposta al peso e si ha un alleggerimento del peso del corpo sul piano. Il corpo entra in moto perché $\mu_s N = 1.2$ N è minore di F sen 30° = 10 N; l'accelerazione vale

$$a = \frac{F \text{ sen } 30° - \mu_d N}{m} = 4.7 \text{ m s}^{-2}$$

con $\mu_d N = 0.7$ N. Quindi il modulo della reazione vincolare è

$$R = \sqrt{2.3^2 + 0.7^2} = 2.4 \text{ N}.$$

Questo esempio insegna che se vogliamo spostare una cassa non dobbiamo spingerla (caso a), ma tirarla (caso b).

2.9 FORZA ELASTICA

Si definisce *forza elastica* (unidimensionale) una forza di direzione costante, con verso rivolto sempre ad un punto O, chiamato centro, e con modulo proporzionale alla distanza da O. Se assumiamo come asse x la direzione della forza e come origine il centro, possiamo scrivere

$$\mathbf{F} = -k\,x\,\mathbf{u}_x$$

dove k è una costante positiva, detta *costante elastica*, e $\mathbf{u}_x$ è il versore dell'asse x.

Il moto risultante per effetto di una forza elastica è rettilineo, qualora la velocità iniziale sia nulla o diretta come $\mathbf{u}_x$. L'accelerazione vale

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}\,x = -\omega^2 x$$

e quindi, secondo quanto visto nel paragrafo 1.6, il moto è armonico semplice con pulsazione ω e periodo T determinati dal rapporto tra la costante elastica e la massa del punto materiale a cui è applicata la forza elastica:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}} \quad . \tag{2.7}$$

Una forza elastica viene praticamente applicata tramite una molla; questa presenta in genere una lunghezza a riposo, cioè quando non si trova in condizioni di compressione o di estensione, di valore finito l_0, (caso a). Se la molla viene estesa (caso b), assumendo una lunghezza $l > l_0$, essa sviluppa una forza $\mathbf{F}$ che tende a riportarla alla condizione di riposo

$$F = -k\,(l - l_0) = -k\,x$$

dove $x > 0$ rappresenta la deformazione (vedi figura 2.7). Se invece la molla viene compressa alla lunghezza $l < l_0$, la forza ha la stessa espressione, con $x < 0$. In ogni caso possiamo scrivere la forza, come già detto,

$$\mathbf{F} = -k\,x\,\mathbf{u}_x$$

Il modulo di questa *forza di richiamo* è proporzionale alla deformazione fino a che non si supera il limite di elasticità della molla. Se vogliamo mantenere la molla deformata con una determinata lunghezza l dobbiamo applicare alla molla una forza eguale ed opposta alla forza esercitata dalla molla. Discutiamo tale situazione di equilibrio con la molla deformata ($l - l_0 = x > 0$) osservando la figura 2.8, in cui la molla estesa è fissata nell'estremo Q ad una parete. I punti P e Q sono fermi e pertanto le forze applicate a ciascun punto devono essere eguali ed opposte. Nel punto P la forza elastica $\mathbf{F}_2$ dovuta alla deformazione della molla (in modulo $k\,x$) viene bilanciata da una forza esterna $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$. Nel punto Q la situazione è analoga, solo che la forza elastica $\mathbf{F}_3$ è bilanciata dalla reazione vincolare, che si sviluppa nel punto di aggancio, $\mathbf{F}_4 = -\mathbf{F}_3$. Considerando che la molla, nel suo insieme, è ferma, deve essere nulla la risultante delle forze applicate alla molla, deve cioè essere $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_4$ da cui segue $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3$; i valori espliciti sono mostrati in figura 2.8.

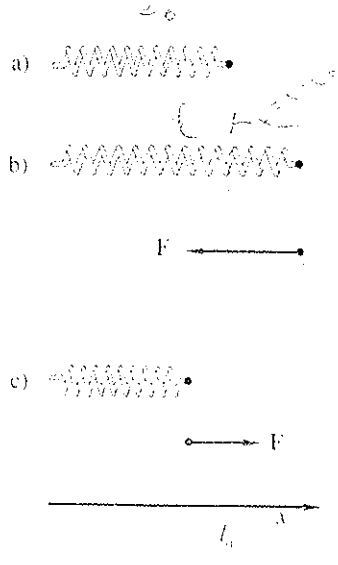


Fig. 2.7

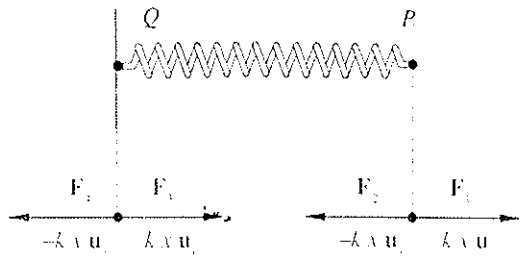


Fig. 2.8

Da questo risultato deduciamo che se abbiamo una molla libera ad entrambi gli estremi e vogliamo deformarla di una quantità x, dobbiamo applicare ai due estremi due forze eguali e contrarie di modulo $k\,x$.

Supponiamo ora di avere la molla bloccata nell'estremo Q, deformata di x_0, e che in P sia fissato alla molla un punto materiale di massa m (la massa della molla è trascurabile rispetto a m). Se all'istante $t = 0$ il punto viene lasciato libero con velocità nulla (condizioni iniziali $x = x_0$ e $v = 0$ per $t = 0$), esso si muove di moto armonico per effetto della forza elastica agente su di esso. La soluzione dell'equazione del moto

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x$$

è quella nota, $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ con ω dato da (2.7). I valori delle costanti A e ϕ si calcolano dalle condizioni iniziali

$$x_0 = A \operatorname{sen} \phi \quad , \quad 0 = \omega A \cos \phi \, ,$$

dato che $v = \omega A \cos(\omega t + \phi)$. Per ϕ compreso tra 0 e 2π sono possibili le due soluzioni $A = x_0$, $\phi = \pi/2$ e $A = -x_0$, $\phi = 3\pi/2$; in ogni caso si hanno per la legge oraria e per la velocità le espressioni

$$x = x_0 \cos \omega t \quad , \quad v = -\omega x_0 \operatorname{sen} \omega t$$

Se le condizioni iniziali sono diverse si ottiene sempre un moto armonico con la medesima ω, però il valore dell'ampiezza è in generale diverso da x_0. Per esempio, con $x = x_0$ e $v = v_0$ per $t = 0$, si ottiene

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad , \quad \operatorname{tg} \phi = \omega \, \frac{x_0}{v_0} \, .$$

A è maggiore di x_0 a causa della velocità iniziale diversa da zero. Se poniamo $v_0 = 0$ ritroviamo il risultato precedente.

Nel caso dinamico la reazione vincolare in Q è variabile nel tempo con modulo sempre uguale a $k\,x\,(t)$.

2.10 FORZA DI ATTRITO VISCOSO.

La *forza di attrito viscoso* è una forza che si oppone al moto ed è proporzionale alla velocità del corpo soggetto a tale forza:

$$\mathbf{F} = -b\,\boldsymbol{v} \qquad (2.8)$$ Forza di attrito viscoso

L'accelerazione risulta $\boldsymbol{a} = -b\,\boldsymbol{v}/m$; abbiamo studiato la cinematica di un moto con una accelerazione di questo tipo nel paragrafo 1.7, in cui $\boldsymbol{v}$ aveva direzione costante e $\boldsymbol{v}_0$ era parallela a $\boldsymbol{v}$. Il risultato è analogo anche se il moto non è rettilineo e, in particolare, si ricava che il modulo della velocità presenta una decrescita esponenziale nel tempo.

In presenza di una forza di attrito viscoso non si può realizzare una condizione di equilibrio statico (come invece è possibile con l'attrito radente) poiché se $\boldsymbol{v} = 0$ la forza si annulla.

Forze di attrito viscoso sono esercitate, in certe condizioni, su un corpo che si muove in un fluido (liquido o gas).

Consideriamo allora, per esempio, un punto materiale di massa m lasciato cadere in un fluido e assumiamo che le uniche forze agenti siano la forza peso $\mathbf{F}_1 = m\,\mathbf{g}$ e la forza di attrito viscoso $\mathbf{F}_2$ che scriviamo $-m\,k\,\boldsymbol{v}$, evidenziando per comodità la massa cioè ponendo la costante b di (2.8) pari a $m\,k$. Le condizioni iniziali del moto sono $x = 0$ e $v = 0$ per $t = 0$.

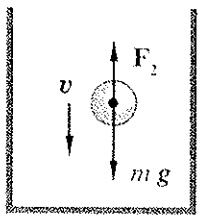


Fig. 2.9

Applicando la legge di Newton (2.1) si ha

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m\,\mathbf{g} - m\,k\,\boldsymbol{v} = m\,\boldsymbol{a} = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

Dato che la velocità iniziale è nulla il moto ha luogo soltanto lungo l'asse verticale z (che orientiamo verso il basso). Proiettiamo su z l'equazione del moto ottenendo

$$\frac{dv}{dt} = g - k\,v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{g - k\,v} = dt$$

per separazione delle variabili (appendice A). Integriamo e risolviamo nella velocità:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - kv} = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{k}\,[\,\log(g - k\,v)\,]_0^v = t$$

$$\Rightarrow \quad \log\frac{g - k\,v}{g} = -k\,t \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{g}{k}\,(1 - e^{-k\,t}).$$

Partendo da zero la velocità cresce, però sempre più lentamente; per $t \gg 1/k$, v assume praticamente il valore costante g/k; $1/k$ è la costante di tempo τ, introdotta nel paragrafo 1.7. Il grafico della funzione $v(t)$ è mostrato in figura 2.10.

Sotto l'azione della sola forza peso il moto sarebbe uniformemente accelerato; la forza di attrito viscoso si oppone all'aumento della velocità, *rendendo al limite il moto uniforme*. In effetti si vede che per $v = g/k$ l'accelerazione $a = g - k\,v$ diventa nulla. Questo risultato asintotico si ottiene anche considerando come varia con la velocità il modulo delle forze agenti (Figura 2.11): la forza peso è costante, mentre

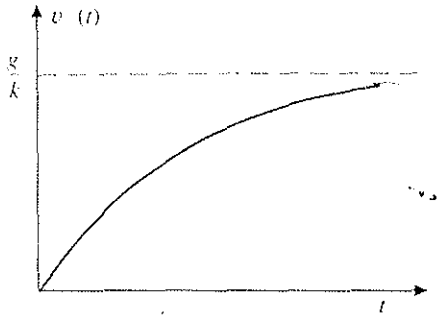


Fig. 2.10

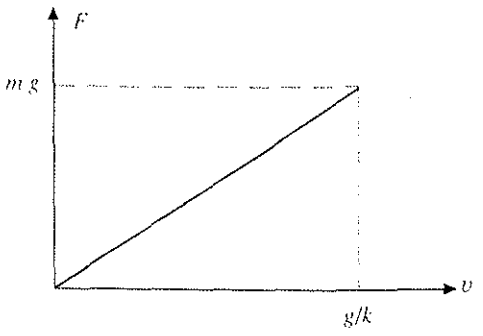


Fig. 2.11

quella di attrito viscoso cresce linearmente con la velocità. Quando v assume il valore g/k si ha l'equilibrio dinamico tra le due forze e la loro risultante si annulla: di conseguenza la velocità non può più cambiare e si instaura un moto uniforme.

2.11 PIANO INCLINATO.

Consideriamo un corpo, assimilabile ad un punto materiale di massa m, che possa muoversi sotto l'azione del suo peso e di eventuali altre forze, compresa la forza di attrito radente, su una superficie piana inclinata di un angolo α rispetto ad un piano orizzontale.

Se agisce solo la forza peso **P**, in assenza perciò di attrito tra corpo e piano inclinato, si ha secondo la legge di Newton

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} = m\,\boldsymbol{a} \,.$$

dove **R** è la reazione vincolare del piano di appoggio che ha un'unica componente normale al piano stesso (si parla in tal caso di *vincolo liscio*). Scomponendo lungo le direzioni ortogonale e parallela al piano inclinato si ottiene

$$m\,g\cos\alpha - N = 0 \quad , \quad m\,g\,\text{sen}\,\alpha = m\,a$$

dato che il corpo è vincolato a muoversi lungo il piano inclinato. Dalla prima condizione si calcola il valore della reazione vincolare, $N = m\,g\cos\alpha$, dalla seconda il valore dell'accelerazione, $a = g\,\text{sen}\,\alpha < g$: il corpo scende con moto uniformemente accelerato e l'accelerazione è minore di quella di gravità.

Se esiste un attrito radente tra il piano inclinato e il corpo, il moto lungo il piano non può iniziare se $mg\,\text{sen}\,\alpha \le \mu_s N = \mu_s\, m\,g\cos\alpha$: la componente normale di **R** vale ancora $N = m\,g\cos\alpha$, però c'è ora anche una componente parallela al piano inclinato che vale, in equilibrio statico, $-m\,g\,\text{sen}\,\alpha$. Pertanto la condizione per l'equilibrio statico è $\text{tg}\,\alpha \le \mu_s$.

Per avere moto occorre aumentare l'angolo di inclinazione α in modo da non soddisfare la condizione suddetta; vale allora l'equazione

$$m\,g\,\text{sen}\,\alpha - \mu_d\, mg\cos\alpha = m\,a$$

$$a = (\text{sen}\,\alpha - \mu_d\cos\alpha)\,g \,.$$

Dovendo essere il termine tra parentesi positivo, si ha per il coefficiente di attrito

dinamico $\mu_d < \text{tg}\,\alpha$; in particolare, se $\mu_d = \text{tg}\,\alpha$ $a = 0$: il moto è uniforme e si tratta di un altro esempio di equilibrio dinamico.

Riassumendo, se il corpo è fermo sul piano inclinato esso resta fermo per tutti gli angoli di inclinazione compresi tra zero e α_s tale che $\text{tg}\,\alpha_s = \mu_s$; per $\alpha > \alpha_s$ il corpo non può restare fermo e scende lungo il piano inclinato. Però, una volta che il corpo si è messo in movimento, poiché la forza di coesione in queste condizioni è minore di quella in quiete ($\mu_d < \mu_s$), si può avere moto anche per angoli minori di α_s, precisamente compresi tra α_s e $\alpha_d < \alpha_s$ tale che $\text{tg}\,\alpha_d = \mu_d$.

Se invece il corpo all'istante iniziale sta scendendo lungo il piano con velocità v_0, esso si ferma se $m\,g\,\text{sen}\,\alpha < \mu_d m\,g\,\cos\alpha$, cioè se $\text{tg}\,\alpha \leq \mu_d$, si muove di moto uniformemente accelerato se $\text{tg}\,\alpha > \mu_d$ e prosegue con velocità v_0 se $\text{tg}\,\alpha = \mu_d$. L'unica differenza rispetto alla partenza da fermo è che si può avere moto (uniformemente decelerato) anche se $\text{tg}\,\alpha < \mu_d$ proprio perché c'è una velocità iniziale.

Storicamente l'utilizzazione del piano inclinato è stata di grande aiuto per lo studio del moto uniformemente accelerato. La possibilità di sperimentare con accelerazioni inferiori a g e regolabili a piacere regolando α, ha consentito di allungare la durata del moto e quindi di studiarne le caratteristiche in modo significativo pur disponendo di strumentazione imprecisa.

2.12 FORZE CENTRIPETE.

Supponiamo che la risultante **R** delle forze agenti su un punto materiale presenti una componente F_N ortogonale alla traiettoria, che risulta pertanto curvilinea (si riveda la parte finale del paragrafo 2.6). F_N determina l'accelerazione centripeta secondo la relazione $F_N = m\,a_N = m\,v^2/r$ essendo r il raggio di curvatura della traiettoria.

In generale **R** ha anche una componente tangente alla traiettoria, F_T, responsabile della variazione del modulo della velocità. Se $F_T = 0$ il moto lungo la traiettoria è uniforme e l'unica accelerazione è a_N.

Forze centripete sono generalmente prodotte da rotaie, pneumatici, fili che collegano il corpo ad un punto fisso ovvero vincoli che consentono di incurvare la traiettoria oppure da azioni a distanza come quelle gravitazionali.

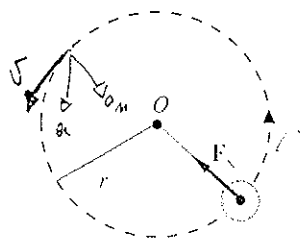


Fig. 2.13

ESEMPIO 2.2: Curve sopraelevate

Si voglia determinare quale condizione deve essere soddisfatta affinché un punto materiale, lanciato con velocità v orizzontale lungo una curva sopraelevata, come quelle presenti in un velodromo, percorra a velocità costante un arco di circonferenza, in un piano orizzontale, con centro in O. La situazione è mostrata in figura 2.14a; la traiettoria è indicata dalla linea punteggiata nella vista in pianta.

Soluzione

Per ottenere un moto circolare uniforme la risultante delle forze applicate **R** deve essere ortogonale alla traiettoria e diretta verso il centro. Le forze agenti sono il peso del punto materiale $m\,g$ e la reazione vincolare della pista **N**, normale alla superficie se il vincolo è liscio come supponiamo; esse devono essere disposte come nella figura 2.14 b. La componente orizzontale di **N**, $N\,\text{sen}\,\alpha$, rivolta verso il centro della traiettoria circolare seguita dal punto fornisce la forza centripeta: $N\,\text{sen}\,\alpha = m\,v^2/r$; d'altra parte per la condizione di equilibrio nella direzione verticale $N\,\cos\alpha = m\,g$. Ricavando N da questa e sostituendo nella prima

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{g\,r}\,.$$

Per realizzare la condizione voluta devono soddisfare questa relazione la velocità con cui si affronta la curva, il raggio di curvatura e l'angolo di inclinazione della curva. Per esempio se $\alpha = 30°$ e $r = 30$ m il punto resta a quota

fissa percorrendo la curva con $v \cong 13$ m/s = 46.8 km/ora. A velocità minori il punto scende verso il basso, a velocità maggiori sbanda verso l'alto.
La reazione N ha il valore $m\,g/\cos\alpha$, maggiore del valore $mg\cos\alpha$ trovato nel piano inclinato. In effetti, oltre a dover reagire alla componente $m\,g\cos\alpha$ del peso, il suolo deve fornire la forza centripeta necessaria perché il moto sia circolare: la quantità di moto del punto cambia continuamente in direzione per effetto dell'interazione col suolo.

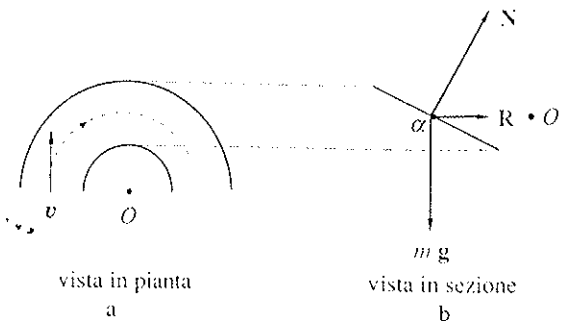


Fig. 2.14

ESEMPIO 2.3: Curva su strada piana

Vogliamo adesso studiare la velocità massima con cui un'auto può affrontare in una strada piana una curva di raggio r.

Soluzione
La forza centripeta necessaria è fornita dall'attrito tra pneumatici e terreno; poiché la traiettoria è un arco di circonferenza di raggio r non c'è spostamento lungo r e il coefficiente di attrito rilevante per il problema è quello statico. Pertanto il caso limite si ha per il valore massimo della forza di attrito, cioè per $F_N = \mu_s N = \mu_s m\,g$, e deve essere $\mu_s m\,g = m\,v^2/r$. La velocità massima con cui può essere affrontata la curva è

$$v = \sqrt{\mu_s\, g\, r} \quad .$$

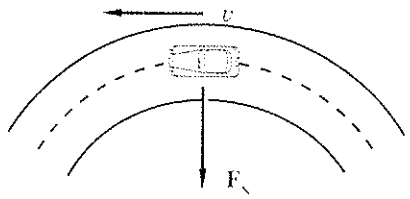


Fig. 2.15

Con $\mu_s = 0.5$ e $r = 30$ m si trova $v = 12.1$ m/s = 43.6 km/ora.
Se invece la curva è su rotaia, la forza centripeta è fornita dal sistema che tiene fisse le rotaie al suolo.

ESEMPIO 2.4: Pendolo conico

Si abbia un punto materiale di massa m appeso in O (vedi fig. 2.16) tramite un filo inestensibile di massa trascurabile lungo L. Vogliamo determinare le condizioni per cui P descriva un moto circolare uniforme.

Soluzione
Sul punto P agiscono la forza peso $m\,\mathbf{g}$ e la forza $\mathbf{T}$, dovuta al filo e diretta come questo (trascuriamo ogni attrito). Come nel primo esempio

$$T\,\text{sen}\,\alpha = m\,\frac{v^2}{r} \quad , \quad T\cos\alpha = m\,g$$

da cui si ricava $\text{tg}\,\alpha = v^2/g\,r$. Ponendo $r = L\,\text{sen}\,\alpha$ e $v = \omega\,r$ si ha

$$\cos\alpha = g/\omega^2 L \quad ,$$

relazione che deve sussistere tra velocità angolare, lunghezza del filo e angolo rispetto alla verticale dello stesso affinché il punto P descriva un moto circolare uniforme.

Al crescere di ω cresce il valore di α: in ogni caso deve sussistere la condizione $\omega^2 \geq g / L$.
Il valore della forza dovuta al filo, detta tensione del filo, è

$$T = m\,g/\cos\alpha = m\,\omega^2 L.$$

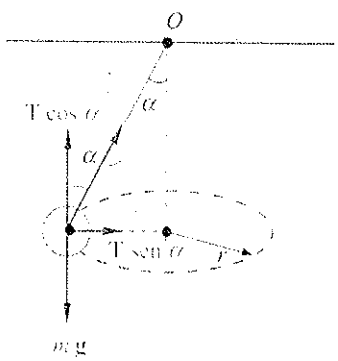


Fig. 2.16

Una caratteristica comune agli esempi trattati è l'indipendenza dalla massa del punto delle varie condizioni trovate, come $\operatorname{tg}\alpha = v^2/g\,r$, $v = \sqrt{\mu_s\, g\, r}$, $\cos\alpha = g/\omega^2 L$. Questo perché in tutti gli esempi è presente soltanto la forza peso, che è proporzionale alla massa, e le reazioni vincolari, determinate dall'azione del peso e quindi anch'esse proporzionali alla massa del punto; eguagliando la risultante di tutte le forze a $m\,\boldsymbol{a}$ la massa viene semplificata e quindi il risultato *cinematico* è indipendente della massa (mentre, come detto, non lo sono le forze).

Dopo questi esempi possiamo anche chiarire cosa intendiamo per *equilibrio dinamico*; a differenza dell'equilibrio statico descritto nel paragrafo 2.4 (risultante delle forze applicate al punto eguale a zero, velocità nulla), ci riferiamo a quei particolari casi in cui *in presenza di forze il moto avviene con velocità costante in modulo*. Se si tratta di moto rettilineo ciò è possibile solo se la risultante delle forze è nulla e abbiamo visto appunto i casi di moto uniforme in presenza di forze di attrito radente o di attrito viscoso, che bilanciano l'effetto della forza peso (paragrafi 2.8, 2.10, 2.11). Se invece il moto è curvilineo basta che sia nulla $\mathbf{F}_T$ come deve essere se vogliamo che la velocità sia costante in modulo, ovvero che la risultante delle forze agenti sia puramente centripeta. Qualora $\mathbf{F}_N$ sia anche costante in modulo il moto è circolare uniforme, come negli esempi appena considerati.

EQ. STATICO
SE $R=0 \Rightarrow$
$v = 0$

EQ DINAMICO
v = cost. in modulo
MOTO RETT. $R=0$
MOTO CURV. $F_T = 0$

2.13 PENDOLO SEMPLICE.

Pendolo semplice

Il *pendolo semplice* è costituito da un punto materiale appeso tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile. La posizione di equilibrio statico è quella verticale, con il punto fermo ed il filo teso; la forza esercitata dal filo (tensione del filo) vale in modulo $T_e = m\,g$. (all'equilibrio)

Se spostiamo il punto dalla verticale esso inizia ad oscillare attorno a questa, lungo un arco di circonferenza di raggio L, pari alla lunghezza del filo, in un piano verticale. Vogliamo studiare, in assenza di attrito, questo moto oscillatorio.

Le forze agenti sul punto P sono il peso $m\,\mathbf{g}$ e la tensione del filo $\mathbf{T}_e$ per cui il moto è regolato da $m\,\mathbf{g} + \mathbf{T}_e = m\,\boldsymbol{a}$.

Consideriamo le componenti lungo la traiettoria, orientata come in figura 2.17, e ortogonalmente alla traiettoria (verso positivo da P a O):

$$R_T = -m\,g\,\operatorname{sen}\theta = m\,a_T \quad , \qquad R_N = T_e - m\,g\cos\theta = m\,a_N \; .$$

Il segno negativo della componente lungo la traiettoria è dovuto al fatto che la forza ha segno opposto rispetto a quello della coordinata s sulla traiettoria. Infatti per $s < 0$, posizioni sull'arco di circonferenza a sinistra della verticale, la forza è diretta secondo il verso assunto positivo, mentre per $s > 0$ la forza è diretta secondo il verso negativo (e il risultato non dipende dalla scelta del verso di s). Fisicamente R_T è una *forza di richiamo* che tende a riportare il punto sulla verticale, anche se non è di direzione costante come nel caso delle forze elastiche.

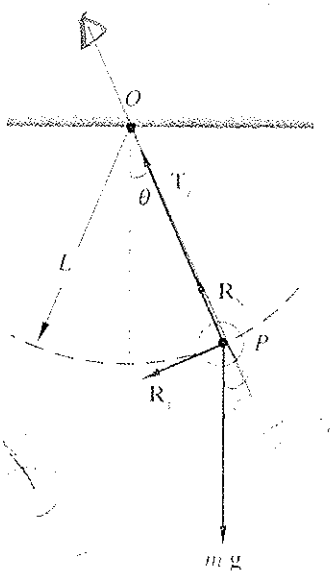


Fig. 2.17

Dato che, secondo (1.27) $a_T = L\,\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ e $a_N = \dfrac{v^2}{L}$, otteniamo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta \quad , \qquad m\,\frac{v^2}{L} = T_e - m\,g\cos\theta \; .$$

La prima è l'equazione differenziale del moto del pendolo, la cui soluzione ci

fornisce la legge oraria del moto $\theta(t)$; però, per θ qualunque, la soluzione è analiticamente complicata.

Consideriamo allora piccoli valori di θ e sviluppiamo in serie sen θ:

$$\text{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

Quantitativamente, per $\theta \leq 0.122$ rad $= 7°$, sen θ si può approssimare con θ commettendo un errore relativo che è sempre minore di 10^{-3}. Quindi per *piccole oscillazioni* l'equazione differenziale diventa

Piccole oscillazioni

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad (2.9)$$

e coincide con quella del moto armonico semplice (1.16), posto $\omega^2 = g/L$.

In conclusione il moto del pendolo è oscillatorio armonico quando l'ampiezza delle oscillazioni è piccola così che sen $\theta \cong \theta$. La legge oraria del moto è

$$\theta = \theta_0 \,\text{sen}\,(\omega t + \phi)\ ;$$

l'ampiezza θ_0 dell'oscillazione e la fase iniziale ϕ dipendono dalle condizioni iniziali del moto, come discusso nei paragrafi 1.6 e 2.9.

Il periodo del moto T è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (2.10)$$

ed è indipendente dall'ampiezza (isocronismo delle piccole oscillazioni).

La legge oraria dello spostamento lungo l'arco di circonferenza è dato da

$$s = L\,\theta = L\,\theta_0 \,\text{sen}\,(\omega t + \phi)$$

mentre la velocità angolare e la velocità lineare hanno le espressioni

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega\,\theta_0 \cos(\omega t + \phi)\ ,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = L\,\frac{d\theta}{dt} = L\,\omega\,\theta_0 \cos(\omega t + \phi)\ .$$

La velocità è massima quando il punto passa per la verticale ($\theta = 0$) e nulla agli estremi delle oscillazioni ($\theta = \theta_0$) dove il verso del moto si inverte. Notiamo che i risultati cinematici non dipendono dalla massa del pendolo, per le stesse ragioni esposte alla fine del paragrafo 2.12.

Quando l'ampiezza delle oscillazioni non è piccola il moto è ancora periodico, ma non armonico, e il periodo T' dipende dall'ampiezza; detta $\Delta T = T' - T$ la differenza tra il periodo vero e quello calcolato con (2.10), in figura 2.18 è riportata $\Delta T/T$ in funzione di θ_0 fino al valore $\theta_0 = 90°$, dove $T' \cong 1.16\,T$.

Risolto il problema del moto, e quindi note $\theta(t)$ e $v(t)$, possiamo ritornare all'equazione del moto proiettata sulla normale alla traiettoria e calcolare la *tensione del filo* che sostiene il punto:

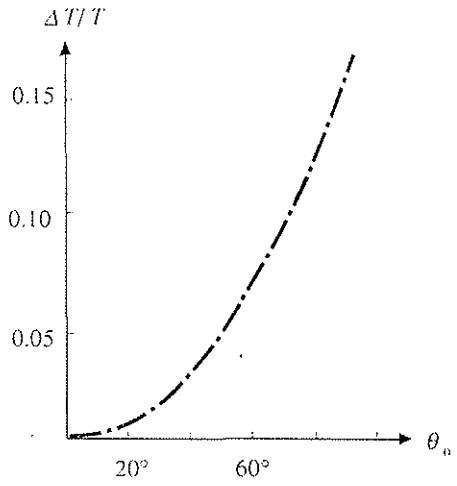


Fig. 2.18

$$T_F = m\left[g\cos\theta(t) + \frac{v^2(t)}{L}\right] \qquad (2.11)$$

La tensione è massima nella posizione verticale, dove sia cos $\theta(t)$ che $v(t)$ assumono i valori massimi, ed è minima nei punti di inversione. Sia (2.11) che queste conclusioni valgono qualunque sia il valore dell'ampiezza; per piccole oscillazioni la tensione si calcola inserendo in (2.11) le espressioni analitiche trovate per $\theta(t)$ e $v(t)$.

Il pendolo semplice che abbiamo descritto e il pendolo conico dell'esempio 2.4 sono eguali come composizione, punto materiale sospeso con un filo, però i tipi di moto sono completamente diversi. Il moto del pendolo conico si svolge in un piano orizzontale ed è circolare uniforme; le forze sono ortogonali alla traiettoria e costanti ed è necessario comunicare al punto una velocità iniziale appropriata, che poi resta costante in modulo. Il moto del pendolo semplice si svolge in un piano verticale e la risultante delle forze ha sia componente tangente che normale alla traiettoria, entrambe non costanti; il moto può avvenire anche con velocità iniziale nulla, purché sia $\theta \neq 0$, ed è armonico semplice lungo un arco di circonferenza (per piccole oscillazioni).

2.14 TENSIONE DEI FILI.

Nel pendolo, semplice o conico, il filo di sostegno serve per applicare una certa forza al punto in movimento: il filo risulta teso e la forza, con direzione lungo il filo teso, che questo esercita sul punto viene chiamata *tensione del filo*. Il filo può essere fissato in un estremo ad un punto fisso e nell'altro ad un punto materiale oppure può collegare due punti materiali. Supporremo sempre che il filo sia inestensibile e di massa trascurabile rispetto alle altre masse. Tensione del filo

Per chiarire il concetto di tensione consideriamo un filo teso in quiete e prendiamo in esame un elemento infinitesimo di esso. Tale elemento è *tirato* dalle due parti restanti di filo e l'equilibrio statico richiede che le due forze, agenti sull'elemento di filo, siano eguali in modulo e direzione e di verso opposto (figura 2.19 a). Ciò vale per qualunque elemento di filo e il valore della tensione è lo stesso

ovunque. In particolare ad un estremo $\mathbf{T} = -\mathbf{F}$ (figura 2.19 b). Per il filo AB nel suo insieme si ha la situazione della figura 2.19 c e deve essere in modulo $F_A = F_B = T$: per tendere il filo si applicano le forze $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ e la tensione, in modulo, è eguale al modulo di $\mathbf{F}$.

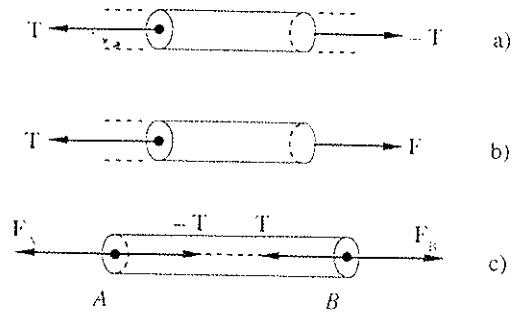


Fig. 2.19

Se il filo teso è in movimento il prodotto $m_f\, a$ è nullo dato che consideriamo trascurabile la massa del filo; pertanto il valore della tensione è ancora lo stesso in qualunque punto del filo.

Riassumendo, il filo teso esercita agli estremi la tensione $\mathbf{T}$, il cui valore dipende dalle forze applicate, ma la reazione sul filo non può superare, per un filo reale, un valore massimo T_{MAX}, oltre il quale il filo si spezza; T_{MAX} dipende dalla sostanza con cui è fatto il filo e dalle dimensioni geometriche. Se ad un estremo è collegato un punto materiale, la tensione $\mathbf{T}$ va inserita nella legge di Newton (2.1) come le altre forze agenti sul punto.

Non è necessario che il filo sia completamente rettilineo, esso può essere parzialmente avvolto attorno ad un disco (carrucola), con lo scopo di cambiare la direzione della forza.

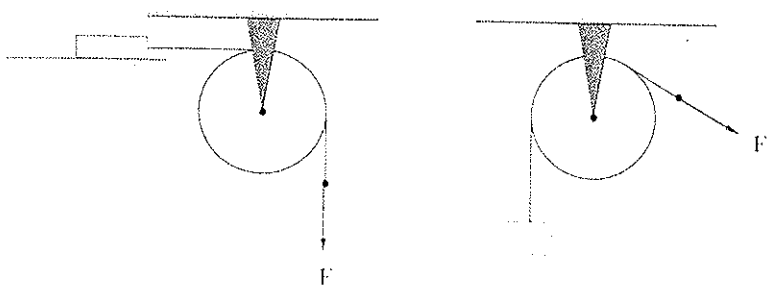


Fig. 2.20

Oltre ai fili si possono utilizzare, per lo stesso scopo, bacchette solide con queste differenze:

a) mentre il filo funziona in *trazione*, la bacchetta può funzionare in *trazione* e in *compressione*; per esempio, con un filo si può solo tirare un corpo mentre con una bacchetta si può anche spingerlo;

b) un filo può esercitare solo forze che hanno la direzione del filo stesso, cioè non può sopportare una sollecitazione ortogonale, una bacchetta non presenta questa limitazione.

Un modo semplice per mettere in evidenza la tensione di un filo e misurarne il valore consiste nel tagliare il filo e inserire una molla di costante elastica nota k. Quando si tende il filo ai capi della molla sono applicate le forze $\mathbf{T}$ e $-\mathbf{T}$ e si misura la deformazione x (paragrafo 2.9); in modulo è $T = k\,x$.

ESEMPIO 2.5 : Punto appeso in quiete.

Nel punto O $\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_2 = -(-\mathbf{T})$; $\mathbf{F}_3$ rappresenta la reazione vincolare del supporto.
Per il punto materiale P in quiete $\mathbf{F}_1 = -m\mathbf{g} = \mathbf{T}$. In modulo $F_3 = m\,g = T$.
Il filo trasmette integralmente la reazione da O a P.

$-F_3 = +F_2 \Rightarrow F_3 = -(F_2) = -$

$F_1 = -mg = T \qquad F_2 = -F_1 = mg$





Fig. 2.21

ESEMPIO 2.6 : Moto circolare

Un punto materiale, collegato ad un centro O da un filo, si muove su un piano orizzontale senza attrito di moto circolare uniforme con velocità angolare ω ; la velocità lineare è $v = \omega r$. Il filo permette che abbia luogo il moto circolare uniforme applicando al punto P la forza centripeta $T = m\,v^2/r = m\,\omega^2\,r$. Nel centro O la reazione vincolare bilancia in ogni istante la tensione ed è pari in modulo a $m\,v^2/r$; il filo trasmette da O a P la forza necessaria perché il moto sia circolare.
Analogamente, durante il moto di un pendolo semplice (paragrafo 2.13) la reazione nel punto di aggancio del filo è eguale in modulo alla tensione del filo.

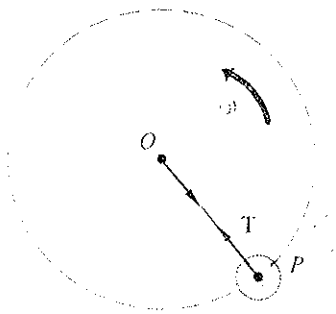


Fig. 2.22

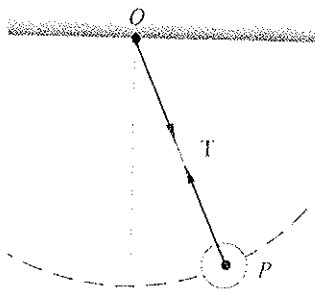


Fig. 2.23

ESEMPIO 2.7 : Filo che collega due punti in movimento

Si considerino due punti materiali P e Q, collegati tramite un filo, in movimento su un piano orizzontale liscio per effetto di una forza $\mathbf{F}$ applicata nel punto P. Le equazioni del moto per i due punti sono:

punto P $\quad F - T = m_P\,a_P$
punto Q $\quad T = m_Q\,a_Q$

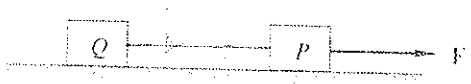


Fig. 2.24

Se il filo è teso le accelerazioni dei due punti, come le loro velocità, sono eguali: $a_P = a_Q = a$. Pertanto

$$a = \frac{F}{m_P + m_Q} \quad , \quad T = \frac{m_Q}{m_P + m_Q} F < F \quad .$$

La forza applicata a Q non è F, ma T che risulta minore di F. T assume un valore prossimo a F solo se $m_Q >> m_P$, cioè quando, in pratica, è come se P non ci fosse. In presenza di attrito le equazioni del moto diventano

$$F - T - \mu_P m_P g = m_P a \quad , \quad T - \mu_Q m_Q g = m_Q a \quad ,$$

dove i coefficienti di attrito sono quelli dinamici; si ricava

$$a = \frac{F - (\mu_P m_P + \mu_Q m_Q) g}{m_P + m_Q} \quad ,$$

$$T = \frac{m_Q}{m_P + m_Q} [F + (\mu_Q - \mu_P) m_P g] \quad .$$

Notiamo che se, in assenza di attrito, annulliamo **F** ad un certo istante, il moto diviene uniforme, la distanza tra P e Q resta la stessa, ma la tensione si annulla. Invece se agiscono le forze di attrito il moto è uniforme quando sono soddisfatte le condizioni

$$F - T - \mu_P m_P g = 0 \quad , \quad T - \mu_Q m_Q g = 0 \quad ;$$

pertanto la forza agente deve essere pari a $(\mu_P m_P + \mu_Q m_Q) g$. Il filo risulta teso e la tensione vale $\mu_Q m_Q g$.
I risultati sono indipendenti dalla velocità, purché questa sia diversa da zero; se $v = 0$ le formule sono le stesse, ma con i coefficienti statici al posto di quelli dinamici.

ESEMPIO 2.8 : Esperienza di Varignon

Consideriamo il sistema costituito da tre masse disposte come in figura 2.25 a. Il punto O risulta essere in equilibrio statico se le tre masse soddisfano alla relazione

$$m_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 \cos \theta \quad . \qquad (2.12)$$

Fissate per esempio le masse m_1 e m_2 si può trovare sperimentalmente per tentativi il valore di m_3 per cui si ha equilibrio e misurare l'angolo corrispondente θ. In tal modo si verifica la (2.12), che ora dimostriamo.
Nel punto O sono applicate le tensioni dei tre fili di sostegno, che valgono rispettivamente in modulo $m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$ con direzioni fissate dalla configurazione di equilibrio (Figura 2.25 b). In equilibrio, lungo la direzione verticale deve essere

$$m_3 g = m_1 g \cos \alpha_1 + m_2 g \cos \alpha_2$$

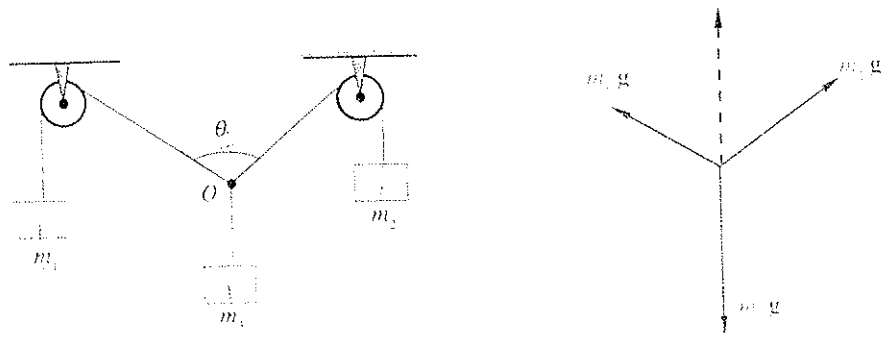
con $\alpha_1 + \alpha_2 = \theta$, mentre lungo la direzione orizzontale

$$m_1 g \operatorname{sen} \alpha_1 = m_2 g \operatorname{sen} \alpha_2 \, .$$

Dalla somma dei quadrati delle due relazioni di equilibrio e tenendo conto dell'eguaglianza

$$\cos (\alpha_1 + \alpha_2) = \cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2$$

si ottiene (2.12). La verifica sperimentale di questa conferma il carattere vettoriale delle forze.



a b

Fig. 2.25

2.15 LAVORO. POTENZA. ENERGIA CINETICA.

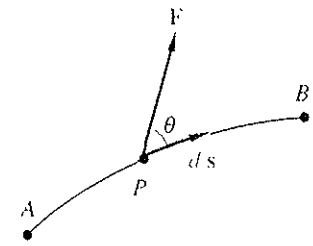


Fig. 2.26

Abbiamo visto come la legge di Newton (2.1) si esprime in termini integrali attraverso il teorema dell'impulso (2.3), rilevando che si arriva a determinare la variazione finita di quantità di moto solo se si può calcolare esplicitamente l'integrale $\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(t)\, dt$. Affrontiamo adesso il problema dell'integrazione della legge di Newton quando si considera la forza come funzione della posizione occupata dal punto, ampliando il ragionamento già fatto nel paragrafo 1.4 a proposito di $a(x)$ e $a(t)$ nel moto rettilineo.

Dato un punto materiale che si muove lungo una traiettoria curvilinea sotto l'azione di una forza $\mathbf{F}$, si definisce *lavoro della forza* $\mathbf{F}$, compiuto durante lo spostamento del punto dalla posizione A a B, la quantità scalare

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F \cos\theta \, ds = \int_A^B F_T \, ds \quad . \tag{2.13}$$

Lavoro di una forza

Il lavoro è l'integrale di linea della forza (appendice C), cioè è dato dalla somma di infiniti contributi infinitesimi $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_T \, ds$. Si osservi che in generale lungo la traiettoria sia $\mathbf{F}$ che θ sono variabili.

Una forza ortogonale alla traiettoria non compie lavoro perché $\theta = \pi/2$. Il lavoro è positivo se $0 \le \theta < \pi/2$ e in tale caso si parla di *lavoro motore*. Il lavoro risulta negativo, *lavoro resistente*, se $\pi/2 < \theta \le \pi$. Lavoro resistente è compiuto ad esempio dalle forze di attrito, il cui verso è opposto allo spostamento, $\theta = \pi$.

Se sul punto P agiscono le forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ per ciascuna si può calcolare il corrispondente lavoro W_i e risulta $W = \Sigma_i W_i$:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \ldots + \int_A^B \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} = W_1 + \ldots + W_n .$$

Il lavoro è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali può essere positivo, negativo o nullo.

Il lavoro totale è nullo, $W = 0$ quando non agisce nessuna forza oppure agiscono forze la cui risultante è nulla o è sempre ortogonale alla traiettoria (condizioni di equilibrio dinamico, paragrafo 2.12). Per esempio, se vogliamo che un punto si muova di moto rettilineo uniforme in presenza di attrito occorre applicare una forza opportuna e fornire quindi un lavoro motore eguale ed opposto al lavoro resistente, così che $W_{TOT} = W_M + W_R = 0$.

Considerazioni analoghe valgono per il moto curvilineo uniforme. Se invece il moto non è uniforme, $W_{TOT} \neq 0$, $W_M \neq |W_R|$.

Potenza

La *potenza* corrisponde al *lavoro per unità di tempo*:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{v} = F_T v \quad . \tag{2.14}$$

Potenza

Questa è la *potenza istantanea*, in generale variabile durante il moto, e caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro.

Potenza media è il rapporto W/t, cioè il lavoro totale diviso per il tempo durante

cui il lavoro è stato svolto. Tale grandezza risulta particolarmente importante per qualificare le prestazioni di un dispositivo o macchina che fornisce lavoro. A parità di lavoro totale svolto, ha maggiore potenza quella macchina che lo eroga in minore tempo.

Energia cinetica

Riprendiamo la relazione relativa al lavoro infinitesimo associato ad uno spostamento ds:

$$dW = F_T\, ds = m\, a_T\, ds = m\, \frac{dv}{dt}\, ds = m\, \frac{ds}{dt}\, dv = m\, v\, dv \quad .$$

Pertanto per un percorso finito dalla posizione A a quella B abbiamo

Energia cinetica

$$W = \int_A^B m\, v\, dv = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k \quad . \qquad (2.15)$$

Il lavoro è eguale alla variazione della quantità $\frac{1}{2}\, m\, v^2$ che si chiama *energia cinetica* del punto materiale. Il simbolo Δ indica *valore finale meno valore iniziale*. La (2.15) è stata ricavata utilizzando la legge di Newton e pertanto ha validità generale, qualunque sia la forza che agisce.

Se $W > 0$, l'energia cinetica finale è maggiore di quella iniziale mentre se $W < 0$ l'energia cinetica finale è minore di quella iniziale. Questo è il caso del lavoro delle forze di attrito e pertanto, se agiscono solo tali forze, la velocità diminuisce. Infine, se $W = 0$, l'energia cinetica resta costante; ciò si verifica, per esempio, nel moto circolare uniforme: il lavoro della forza centripeta, unica forza agente, è nullo e quindi la velocità rimane costante in modulo.

Sottolineamo che W rappresenta il lavoro totale. Se è noto come varia la forza lungo la traiettoria, possiamo calcolare il lavoro e quindi il modulo della velocità in ciascun punto (se conosciamo quella iniziale). Viceversa, se misuriamo le velocità iniziale e finale, possiamo tramite (2.15) dedurre il lavoro compiuto dalle forze agenti.

In questo paragrafo abbiamo introdotto per la prima volta il concetto di energia, nel caso particolare quella cinetica; in seguito troveremo altre forme di energia (energia potenziale legata ai vari tipi di forze). Tutte le leggi con cui vengono definite le varie forme di energia contengono sempre la *variazione di energia* e pertanto tali quantità possono essere definite a meno di una costante. Per esempio l'energia cinetica di un punto potrebbe essere scritta come $\frac{1}{2}\, m\, v^2$ + costante, senza modificare la (2.15) in quanto nella differenza la costante scompare. Però si avrebbe che questa forma di energia, legata al movimento, sarebbe non nulla anche se $v = 0$, il che non ha molto senso. Poniamo dunque, in questo caso, la costante eguale a zero.

Il lavoro è la manifestazione dell'azione di una forza ed è quindi conseguenza dell'interazione con l'ambiente circostante. Si parla pertanto di lavoro *scambiato* e non si dice mai che un sistema possiede lavoro.

Si parla invece di *energia posseduta* dal sistema, che viene modificata dall'interazione con l'ambiente esterno. Un effetto misurabile dell'interazione è la variazione di energia.

Unità di misura

Il lavoro è il prodotto di una forza per uno spostamento e quindi l'unità di misura del lavoro, e dell'energia cinetica come di ogni altra forma di energia, è newton · metro. Si tratta di una unità molto importante che si chiama joule (pronuncia corretta *giul!*) ed è espressa dal simbolo J = N m.
L'unità di misura della potenza è il watt, simbolo W; per definizione W = J/s = N m s^{-1}.

2.16 LAVORO DELLA FORZA PESO.

Calcoliamo il lavoro della forza peso $m\,\mathbf{g}$ per uno spostamento generico dalla posizione A a quella B (Fig. 2.27). L'asse z è orientato dal suolo verso l'alto ed ha quindi verso opposto a $\mathbf{g}$. Da (2.13)

$$W = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{s} = \mathbf{F}\cdot\int_A^B d\,\mathbf{s} = m\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}_{AB}\,;$$

infatti $\mathbf{F}$ è costante e $\int_A^B d\,\mathbf{s} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \mathbf{r}_{AB}$.

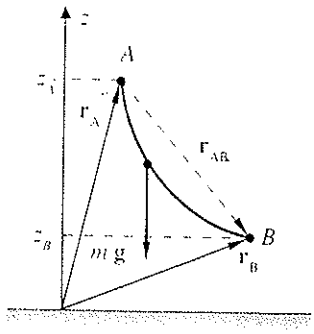


Fig. 2.27

Poiché il peso ha una sola componente diversa da zero, quella secondo l'asse z che vale $-m\,g$, e la componente di $\mathbf{r}_{AB}$ lungo l'asse z è $z_B - z_A$, il prodotto scalare si scrive semplicemente $(m\,\mathbf{g})_z\,(\mathbf{r}_{AB})_z = -m\,g\,(z_B - z_A)$ e pertanto il lavoro della forza peso vale

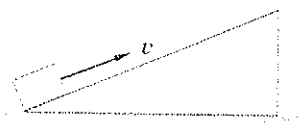
$$W = -(m\,g\,z_B - m\,g\,z_A) = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p\,.$$

Lavoro della forza peso

Con $E_p = m\,g\,z$ indichiamo una funzione della coordinata z del punto (misurata lungo un asse parallelo e di verso opposto alla forza peso) che ha questa proprietà: *il lavoro è eguale all'opposto della variazione di questa funzione durante lo spostamento da A a B e pertanto non dipende dalla particolare traiettoria che collega A e B.*

Energia potenziale della forza peso

Se il punto B si trova in una posizione più bassa di A il lavoro della forza peso è positivo; andando da A a B, E_p diminuisce: possiamo osservare che questo è lo spostamento *naturale* di un punto P sottoposto alla sola forza peso. Se il punto B è invece in una posizione più alta di A, $W < 0$, E_p aumenta: per fare avvenire questo spostamento bisogna che il punto abbia una sufficiente velocità iniziale così che la diminuzione di energia cinetica eguagli il lavoro oppure bisogna applicare al punto un'altra forza il cui lavoro motore superi in modulo il lavoro resistente della forza peso.



La figura 2.28 illustra queste due situazioni con riferimento al problema di far salire un punto materiale lungo un piano inclinato.

La trattazione fatta per la forza peso è applicabile a qualsiasi altra forza costante $\mathbf{F}$: si prende un asse parallelo e discorde a $\mathbf{F}$ e si utilizzano le stesse formule precedenti con F al posto di $m\,g$; in particolare $E_p = Fz$. E' chiaro che se l'asse z fosse concorde a $\mathbf{F}$ i risultati sarebbero gli stessi, però con $E_p = -Fz$.

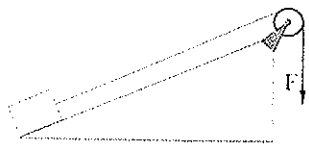


Fig. 2.28

2.17 LAVORO DI UNA FORZA ELASTICA.

Il lavoro della forza elastica $\mathbf{F} = -k\,x\,\mathbf{u}$ per uno spostamento lungo l'asse x vale

Lavoro della forza elastica

$$W = \int_A^B -k\,x\,\mathbf{u}_x \cdot d\,x\,\mathbf{u}_x = -k \int_A^B x\,d\,x = \frac{1}{2}\,k\,x_A^2 - \frac{1}{2}\,k\,x_B^2 = -\Delta E_p ,$$

posto $E_p = \frac{1}{2}\,k\,x^2$, funzione solo della posizione.

Se la coordinata iniziale è maggiore di quella finale, cioè se il punto si muove verso il centro della forza, il lavoro compiuto dalla forza elastica è positivo, E_p diminuisce (spostamento *naturale*). Nel caso contrario di allontanamento dal centro $W < 0$, E_p aumenta: per eseguire tale spostamento il punto deve possedere una velocità iniziale oppure si deve applicare una forza opportuna.

2.18 LAVORO DI UNA FORZA DI ATTRITO RADENTE.

La forza di attrito radente è data da (2.6); ricordando che il vettore $\mathbf{u}_v$ è parallelo e concorde allo spostamento $d\,\mathbf{s}$, il lavoro corrispondente si scrive

Lavoro della forza di attrito radente

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_a \cdot d\,\mathbf{s} = \int_A^B -\mu_d N\,\mathbf{u}_v \cdot d\,\mathbf{s} = -\mu_d N \int_A^B d\,s ,$$

dove l'integrale scalare $\int_A^B d\,s$ è la lunghezza del percorso da A a B, misurata lungo *la traiettoria effettiva del punto materiale*.

Il lavoro della forza di attrito radente *dipende dal percorso* e quindi non è esprimibile come differenza dei valori di una funzione delle coordinate nei punti A e B, diversamente dai casi studiati precedentemente.

Il lavoro è sempre negativo, cioè è lavoro resistente. Perché possa verificarsi il moto o deve agire un'altra forza che produca un lavoro motore oppure, in assenza di questa, il punto deve possedere una certa velocità iniziale ovvero una certa energia cinetica $E_{k,A}$. L'energia cinetica diminuisce lungo il percorso e in B la velocità è minore che in A. In particolare, data $E_{k,A}$, il punto si ferma dopo una percorso $s_{AB} = E_{k,A}/\mu_d N$.

2.19 FORZE CONSERVATIVE. ENERGIA POTENZIALE.

I tre esempi di calcolo di lavoro (paragrafi 2.16, 2.17, 2.18) presentano una differenza sostanziale: nei primi due (forza peso e forza elastica) il lavoro viene a dipendere solo dalle coordinate della posizioni A e B e non dal particolare percorso che congiunge A a B, nel terzo (forza di attrito) invece il lavoro dipende dalla traiettoria.

Forze conservative

Le forze del primo tipo, quelle per cui il lavoro non dipende dal percorso, si chiamano *forze conservative*. Per il calcolo del lavoro possiamo utilizzare qualsiasi percorso che colleghi A a B:

$$\int_{\mathrm{I}}^{B} (\mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s})_{\mathrm{I}} = \int_{\mathrm{II}}^{B} (\mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s})_{\mathrm{II}} = \int_{\mathrm{II}}^{B} \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s}$$

Il lavoro lungo il percorso I coincide con quello lungo il percorso II o lungo qualsiasi altro (e per eseguire il calcolo pratico possiamo così scegliere il percorso analiticamente più comodo).

Il lavoro è pertanto esprimibile come differenza dei valori che una funzione delle coordinate assume in A e in B (l'abbiamo visto negli esempi e ci ritorneremo più un

generale nel paragrafo 2.21). Ciò comporta che se si inverte il senso di percorrenza, cioè si va da B a A, cambia solo il segno del lavoro:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

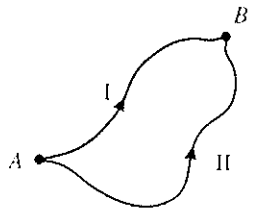


Fig. 2.29

Per un percorso chiuso $A\ B\ A$ lungo la traiettoria I e la traiettoria –II (cioè la traiettoria II percorsa in senso inverso) si ha

$$\int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{\mathrm{I}} + \int_B^A (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{-\mathrm{II}} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{\mathrm{I}} - \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{\mathrm{II}} = 0 \quad .$$

Di conseguenza *lungo un qualsiasi percorso chiuso il lavoro è nullo*:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad .$$

Questa proprietà si può assumere come definizione di forza conservativa (perfettamente equivalente alla precedente definizione).

La funzione delle coordinate di cui abbiamo parlato finora si chiama *energia potenziale* e per tutte le forze conservative vale la relazione

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p \qquad (2.16)$$

Energia potenziale

Non esiste una formula generale per l'energia potenziale, ma l'espressione esplicita dipende dalla particolare forza conservativa cui essa si riferisce. Nei due casi che abbiamo discusso si è ottenuto per la forza peso $E_p = m\,g\,z$ e per la forza elastica $E_p = \frac{1}{2}\,k\,x^2$.

Bisogna sottolineare che la (2.16), la quale in sostanza permette di esprimere il valore del lavoro direttamente tramite la variazione dell'energia potenziale, non ha il carattere generale di (2.15): quest'ultima è utilizzabile sempre, con qualsiasi tipo di forza agente. In altre parole, per il calcolo del lavoro vale (2.16) se le forze sono conservative, altrimenti bisogna usare la definizione (2.13); però, comunque si sia arrivati a W, vale sempre (2.15).

Da (2.16) si vede che se durante il moto l'energia potenziale diminuisce, $\Delta E_p < 0$, il lavoro compiuto dalla forza è positivo, se l'energia potenziale aumenta, $\Delta E_p > 0$, il lavoro è negativo. Per un percorso chiuso ovviamente

$$W = W_{AB} + W_{BA} = (E_{p,A} - E_{p,B}) + (E_{p,B} - E_{p,A}) = 0 \quad .$$

come si è visto. Se, ad esempio, $E_{p,B} > E_{p,A}$, nel percorso $A\ B$ bisogna agire dall'esterno per fare aumentare E_p (ovvero vincere il lavoro resistente W_{AB}) mentre nella seconda parte $B\ A$ del percorso complessivo viene recuperato quanto speso nella prima parte.

Questo vuol dire che *da una forza conservativa non si può ricavare lavoro se il percorso è chiuso ovvero, come si dice, se il processo è ciclico.*

L'energia potenziale viene definita a meno di una costante additiva, che è ininfluente nella valutazione del lavoro. Consideriamo infatti, nel caso dell'energia potenziale associata alla forza peso, di assumere il livello zero su un piano passante per l'origine dell'asse z e ortogonale a questo: $E_p = m\,g\,z$.

Se scegliamo una diversa origine delle coordinate (nella figura 2.30 gli assi z e

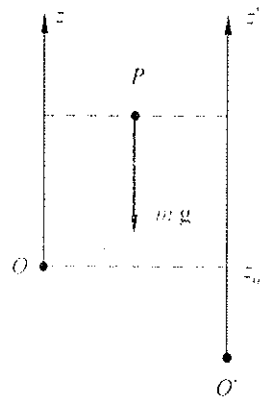


Fig. 2.30

z' sono disegnati distinti per chiarezza), $E'_p = m\,g\,z' = m\,g\,(z + z_0)$ essendo appunto le coordinate di P rispetto a O' e a O legate dalla $z' = z + z_0$. Quindi

$$E'_p = E_p + m\,g\,z_0 = E_p + \text{costante}.$$

Nella (2.16) compare la variazione dell'energia potenziale e la costante viene eliminata: pur dipendendo il valore di E_p dalla scelta dell'origine, non ne dipende il lavoro della forza peso per gli spostamenti del punto materiale P.

Ritornando a quanto visto all'inizio del paragrafo, sappiamo che ci sono forze per le quali non vale la proprietà di invarianza del lavoro rispetto al percorso e non è quindi possibile esprimere il lavoro tramite le differenze dei valori di una funzione delle coordinate. Queste forze si chiamano *non conservative o dissipative* e per esse non si può introdurre l'energia potenziale. Il lavoro di una forza non conservativa si calcola con (2.13) ed è sempre eguale, come per qualsiasi forza, alla variazione di energia cinetica.

Tipiche forze non conservative sono le forze di attrito.

2.20 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA.

Se agiscono solo forze conservative valgono sia (2.15) che (2.16):

$$W = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} \quad , \quad W = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Eguagliando le due relazioni si ha

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B} \quad :$$

la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto, ossia si conserva. Tale somma si chiama *energia meccanica* e vale pertanto, in presenza di forze conservative, il *principio di conservazione dell'energia meccanica*:

Principio di conservazione dell'energia meccanica

$$E_m = E_k + E_p = \text{costante} \qquad (2.17)$$

Se durante il moto si verifica una diminuzione di uno dei due termini che compongono l'energia meccanica, l'altro termine aumenta in accordo con (2.17). Vedremo alcune applicazioni della conservazione dell'energia negli esempi successivi.

Quando agiscono, come avviene in generale, sia forze conservative che dissipative, il lavoro complessivo è dato dalla somma del lavoro delle forze conservative W_{cons} e di quello delle forze dissipative W_{diss} e, secondo (2.15):

$$W = W_{cons} + W_{diss} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Esprimendo W_{cons} tramite (2.16) si ha

$$E_{p,A} - E_{p,B} + W_{diss} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Lavoro delle forze non conservative

$$\Rightarrow W_{diss} = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A}) = E_{m,B} - E_{m,A} = \Delta E_M \qquad (2.18)$$

In presenza di forze dissipative l'energia meccanica non si conserva e la sua variazione è eguale al lavoro delle forze dissipative!

In qualunque processo meccanico si osserva sperimentalmente che è sempre presente una forza di attrito che si oppone al moto, con $W_{diss} < 0$. *In pratica quindi l'energia meccanica diminuisce sempre* e la (2.17) è un limite ideale. In particolare, con riferimento ai processi ciclici, se sotto l'azione di sole forze conservative $W = 0$, cioè il bilancio è in parità (il sistema restituisce quanto riceve), nei casi pratici a causa della presenza delle forze di attrito $W < 0$, il bilancio è sempre in perdita (il sistema assorbe più di quanto dà).

ESEMPIO 2.9 : Conservazione dell'energia. Forza peso

Consideriamo un sistema meccanico formato da un punto materiale che può muoversi lungo il piano inclinato AB, il piano orizzontale BC e il piano inclinato CD; tutti i piani sono lisci. Abbandoniamo il punto in A con velocità iniziale nulla e determiniamo dove arriva.

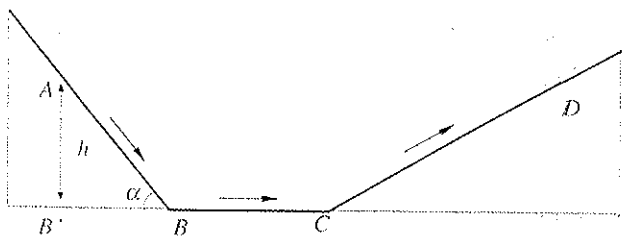


Fig. 2.31

Soluzione

In assenza di attrito la reazione vincolare è sempre normale alla traiettoria. Pertanto la sola forza che determina il moto è la forza peso, forza conservativa. Applichiamo per risolvere il problema la conservazione dell'energia meccanica (2.17):

in A $\quad E_{p,A} = m\,g\,h \;,\; E_{c,A} = 0 \;,\; E_{m,A} = m\,g\,h$

in B $\quad E_{p,B} = 0 \;,\; E_{c,B} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \;,\; E_{m,B} = \frac{1}{2}\,m\,v^2$;

deve essere

$$E_{m,A} = E_{m,B} \Rightarrow m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \Rightarrow v = v_B = \sqrt{2\,g\,h} \;.$$

Nel tratto AB l'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica. Osserviamo che si è ritrovato il risultato del paragrafo 1.5: è come se il punto cadesse lungo la verticale, infatti ai fini della variazione dell'energia potenziale conta solo la differenza di quota $h = z_A - z_B = z_A - z_B$. La velocità di arrivo sul piano orizzontale passante per B è la stessa sia per una caduta lungo la verticale AB' che lungo il piano inclinato AB o qualsiasi altro percorso simile. Quello che è diverso è il tempo impiegato: per AB' sappiamo dal paragrafo 1.5 che vale $t' = \sqrt{2\,h/g}$, nel moto lungo il tratto AB, essendo l'accelerazione g sen α e lo spazio percorso $h/\text{sen}\,\alpha$, si ha

$h/\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}\,g\,\text{sen}\,\alpha\,t^2$ da cui

$$t = \sqrt{2\,h/g\,\text{sen}^2\,\alpha} = t'/\text{sen}\,\alpha > t' \;.$$

Da B a C il moto è rettilineo uniforme e quindi $v_C = v_B$. Il punto affronta il secondo piano inclinato avendo l'energia cinetica $\frac{1}{2}\,m\,v_B^2$ e si ferma nella posizione D in cui l'energia cinetica si è trasformata integralmente in energia potenziale: pertanto D si trova alla stessa quota di A, qualunque sia l'inclinazione del piano CD. Successivamente il punto tornerebbe indietro arrestandosi in A e così via: in assenza di attrito avremmo un'oscillazione perpetua. Se il punto ha una velocità iniziale $v_A > 0$ (diretta verso B), scriviamo per l'energia

in A $\quad E_{m,A} = m\,g\,h + \frac{1}{2}\,m\,v_A^2$

in B $\quad E_{m,B} = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2\,g\,h}$

in C $\quad E_{m,C} = E_{m,B} = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2$

in D' $\quad E_{m,D'} = m\,g\,h'$

e dall'eguaglianza $m\,g\,h + \frac{1}{2}\,m\,v_A^2 = m\,g\,h'$ si ricava

$$h' = h + \frac{v_A^2}{2\,g} \;;$$

il punto D' è ad una quota più alta rispetto ad A.

ESEMPIO 2.10 : Conservazione dell'energia. Forza elastica.

Abbiamo un punto materiale fermo all'estremità di una molla a riposo posta in un piano orizzontale liscio e fissata all'altro estremo ad un vincolo fisso. Comunichiamo al punto, in un tempo estremamente breve, un impulso **J**, parallelo e concorde all'asse x e determiniamo di quanto si comprime la molla.

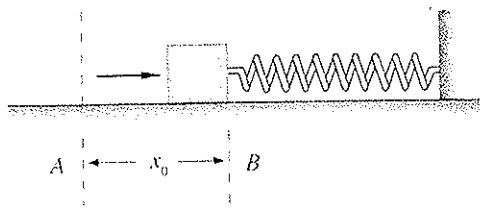


Fig. 2.32

Per effetto dell'impulso il punto materiale inizia a muoversi con velocità $\boldsymbol{v}_0$, parallela e concorde all'asse x, pari a $\mathbf{J}/m$ secondo (2.3). La reazione vincolare del piano è normale al piano stesso e l'unica forza che determina il moto è quella elastica della molla, conservativa, per cui possiamo applicare (2.17). Nella posizione iniziale la molla è a riposo, l'energia potenziale elastica è nulla e $E_{m,A} = \frac{1}{2} m v_0^2$; nella posizione finale il punto è fermo, la molla è deformata dalla quantità x_0 e $E_{m,B} = \frac{1}{2} k x_0^2$. Da $E_{m,A} = E_{m,B}$ segue $x_0 = v_0 \sqrt{m/k}$.

Nel moto da A a B si ha una *trasformazione dell'energia cinetica in energia potenziale elastica*. Il punto non può restare fermo in B, dato che la molla si trova in uno stato di compressione, e quindi, per effetto della forza elastica diretta verso A, esso ritorna nella posizione iniziale dove passa con velocità v_0 ($\frac{1}{2} k x_0^2$ si è trasformata in $\frac{1}{2} m v_0^2$). Di qui il punto prosegue e, frenato dalla forza elastica, si ferma nel punto C di coordinata $-x_0$, dove l'energia cinetica si è trasformata integralmente in energia potenziale elastica. Da C il punto ritorna in A e inizia una nuova oscillazione identica alla precedente: si tratta di oscillazioni armoniche di ampiezza x_0 e pulsazione $\sqrt{k/m}$, che continuerebbero indefinitivamente in assenza di attrito.

ESEMPIO 2.11 : Conservazione dell'energia. Pendolo semplice.

Nello studio del moto di un pendolo semplice possiamo applicare la conservazione dell'energia dato che, in assenza di attrito, agiscono la forza peso, forza conservativa, e la tensione del filo, che non compie lavoro essendo sempre normale alla traiettoria. Assumiamo nulla l'energia potenziale nel punto più basso, dove il punto P passa per la verticale; dalla figura 2.33 si vede che l'altezza di P, rispetto al livello zero, è $L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta)$. Scriviamo le energie in tre posizioni diverse:

a) nel punto di inversione (il più alto)

$$E_p = m g L (1 - \cos\theta_0) \quad , \quad E_c = 0$$

b) in un punto generico

$$E_p = m g L (1 - \cos\theta) \quad , \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

c) nel punto più basso

$$E_p = 0 \quad , \quad E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$$

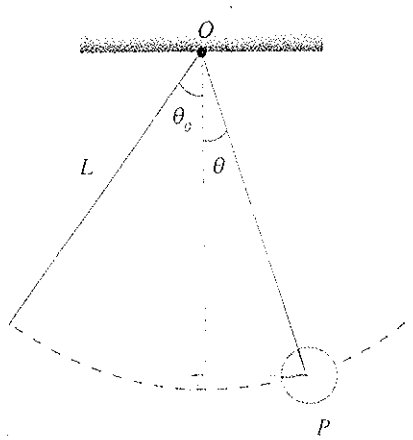


Fig. 2.33

Da a) e b), in base a (2.17),

$$m g L (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} m v^2 = m g L (1 - \cos\theta_0) ,$$

da cui si ricava la velocità in funzione della posizione angolare

$$v = \sqrt{2\,g\,L\,(\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad ;$$

in particolare, nel punto più basso la velocità è massima e vale

$$v_0 = \sqrt{2\,g\,L\,(1 - \cos\theta_0)} \quad .$$

Se $\theta_0 = \pi/2$, $v_0 = \sqrt{2\,g\,L}$: in ogni caso il risultato per v è quello che si otterrebbe se il punto cadesse liberamente.
Anche la tensione del filo può essere calcolata in funzione dell'angolo inserendo nella (2.11) l'espressione della velocità:

$$T = m\,g\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_0) .$$

Sottolineamo che le relazioni ottenute valgono per qualsiasi valore di θ_0 e non solo per le piccole oscillazioni.

ESEMPIO 2.12 : Non conservazione dell'energia.

Un punto materiale si trova sopra un piano non liscio, ad una quota h e con velocità iniziale nulla. Supponiamo che sia $\operatorname{tg}\alpha > \mu_d$ (paragrafo 2.11) e determiniamo con che velocità il punto arriva in fondo.

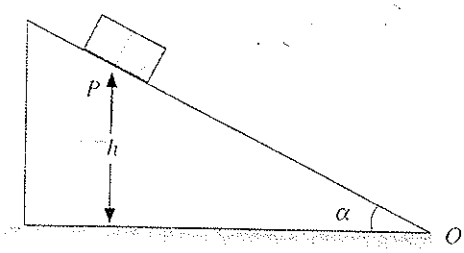


Fig. 2.34

Soluzione
Il lavoro della forza di attrito lungo il tratto PO è

$$W_{diss} = -\mu_d N\,|\mathbf{PO}| = -\mu_d\,m\,g\cos\alpha\,\frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} \quad ;$$

applicando (2.18)

$$-\mu_d\,m\,g\,\frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 - m\,g\,h$$

da cui si ricava la velocità finale

$$v_0 = \sqrt{2\,g\,h\left(1 - \frac{\mu_d}{\operatorname{tg}\alpha}\right)} \quad .$$

Vediamo che dell'energia potenziale iniziale $m\,g\,h$ solo la frazione $1 - \dfrac{\mu_d}{\operatorname{tg}\alpha}$ si è trasformata in energia cinetica, mentre la frazione $\mu_d / \operatorname{tg}\alpha$ è stata dissipata a causa dell'attrito.

2.21 RELAZIONE TRA ENERGIA POTENZIALE E FORZA.

Riprendiamo in considerazione le relazioni (2.13) e (2.16), a livello infinitesimo:

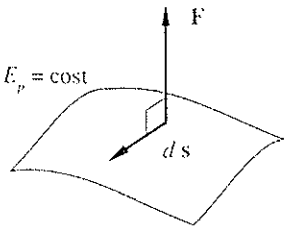
$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -dE_p .$$

dove F_x, F_y, F_z sono le componenti della forza conservativa $\mathbf{F}$. Per un percorso chiuso si ha

$$\oint (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = 0 \quad .$$

Si dimostra che la validità di tale proprietà per qualsiasi linea chiusa è la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una funzione delle coordinate E_p tale che

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad , \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad , \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad . \tag{2.19}$$



$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$

Fig. 2.35

Le quantità $\partial E_p / \partial x$, $\partial E_p / \partial y$, $\partial E_p / \partial z$ sono le derivate parziali della funzione E_p rispetto alle variabili x, y, z (si vedano le appendici A e C per queste nozioni e quella successiva di gradiente). In modo compatto le (2.19) si scrivono

$$\mathbf{F} = -\,\mathbf{grad}\, E_p \quad : \tag{2.20}$$

la forza è l'opposto del gradiente dell'energia potenziale ed è perciò diretta secondo il verso di massima diminuzione di E_p.

Il luogo dei punti nello spazio nei quali l'energia potenziale assume lo stesso valore si chiama *superficie equipotenziale*. Per uno spostamento lungo una tale superficie il lavoro è nullo, secondo (2.16), e pertanto *la forza associata all'energia potenziale è normale, in ogni punto, alla superficie equipotenziale passante per quel punto e indica, con il suo verso, quello di diminuzione di* E_p.

L'energia potenziale associata alla forza peso è $E_p = m\,g\,z$, se l'asse z è orientato verso l'alto. Da (2.19) la forza peso è

FORZA PESO $$\mathbf{F} = -\frac{dE_p}{dz}\,\mathbf{u}_z = -m\,g\,\mathbf{u}_z \quad ,$$

di verso opposto a quello dell'asse z. Nel caso della forza elastica, $E_p = \frac{1}{2}\,k\,x^2$ e la forza elastica vale

FORZA ELASTICA $$\mathbf{F} = -\frac{dE_p}{dx}\,\mathbf{u}_x = -k\,x\,\mathbf{u}_x \quad ,$$

con verso opposto a quello della crescita dell'energia potenziale. Entrambi gli esempi sono unidimensionali e non è necessario usare il simbolo di derivata parziale.

ESEMPIO 2.13

Determinare la forza che corrisponde all'energia potenziale $E_p = \frac{1}{2}\,k\,(x^2 + y^2)$.

Soluzione

Le componenti della forza si calcolano con (2.19):

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -k\,x \quad , \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = -k\,y \quad , \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = -\,\mathbf{grad}\, E_p = F_x\,\mathbf{u}_x + F_y\,\mathbf{u}_y = -k\,(x\,\mathbf{u}_x + y\,\mathbf{u}_y) = -k\,\mathbf{r}.$$

$\mathbf{F}$ è pertanto una forza elastica nel piano x, y diretta verso l'origine con modulo proporzionale alla distanza dal centro:

$$F = k\,\sqrt{x^2 + y^2} = k\,r \,.$$

ESEMPIO 2.14

Determinare il modulo della forza **F**, nella posizione di coordinate (1, – 2, 2), associata all'energia potenziale $E_p = (-2x + 5xy + 2x^2y + 3zy + 2z^2)$ J.

Soluzione
Calcoliamo le componenti della forza sempre utilizzando (2.19):

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2 - 5y - 4xy \qquad = 20 \text{ N}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = -5x - 2x^2 - 3z \qquad = -13 \text{ N}$$

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = -3y - 4z \qquad = -2 \text{ N}$$

Il segno negativo indica che le componenti F_x e F_z hanno verso opposto rispetto a quello dei rispettivi assi. Il modulo vale

$$F\ (1, -2, 2) = \sqrt{20^2 + 13^2 + 2^2} = 23.9 \text{ N} \quad .$$

2.22 MOMENTO ANGOLARE. MOMENTO DELLA FORZA.

Nella trattazione dei vettori in appendice C è discusso il concetto di momento di un vettore rispetto ad un punto. Vediamone le due applicazioni più comuni in meccanica, riferite alla quantità di moto e alla forza.

Si definisce come *momento angolare il momento del vettore quantità di moto*

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\,\boldsymbol{v} \qquad \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

Momento angolare

Nella figura 2.36 il punto O è il *polo* rispetto a cui è calcolato **L**; sappiamo dall'appendice C che se si cambia polo vale la relazione

$$\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{L}_O + \mathbf{O'O} \times m\,\boldsymbol{v} \quad .$$

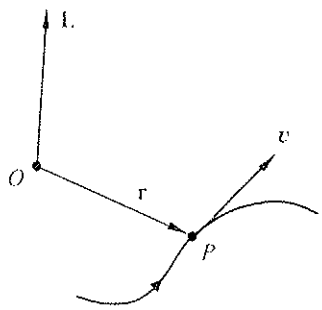


Fig. 2.36

In generale il momento angolare è una funzione del tempo, L (t).

Nel moto curvilineo piano si può esprimere la velocità tramite le sue componenti radiale e trasversa, secondo (1.19), per cui

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\,\boldsymbol{v} = \mathbf{r} \times m\,(\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\theta) = \mathbf{r} \times m\,\boldsymbol{v}_\theta$$

in quanto i vettori **r** e $\boldsymbol{v}_r$ sono paralleli e il loro prodotto vettoriale è nullo. Se il polo O sta nel piano del moto **L** risulta ortogonale a tale piano e vale in modulo

$$L = m\,r\,v_\theta = m\,r^2\,\frac{d\theta}{dt} \quad . \qquad (2.21)$$

In particolare, se il moto è circolare $L = m\,r^2\,\omega$, con riferimento al centro della circonferenza.

Il *momento della forza* è definito come $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Se si cambia polo

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{F}. \qquad \text{N} \cdot \text{m}$$

Momento della forza

Quando ad un punto sono applicate più forze con risultante $\mathbf{R} = \Sigma_i\,\mathbf{F}_i$ si ha

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{F}_n) = \mathbf{r} \times \mathbf{R} ;$$

il momento complessivo è eguale al momento della forza risultante.

Pertanto un sistema di forze applicate nello stesso punto può sempre essere sostituito, nel calcolo dell'accelerazione, del lavoro e del momento complessivi, dalla forza risultante. Tale proprietà non può evidentemente essere utilizzata se le forze sono applicate in punti diversi.

Teorema del momento angolare

Se calcoliamo la variazione nel tempo del momento angolare di un punto materiale P in movimento abbiamo

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\,\boldsymbol{v} + \mathbf{r} \times m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} ,$$

dove $\mathbf{r}$ è il raggio vettore che congiunge P al polo O. Supponiamo che il polo O sia fermo (nel sistema di riferimento da cui osserviamo il moto); allora $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ coincide con la velocità di P, che è la stessa sia rispetto all'origine che a qualsiasi altro punto fermo, e il primo prodotto vettoriale si annulla. Nel secondo termine, $m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\,\boldsymbol{a}$ coincide con la forza $\mathbf{F}$ applicata al punto P purché il sistema di riferimento sia inerziale (vedi capitolo 3) e quindi $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ è il momento della forza rispetto allo stesso polo O.

In conclusione

Teorema del momento angolare

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \qquad (2.22)$$

relazione che rappresenta *il teorema del momento angolare per un punto materiale*: la derivata temporale del momento angolare è eguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo *fisso in un sistema di riferimento inerziale.*

Il momento della forza può essere nullo sia perché la forza è nulla sia quando $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$ sono paralleli; in tal caso da (2.22)

Conservazione del momento angolare

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \qquad \text{e quindi} \qquad \mathbf{L} = \text{costante.}$$

Il momento angolare di un punto materiale rimane costante nel tempo (si conserva) se il momento delle forze è nullo.

Da (2.22) si ha $\mathbf{M}\,dt = \mathrm{d}\,\mathbf{L}$ e integrando tra l'istante iniziale e l'istante t (finale)

$$\int_0^t \mathbf{M}\,dt = \Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_{fin} - \mathbf{L}_{in} \qquad (2.23)$$

Per produrre una variazione finita del momento angolare di un punto materiale occorre l'azione, per un certo tempo, del momento di una forza. Tale proprietà è analoga al teorema dell'impulso (2.3), con analoghe considerazioni per quanto riguarda il calcolo effettivo dell'integrale.

Se la forza viene applicata al punto per un tempo molto breve $\mathbf{r}$ è praticamente

costante e (2.23) diventa

$$\int_0^t \mathbf{M}\,dt = \int_0^t (\mathbf{r}\times\mathbf{F})\,dt = \mathbf{r}\times\int_0^t \mathbf{F}\,dt = \mathbf{r}\times\mathbf{J} = \Delta\mathbf{L}\,, \qquad (2.24)$$

Teorema del momento dell'impulso

detto *teorema del momento dell'impulso*: *la variazione di momento angolare è eguale al momento dell'impulso applicato al punto.*

Osserviamo infine, con riferimento al moto circolare, che anche il lavoro può essere espresso tramite il modulo del momento della forza. Infatti

$$W = \int_A^B F_T\,ds = \int_{\theta_1}^{\theta_B} r\,F_T\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_B} M\,d\theta \qquad (2.25)$$

Lavoro in un moto circolare

avendo tenuto conto che $ds = r\,d\theta$ e che la componente normale della forza ha momento nullo rispetto al centro della circonferenza. Vedremo che (2.25) è di grande utilità nello studio del moto di rotazione di un corpo rigido (capitolo 6).

Il teorema del momento angolare è una diretta conseguenza della legge di Newton e l'utilizzazione del momento angolare e del momento della forza e delle loro proprietà, anche se rilevante in alcuni casi specifici, non fornisce nessuna informazione che non sia già ricavabile direttamente con la legge di Newton. Nei problemi di dinamica del punto l'unica legge fondamentale è la seconda legge (2.1). La situazione è diversa, come vedremo, per la dinamica dei sistemi di punti in cui è necessario introdurre la terza legge di Newton e servirsi, oltre che di forze e accelerazione, anche del momento della forza e del momento angolare. Ci sarà allora di aiuto il formalismo adesso sviluppato per un punto.

Unità di misura

L'unità di misura del momento angolare è mkg ms^{-1} cioè $kg\,m^2s^{-1}$ ovvero Nms; l'unità del momento della forza è Nm. Questa unità è formalmente identica al joule, però lavoro e momento della forza sono grandezze con significato fisico molto diverso e quindi si mantengono diverse come nome e simbolo le unità di misure.

2.23 FORZE CENTRALI.

Si definisce *forza centrale* una forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà: in qualsiasi punto la sua direzione passa sempre per un punto fisso, detto centro della forza, e il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro stesso. Se $\mathbf{u}_r$ è il vettore della direzione $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$, $\mathbf{F} = F(r)\,\mathbf{u}_r$ con $F(r) > 0$ se la forza è repulsiva e $F(r) < 0$ per una forza attrattiva.

La presenza di una forza, funzione della posizione, che agisce in una certa regione dello spazio, costituisce una modifica dello spazio stesso e stabilisce quello che si chiama un *campo di forza*. Questo campo agisce su ogni particella che si trovi in esso. Il concetto di campo è indispensabile per capire, ad esempio, le forze elettrodinamiche che si esercitano tra cariche elettriche in movimento; in effetti esso fu sviluppato da Faraday per l'elettromagnetismo e applicato successivamente alla gravitazione.

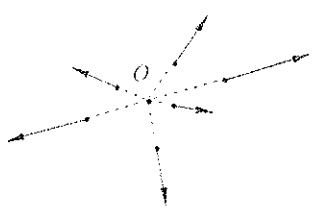


Fig. 2.37

In un campo di forze centrali il momento della forza rispetto al centro è ovunque

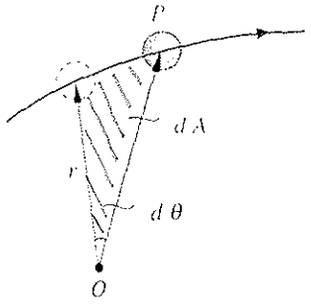


Fig. 2.38

nullo, dato che i vettori **r** e **F** sono paralleli. Pertanto da (2.22)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{L} = \text{costante} ,$$

in direzione, verso e modulo.

Per definizione **L** è sempre ortogonale al piano contenente **r** e $\boldsymbol{v}$ (e su cui stanno O e P). Se **L** è costante in direzione tale piano è fisso, cioè **r** e $\boldsymbol{v}$ devono stare sempre nello stesso piano. Pertanto il moto di P è un moto (in generale curvilineo) che avviene in un piano fisso contenente O e determinato dai valori iniziali di **r** e $\boldsymbol{v}$. La costanza del verso di **L** fissa un verso di percorrenza sulla traiettoria.

Dato che il moto è piano il modulo di **L** è dato da (2.21): esso rimane costante nel tempo; si noti però che è costante il prodotto $r^2 \frac{d\theta}{dt}$, ma non, in generale, r e $d\theta/dt$ separatamente.

In un tempo dt il raggio vettore congiungente O a P *spazza* l'area infinitesima tratteggiata in figura 2.38, approssimabile a un triangolo di base $r\,d\theta$ e altezza r e quindi di area $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ (a meno di infinitesimi di ordine superiore). La quantità

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} ,$$

Velocità areale

detta *velocità areale*, esprime la rapidità con cui viene spazzata l'area dal vettore **r**. Da (2.21) risulta

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} ;$$

la costanza del modulo di **L** comporta la costanza della velocità areale.

Riassumendo, *la traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso passante per il centro ed è percorsa in modo tale che la velocità areale rimanga costante.*

Seconda legge di Keplero

Keplero aveva stabilito sperimentalmente che i pianeti descrivono le loro orbite attorno al sole con velocità areale costante (*seconda legge di Keplero*). Da tale risultato, vedi capitolo 7, Newton dedusse che la forza gravitazionale è una forza centrale (altro esempio di forze centrali sono le forze elastiche).

Se la traiettoria è chiusa, come nel caso dei pianeti, la costanza della velocità areale, $dA/dt = C$, implica che la costante C sia eguale a A/T, dove A rappresenta l'area totale racchiusa dalla traiettoria e T il tempo totale impiegato a percorrerla, cioè il periodo; allora $A/T = L/2m$ e quindi

$$T = \frac{2m}{L} A \quad . \tag{2.26}$$

Esprimiamo infine l'accelerazione del punto P tramite le componenti polari (1.23). In un campo di forze centrali la componente trasversa deve essere nulla: e infatti

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

essendo $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ costante. L'accelerazione è puramente radiale e in modulo vale

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad .$$

Vediamo di trasformare questa espressione in funzione delle coordinate polari eliminando la dipendenza esplicita dal tempo. Ricordiamo che $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}$ e calcoliamo dr/dt e $d^2 r/dt^2$:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \quad ,$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\left[-\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = -\frac{L^2}{m^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \quad .$$

Sostituendo nell'espressione dell'accelerazione

$$a = -\frac{L^2}{m^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) - r\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2$$

e quindi, ritornando all'espressione vettoriale,

$$\boldsymbol{a} = -\frac{L^2}{m^2 r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]\mathbf{u}_r \quad . \qquad (2.27)$$

Formula di Binet

Questa relazione si chiama *formula di Binet* ed è di particolare utilità nello studio del moto in un campo di forza gravitazionale, come vedremo nel capitolo 7.

Concludiamo questo paragrafo sulle forze centrali dimostrando che tali forze sono conservative. Abbiamo detto che il modulo di una forza centrale dipende solo dalla distanza r dal centro, $\mathbf{F} = F(r)\,\mathbf{u}_r$. Il lavoro di questa forza si scrive

$$W = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F(r)\,\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Il prodotto scalare $\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{s}$ vale $ds\cos\theta$ e dalla figura 2.39 si vede che $ds\cos\theta$ è pari a dr, variazione del modulo di $\mathbf{r}$ durante lo spostamento $d\mathbf{s}$. Quindi

$$W = \int_A^B F(r)\,dr = f(r_B) - f(r_A) \quad :$$

il lavoro è dato dalla variazione di una funzione delle coordinate di A e B, condizione perché la forza sia conservativa.

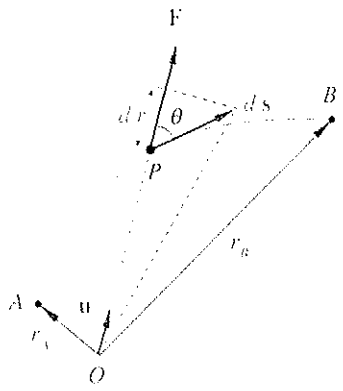


Fig. 2.39

2.24 RIEPILOGO.

Rivediamo le nozioni più importanti di dinamica del punto, con lo scopo di chiarirne ulteriormente il significato e di consigliarne il modo di applicazione nella soluzione di problemi.

La *legge fondamentale* da utilizzare per lo studio del moto di un punto materiale

è $\mathbf{F} = m\,\boldsymbol{a} = m\,d\boldsymbol{v}/dt$. A tal fine si devono identificare le forze che effettivamente agiscono sul punto, non dimenticando reazioni vincolari, tensioni di fili o eventuali attriti. Si deve inoltre valutare lungo quali direzioni può essere più conveniente scomporre le forze, facendo particolare attenzione a non commettere errori di segno proiettando.

Negli esempi discussi si sono considerate forze costanti, come il peso, oppure di tipo elastico o viscoso. L'equazione differenziale che deriva dalla legge di Newton risulta facilmente risolvibile, con le cognizioni a nostra disposizione. Nei casi più generali, peraltro, dobbiamo conoscere la forma di $\mathbf{F}(t)$ se vogliamo calcolare la velocità e di qui lo spostamento, secondo le procedure viste nel primo capitolo.

Un argomento sul quale è opportuno riflettere bene per evitare errori è il seguente: la legge di Newton permette di calcolare l'accelerazione $\boldsymbol{a} = \mathbf{F}/m$ e quindi la velocità, secondo (1.24):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \int_0^t \boldsymbol{a}\, d\,t \quad .$$

In generale velocità e accelerazione non sono parallele e il moto avviene nella direzione e verso della velocità, non dell'accelerazione e quindi della forza (qui giocano un ruolo essenziale le condizioni iniziali). Si consideri ad esempio il moto circolare uniforme dove $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{v}$ sono ortogonali. La forza è diretta verso il centro della circonferenza (forza centripeta), ma il moto avviene lungo la circonferenza. Un satellite è attirato dalla terra, ma, se ha un'opportuna velocità, può descrivere un'orbita circolare senza cadere sulla terra. Ancora, nello studio del moto di un corpo sottoposto alla forza peso abbiamo osservato che la traiettoria è parabolica mentre la forza è verticale.

Se nella (1.24) inseriamo la legge di Newton abbiamo

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \int_0^t \frac{\mathbf{F}}{m}\, d\,t$$

e ritroviamo il teorema dell'impulso (2.3), con un passaggio che porta dalla cinematica alla dinamica. Il teorema dell'impulso trova un'interessante e comune applicazione nello studio delle conseguenze dell'applicazione di una percossa a un punto fermo. Se $\mathbf{F}_m$ è la forza media esercitata dalla percossa nel tempo Δt, di norma molto breve così che durante Δt si può assumere che il punto sia rimasto nella posizione iniziale, $\mathbf{F}_m\,\Delta t = m\,\boldsymbol{v}$ e si può calcolare la velocità acquistata dal punto. Successivamente il punto si muoverà in dipendenza delle eventuali altre forze agenti, quali peso, attrito, ecc. ma non di $\mathbf{F}_m$ che è già cessata.

Discutendo il lavoro di una forza abbiamo dimostrato che, qualsiasi sia la forza agente, esso è eguale alla variazione dell'energia cinetica del punto su cui agisce la forza. Una categoria particolare di forze, a cui appartengono per esempio le forze costanti vettorialmente e le forze centrali, è costituita dalle forze conservative. Per tali forze il lavoro è esprimibile tramite la variazione di una funzione delle coordinate del punto, l'energia potenziale, e si ha la conservazione dell'energia meccanica.

Il significato dell'energia, sia cinetica che potenziale, è *la capacità di un sistema di scambiare lavoro* ovvero essa va intesa come *serbatoio di lavoro*. Il fatto che un punto materiale possieda una certa energia potenziale o cinetica implica che con opportuni processi si può ricavare lavoro, parzialmente o integralmente a seconda che ci siano o non ci siano attriti.

Un'applicazione molto comune del *principio di conservazione dell'energia*

meccanica sfrutta il legame stabilito da (2.17) tra l'energia cinetica, funzione della velocità, e l'energia potenziale, funzione delle coordinate, per esprimere la velocità in funzione della posizione. Questa via normalmente è da preferire nei problemi in cui non è richiesta la dipendenza dal tempo (purché, naturalmente, sia lecito applicare la conservazione dell'energia). Se invece è richiesta esplicitamente la legge oraria conviene applicare la legge di Newton.

Però, anche da (2.17) si può arrivare alla legge oraria. Infatti, limitandoci al caso unidimensionale,

$$E_p(x) + \frac{1}{2} m v^2 = E_m \quad \Rightarrow \quad v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E_m - E_p\right)} .$$

Da $v = \frac{dx}{dt}$ scriviamo $\frac{dx}{v} = dt$ e integriamo: $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v\,x} = t$. Svolgendo l'integrale si ha $x(t)$ e derivando $v(t)$. È chiaro che il calcolo può presentarsi complicato.

Infine, vedremo che il *teorema del momento angolare*, opportunatamente modificato, troverà applicazione nella dinamica dei sistemi di punti e che le proprietà delle forze centrali saranno utili nello studio della forza di gravitazione universale.

Riprendendo quanto detto nel paragrafo 1.1, dobbiamo sempre tener presente che le leggi viste valgono per il moto di un punto materiale che certamente è un'astrazione in quanto non esistono corpi macroscopici privi di struttura geometrica. Tuttavia ripetiamo che, per questa sua estrema semplicità, il punto materiale ha una notevole importanza concettuale nel senso che lo studio del suo moto permette di comprendere le leggi dei fenomeni dinamici nel caso più elementare, senza le complicazioni dovute alla struttura del sistema in esame. Come vedremo, in pratica dobbiamo trattare con corpi estesi in moto, però se il moto è *traslatorio*, cioè il corpo non ruota e non si deforma, tutti i punti si muovono nello stesso modo, ciascuno come se fosse un punto materiale. Riprenderemo questi argomenti nei capitoli 5 e 6 introducendo il centro di massa e studiando il moto di un corpo rigido.

3 MOTI RELATIVI

3.1 SISTEMI DI RIFERIMENTO. VELOCITÀ E ACCELERAZIONE RELATIVE.

Sperimentalmente è provato con estrema accuratezza che *le leggi fisiche non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento.*

Fissato un sistema di riferimento e stabilita una certa proprietà, questa resta vera anche se cambiano l'origine e l'orientazione degli assi coordinati, ovvero se ci riferiamo ad un altro sistema ottenuto dal primo con una traslazione (spostamento dell'origine, conservando la stessa direzione degli assi) o con una rotazione (stessa origine, cambio della direzione degli assi) o con una operazione combinata.

Non esiste pertanto un punto privilegiato dello spazio e nemmeno un'orientazione privilegiata: *lo spazio appare omogeneo e isotropo.*

La caratteristica sostanziale di invarianza acquista un aspetto formale se le leggi fisiche vengono espresse come relazioni tra entità che godono anch'esse delle suddette proprietà di invarianza, come le grandezze scalari o quelle vettoriali o altre più complesse, come ad esempio i tensori.

La situazione è completamente differente quando i sistemi di riferimento sono in movimento uno rispetto all'altro.

Abbiamo già rilevato come il concetto stesso di moto sia relativo, abbia cioè bisogno della precisazione del sistema di riferimento. Un esempio tra i più semplici è quello di considerare una persona seduta in un mezzo di trasporto in movimento:

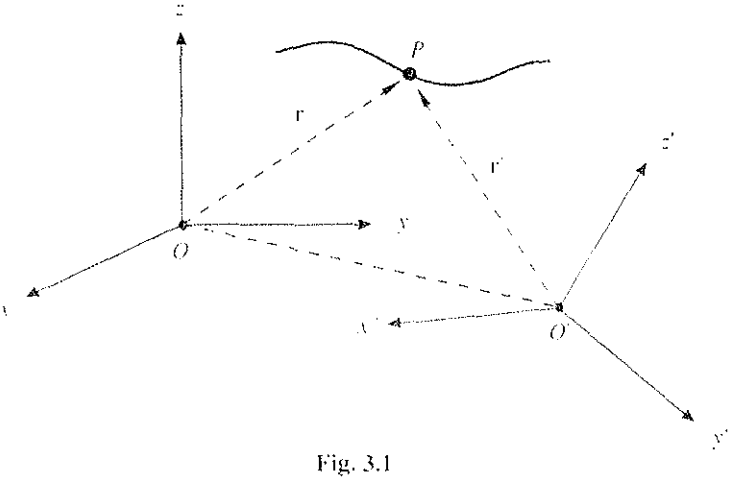


Fig. 3.1

essa è in quiete rispetto al mezzo, ma è in movimento rispetto al suolo con la velocità che ha il mezzo stesso.

Consideriamo il problema riferendoci alla figura 3.1. Il punto P è in movimento lungo una generica traiettoria. Il suo moto viene osservato da una terna cartesiana con centro in O che, per convenzione, chiamiamo *sistema fisso* e da una terna cartesiana con centro O' che, sempre per convenzione, chiamiamo *sistema mobile*.

Vogliamo ricavare una relazione tra la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P, misurate da un osservatore solidale con il sistema fisso, e le corrispondenti grandezze misurate da un osservatore solidale con il sistema mobile. Cercheremo poi di stabilire come la nozione di invarianza possa eventualmente estendersi appunto al caso in cui i sistemi di riferimento siano in moto l'uno rispetto all'altro. Ripetiamo che la dizione sistema fisso e sistema mobile è solo una questione di convenzioni. Vedremo in seguito che esiste una maniera più fisica per distinguere i sistemi di riferimento in due classi ben diverse.

La relazione tra le posizioni del punto P, misurate rispetto ai due sistemi di riferimento, è la seguente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{OO'} + \mathbf{r'} \quad , \tag{3.1}$$

con

$$\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z \quad , \quad \mathbf{r'} = x'\mathbf{u}_{x'} + y'\mathbf{u}_{y'} + z'\mathbf{u}_{z'} \quad , \quad \mathbf{OO'} = x_{O'}\,\mathbf{u}_x + y_{O'}\,\mathbf{u}_y + z_{O'}\,\mathbf{u}_z$$

Assumiamo, in accordo con la convenzione che il primo sistema sia fisso, che i vettori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ siano indipendenti dal tempo.

La velocità del punto P rispetto al sistema fisso, che chiamiamo *velocità assoluta*, è data da

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{u}_y + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{u}_z \quad ,$$

mentre quella misurata da un osservatore solidale al sistema mobile, che indichiamo come *velocità relativa*, è

$$\boldsymbol{v'} = \frac{dx'}{dt}\,\mathbf{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\,\mathbf{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\,\mathbf{u}_{z'} \quad .$$

La velocità dell'origine O' del sistema di riferimento mobile misurata da un osservatore nel sistema fisso è data da

$$\boldsymbol{v}_{O'} = \frac{d\mathbf{OO'}}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt}\,\mathbf{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\,\mathbf{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\,\mathbf{u}_z \quad .$$

La derivata rispetto al tempo della (3.1) fornisce

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{OO'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r'}}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt}\,\mathbf{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\,\mathbf{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\,\mathbf{u}_z +$$

$$+ \frac{dx'}{dt}\,\mathbf{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\,\mathbf{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\,\mathbf{u}_{z'} + x'\frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt}$$

ovvero

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{v}' + x' \frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} \quad . \tag{3.2}$$

Osserviamo che $\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ non coincide con $\boldsymbol{v}'$ in quanto nella variazione di $\mathbf{r}'$ compaiono non solo le derivate delle coordinate, ma anche quelle dei versori degli assi del sistema mobile, che forniscono gli ultimi tre termini della (3.2).

$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \omega \times \mathbf{A}$ ← Da (1.33) abbiamo che la derivata di un versore $\mathbf{u}$, in quanto vettore con modulo costante, si può scrivere $\omega \times \mathbf{u}$; pertanto per le derivate dei tre versori $\mathbf{u}_{x'}$, $\mathbf{u}_{y'}$, $\mathbf{u}_{z'}$, si hanno le seguenti *formule*, dette *di Poisson*:

$$\frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} = \omega \times \mathbf{u}_{x'} \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} = \omega \times \mathbf{u}_{y'} \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} = \omega \times \mathbf{u}_{z'} \quad .$$

I tre versori $\mathbf{u}_{x'}$, $\mathbf{u}_{y'}$, $\mathbf{u}_{z'}$, che individuano la terna mobile, sono rigidamente legati l'uno all'altro, nel senso che le loro mutue orientazioni non possono cambiare. Alla rotazione di uno, con velocità angolare ω, corrisponde la rotazione degli altri due con la stessa velocità angolare, come se essi fossero parte di un unico corpo indeformabile (questo risultato sarà più chiaro dopo lo studio del corpo rigido, nel capitolo 6; ad ogni modo le formule di Poisson sono dimostrate per esteso nel paragrafo 3.7).

Possiamo adesso riscrivere gli ultimi tre termini di (3.2) come

Formule di Poisson

$$\begin{aligned} & x'(\omega \times \mathbf{u}_{x'}) + y'(\omega \times \mathbf{u}_{y'}) + z'(\omega \times \mathbf{u}_{z'}) = \\ & = \omega \times (x'\mathbf{u}_{x'} + y'\mathbf{u}_{y'} + z'\mathbf{u}_{z'}) = \omega \times \mathbf{r}' \quad ; \end{aligned} \tag{3.3}$$

dato che x', y', z' sono numeri, li abbiamo trasportati a secondo membro in ciascun prodotto vettoriale.

Sostituendo (3.3) in (3.2) otteniamo

Teorema delle velocità relative

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{v}' + \omega \times \mathbf{r}' \quad . \tag{3.4}$$

In particolare

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{v}' + \omega \times \mathbf{r}' \quad . \tag{3.5}$$

La (3.4) esprime il *teorema delle velocità relative*; le misure di velocità compiute nei due sistemi sono diverse, ma non sono scorrelate, in quanto legate appunto dalla (3.4).

La differenza $\boldsymbol{v}_t$ tra le velocità misurate nei due sistemi di riferimento è chiamata *velocità di trascinamento*:

Velocità di trascinamento

$$\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}_{O'} + \omega \times \mathbf{r}' \quad . \tag{3.6}$$

Essa è pari alla velocità rispetto al sistema fisso di quel punto P^*, solidale con il sistema mobile, che coincide nell'istante considerato con punto P: per tale punto P^* infatti $\boldsymbol{v}' = 0$, proprio in quanto esso è solidale con il sistema mobile. In altre parole, se P fosse fermo rispetto al sistema mobile, la sua velocità misurata dal sistema fisso coinciderebbe con la velocità di trascinamento. Se invece P si muove

rispetto al sistema mobile, la (3.4) afferma che la velocità assoluta è la somma della velocità relativa e di quella di trascinamento.

Il moto di trascinamento, legato in pratica al moto del sistema mobile, può essere considerato in ogni istante come la somma di un termine traslatorio con velocità istantanea $\boldsymbol{v}_{O'}$ e di un termine rotatorio con velocità angolare ω, variabile in generale sia in modulo che in direzione.

Consideriamo ora la relazione tra le accelerazioni del punto P misurate rispetto ai due sistemi di riferimento. Rispetto al sistema fisso l'*accelerazione assoluta* è data da

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\mathbf{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathbf{u}_z \qquad \text{Accelerazione assoluta}$$

mentre rispetto al sistema mobile l'*accelerazione relativa* è

$$\boldsymbol{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\,\mathbf{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\,\mathbf{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\,\mathbf{u}_{z'} \qquad \text{Accelerazione relativa}$$

L'accelerazione dell'origine del sistema mobile O' rispetto a O è data da $\boldsymbol{a}_{O'} = d\boldsymbol{v}_{O'}/dt$. Derivando (3.4) rispetto al tempo otteniamo:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} + \frac{d\,\omega}{dt} \times \mathbf{r}' + \omega \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

Calcoliamo $d\boldsymbol{v}'/dt$ ricavando

$$\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\,\mathbf{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\,\mathbf{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\,\mathbf{u}_{z'}\right) = \frac{d^2x'}{dt^2}\,\mathbf{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\,\mathbf{u}_{y'} +$$

$$+ \frac{d^2z'}{dt^2}\,\mathbf{u}_{z'} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} = \boldsymbol{a}' + \omega \times \boldsymbol{v}'.$$

Abbiamo di nuovo utilizzato le formule di Poisson per il calcolo delle derivate dei vettori degli assi mobili. Da (3.5) si ha inoltre

$$\omega \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \omega \times \boldsymbol{v}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}')$$

e pertanto

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_{O'} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') + \frac{d\,\omega}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\omega \times \boldsymbol{v}'. \qquad (3.7)$$

Teorema delle accelerazioni relative

Le accelerazioni del punto P misurate nei due sistemi non coincidono, ma sono messe in relazione tramite la (3.7), detta *teorema delle accelerazioni relative*.

Per valutare l'*accelerazione di trascinamento* $\boldsymbol{a}_t$ riprendiamo la discussione fatta per la velocità di trascinamento. L'accelerazione di trascinamento è quella del punto P^*, solidale col sistema mobile, che coincide nell'istante considerato col punto P. Per P^* $\boldsymbol{a}'$ e $\boldsymbol{v}'$ sono nulle e da (3.7)

Accelerazione di trascinamento

$$\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{a}_{O'} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r}' \tag{3.8}$$

Possiamo pertanto riscrivere (3.7) come

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_c ;$$

l'ultimo termine

Accelerazione di Coriolis

$$\boldsymbol{a}_c = 2\omega \times \boldsymbol{v}' \tag{3.9}$$

è chiamato *accelerazione complementare o di Coriolis*; esso dipende dal moto di P rispetto al sistema mobile tramite la velocità relativa $\boldsymbol{v}'$.

La complessa struttura della (3.7) fa comprendere quanto possa essere diversa la descrizione del moto di uno stesso punto visto da due sistemi diversi. Conseguentemente saranno diverse le forze che vengono *ipotizzate* per spiegare il determinato tipo di moto da parte degli osservatori solidali a differenti sistemi di riferimento. Passiamo quindi ad esaminare, dopo le relazioni cinematiche, gli aspetti dinamici del moto relativo.

3.2 SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI. RELATIVITÀ GALILEIANA.

Sistema di riferimento inerziale

Definiamo come *sistema di riferimento inerziale* un sistema in cui valga rigorosamente la legge di inerzia, in cui cioè un punto *non soggetto a forze* lanciato con velocità arbitraria in qualunque direzione si muova con moto rettilineo uniforme o, se è in quiete, resti in quiete.

È evidente che la definizione di sistema di riferimento inerziale ha significato solo se siamo in grado di verificare in modo diverso che il punto non è soggetto a forze. È ragionevole supporre che questa situazione si verifichi sia quando il punto è sufficientemente lontano da ogni altro corpo in modo da poter trascurare ogni interazione, sia quando è possibile bilanciare le forze agenti in modo che la risultante sia nulla. Assumiamo pertanto di poter disporre di un punto materiale non soggetto a forze e quindi di poter verificare se il sistema di riferimento in cui si osserva il moto sia inerziale o no (una simile ammissione è stata implicitamente fatta quando abbiamo introdotto il principio di inerzia).

In un sistema di riferimento inerziale la legge di Newton (2.1) ha l'espressione più semplice: le forze che compaiono a primo membro sono le *forze vere* cioè quelle che sappiamo derivare dalle interazioni fondamentali, classificate nel paragrafo 2.5, e la risultante è proporzionale all'accelerazione misurata in quel sistema di riferimento.

Consideriamo ora un altro sistema di riferimento che si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad un certo sistema inerziale. Pertanto si ha

$$v_{O'} = \text{costante} \quad , \quad a_{O'} = 0 \quad \text{e} \quad \omega = 0$$

Da (3.7) ricaviamo $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$: le accelerazioni di un punto misurate nei due sistemi di riferimento sono eguali. Se $\boldsymbol{a} = 0$ anche $\boldsymbol{a}' = 0$ e quindi il secondo sistema è pure inerziale.

Abbiamo così ottenuto questo risultato fondamentale: *definito un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a*

questo sono anch'essi inerziali: per tali sistemi la legge di Newton si scrive allo stesso modo, ossia con gli stessi valori di $\mathbf{F}$ e di $\boldsymbol{a}$; in particolare se $\boldsymbol{a} = 0$ in uno, essa è nulla in tutti gli altri.

Conseguenza importante è che, essendo la dinamica la stessa, non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi diversi sistemi di riferimento, se uno di essi è in quiete o in moto. Non ha cioè senso il concetto di moto assoluto. Tale situazione fisica viene descritta anche con il termine di *relatività galileiana*.

Relatività galileiana

Se il moto del secondo sistema è accelerato rispetto al sistema inerziale, sia perché $\boldsymbol{a}_0 \neq 0$ oppure $\omega \neq 0$ o per entrambe le ragioni, si osserva che la legge di Newton non è più valida, la *forza vera* che agisce sul punto considerato non è proporzionale all'accelerazione del punto, misurata nel sistema accelerato.

Tale risultato appare chiaro da (3.7): infatti, se $\mathbf{F} = m\,\boldsymbol{a}$ nel sistema inerziale, nel sistema mobile in moto accelerato non può sussistere la relazione $\mathbf{F} = m\,\boldsymbol{a}'$ poiché $\boldsymbol{a}' \neq \boldsymbol{a}$. D'altra parte, se moltiplichiamo i termini di (3.7) per la massa del punto e teniamo conto che $\mathbf{F} = m\,\boldsymbol{a}$, abbiamo:

$$\mathbf{F} - m\,\boldsymbol{a}_t - m\,\boldsymbol{a}_c = m\,\boldsymbol{a}' \quad , \tag{3.10}$$

dove $\boldsymbol{a}_t$ e $\boldsymbol{a}_c$ sono le accelerazioni di trascinamento e di Coriolis come definite rispettivamente da (3.8) e (3.9).

La (3.10) rappresenta una forma modificata dalla legge di Newton: in un sistema non inerziale il prodotto della massa del punto materiale per l'accelerazione misurata in quel sistema è eguale alla *forza vera* agente sul punto più le *forze apparenti*. Queste ultime forze, che sono sempre proporzionali alla massa del punto e vengono pertanto chiamate anche *forze di inerzia*, appaiono agenti solo nel sistema non inerziale, dove costituiscono il termine correttivo che permette di ritornare ad una espressione $\mathbf{F}' = m\,\boldsymbol{a}'$.

Forze apparenti o forze di inerzia

È chiaro che le forze apparenti non derivano dalle interazioni fondamentali e non esistono in un sistema di riferimento inerziale.

Riteniamo che ora sia evidente l'importanza di riferire le misure ad un sistema inerziale. In tale sistema infatti la descrizione di un fenomeno dinamico è più semplice e più aderente a quelli che supponiamo siano i meccanismi fisici di base.

Se osserviamo in un sistema inerziale un punto materiale che descrive una traiettoria curva possiamo affermare che su di esso agisce una forza (vera); se $\mathbf{F} = 0$ sappiamo che il moto è rettilineo uniforme e viceversa.

In un sistema accelerato vediamo da (3.10) che $\mathbf{F} = 0$ non comporta $\boldsymbol{a}' = 0$ e quindi l'osservazione di un moto rettilineo uniforme. Questo risultato giustifica il nome di sistema *non inerziale* per un sistema accelerato. Analogamente, una traiettoria curva non presuppone necessariamente l'azione di una forza (vera), ma può essere un effetto *apparente*, conseguenza del moto accelerato del sistema in cui si trova l'osservatore, e così via.

Sistema non inerziale

Sottolineamo che tutto ciò non significa che la descrizione nel sistema inerziale è *corretta*, mentre quella nel sistema non inerziale è *sbagliata*. In entrambi i sistemi, note le condizioni iniziali del moto e le forze agenti, facciamo previsioni corrette per il moto di un punto tramite (2.1) o (3.10). Però nel sistema non inerziale la descrizione è più complicata, dovendosi introdurre termini correttivi non provenienti dalle interazioni fondamentali. Un osservatore che vivesse sempre in un sistema non inerziale potrebbe avere difficoltà a comprendere che agiscono delle forze con una struttura complessa come quella nella (3.10) e non soltanto un'unica forza $\mathbf{F}$.

Nei prossimi paragrafi presenteremo vari esempi di moti osservati da due sistemi di riferimento diversi, di cui almeno uno inerziale. Utilizzeremo le reazioni (3.1),

(3.4), (3.7) e (3.10) valide per qualsiasi coppia di sistemi. Assumeremo come inerziale il sistema con origine O, mentre l'altro avrà origine in O' e metteremo in evidenza cosa misurano due osservatori, detti per brevità O e O', solidali con i due sistemi.

Questi due osservatori, che possono comunicare tra loro, sono esperti nella Fisica e cercano di cogliere il significato delle loro misure. Dall'esame di queste comprenderemo la diversità della cinematica e la differente interpretazione dinamica che si possono avere per uno stesso fenomeno visto da due sistemi in moto relativo tra loro.

3.3 MOTO DI TRASCINAMENTO RETTILINEO UNIFORME.

Consideriamo due sistemi inerziali in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro e mettiamoci nel caso semplice, che non è però limitativo, rappresentato in figura 3.2. Gli assi dei due sistemi sono paralleli ed il sistema di origine O' si sposta con velocità costante $\boldsymbol{v}_O$, parallela all'asse x. Inoltre all'istante $t = 0$ le origini coincidono così che $\mathbf{OO'} = \boldsymbol{v}_O\, t$.

Proiettando sugli assi la relazione $\mathbf{r'} = \mathbf{r} - \mathbf{OO'}$, che lega la posizione di un punto P nei due sistemi di riferimento otteniamo

Trasformazione galileiana

$$x' = x - v_O t \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad . \tag{3.11}$$

Analogamente per le velocità, utilizzando (3.4), si ha $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_O$ e quindi

$$v'_x = v_x - v_O \quad , \quad v'_y = v_y \quad , \quad v'_z = v_z \quad . \tag{3.12}$$

Infine per le accelerazioni è $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$, dato che ambedue i sistemi sono inerziali.

Le relazioni (3.11) esprimono una *trasformazione galileiana* tra i due sistemi.

Prendiamo un punto in moto lungo la direzione positiva dell'asse x (che coincide con l'asse x') con velocità v_P costante e che all'istante iniziale $t = 0$ si trova nella posizione $x = x' = x_A$. Per O l'equazione del moto è

$$x_P = x_A + v_P t$$

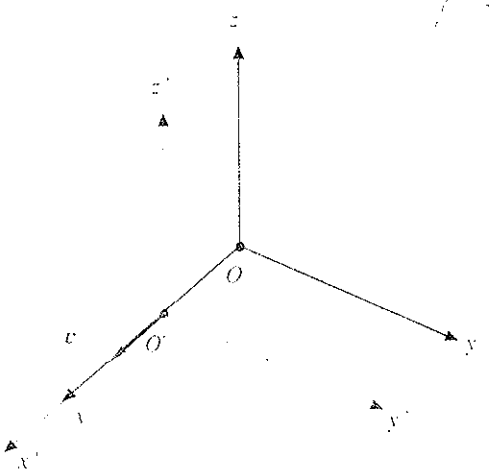


Fig. 3.2

mentre per O' diventa, secondo (3.11),

$$x'_P = x_P - v_O \cdot t = x_A + (v_P - v_O) t = x_A + v'_P t \quad .$$

Il moto visto da O' è quindi uniforme, con velocità diversa secondo (3.12).

Nel caso che $\boldsymbol{v}_P$, pur essendo costante, non sia parallela all'asse $x \equiv x'$, ma giaccia nel piano x, y, i due osservatori misurano un moto rettilineo uniforme, però con angolo diverso rispetto all'asse x. Le equazioni del moto nei due sistemi sono

$$x_P = x_A + v_x t \qquad x'_P = x_P - v_O \cdot t = x_A + (v_x - v_O) t$$

$$y_P = y_A + v_y t \qquad y'_P = y_P = y_A + v_y t$$

con x_A e y_A coordinate del punto P all'istante iniziale, v_x e v_y componenti della velocità $\boldsymbol{v}_P$. La retta corrispondente alla traiettoria di P vista da O forma con l'asse x l'angolo θ tale che $\operatorname{tg} \theta = v_y / v_x$, mentre per O' l'angolo θ' è tale che $\operatorname{tg} \theta' = v_y / (v_x - v_O)$. I moduli delle velocità nei due sistemi sono rispettivamente

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad , \quad \sqrt{(v_x - v_O)^2 + v_y^2}$$

In conclusione, se il moto è rettilineo uniforme in un sistema, lo è anche nell'altro, però sono diverse le velocità e le pendenze delle corrispondenti traiettorie rettilinee. Questo deriva dal fatto che in entrambi i sistemi la forza è nulla, però sono diverse le velocità iniziali.

Ripetiamo l'esempio, ma con un moto rettilineo uniformemente accelerato nel sistema con origine in O.

Se

$$x_P = x_A + v_{P,A} t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (\text{e } y_P = z_P = 0) \quad ,$$

l'osservatore in O' vede un moto uniformemente accelerato con la stessa accelerazione e diversa velocità iniziale, sempre rettilineo lungo l'asse $x \equiv x'$:

$$x'_P = x_A + (v_{P,A} - v_O) t + \frac{1}{2} a t^2 \quad ;$$

$v_{P,A}$ è la velocità iniziale del punto nel sistema con origine O.

Se invece il moto è nel piano x, y, per esempio con equazioni

$$x_P = \frac{1}{2} a_x t^2 \quad , \quad y_P = \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$v_x = a_x t \quad , \quad v_y = a_y t$$

O vede una traiettoria rettilinea con pendenza $v_y / v_x = a_y / a_x$. Invece O' misura

$$x'_P = \frac{1}{2} a_x t^2 - v_O t \quad , \quad y'_P = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad ,$$

$$v'_x = a_x t - v_O \quad , \quad v'_y = a_y t \quad .$$

La pendenza della traiettoria è $v'_x / v'_z = a_x t / (a_x t - v_{O'x})$ e dato che risulta funzione del tempo la traiettoria vista da O' è curva. La forza nei due sistemi è la stessa, però nel sistema O' la velocità iniziale, $-v_{O'}$, diretta lungo l'asse x, forma un certo angolo con $\mathbf{F}$ e pertanto la traiettoria non può essere rettilinea.

Se per esempio l'osservatore in O lancia un punto verso l'alto, le equazioni del moto sono

$$x_P = 0 \quad , \quad y_P = 0 \quad , \quad z_P = v_{z,O}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \quad ;$$

invece per O' che osserva il lancio

$$x'_P = -v_{O'x}\, t \quad , \quad y'_P = 0 \quad , \quad z'_P = v_{z,O}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \quad .$$

Il primo osservatore vede una traiettoria verticale, con il punto che ritorna nella posizione da cui è partito, mentre per il secondo la traiettoria è parabolica nel piano x', z'. Ed è vero il viceversa, quando il lancio avviene in O':

$$x'_P = 0 \quad , \quad y'_P = 0 \quad , \quad z'_P = v_{z,O}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \quad ,$$

$$x_P = v_{O'x}\, t \quad , \quad y_P = 0 \quad , \quad z_P = v_{z,O}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \quad .$$

In O' la traiettoria è rettilinea, mentre è parabolica in O.

L'accelerazione è sempre $\mathbf{g}$, ma entra in gioco, come velocità iniziale lungo l'asse $x \equiv x'$, la velocità di trascinamento $\boldsymbol{v}_{O'}$. Si osservi anche l'impossibilità di determinare quale sistema sia in moto: in qualsiasi dei due si compia l'esperimento, i risultati sono gli stessi.

3.4 MOTO DI TRASCINAMENTO RETTILINEO ACCELERATO

Assumendo la stessa condizione geometrica del sistema O' rispetto al sistema O vista nel precedente paragrafo, supponiamo ora che O' abbia una accelerazione costante $\boldsymbol{a}_{O'} = \boldsymbol{a}_t$ e una velocità iniziale $\boldsymbol{v}_{in}$, ambedue parallele e concordi all'asse $x \equiv x'$. La posizione e la velocità di O' sono quindi espresse da

$$x_{O'} = v_{in}\, t + \frac{1}{2} a_t t^2 \quad , \quad v_{O'} = v_{in} + a_t t \quad .$$

Le formule di trasformazione (3.11) e (3.12) diventano

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{OO'} \qquad x' = x - v_{in} t - \frac{1}{2} a_t t^2 \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad ,$$

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{O'} \qquad v'_x = v_x - v_{in} - a_t t \quad , \quad v'_y = v_y \quad , \quad v'_z = v_z \quad ,$$

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{O'} \qquad a'_x = a_x - a_t \quad , \quad a'_y = a_y \quad , \quad a'_z = a_z \quad .$$

All'istante $t = 0$ un punto materiale viene lasciato cadere da una altezza h nel sistema O'. Per realizzare praticamente questo esperimento possiamo pensare O'

solidale ad un carrello che avanza lungo il verso positivo dell'asse x con velocità iniziale v_{in} e accelerazione a_t. Secondo l'osservatore nel sistema inerziale il punto ha inizialmente una velocità orizzontale $\boldsymbol{v}_{in}$, coincidente con quella del carrello all'istante $t = 0$, e cade con una accelerazione $\mathbf{g}$. La traiettoria è parabolica con equazioni

$$x = v_{in} t \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad .$$

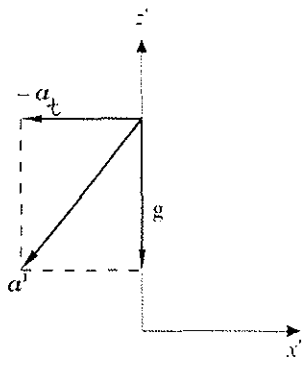


Fig. 3.3

Il tempo di caduta è $t_c = \sqrt{2h/g}$ e lo spazio percorso lungo l'asse x è $v_{in} t_c$. Nello stesso tempo il carrello è avanzato di $v_{in} t_c + \frac{1}{2} a_t t_c^2$. Pertanto il punto tocca il pavimento del carrello più indietro rispetto al punto di lancio della quantità

$$d = v_{in} t_c + \frac{1}{2} a_t t_c^2 - v_{in} t_c = \frac{1}{2} a_t t_c^2 = \frac{a_t h}{g} \quad .$$

L'osservatore in O' misura, secondo le formule di trasformazione,

$$x' = -\frac{1}{2} a_t t^2 \quad , \quad y' = 0 \quad , \quad z' = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v'_x = -a_t t \quad , \quad v'_y = 0 \quad , \quad v'_z = -gt \quad ,$$

$$a'_x = -a_t \quad , \quad a'_y = 0 \quad , \quad a'_z = -g \quad .$$

Anche in O' l'accelerazione è costante, ma diversa da $\mathbf{g}$: infatti vale $\boldsymbol{a}' = \mathbf{g} - \boldsymbol{a}_t$. La velocità è proporzionale all'accelerazione, $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{a}' t$.

Dato che velocità e accelerazione hanno la stessa direzione il moto è rettilineo, nel piano x', z' con equazione $x' = a_t (z' - h)/g$. L'angolo formato dalla traiettoria con la verticale (vedi figura 3.3) è $\theta = \text{arc tg } (a_t/g)$. Il punto tocca il pavimento del carrello ($z' = 0$) in $x' = -a_t h/g$, come trovato precedentemente.

In conclusione, per spiegare i risultati sperimentali O' deve aggiungere al peso $m\,\mathbf{g}$ la forza apparente $-m\,\boldsymbol{a}_t$: la somma delle due forze è eguale a $m\,\boldsymbol{a}'$. Un filo a piombo si dispone sul carrello lungo una *verticale apparente* che forma l'angolo θ con la *verticale inerziale*. Dalla misura di θ si può dedurre il valore di a_t e determinare che il moto di trascinamento è accelerato. Ovviamente, se il moto di trascinamento fosse rettilineo uniforme θ sarebbe nullo (il punto cadrebbe lungo l'asse z').

Consideriamo ora di avere un punto materiale di massa m, posto sul pavimento del carrello che continua a muoversi con accelerazione $\boldsymbol{a}_t$. Si assuma l'attrito nullo e che ad un estremo del carrello ci sia una molla di costante elastica k (figura 3.4).

Nel sistema inerziale si osservano i seguenti eventi: il punto resta fermo (non c'è attrito tra punto e pavimento) mentre il carrello gli scorre sotto, fino a quando l'estremo della molla lo raggiunge. La molla inizia allora a comprimersi e il punto

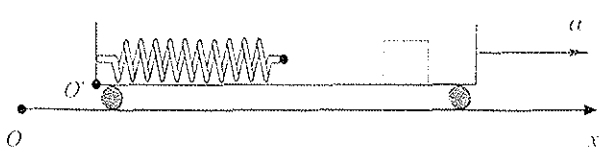


Fig. 3.4

a muoversi: a regime il punto è fermo rispetto al carrello mentre è in moto, con la stessa accelerazione a_t del carrello, rispetto ad O. In tale condizione la molla è compressa dalla quantità $x_c = m a_t / k$: infatti è la forza elastica della molla, $k x$, che applicata al punto gli comunica l'accelerazione a_t.

Per l'osservatore O', posto sul carrello, inizialmente il punto è in moto con accelerazione $-\boldsymbol{a}_t$. Infatti da (3.10) $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_t = -\boldsymbol{a}_t$ dato che $\boldsymbol{a} = 0$. Ad un certo istante il punto raggiunge la molla che si comprime e, di conseguenza, il punto si ferma: la molla resta compressa della quantità x_c. O' conclude che sul punto, che sembrerebbe libero, agisce la forza $-m\,\boldsymbol{a}_t$, tanto è vero che quando il punto tocca la molla la comprime. Poiché il punto appare da quell'istante fermo, si deduce che in modulo $k x_c = m a_t$.

Accelerometri

Notiamo che dalla misura di x_c si può dedurre il valore di a_t. La molla di questo esempio, come il filo a piombo nel precedente, costituiscono in sostanza degli *accelerometri*, che misurano l'accelerazione del sistema non inerziale.

Vediamo ora un ultimo esempio: abbiamo un asse z verticale con origine in O e un secondo asse z' verticale, con origine in O', solidale con un ascensore: entrambi gli assi sono orientati verso l'alto. L'ascensore inizia a salire con accelerazione $\boldsymbol{a}_t$, descrive successivamente un moto uniforme ed infine decelera con accelerazione $-\boldsymbol{a}_t$ fino a fermarsi; $\boldsymbol{a}_t$ è costante in modulo.

L'osservatore nel sistema O' compie nell'ascensore esperimenti di caduta libera di corpi, misurandone l'accelerazione $\boldsymbol{a}'$. Per l'osservatore in O l'accelerazione dei corpi lasciati cadere da O' è sempre pari a $\mathbf{g}$. In base a (3.10) $\mathbf{g} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_t$ e proiettando tale relazione sull'asse z si ha:

nella fase di accelerazione $\quad -g = a' + a_t \qquad a' = -(g + a_t)$

nella fase di moto uniforme $\quad -g = a' \qquad \Rightarrow \quad a' = -g$

nella fase di decelerazione $\quad -g = a' - a_t \qquad a' = -(g - a_t)$.

Nella fase di accelerazione O' constata che i corpi cadono con una accelerazione maggiore di quella di gravità (aumento apparente del peso), nella fase uniforme si torna a quella che anche O', esperto nella Fisica, sa essere la situazione normale (caduta con accelerazione g), mentre nella fase di decelerazione i corpi cadono con una accelerazione minore di g (diminuzione apparente del peso).

Se fosse $\boldsymbol{a}_t = \mathbf{g}$, come potrebbe accadere nella fase di decelerazione, oppure se l'ascensore scendesse in caduta libera, si troverebbe $\boldsymbol{a}' = 0$: un corpo abbandonato nell'ascensore con velocità iniziale nulla resta fermo rispetto ad O'. È la cosiddetta assenza di peso, avvertita da chi sta dentro l'ascensore e dovuta ovviamente non a una scomparsa reale dell'attrazione terrestre, ma al fatto che se tutto il sistema sta scendendo con la stessa accelerazione dei corpi che ad esso si riferiscono non c'è più accelerazione relativa e, tra l'altro, vengono a mancare le sensazioni ad essa connesse. Un effetto analogo, come è ben noto, si manifesta nei satelliti artificiali che ruotano intorno alla terra.

La spiegazione dell'assenza di accelerazione di gravità è quella data da O che misura in ogni caso g e ragiona in base a (3.10), attribuendo le variazioni all'accelerazione di trascinamento di O'. Ma O', se non ha a priori questo tipo di informazioni, ragiona in modo diverso. Egli vede che in certe situazioni l'accelerazione di un corpo che cade è g, in accordo con quanto gli può essere comunicato dall'esterno, ma sperimenta anche situazioni diverse. Se si costruisce un accelerometro e lo tara opportunamente, constata che la misura fornitagli dallo strumento è proprio la correzione da apportare a g. O' postula pertanto che in certe situazioni, che è capace

di mettere in evidenza, ha origine un'accelerazione supplementare che si compone con g per dare i risultati osservati ovvero che alla forza peso va aggiunto il termine $-m\,\boldsymbol{a}_{suppl}$; sulle cause del fenomeno non è però in grado di fare alcuna ipotesi. Notiamo che dall'esame delle misure di a' e a_{suppl} egli sarebbe in grado di accorgersi da solo che c'è un valore speciale, appunto g, che si ottiene sempre sommando o sottraendo i valori di a' e a_{suppl}; solo in seguito a un'informazione esterna potrebbe però accorgersi che a_{suppl} non è altro che a_t e che quindi egli ha un modo per mettere in evidenza cosa sta succedendo al suo sistema (se il moto di O' fosse sempre uniforme egli misurerebbe sempre g e non avrebbe alcun modo per mettere in evidenza che è in movimento).

3.5 MOTO DI TRASCINAMENTO ROTATORIO UNIFORME.

In questo caso

$$\boldsymbol{v}_{O'} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{a}_{O'} = 0 \quad , \quad \omega = \text{costante} \;;$$

se inoltre assumiamo per comodità che le origini dei due sistemi siano coincidenti ($\mathbf{r} = \mathbf{r}'$), le relazioni (3.4) e (3.7) diventano

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \omega \times \mathbf{r} \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2\omega \times \boldsymbol{v}' \quad . \tag{3.14}$$

Riscriviamo così (3.10):

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{centr} + \mathbf{F}_{Cor} = m\,\boldsymbol{a}' \;;$$

i termini *forza centrifuga*, $\mathbf{F}_{centr} = -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$, e *forza di Coriolis*, $\mathbf{F}_{Cor} = -2m\omega \times \boldsymbol{v}'$, hanno lo stesso ruolo della forza $-m\,\boldsymbol{a}_t$ vista nel paragrafo precedente.

Forza centrifuga
Forza di Coriolis

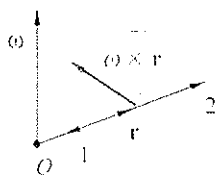
Prendiamo come sistema inerziale una coppia di assi cartesiani x, y posti in un piano orizzontale e come sistema non inerziale un'altra coppia di assi x', y' con la stessa origine e nello stesso piano, ruotanti con velocità angolare costante ω. Si può ad esempio assumere gli assi x' e y' solidali ad un disco, posto nel piano x, y, che ruota rispetto ad un asse passante per il suo centro e ortogonale al piano x, y.

Se poniamo un punto materiale sul disco, con attrito nullo tra il punto e il piano del disco, il punto rimane fermo mentre il disco gira sotto il punto. Se il punto lasciasse una traccia, osserveremmo una circonferenza di raggio r, con centro nell'origine comune dei due sistemi.

Per l'osservatore O il punto è in quiete, mentre per quello ruotante O' il punto descrive un moto circolare uniforme, in base a (3.13) e (3.14). Infatti nei due sistemi il moto del punto ha queste caratteristiche:

sistema O $\quad \boldsymbol{v} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{a} = 0$

sistema O' $\quad \boldsymbol{v}' = -\omega \times \mathbf{r} \quad , \quad \boldsymbol{a}' = -\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - 2\omega \times (-\omega \times \mathbf{r}) = \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$.

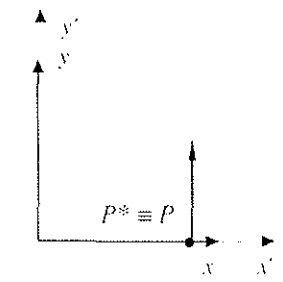


1 $\quad \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$

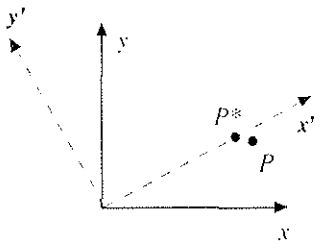
2 $\quad -\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$

Fig. 3.5

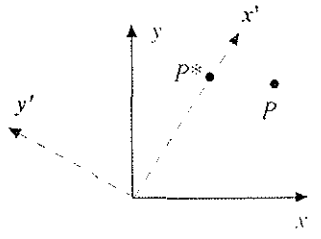
Pertanto nel sistema O' accelerato il punto descrive una circonferenza in verso contrario al moto del disco, con velocità costante in modulo e pari a ωr e con accelerazione, puramente centripeta, di valore $\omega^2 r$ (in figura 3.5 è mostrata la traiet-



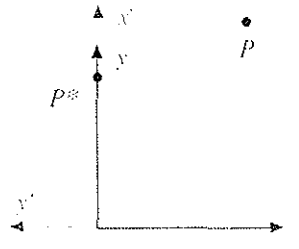
$t = 0$



$t = T/12$



$t = T/6$



$t = T/4$

toria che è percorsa in senso orario in quanto il disco ruota in senso antiorario). Però O' deve ipotizzare che sul punto agiscono due forze (centrifuga e di Coriolis) le quali, combinandosi, comunicano al punto l'accelerazione $\boldsymbol{a}'$; resta per O' il problema dell'origine di queste forze.

Leghiamo ora il punto con un filo all'asse di rotazione e diamogli una velocità di modulo ωr in modo tale che ruoti con la stessa velocità del punto del disco su cui si trova. La situazione è opposta a quella precedente: per O il punto descrive un moto circolare uniforme sotto l'azione della tensione del filo, mentre O' vede il punto fermo, $\boldsymbol{v}' = 0$ e $\boldsymbol{a}' = 0$; tutto ciò è in accordo con (3.13) e (3.14). Però O' osserva pure che il filo è teso malgrado il punto sia fermo e quindi è costretto a supporre che sul punto agisca una forza diretta verso l'esterno, che chiama forza centrifuga, bilanciata dalla tensione del filo.

Per verificare la sua ipotesi O' traccia un segno radiale sul disco e recide il legame tra il punto e l'origine degli assi, immaginando di vedere il punto allontanarsi radialmente sotto l'azione della forza centrifuga, in quanto è stata annullata la forza esercitata dal filo. In effetti O' osserva ora un moto del punto materiale, però lungo una traiettoria curvilinea, e deve quindi ammettere, come già fatto per il primo esempio, che sui punti in moto nel suo sistema di riferimento ($\boldsymbol{v}' \neq 0$) agisca un'altra forza che non si manifesta quando sono in quiete; si tratta precisamente della forza di Coriolis. È chiaro che O dà un'altra interpretazione dell'ultima fase dell'esperimento, cioè dopo il taglio del filo. Infatti nel sistema inerziale il punto materiale all'istante in cui viene lasciato libero inizia a muoversi di moto rettilineo uniforme con direzione tangente alla circonferenza nella posizione in cui avviene il distacco dal vincolo (filo). Le accelerazioni nei due sistemi sono:

$$\boldsymbol{a} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{a}' = -\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - 2\,\omega \times \boldsymbol{v}' \quad .$$

Il problema che si presenta ad O' è sempre la comprensione dell'origine della forza centrifuga e di quella di Coriolis.

La figura 3.6 mostra le posizioni del punto libero viste dai due osservatori negli istanti zero, $T/12$, $T/6$, $T/4$ se T è il periodo di rotazione del disco, ovvero del sistema non inerziale.

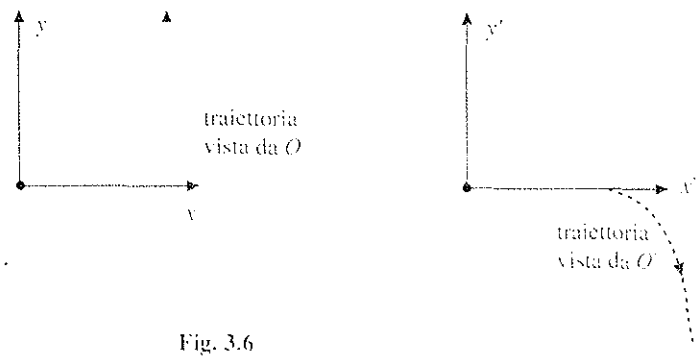


Fig. 3.6

Riprendiamo ora in esame il problema del *pendolo conico*, discusso nel terzo esempio del paragrafo 2.13, considerando un sistema con origine sull'asse verticale e ruotante con la stessa velocità angolare del pendolo. In questo sistema, non inerziale, il pendolo è immobile e forma con la verticale l'angolo θ tale che $\operatorname{tg}\theta = \omega^2 r/g$. Siamo in una situazione di equilibrio statico, che necessita l'introduzione di una forza che bilanci la risultante della tensione del filo e del peso. Tale forza è la forza centrifuga, che esiste solo in questo sistema, e vale $F_{cent} = -m\,g\,\operatorname{tg}\theta\,\mathbf{u}_\chi = -m\,\omega^2 r\,\mathbf{u}_\chi$; $\mathbf{u}_\chi$ è un versore orizzontale diretto verso l'asse attorno a cui ruota il

pendolo.

Per concludere notiamo che se il moto di trascinamento è rotatorio è sempre $\boldsymbol{a}_t \neq 0$ e quindi non può mai sussistere l'eguaglianza $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$; non esiste cioè l'analogo rotatorio della relatività galileiana.

3.6 IL MOTO RISPETTO ALLA TERRA.

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto la nozione di sistema inerziale senza però darne un esempio: lo facciamo adesso, dicendo che un sistema di riferimento con l'origine nel centro di massa del sistema solare e gli assi diretti verso determinate *stelle fisse* è con ottima approssimazione un sistema inerziale, come lo sono tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. La verifica è data dal fatto che, entro gli errori sperimentali, in tali sistemi vale la legge di Newton (2.1) con tutte le sue conseguenze; in particolare risultano accuratissime le previsioni sul moto dei vari corpi celesti e dei satelliti artificiali.

Di norma le misure vengono fatte in un riferimento terrestre: ora, qualsiasi riferimento solidale alla terra, per esempio con un asse diretto come l'asse terrestre e gli altri due nel piano dell'equatore, ruota insieme alla terra e non è inerziale; anche un sistema con origine nel centro della terra e assi sempre paralleli a quelli dei sistemi inerziali di cui sopra non è inerziale in quanto si muove di moto traslatorio accelerato (la traiettoria dell'origine è curvilinea). Quindi nelle misure terrestri compaiono termini correttivi dovuti alle forze apparenti ed è conveniente riferire tali misure, attraverso note formule di trasformazione, a un sistema inerziale (si sa, per esempio, che il moto dei pianeti visto dalla terra è molto complicato). Le correzioni hanno un'importanza che è in relazione con le misure e con la precisione voluta: nel caso di misure astronomiche sono fondamentali, come pure nei moti terrestri su notevoli distanze; per tempi e percorsi brevi possono essere trascurabili in assoluto o rispetto ad altri effetti più importanti, come l'attrito dell'aria.

Dato che intendiamo descrivere e valutare quantitativamente gli effetti dovuti al moto della terra, cominciamo col fornire alcuni dati numerici. Approssimiamo la terra ad una sfera che compie un moto di rivoluzione attorno al sole lungo un'orbita ellittica, che praticamente coincide con una circonferenza, ed un moto di rotazione su se stessa. I dati caratteristici delle proprietà fisiche della terra e dei due moti, rivoluzione e rotazione, sono riportati in tabella.

Tabella 3.1 - Dati sul moto della terra

massa della terra	m_t	$5.98 \cdot 10^{24}$ kg
raggio della terra	R	$6.37 \cdot 10^{6}$ m
raggio dell'orbita	R_0	$1.49 \cdot 10^{11}$ m
periodo di rivoluzione	T_0	$3.16 \cdot 10^{7}$ s
velocità di rivoluzione	$v_0 = \dfrac{2\pi R_0}{T_0}$	$2.96 \cdot 10^{4}$ m/s = 106655 km / h
velocità angolare di rivol.	$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$	$1.99 \cdot 10^{-7}$ rad/s
accelerazione centripeta di rivol.	$a_0 = \omega_0^2 R_0$	$5.88 \cdot 10^{-3}$ m/s^2
periodo di rotazione	T	$8.62 \cdot 10^{4}$ s
velocità angolare di rotazione	$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	$7.29 \cdot 10^{-5}$ rad/s

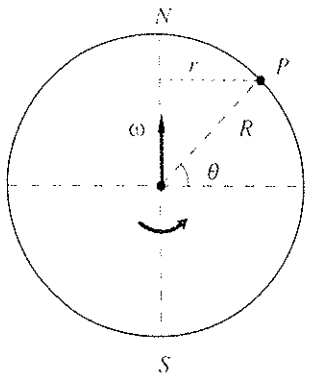


Fig. 3.7

La velocità e l'accelerazione di un punto P alla superficie della terra (si veda figura 3.7) sono

$$v\,(P) = \omega\, r = \omega R \cos\theta = 4.64 \cdot 10^{2} \cos\theta \ \text{m/s}\ ,$$

$$a\,(P) = \omega^{2} r = \omega^{2} R \cos\theta = 3.38 \cdot 10^{-2} \cos\theta \ \text{m/s}^2\ .$$

In particolare, per un punto all'equatore

$$v = 4.64 \cdot 10^{2}\ \text{m/s} = 1671\ \text{km / h}\ ,$$

$$a = 3.38 \cdot 10^{-2}\ \text{m/s}^2\ .$$

Un sistema di riferimento solidale alla terra, con asse z orientato da sud a nord e assi x, y nel piano equatoriale, ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}_z$, essendo $\mathbf{u}_z$ il versore dell'asse z e $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5}$ rad/s.

Un punto in moto vicino alla superficie terrestre è sottoposto alla forza peso $m\,\mathbf{g}_0$ e in base a (3.7)

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

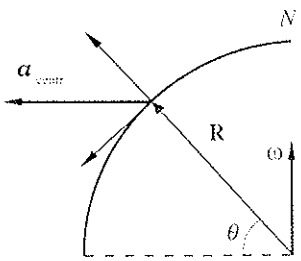


Fig. 3.8

dove $\mathbf{g}$ e $\boldsymbol{v}$ sono rispettivamente l'accelerazione e la velocità misurate nel sistema solidale alla terra. Abbiamo trascurato l'accelerazione centripeta del centro della terra, dovuta al moto di rivoluzione.

Pertanto l'accelerazione di gravità misurata dal sistema terrestre è data da

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}\ ;$$

Il termine centrifugo è ortogonale all'asse z di rotazione e diretto verso l'esterno, in entrambi gli emisferi. Esso vale in modulo, come già calcolato, $3.38 \cdot 10^{-2} \cos\theta$ m/s^2. Le due componenti, radiale (parallela e concorde a $\mathbf{R}$) e trasversa (diretta sempre verso l'equatore) valgono rispettivamente

$$a_R = 3.38 \cdot 10^{-2} \cos^2\theta\ ,\qquad a_\theta = 3.38 \cdot 10^{-2} \cos\theta \ \text{sen}\ \theta\ \ \text{m/s}^2\ .$$

La correzione centrifuga all'accelerazione di gravità è nulla al polo, dove $\mathbf{R}$ e $\boldsymbol{\omega}$ sono paralleli, e massima all'equatore, dove sono ortogonali. Gli effetti sono la diminuzione (piccola) del valore di $\mathbf{g}_0$ con dipendenza dalla latitudine θ e l'alterazione della verticale determinata con il filo a piombo; ad esempio per $\theta = 45°$ la deviazione è dell'ordine di 0,1°.

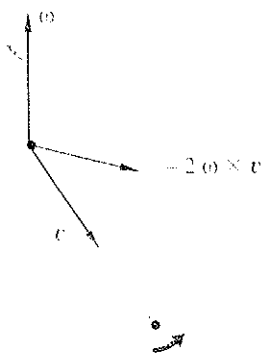


Fig. 3.9

L'effetto del termine di Coriolis è più complicato in quanto dipende dalla velocità $\boldsymbol{v}$ del punto rispetto al sistema solidale con la terra.

Se per esempio consideriamo un punto che cade da un altezza h, con velocità iniziale nulla, l'azione della forza centrifuga comporta uno spostamento verso l'equatore lungo un meridiano; invece la forza di Coriolis, tangente a un parallelo e rivolta come in figura 3.9, provoca uno spostamento verso *oriente* in entrambi gli emisferi. L'effetto complessivo è la combinazione dei due.

Si trova che le due deviazioni rispetto al piede della verticale *vera* sono

$$x_{centr} = 3.45 \cdot 10^{-5}\, h \cos\theta \ \text{sen}\ \theta\ \ \text{m}\ ,$$

$$x_{Cor} = 2.2 \cdot 10^{-5}\, h^{3/2} \cos\theta\ \ \text{m}\ .$$

Con $h = 100$ m e $\theta = 45°$, $x_{centr} \cong 17.3$ cm , $x_{Cor} \cong 1.6$ cm .

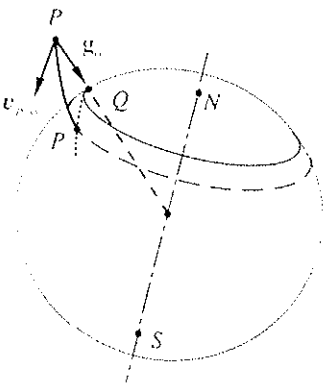


Fig. 3.10

Qual è la *spiegazione inerziale* degli effetti misurati? Il punto P che cade dall'altezza h ($= PQ$) ha velocità iniziale $\boldsymbol{v}_{P,0}$, in quanto all'istante $t = 0$ sta ruotando insieme alla terra, e accelerazione $\mathbf{g}_0$. Il moto avviene nel piano individuato da $\boldsymbol{v}_{P,0}$ e $\mathbf{g}_0$, la cui intersezione con la superficie terrestre è indicata in figura 3.10 dalla linea punteggiata; PP rappresenta la traiettoria del punto. La velocità iniziale è tangente a un parallelo, però durante la caduta non c'è nessun vincolo che tenga il punto su una traiettoria circolare e perciò esso si sposta verso l'equatore, come è chiaro dalla figura. Inoltre poiché P è inizialmente a una distanza dall'asse di rotazione maggiore di quella di Q, esso ha velocità maggiore di Q e quindi cade più a est di Q. Correttamente interpretati, questi effetti mettono in evidenza la rotazione terrestre.

Un effetto più vistoso a prova della rotazione terrestre è quello mostrato dal *pendolo di Foucault*. Immaginiamo di fare oscillare un pendolo semplice al polo: il moto è contenuto nel piano $\mathbf{g}_0$, $\boldsymbol{v}$, fisso in un sistema inerziale; però dalla terra, sistema non inerziale, si vede ruotare il piano di oscillazione del pendolo, a causa della forza di Coriolis. Un giro completo dura 24 ore. Se il pendolo lasciasse una traccia sul suolo si vedrebbero le linee disegnate in figura 3.11. Naturalmente l'esperimento è stato eseguito alle nostre latitudini, ma l'effetto è lo stesso anche se un giro completo viene compiuto in un tempo che dipende dalla latitudine.

Pendolo di Foucault

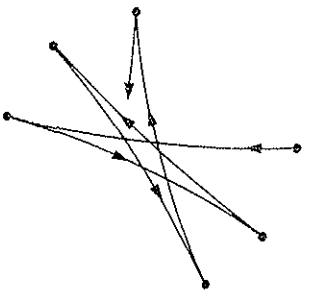


Fig. 3.11

È interessante osservare che i primati di lancio del giavellotto o del disco, a parità di condizioni atmosferiche e di attrito dell'aria, sono influenzati in modo non trascurabile dalla forza centrifuga e di Coriolis.

3.7 COMMENTI E NOTE.

Raccogliamo in questo paragrafo alcuni commenti e delle note che altrimenti avrebbero appesantito il testo.

Una caratteristica importante di (3.1), (3.4), (3.7) è di essere relazioni vettoriali e quindi valere intrinsecamente. Però ciascuna si può tradurre in tre relazioni tra le componenti dei vari vettori in un determinato sistema di riferimento, che deve essere lo stesso per tutti i termini. Se per esempio si sceglie il sistema O tutte le componenti dei termini con l'apice ($\mathbf{r}'$, $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{a}'$) vanno riferite al sistema O e quindi è necessario stabilire le relazioni di trasformazione che permettono di passare dalle coordinate valide in O' a quelle valide in O.

$$r = OO' + r'$$
$$v = v_0' + v' + \omega \times r'$$
$$a = a' + a_{0'} + \omega \times (\omega \times r') + \frac{d\omega}{dt} \times r' + 2(\omega \times v')$$

Per chiarezza facciamo un esempio, relativo ai due sistemi del paragrafo 3.5: gli assi di O' ruotano a rispetto a quelli di O con velocità angolare costante ω e l'angolo tra x' e x è $\theta = \omega t$: la (3.1) si riduce a $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Ciò non vuol dire che valgono le relazioni $x = x'$, $y = y'$, manifestamente false e concettualmente sbagliate perché eguagliano le componenti viste da due diversi sistemi. Le relazioni corrette sono $r_x = r_x'$, $r_y = r_y'$, cioè

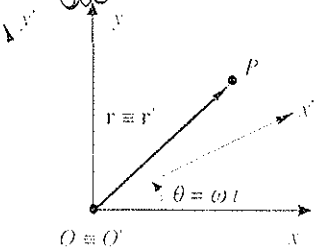


Fig. 3.12

$$x = x' \cos \omega t - y' \operatorname{sen} \omega t \quad ,$$

$$y = x' \operatorname{sen} \omega t + y' \cos \omega t \quad ,$$

con il che l'eguaglianza è espressa nel sistema O, oppure passando nel sistema O' $r_{x'} = r_{x'}'$, $r_{y'} = r_{y'}'$, cioè

$$x' = x \cos \omega t + y \operatorname{sen} \omega t \quad ,$$

$$y' = -x \operatorname{sen} \omega t + y \cos \omega t \quad .$$

Queste formule di trasformazione esprimono il legame tra le coordinate di uno stesso punto nei due sistemi (ottenuti uno dall'altro tramite una rotazione nel piano x, y). Esse valgono anche per le componenti di un qualsiasi altro vettore.

In sostanza abbiamo seguito la stessa procedura negli esempi dei paragrafi 3.3 e 3.4, ma il fatto di avere gli assi dei due sistemi sempre paralleli può far sfuggire la complessità analitica di altri casi più generali.

Teorema velocità relative: $v = v_0' + v' + \omega \times r'$

Si è già rivelato nella dimostrazione del teorema delle velocità relative (3.4) che $d\boldsymbol{r}'/dt$ non è $\boldsymbol{v}'$; analogamente $d\boldsymbol{v}'/dt$ non è $\boldsymbol{a}'$. Questo perché i versori $\mathbf{u}_{x'}$, $\mathbf{u}_{y'}$, $\mathbf{u}_{z'}$ sono variabili nel tempo, rispetto a O. L'osservatore O' trova però l'usuale cinematica: nel suo sistema

$$\boldsymbol{a}' = d\boldsymbol{v}'/dt \quad \text{e} \quad \boldsymbol{v}' = d\boldsymbol{r}'/dt \quad ;$$

non gli torna invece che $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$ e $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$.

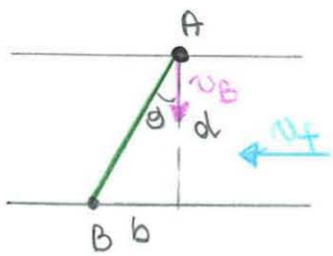
$F - ma_t - ma_c = ma'$

La quarta relazione fondamentale, oltre alle tre citate sopra, è (3.10), che permette di estendere la legge di Newton ai sistemi non inerziali. Questa però è l'unica estensione che ci limitiamo a fare; cioè non cercheremo di sviluppare in un generico sistema lo studio della dinamica del punto, come già fatto in un sistema inerziale partendo da (2.1). La procedura da seguire piuttosto è di trasformare le misure eseguite in un sistema non inerziale riferendole a un sistema inerziale e, a questo punto, interpretarle con le leggi note.

Anche tutti i successivi sviluppi della teoria (sistemi di punti e corpi rigidi) verranno ambientati naturalmente in sistemi di riferimento inerziali, con una sola importante eccezione: troveremo significativo in qualche caso riferire il moto anche al cosiddetto sistema di riferimento del centro di massa, che in generale non è un sistema inerziale. Avremo allora modo di applicare il formalismo sviluppato in questo capitolo.

Nota sulla composizione di moti.

Le operazioni essenzialmente formali di scomposizione del moto di un punto in tre moti rettilinei lungo gli assi e viceversa, che abbiamo visto nel primo capitolo, trovano applicazione nell'ambito del moto relativo, anche se il contesto fisico è diverso. Il moto rispetto a O può sempre essere pensato come composizione del moto relativo rispetto a O' e del moto di trascinamento di O' rispetto a O.



Un esempio tipico è quello di una barca che attraversa un fiume e viene trasportata dalla corrente. Supponiamo che il fiume sia rettilineo e largo d, che la velocità della corrente sia $\boldsymbol{v}_t$ (velocità del moto di trascinamento, costante), che la barca si muova sempre ortogonalmente a $\boldsymbol{v}_t$ con velocità $\boldsymbol{v}_B$ costante (relativa al sistema O' che si sposta con la corrente).

Se la barca parte dal punto A, quanto a valle si trova il punto B di arrivo? Il tempo di attraversamento si calcola più facilmente nel sistema O' e vale d / v_B: in questo tempo la corrente percorre il tratto $b = (d / v_B)\, v_t$ e ciò risponde alla domanda. La traiettoria della barca rispetto a O, solidale alle rive, è un segmento lungo

$\sqrt{d^2 + b^2}$ che forma con la corrente l'angolo $\theta = \text{arctg}\,(v_B/v_F)$; la velocità rispetto a O è $\sqrt{v_B^2 + v_F^2}$.

Nota sulle formule di Poisson

Scriviamo le componenti cartesiane del vettore $d\mathbf{u}_x / dt$ come proiezioni del vettore stesso sugli assi:

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_x\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y\right)\mathbf{u}_y + \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_z\right)\mathbf{u}_z \quad .$$

Il primo termine però è nullo perché, come abbiamo già ricavato più volte, $\frac{d\mathbf{u}_x}{dt}$ è ortogonale a $\mathbf{u}_x$. Ragionando allo stesso modo per $\frac{d\mathbf{u}_y}{dt}$ e $\frac{d\mathbf{u}_z}{dt}$ abbiamo:

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y\right)\mathbf{u}_y + \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_z\right)\mathbf{u}_z \quad ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_x\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_z\right)\mathbf{u}_z \quad ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_x\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_y\right)\mathbf{u}_y \quad .$$

Le sei componenti non sono indipendenti, ma eguali in modulo a due a due: infatti derivando la $\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = 0$ si ricava

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y = -\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \quad ;$$

analogamente

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_z = -\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_z = -\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \quad .$$

Definiamo il vettore ω che ha come componenti i tre termini indipendenti:

$$\omega_x = \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_z \quad , \quad \omega_y = \frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \quad , \quad \omega_z = \frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \quad .$$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale (appendice C) ricaviamo infine

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = \omega_z \mathbf{u}_y - \omega_y \mathbf{u}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega \times \mathbf{u}_x \quad .$$

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = -\omega_z \mathbf{u}_y + \omega_y \mathbf{u}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_x \quad ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} = \omega_x \mathbf{u}_y - \omega_y \mathbf{u}_x = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_z \quad .$$

Vediamo così che esiste un vettore ω tramite il quale si possono scrivere tutte e tre le derivate. La dimostrazione è valida per qualsiasi terna cartesiana trirettangola e quindi in particolare per il sistema O'.

Nota sui sistemi di riferimento in coordinate polari.

Nella descrizione del moto piano in coordinate polari il punto P è individuato dalla distanza r dal polo O e dall'angolo θ formato da $\mathbf{r}$ con un asse di riferimento. Chiamiamo fisso il sistema x, y e mobile il sistema definito dai versori $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_\theta$, che rispetto al sistema fisso ruota con velocità angolare $\omega = d\theta/dt$. Una caratteristica di questo sistema mobile è che il punto P si trova sempre sull'asse x', per cui il moto relativo è rettilineo con

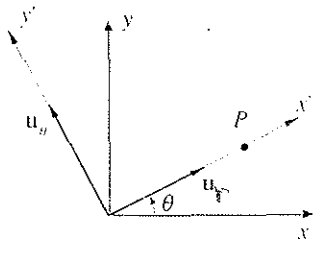


Fig. 3.13

$$\boldsymbol{v}' = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{u}_r \quad , \quad \boldsymbol{a}' = \frac{d^2r}{dt^2}\,\mathbf{u}_r \quad .$$

Confrontando le espressioni in notazione polare per la velocità (1.19) e l'accelerazione (1.23), introdotte nel primo capitolo, e le relazioni (3.4) e (3.7), ci accorgiamo che sono identiche.

Infatti

$$\boldsymbol{v} = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{u}_r + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_\theta = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\,\mathbf{u}_r - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \mathbf{u}_r + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\mathbf{u}_\theta + 2\,\frac{d\theta}{dt}\,\frac{dr}{dt}\,\mathbf{u}_\theta =$$

$$= \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \quad .$$

In effetti il moto piano in coordinate polari è riferito ad un particolare sistema mobile e quindi, per essere riferito al sistema fisso x, y, deve obbedire ai teoremi del moto relativo.

3.8 CENNI DI TEORIA DELLA RELATIVITÀ.

Introduciamo ora alcuni concetti di relatività, che dovrebbero interessare, sul piano culturale, anche studenti che seguono corsi di laurea diversi da quello di Fisica.

La proprietà più notevole che abbiamo trovato studiando il moto relativo è la *relatività galileiana*, che ora formuliamo in termini diversi: *le leggi fisiche sono invarianti rispetto alle trasformazioni tipo* (3.11), *che legano le coordinate di due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro*. Un fenomeno osservato e spiegato in un sistema ha la stessa spiegazione dinamica nell'altro: la cinematica è diversa perché diverse sono le condizioni iniziali, ma la legge fisica è la stessa, nella sostanza e nella struttura. La meccanica newtoniana è in accordo con questo principio, finché si occupa di fenomeni in cui le velocità sono molto piccole rispetto a quella della luce nel vuoto, $c \cong 3 \cdot 10^8$ m/s. Per velocità prossime a c essa cade in difetto: storicamente ci si accorse di questo alla fine dell'ottocento quando venne provato sperimentalmente che *la velocità della luce ha lo stesso valore in qualsiasi sistema di riferimento*, cioè non si compone con la velocità di trascinamento dando per esempio $c + v$ o $c - v$.

Velocità della luce nel vuoto

La soluzione fu trovata da Einstein nel 1905 e comporta una revisione concettuale profonda delle nozioni di spazio e di tempo: qui accenniamo solamente al risultato e ad alcune conseguenze. Il principio di relatività viene formulato alla stessa maniera e comporta l'invarianza delle leggi fisiche rispetto a traslazioni rettilinee uniformi dei sistemi di riferimento. La costanza della velocità della luce richiede però una modifica delle (3.11) che invece si scrivono, per due sistemi come quelli del paragrafo 3.3,

Principio di relatività

$$x' = \gamma\,(x - v_O t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v_O}{c^2}\,x\right)$$

$$\text{con}\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v_O^2}{c^2}}}$$

Questa è una *trasformazione di Lorentz* e il fatto più nuovo è la quarta relazione: nelle (3.11) si assumeva implicitamente $t = t'$, ora invece *anche il tempo ha un valore relativo al sistema di rifermento*.

Trasformazione di Lorentz

Facciamo alcune osservazioni:

- $v_O << c \quad \gamma = 1 \quad , \quad v_O/c^2 = 0$ e si riottengono le (3.11): la relatività galileiana è il limite per *piccole velocità*, valido certamente nei fenomeni macroscopici; tutta la nostra trattazione della meccanica classica si svolge in questo ambito;
- la velocità c appare un valore limite: per $v_O \geq c$ le formule perdono significato; in effetti una conseguenza della teoria è che nessun corpo materiale può raggiungere la velocità della luce;
- Il fattore γ è lo stesso già visto nel paragrafo 2.3 a proposito della massa, che varia con la velocità secondo la legge $m = \gamma m_0$ (se $v = c$, $m = \infty$); qualitativamente, l'applicazione di una forza comporta un aumento della quantità di moto: sappiamo che la velocità non può raggiungere c e quindi, se la forza continua ad agire v cresce sempre meno rapidamente e aumenta la massa, secondo la formula vista;
- considerando un moto lungo l'asse x, $v = dx/dt$ e

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\,(dx - v_O\,dt)}{\gamma\left(dt - \dfrac{v_O}{c^2}\,dx\right)} = \frac{v - v_O}{1 - v\,\dfrac{v_O}{c^2}}$$

formula di trasformazione della velocità: per un raggio luminoso $v = c$ e risulta anche $v' = c$, la velocità della luce è effettivamente la stessa nei due sistemi; quando si può trascurare il termine contenente c^2 si ritrova $v' = v - v_{O'}$.

L'argomento *relatività* non è semplice e anche una trattazione elementare, che permetta di ricavare le trasformazioni di Lorentz e alcune immediate conseguenze dinamiche, esula dai nostri scopi. Vogliamo però discutere, anche se superficialmente, alcuni aspetti, soprattutto per ragioni culturali.

Nella meccanica newtoniana si ammette implicitamente che le misure di spazio e di tempo siano invarianti rispetto al sistema di riferimento ovvero abbiano un significato assoluto: se un oggetto misurato in O ha lunghezza L anche O' trova L e un intervallo di tempo Δt misurato da O vale ancora Δt se misurato da O'. Invece una impostazione corretta del problema, che tenga conto di tutti i fenomeni conosciuti, porta alla conclusione che le misure di lunghezza e tempo dipendono dal sistema di rifermento; numericamente l'effetto si può trascurare solo quando la velocità relativa di O' rispetto a O è molto minore di c e il moto degli oggetti osservati avviene anch'esso con piccole velocità. Un campo in cui invece è necessario usare la meccanica relativistica è quello del moto di particelle subatomiche, che può essere osservato in natura nei raggi cosmici o provocato artificialmente con gli acceleratori di particelle: queste particelle raggiungono facilmente velocità prossime a c e gli effetti relativistici sono notevolissimi.

Un esempio è il seguente: circa cinquanta anni fa è stato scoperto nella radiazione cosmica, il leptone μ; se queste particelle vengono portate alla quiete si osserva che esse hanno massa m_μ di $\sim 10^{-28}$ kg, decadono in altre particelle con una *vita media* di valore $\tau \sim 10^{-6}$ s, che ha questo significato: se a un certo istante c'è un dato numero di μ, dopo τ secondi questo numero si è ridotto di un fattore e (= 2.71828...), dopo 2τ di e^2 e così via. Con un acceleratore e attraverso opportune interazioni è possibile produrre artificialmente μ con ben determinate quantità di moto. Si osserva così che le forze necessarie per deviare i μ lungo traiettorie prestabilite corrispondono al fatto che la massa di un μ sia variabile con la velocità secondo la legge data. Si osserva anche che i μ non percorrono solo uno spazio dell'ordine di $c\tau \sim 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6} = 300$ m per poi scomparire: in realtà essi percorrono distanze molto superiori. Come mai? Supponiamo di produrre un μ con velocità prossima a c e immaginiamo un sistema O' solidale al μ: in questo sistema il μ è a riposo, la sua massa vale m_μ e la sua vita media vale τ. Il sistema O' però si muove con velocità vicina a c rispetto a un sistema O, per esempio solidale all'acceleratore (il *sistema del laboratorio*), e i tempi in questi due sistemi non sono gli stessi: invertendo le trasformazioni di Lorentz si trova

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v_{O'}}{c^2} x' \right)$$

e se $x' = 0$ $t = \gamma t'$: l'intervallo τ in O' diventa $\gamma \tau$ in O. Siccome per $v \to c$ γ assume valori notevoli (se $v = 0.99\ c$ $\gamma \cong 7$, se $v = 0.999\ c$ $\gamma \cong 22$, ecc.), nel sistema del laboratorio il μ vive molto a lungo: evidentemente gli orologi nei due sistemi non seguono lo stesso tempo. Proprio per questo motivo i leptoni μ derivanti dal decadimento di particelle prodotte nell'urto di protoni cosmici contro i nuclei degli atomi presenti negli stati alti dell'atmosfera possono giungere sulla superficie terrestre ed essere rivelati: infatti la loro vita media è allungata per il fatto di avere velocità prossima a c. Quanto descritto è esperienza corrente sia con i μ che con altre particelle instabili e costituisce una solida verifica della teoria di Einstein.

Equivalenza massa-energia

Un'altra conseguenza fondamentale è l'*equivalenza tra massa e energia*. Si di-

mostra infatti che l'energia di una particella con massa a riposo m_0 e che si muove con velocità v vale

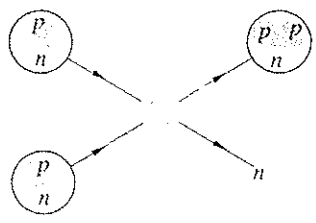
$$E = m\,c^2 = m_0 c^2 + E_c \quad ;$$

$m = m_0\,\gamma$ è la massa alla velocità v, E_c è l'energia cinetica, definita quindi come

$$E_c = (\,m - m_0\,)\,c^2 = (\gamma - 1)\,m_0 c^2 \quad ,$$

espressione che si riduce a $\frac{1}{2}\,m_0 v^2$ per piccole velocità. Solo per il fatto di avere la massa m_0 la particella possiede l'energia (di massa) $E_0 = m_0 c^2$. Anche questo aspetto della relatività non ha interesse pratico nella meccanica classica: lo vediamo invece all'opera nelle interazioni tra particelle nucleari o subnucleari, dove si verificano situazioni in cui per esempio due particelle interagendo scompaiono e danno luogo ad altre particelle diverse. In queste reazioni la massa totale, somma delle masse delle particelle nello stato iniziale, non si conserva, ma ad una variazione di massa Δm corrisponde una variazione di energia $\Delta E = \Delta m\,c^2$: se la massa finale è minore di quella iniziale compare dell'energia cinetica, se i prodotti di reazione hanno massa maggiore di quella iniziale doveva essere presente all'inizio una certa energia (non di massa) che nell'interazione si è trasformata in massa. In altre parole si verifica che l'energia si conserva, ma nel bilancio entra anche l'energia di massa (e questi fenomeni avvengono comunemente pure a velocità molto inferiori a c).

Un caso interessante è la formazione di uno stato legato a partire da due particelle singole: per esempio un protone e un neutrone che danno un *deutone*, nucleo dell'atomo di deuterio, isotopo dell'idrogeno. La massa del deutone è minore della somma delle masse del protone e del neutrone, però il sistema è legato come si può verificare misurando l'energia necessaria per romperlo. Ebbene, questa energia di legame vale proprio $\Delta m\,c^2$: la massa scomparsa si è tramutata in energia.



$d + d \rightarrow n + {}^3He$

Fig. 3.14

Dalle trasformazioni di massa in energia nelle reazioni di fusione tra nuclei degli isotopi dell'idrogeno si spera di ottenere una fonte di energia praticamente inesauribile.

L'esempio più semplice è costituito dalla fusione di due nuclei di deuterio, detti deutoni, ciascuno formato da un protone e da un neutrone, che danno luogo a un *nucleo di elio* 3 e ad un neutrone: l'elio 3 è un isotopo dell'elio con nucleo composto da due protoni e da un neutrone. La somma delle masse delle particelle finali è minore di quella dei due nuclei di deuterio e la differenza si ritrova sotto forma di energia cinetica dell'elio 3 e del neutrone; è proprio l'energia cinetica del neutrone che verrebbe successivamente assorbita e trasformata in altre forme di energia utilizzabile. Si osservi che la reazione non avviene spontaneamente perché i due deutoni sono entrambi carichi positivamente e si respingono: essi devono perciò possedere una certa energia che permetta di vincere la repulsione elettrica. La via sperimentale attualmente più seguita è di portare deuterio gassoso a temperature molto elevate, il che corrisponde a energie cinetiche elevate come vedremo nel capitolo sulle proprietà dei gas, con lo scopo di favorire il processo di fusione. Si parla di fusione termonucleare controllata e al momento attuale alcuni dei reattori sperimentali operanti nel mondo non sono lontani dalla parità nel bilancio energetico, cioè dall'eguaglianza tra energia spesa complessivamente per realizzare le fusioni e energia ricavata dalle fusioni. Però la via da percorrere per realizzare un'operazione continua e affidabile sembra ancora molto lunga.

Sempre a reazioni di fusione si attribuisce la fonte di energia di alcune categorie di stelle, tra cui il Sole.

4 OSCILLATORE ARMONICO

4.1 RICHIAMO DELLE PROPRIETÀ GIÀ VISTE.

Questo capitolo è dedicato all'approfondimento delle proprietà di un sistema che obbedisce all'equazione (1.16) e allo studio di alcune situazioni, interessanti nella pratica, che si ottengono modificando la (1.16) per tener conto di forze di attrito e di forze periodiche. Un tale sistema si chiama *oscillatore armonico (semplice)* e il suo stato dinamico è individuato da una coordinata x che varia con legge armonica: gli esempi che abbiamo già esaminato sono il moto di un punto materiale lungo un segmento sotto l'azione di una forza elastica e il pendolo semplice, in cui la coordinata che soddisfa a (1.16) è l'angolo o la posizione lungo un arco di circonferenza.

L'importanza dello studio dell'oscillatore armonico dipende da vari fatti. Innanzitutto fenomeni oscillatori regolati da (1.16) si verificano spesso in Fisica: oltre agli esempi elementari citati prima, e ad altri simili che vedremo in seguito come il pendolo composto e il pendolo di torsione, si trovano oscillazioni armoniche nei corpi solidi elastici e nei fluidi, in circuiti elettrici e in vari fenomeni elettromagnetici, nei plasmi (e questi fenomeni oscillatori possono dare origine a propagazione di onde, elastiche o elettromagnetiche). Essendo eguale l'equazione eguali sono le proprietà generali e pertanto quanto diremo adesso, limitandoci ai casi meccanici finora esaminati, può essere applicato a diverse situazioni di oscillazioni armoniche. In secondo luogo, alla fine del capitolo vedremo che sussiste un notevolissimo teorema, il *teorema di Fourier*: esso mostra come in sostanza l'oscillazione armonica sia il prototipo di qualsiasi fenomeno periodico.

La cinematica dell'oscillatore armonico è data da (1.11), (1.13), (1.14). A, ϕ, ω sono parametri indipendenti tra loro: A e ϕ sono determinati soltanto dalle condizioni iniziali, cioè da dove parte il punto nell'istante iniziale e con che velocità, ω invece è determinato soltanto dalla dinamica, come diremo subito. Il moto è periodico con periodo $T = 2\pi/\omega$, indipendente dall'ampiezza: la velocità è massima nel centro di oscillazione, dove vale ωA, e nulla negli estremi; l'accelerazione è nulla al centro e massima negli estremi, dove vale $\omega^2 A$.

La forza che dà origine all'oscillazione armonica è di tipo elastico, proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio con segno negativo, come visto nel paragrafo 2.9; inserendo $F = -kx$ nella (2.1) si trova (1.16) con

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{4.1}$$

Notiamo così che la pulsazione e quindi il periodo del moto armonico sono determinati dal valore della massa del punto materiale e dalle caratteristiche della forza elastica, cioè da condizioni dinamiche, dalle quali invece non dipendono l'ampiezza A e la fase iniziale ϕ.

Nel caso del punto attaccato a una molla, è questa che sviluppa una forza di richiamo proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio; nel caso del pendolo è la componente tangente della forza peso che risulta proporzionale allo spostamento angolare dalla verticale, purché tale spostamento sia piccolo. In realtà anche il comportamento della molla è lineare (forza sviluppata proporzionale alla deformazione) solo se la deformazione non è troppo grande.

Ci rendiamo allora conto di un altro fatto molto importante nella pratica e vero in generale: la soluzione tipo oscillatore armonico si ottiene, per un sistema che può oscillare, entro quei limiti, spesso ristretti, nei quali la forza di richiamo è lineare nello spostamento ovvero quando, in un sviluppo in serie, i termini di ordine superiore al primo sono trascurabili e di conseguenza *il problema è linearizzato.*

4.2 PROPRIETÀ DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELL' OSCILLATORE ARMONICO

L'equazione differenziale dell'oscillatore armonico

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \qquad (1.16)$$

Equazione dell'oscillatore armonico

è un'equazione del *secondo ordine* (vi compare la derivata seconda della funzione) *lineare* (la funzione compare ovunque solo alla prima potenza e anche la derivata è alla prima potenza), *a coefficienti costanti* (sono 1 e ω^2), *omogenea*, cioè con termine noto nullo.

Si verifica subito che se $x(t)$ è soluzione dell'equazione, lo è anche $ax(t)$ con a costante; inoltre se $y(t)$ è un'altra soluzione, anche $z(t) = x(t) + y(t)$ è soluzione di (1.16). Infatti

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x+y) = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 x - \omega^2 y = -\omega^2(x+y) = -\omega^2 z$$

e si vede che la proprietà è vera solo perché l'equazione è lineare.

Si dimostra che un'equazione come (1.16) ammette due sole soluzioni indipendenti e che qualsiasi altra soluzione si esprime come combinazione lineare di tali due soluzioni che, nel campo reale, sono le funzioni sen ωt e cos ωt. La soluzione più generale è allora

$$x(t) = a \operatorname{sen} \omega t + b \cos \omega t$$

che può essere scritta nei due modi

$$\begin{aligned} &x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{con} \quad a = A\cos\phi \ , \ b = A \operatorname{sen}\phi \ , \\ &x(t) = B\cos(\omega t + \psi) \quad \text{con} \quad a = -B \operatorname{sen}\psi \ , \ b = B\cos\psi \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Ottenuta la proprietà di somma, di seni e coseni

ricorrendo alle formule

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \quad ,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \quad .$$

Da (4.2) si ricava

$$A=\sqrt{a^2+b^2}=B \quad , \quad \text{tg}\,\phi=\frac{b}{a} \quad , \quad \text{tg}\,\psi=-\frac{a}{b} \quad .$$

Si noti che compaiono sempre due costanti di integrazione.

L'equazione non omogenea che corrisponde a (1.16) è

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2 x(t)=f(t) \quad , \tag{4.3}$$

dove $f(t)$ è una generica funzione del tempo che in particolare può essere costante. Se si trova una qualsiasi soluzione particolare $x_p(t)$ dell'equazione non omogenea, si dimostra che la soluzione più generale di (4.3) è

$$x(t)=a\,\text{sen}\,\omega t+b\cos\omega t+x_p(t) \tag{4.4}$$

Se con una certa $f_1(t)$ si ha la soluzione $x_1(t)$ e con una certa $f_2(t)$ si ha la soluzione $x_2(t)$, allora se il termine noto è $f_1(t)+f_2(t)$ la soluzione è $x_1(t)+x_2(t)$. Infatti

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2)+\omega^2(x_1+x_2)=\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega^2x_1+\frac{d^2x_2}{dt^2}+\omega^2x_2=f_1+f_2 \quad .$$

Principio di sovrapposizione

Questo risultato, che è conseguenza della linearità dell'equazione si chiama *principio di sovrapposizione*: *se in una determinata situazione si ha una certa soluzione e in una diversa situazione si ha un'altra soluzione, al verificarsi contemporaneo delle due situazioni si ha come soluzione la somma delle soluzioni* (purché la contemporaneità non alteri in qualche modo le situazioni preesistenti).

Considerazioni analoghe valgono per l'equazione

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+C\frac{dx(t)}{dt}+\omega^2x=0$$

con C costante e per la corrispondente equazione non omogenea, a parte il fatto che le soluzioni non sono del tipo sen ωt e cos ωt.

ESEMPIO 4.1

Un punto materiale di massa m è appeso a una molla di costante elastica k. Detta $x=0$ la posizione dell'estremo della molla col punto staccato, la posizione di equilibrio statico è

$$x=x_s=\frac{mg}{k} \quad . \tag{4.5}$$

come si ricava dall'eguaglianza tra la forza peso e la forza elastica. Si tira il punto fino alla posizione $x=2x_s$ e lo si

abbandona al tempo $t = 0$ con velocità nulla. Determinare la legge oraria del moto del punto.

Soluzione

La forza agente, in una posizione generica, è $F = m\,g - k\,x$ e quindi l'equazione del moto è

$$m\,a = m\,\frac{d^2x}{dt^2} = m\,g - k\,x \qquad (4.6)$$

ovvero, posto al solito $\omega^2 = k/m$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = g\,. \qquad (4.7)$$

È l'equazione non omogenea tipo (4.3), con il termine noto costante; una soluzione particolare è $x_p = x_s = m\,g/k$, come si verifica subito inserendola nell'equazione (4.7). La soluzione generale è allora

$$x\,(t) = A\ \text{sen}\ (\omega t + \phi) + \frac{m\,g}{k} \qquad (4.8)$$

e dalle condizioni iniziali abbiamo

$$x\,(0) = \frac{2\,m\,g}{k} = A\ \text{sen}\ \phi + \frac{m\,g}{k}\ ,\quad v\,(0) = 0 = \omega A\cos\phi$$

da cui ricaviamo

$$A = \frac{m\,g}{k}\ ,\qquad \phi = \frac{\pi}{2}\ .$$

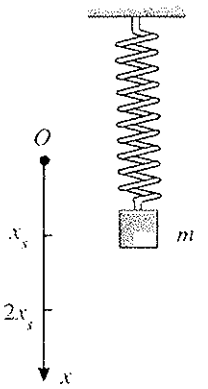


Fig. 4.1

Il risultato finale è

$$x\,(t) = \frac{m\,g}{k}\ (1 + \cos\omega t\,) \ \Rightarrow x - x_s = x_s\cos\omega t$$

$$v\,(t) = -\ \frac{m\ \omega\ g}{k}\ \text{sen}\ \omega t\ , \qquad (4.9)$$

$$a\,(t) = -\,g\cos\omega t = -\,\omega^2(x - x_s).$$

Il punto descrive attorno alla posizione di equilibrio statico una oscillazione armonica di ampiezza x_s; al variare delle condizioni iniziali variano A e ϕ, ma non ω.

4.3 ENERGIA DELL'OSCILLATORE ARMONICO

Riferiamoci al punto che oscilla sotto l'azione di una forza elastica, che, come abbiamo visto nel paragrafo 2.17, è una forza conservativa; durante il moto l'energia totale deve restare costante ed è facile verificarlo direttamente:

$$E_k = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \phi)\ ,$$
$$(4.10)$$
$$E_p = \frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2}\,k\,A^2\,\text{sen}^2(\omega t + \phi)\ .$$

e inserendo (4.1) nelle (4.10) si trova che in qualsiasi istante

$$E_{mecc} = E_k + E_p = \frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 A^2 = \text{costante} \qquad (4.11)$$

Il termine $\frac{1}{2}\ k\ A^2$ è il valore massimo dell'energia potenziale, assunto negli estremi dove l'energia cinetica è nulla; invece il termine $\frac{1}{2}\ m\ \omega^2 A^2$ è il valore massimo dell'energia cinetica, assunto nel centro di oscillazione dove l'energia potenziale è nulla. Quindi

$$E_{mecc} = E_{p,\max} = E_{k,\max}$$

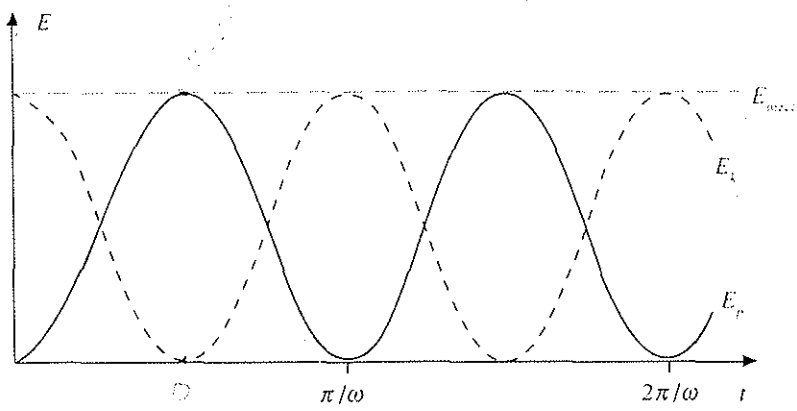


Fig. 4.2

In una posizione generica

$$E_{mecc} = \frac{1}{2}\ m\ v^2(x) + \frac{1}{2}\ k\ x^2$$

L'andamento dei termini in funzione della posizione è mostrato in figura 4.3; si noti come in sostanza lo stesso risultato fosse visibile in (1.15). Invece nella figura 4.2 è mostrato l'andamento in funzione del tempo; in ogni caso si vede che c'è un continuo scambio tra le due forme di energia, come già messo in evidenza nell'esempio del paragrafo 2.20.

Osserviamo che imponendo la conservazione dell'energia si ottiene l'equazione differenziale del moto. Differenziando $\frac{1}{2}\ m\ v^2 + \frac{1}{2}\ k\ x^2 =$ costante si ottiene

$$m\ v\ dv + k\ x\ dx = 0$$

ovvero

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{k\ x}{m\ v} \quad .$$

Da (1.9) in forma differenziale, $a\ dx = v\ dv$, si ha

$$\frac{dv}{dx} = \frac{a}{v} \quad .$$

Eguagliando queste due espressioni e tenendo conto di (4.1) si ottiene

$$a = -\frac{k}{m}\ x = -\omega^2 x \quad .$$

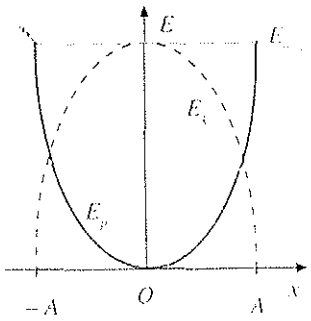


Fig. 4.3

In un moto periodico, in cui le varie grandezze caratteristiche sono funzioni del tempo, può essere interessante calcolare i valori medi in un periodo. Prima di far questo per l'oscillatore armonico, premettiamo alcune nozioni generali.

Note sui valori medi

Il *valore medio* di una funzione definita nell'intervallo x_1, x_2 è dato da

$$f_m = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \quad ;$$

l'interpretazione geometrica è immediata: l'integrale rappresenta il valore dell'area sotto la curva e quindi $(x_2 - x_1) f_m$ = area, ovvero il valor medio f_m è l'altezza del rettangolo di base $x_2 - x_1$ che ha area eguale a quella compresa tra la curva e l'asse delle ascisse. Nel caso della funzione seno, la media su un periodo è nulla:

$$(\text{ sen } \theta)_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \left[-\cos \theta \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Lo stesso si ottiene per $(\cos \theta)_m$; quindi seno e coseno hanno valore medio nullo in un periodo e del resto si tratta di un risultato evidente se si considerano i grafici delle funzioni: in un semiperiodo l'area sotto la curva è S, nel semiperiodo successivo è $-S$, il totale è zero.
Diversa la situazione per $\text{sen}^2 \theta$ e $\cos^2 \theta$, funzioni periodiche con periodo π, che essendo sempre positive non possono avere valor medio nullo. Osserviamo che

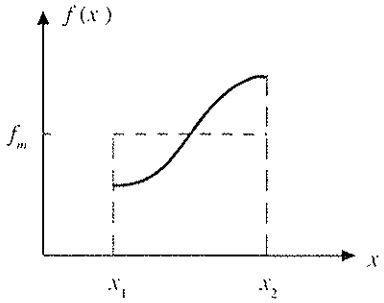


Fig. 4.4

$$\int_0^{\pi} (\text{ sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)\, d\theta = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$

e che pertanto

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 \theta\, d\theta = \int_0^{\pi} \cos^2 \theta\, d\theta = \frac{\pi}{2} \quad ,$$

in quanto è sempre la stessa funzione, a parte lo sfasamento. Quindi

$$(\text{ sen}^2 \theta)_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}^2 \theta\, d\theta = (\cos^2 \theta)_m =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta\, d\theta = \frac{1}{2} \,. \qquad (4.12)$$

Ritorniamo all'oscillatore armonico. I valori medi di posizione, velocità, accelerazione in un periodo, dati da formule tipo (1.3), sono tutti nulli: mediamente in un periodo il punto è fermo nell'origine e questo corrisponde al fatto che un moto regolare tra $+A$ e $-A$ può globalmente essere equiparato a uno stato di quiete (ma ciò dice anche quanto poca informazione diano in questo caso i valori medi sui valori istantanei). Invece non è nullo il valor medio delle due forme di energia:

$$(E_c)_m = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \left[\cos^2 (\omega t + \phi) \right]_m = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} E_{mecc}$$

$$(E_p)_m = \frac{1}{2} k A^2 \left[\text{sen}^2 (\omega t + \phi) \right]_m = \frac{1}{4} k A^2 = \frac{1}{2} E_{mecc} \quad , \qquad (4.13)$$

avendo tenuto conto di (4.12). Mediando su un periodo, l'energia è per metà cinetica e per metà potenziale.

ESEMPIO 4.2

Con riferimento all'esempio 4.1 calcolare le varie forme di energia e i loro valori medi.

Soluzione

Osserviamo prima che, per come è stato scelto il sistema di riferimento, quando il punto è in $x = 0$ l'energia potenziale elastica è nulla perché la molla non è tesa, l'energia potenziale della forza peso, pari a $-mgx$ vista l'orientazione dell'asse verticale, è nulla e l'energia cinetica è nulla perché l'origine è un estremo dell'oscillazione. Quindi $E_{meccanica} = 0$. I singoli termini e i loro valori medi valgono:

$$E_{p.el} = \frac{1}{2} k x_s^2 (1 + \cos\omega t)^2 \Rightarrow (E_{p.el})_m = \frac{3}{4} k x_s^2 = \frac{3}{4} mgx_s ,$$

$$E_{p.peso} = -mgx_s(1 + \cos\omega t) \Rightarrow (E_{p.peso})_m = -k x_s^2 = -mgx_s ,$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 x_s^2 \operatorname{sen}^2\omega t \Rightarrow (E_k)_m = \frac{1}{4} k x_s^2 = \frac{1}{4} mgx_s .$$

Un grafico qualitativo delle tre forme di energia è mostrato in figura 4.5. Si noti la differenza, rispetto alla figura 4.2, di $E_{p.el}$: in effetti adesso agisce la forza peso che sposta il centro di oscillazione da $x = 0$ a $x = x_s$ e la molla risulta sempre tesa durante il moto. L'energia totale è ancora, in media, per metà cinetica e per metà potenziale (i due termini sono in questo caso di segno opposto, ma eguali in valore assoluto).

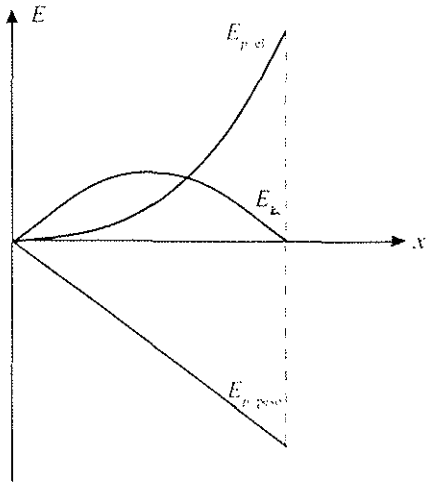


Fig. 4.5

4.4 SOMMA DI MOTI ARMONICI SULLO STESSO ASSE.

Supponiamo di avere un punto materiale sottoposto a due forze elastiche, eguali o diverse, con la stessa direzione. Ciascuna forza separatamente dà origine a un moto armonico. Ci poniamo il problema di cosa succede quando entrambe agiscono contemporaneamente ovvero di come si sommano due moti armonici sullo stesso asse.

A. Forze eguali

Somma di moti armonici con la stessa pulsazione

Per primo consideriamo il caso in cui le costanti elastiche siano eguali così che le leggi orarie si scrivono

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1) \quad , \quad x_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_2) \quad .$$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

Entrambi i moti obbediscono alla stessa equazione differenziale (1.16): ω è la stessa, solo le condizioni iniziali sono diverse. Sappiamo dal paragrafo 4.2 che $x = x_1 + x_2$ è ancora soluzione: pertanto la somma è un moto armonico con la stessa pulsazione,

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$$

di cui vogliamo calcolare l'ampiezza A e la fase iniziale ψ.

In ogni istante deve valere l'eguaglianza

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \psi) = A_1 \text{ sen } (\omega t + \phi_1) + A_2 \text{ sen } (\omega t + \phi_2)$$

$$\Rightarrow A \cos\psi \text{ sen } \omega t + A \text{ sen } \psi \cos \omega t =$$

$$= (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2) \text{ sen } \omega t + (A_1 \text{ sen } \phi_1 + A_2 \text{ sen } \phi_2) \cos \omega t$$

e pertanto devono essere eguali i coefficienti di sen ωt e cos ωt:

$$A \cos \psi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \quad , \quad A \text{ sen } \psi = A_1 \text{ sen } \phi_1 + A_2 \text{ sen } \phi_2$$

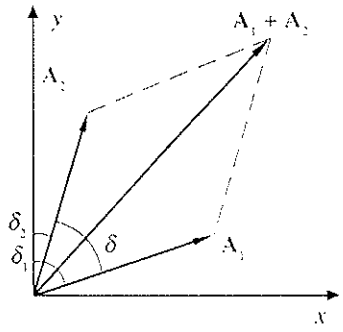


Fig. 4.6

Quadrando e sommando:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos (\phi_1 - \phi_2)} \quad .$$

Facendo il rapporto:

$$\text{tg } \psi = \frac{A_1 \text{ sen } \phi_1 + A_2 \text{ sen } \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2} \quad .$$

Costruzione di Fresnel

Un secondo metodo per arrivare a questo risultato è fornito dalla cosiddetta *costruzione di Fresnel*, basata sul fatto che la proiezione di un moto circolare su un diametro è un moto armonico.

In figura 4.6 $\mathbf{A}_1$ è un vettore ruotante nel piano x,y con velocità angolare ω, formante l'angolo $\delta_1 = \omega t + \phi_1$ con l'asse y e avente proiezione sull'asse x eguale a A_1 sen $(\omega t + \phi_1)$. Analogamente $\mathbf{A}_2$ è un vettore ruotante con velocità angolare ω, formante l'angolo $\delta_2 = \omega t + \phi_2$ con l'asse y e avente proiezione sull'asse x eguale a A_2 sen $(\omega t + \phi_2)$. L'angolo tra i due vettori, ovvero la differenza di fase, è

Differenza di fase

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = (\omega t + \phi_1) - (\omega t + \phi_2) = \phi_1 - \phi_2$$

ed è costante nel tempo perché i due vettori ruotano con la stessa velocità angolare. Il vettore risultante $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ ruota con la stessa ω, forma con l'asse y l'angolo $\omega t + \psi$ e ha modulo, secondo il teorema del coseno (appendice C),

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos (\phi_1 - \phi_2)} \qquad (4.14)$$

La proiezione di $\mathbf{A}$ sull'asse x è A sen $(\omega t + \psi)$, eguale alla somma delle proiezioni dei vettori componenti, secondo la nota proprietà. In particolare per $t = 0$

$$A \text{ sen } \psi = A_1 \text{ sen } \phi_1 + A_2 \text{ sen } \phi_2 \quad , \quad A \cos \psi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2$$

e si riottiene lo stesso risultato del primo metodo anche per la fase ψ. Col metodo di Fresnel la somma dei due moti armonici è ricondotta alla somma di due vettori.

Il risultato più interessante è che l'ampiezza del moto risultante dipende dalla differenza di fase $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$; essa è

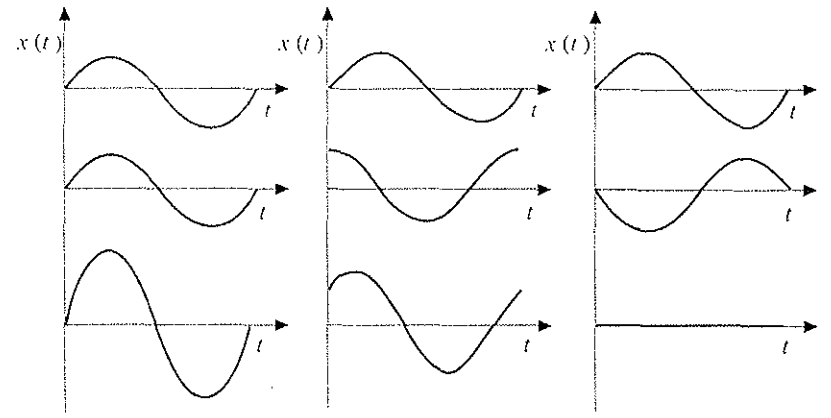
massima per $\Delta\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ e vale $A_1 + A_2$,

minima per $\Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ e vale $|A_1 - A_2|$.

Date due sinusoidi di eguale periodo l'ampiezza della somma dipende dalla posizione relativa, ovvero dallo sfasamento, come è mostrato in figura 4.7, nel caso particolare $A_1 = A_2$. Si osservi come in tal caso si ottenga la quiete quando $\Delta\phi = \pi, 3\pi, \ldots$

Interferenza

Quanto descritto trova applicazione anche nello studio della sovrapposizione di onde e precisamente nei *fenomeni di interferenza.*



$\Delta\phi = 0, 2\pi, \ldots$ MAX — in fase

$\Delta\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ — in quadratura di fase

$\Delta\phi = \pi, 3\pi, \ldots$ MIN — in opposizione di fase

Fig. 4.7

B. Forze diverse

$k_1 \neq k_2 \Rightarrow$ $\omega_1 \neq \omega_2$

Somma di moti armonici di diversa pulsazione

Questa volta le pulsazioni dei due moti sono diverse:

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1) \quad , \quad x_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \quad .$$

Le equazioni differenziali sono diverse e $x = x_1 + x_2$ non è soluzione di nessuna delle due. Utilizziamo direttamente la costruzione di Fresnel dove però ora i due vettori ruotanti hanno velocità angolari diverse per cui l'angolo tra di essi

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = (\omega_1 t + \phi_1) - (\omega_2 t + \phi_2) = (\omega_1 - \omega_2)\, t + \phi_1 - \phi_2$$

è variabile nel tempo e il vettore risultante ha modulo variabile

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)\, t + \phi_1 - \phi_2]} \quad . \qquad (4.15)$$

Modulazione di ampiezza

Il moto risultante non è armonico semplice, proprio perché l'ampiezza è funzione del tempo, e si parla di *modulazione di ampiezza.*

Per esempio, se $A_1 = A_2 = A$ e $\phi_1 = \phi_2 = 0$, si ha

$$x = x_1 + x_2 = A \text{ sen } \omega_1 t + A \text{ sen } \omega_2 t = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \text{ sen } \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

ovvero

$$x(t) = A(t) \text{ sen } \omega t = 2A \cos \Omega t \text{ sen } \omega t \quad ;$$

l'ampiezza $A(t)$ è quella che si ottiene da (4.15) nelle condizioni date. Si tratta di un moto oscillatorio con pulsazione

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

e ampiezza modulata con pulsazione

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad .$$

Il grafico è mostrato in figura 4.8, in cui si vedono le due oscillazioni con pulsazioni ω e $\Omega < \omega$.

Il fenomeno si chiama *battimento* e viene sfruttato ad esempio nelle trasmissioni radiofoniche AM, dove la ω è la pulsazione dell'onda elettromagnetica portante ($\sim 10^6$ rad/s) e Ω la pulsazione generata nel microfono dal suono ($\sim 10^3$ rad/s). Battimenti

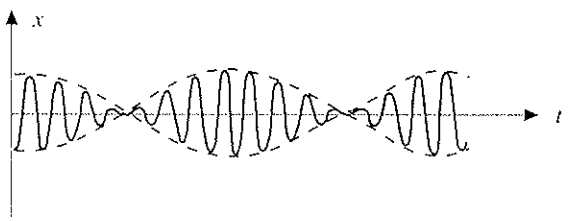


Fig. 4.8

4.5 SOMMA DI MOTI ARMONICI SU ASSI ORTOGONALI.

Passiamo adesso a considerare il caso in cui il punto sia sottoposto a due forze elastiche con direzioni ortogonali, lungo l'asse x e lungo l'asse y. Vediamo che ci troviamo a trattare la somma di moti armonici rettilinei che danno un moto piano. Facciamo l'ipotesi che le due forze abbiano la stessa costante elastica per cui i due moti hanno la stessa pulsazione:

$$x = A \text{ sen } \omega t \quad , \quad y = B \text{ sen } (\omega t + \phi)$$

ϕ è lo sfasamento tra i due moti (per la nomenclatura si veda la figura 4.7).

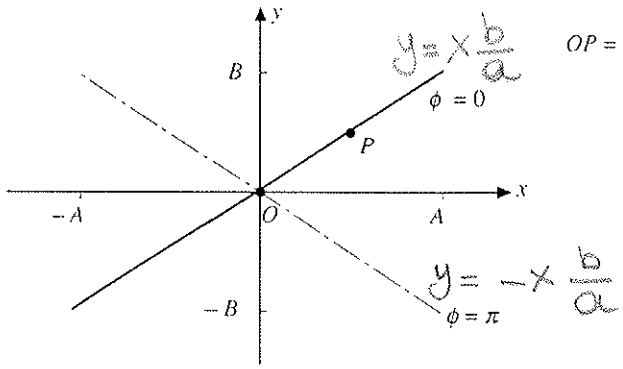
Se i moti sono in fase, $\phi = 0$,

$$\frac{x}{y} = \frac{A}{B} \quad .$$

Il punto si muove di moto armonico lungo un segmento di retta tra le posizioni $-A, -B$ e A, B ; tale retta forma con l'asse x l'angolo

$$\theta = \text{arc tg}\,\frac{B}{A} \quad .$$

Se i moti sono in opposizione di fase, $\phi = \pi$, $x/y = -A/B$ e la situazione è analoga, salvo che θ diventa $-\theta$.



$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2}\,\text{sen}\,\omega t$$

Fig. 4.9

Quando i moti sono in quadratura di fase, $\phi = \frac{\pi}{2}$,

$$x = A\,\text{sen}\,\omega t$$

$$y = B\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = B\cos\omega t$$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1 \quad ,$$

che è l'equazione di una ellisse. Pertanto la traiettoria è un *ellisse*, che risulta percorsa in senso orario.

Se $\phi = \frac{3}{2}\pi$ si ha lo stesso risultato, solo che il moto è antiorario.

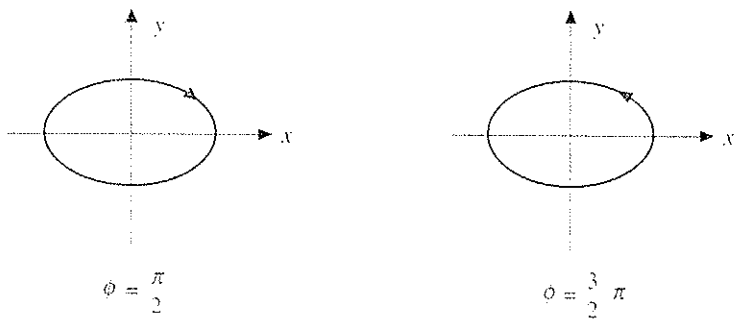


Fig. 4.10

In particolare, se $A = B$, la traiettoria è *circolare*.

Infine, se ϕ è generico, la traiettoria è sempre un'ellisse, però con gli assi non paralleli agli assi cartesiani (anche se $A = B$).

In conclusione: *la somma di due moti armonici con eguale pulsazione su assi*

ortogonali dà sempre luogo a un moto piano con traiettoria ellittica; in particolari situazioni l'ellisse degenera in un segmento o in una circonferenza. Questi risultati, applicati opportunamente alle onde elettromagnetiche, vengono utilizzati nello studio dei *fenomeni di polarizzazione*.

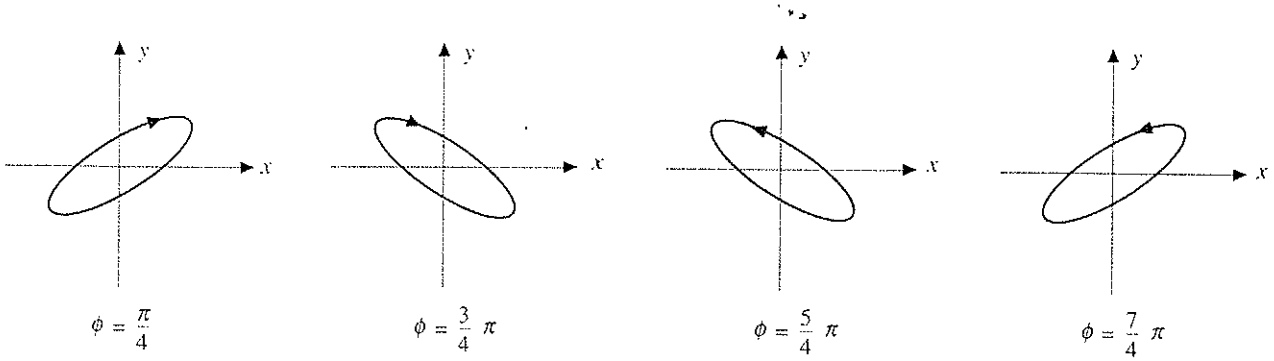


Fig. 4.11

La forza che dà origine a questo moto ha componenti $F_x = -k\,x$ e $F_y = -k\,y$ per cui deve avere l'espressione

$$\mathbf{F} = -k\,x\,\mathbf{u}_x - k\,y\,\mathbf{u}_y = -k\,(x\,\mathbf{u}_x + y\,\mathbf{u}_y) = -k\,\mathbf{r} \quad .$$

Si tratta dunque della forza elastica bidimensionale vista nell'esempio del paragrafo 2.21. È una forza centrale e quindi la traiettoria ellittica è percorsa con velocità areale costante, come dimostrato nel paragrafo 2.23. Ne deriva che se in particolare il moto è circolare, esso è anche uniforme.

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt}$
se è costante
$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \text{cost}$
$\Rightarrow \omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \text{cost}$
MOTO CIRCOLARE UNIFORME

La forza $\mathbf{F} = -k\,\mathbf{r}$ è conservativa e la sua energia potenziale è $E_p = \frac{1}{2}\,k\,r^2$. Calcoliamo il valore dell'energia meccanica E_{mecc} :

$$E_k = \frac{1}{2}\,m\,(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,[A^2\cos^2\omega t + B^2\cos^2(\omega t + \phi)] \quad ,$$

$$E_p = \frac{1}{2}\,k\,r^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,[A^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega t + B^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \phi)] \quad ,$$

$$E_{mecc} = E_k + E_p = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 A^2 + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 B^2 = \frac{1}{2}\,k\,(A^2 + B^2) \quad .$$

Il termine

$$\frac{1}{2}\,m\,\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\,k\,A^2$$

è l'energia meccanica del moto lungo x e analogamente

$$\frac{1}{2}\,m\,\omega^2 B^2 = \frac{1}{2}\,k\,B^2$$

è l'energia meccanica del moto lungo y. La loro somma dà E_{mecc} che risulta indi-

pendente dallo sfasamento.

La somma di due moti armonici su assi ortogonali diviene molto più complicata se le pulsazioni dei due moti sono diverse. Diciamo soltanto che il moto risultante è periodico se ω_1/ω_2 è un numero razionale; altrimenti si hanno moti non periodici.

Nota su energia e composizione di moti

Nella composizione di moti ci siamo sempre occupati di posizione, velocità e accelerazione: queste sono grandezze vettoriali e, nella composizione, vale la regola di somma tra vettori. Nel caso dell'energia, che non è un vettore, bisogna fare attenzione, come possiamo vedere per la somma di due moti armonici con eguale pulsazione sullo stesso asse. L'energia totale del moto effettivo descritto dal punto è $E_{mecc} = \frac{1}{2}\ k A^2$ ovvero, secondo (4.14),

$$E_{mecc} = \tfrac{1}{2} k A_1^2 + \tfrac{1}{2} k A_2^2 + k A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\ ;$$

essa non è eguale alla somma delle energie meccaniche dei due singoli moti componenti. Nel caso particolare (già considerato) che sia $A_1 = A_2$ e $\phi_1 - \phi_2 = \pi$ risulta $E_{mecc} = 0$ e infatti il punto è fermo nell'origine. Solo se i due moti fossero in quadratura di fase formalmente l'energia meccanica totale sarebbe la somma di quelle dei moti componenti.

Più in generale, se consideriamo l'energia cinetica $E_k = \frac{1}{2}\ mv^2$ di un punto materiale e pensiamo al moto come somma di due moti lungo assi generici, mentre è sempre $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, non è detto che sia vera la relazione $v^2 = v_1^2 + v_2^2$: ciò avviene per esempio se gli assi sono ortogonali tra loro.

La procedura più sicura è pertanto quella di considerare il moto effettivo del punto e applicare a questo le formule note per le varie forme di energia.

4.6 OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO DA UNA FORZA DI ATTRITO COSTANTE

Trasformiamo il caso ideale in una situazione più realistica introducendo una forza di attrito costante, come mostrato in figura 4.12 in cui oltre alla forza elastica agisce durante il moto la forza $-\mu m g \mathbf{u}_v$ (μ è il coefficiente di attrito dinamico definito nel paragrafo 2.8). Questa forza, sempre opposta al moto, compie lavoro negativo per cui l'energia dell'oscillatore diminuisce fino a che il punto si ferma.

Supponiamo che per $t = 0$ il punto si trovi nella posizione $x = x_0$, con velocità nulla, essendo $x = 0$ la coordinata della posizione in cui la forza elastica è nulla. Ragioniamo prima in termini di energia e lavoro.

Il punto parte da $x = x_0$, passa per l'origine e si arresta nel punto $x = -x'$. Applichiamo (2.18) tra x_0 e $-x'$, dove $E_k = 0$:

$$W_{el} + W_{att} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{att} = -W_{el} = \Delta E_{p,el}$$

Quindi

$$\tfrac{1}{2} k x'^2 - \tfrac{1}{2} k x_0^2 = \mu m g \mathbf{u}_v \cdot (-x' - x_0)\mathbf{u}_v = -\mu m g (x' + x_0)\ ,$$

$$x' = x_0 - 2\frac{\mu m g}{k} = x_0 - 2x_A \quad \text{posto } x_A = \frac{\mu m g}{k}\ .$$

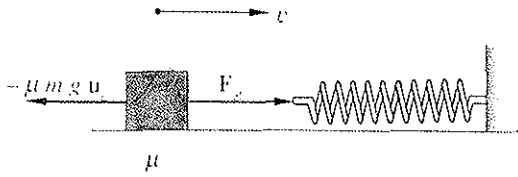


Fig. 4.12

Il punto non si arresta in $x = -x_0$, ma più vicino all'origine di $2x_A$.

Dopo la prima mezza oscillazione il punto riparte da $x = -x'$, ripassa per l'origine e si arresta in $x = x_1$. Riapplicando (2.18) tra $-x'$ e x_1 si ha:

$$\frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x'^2 = -\mu m g \mathbf{u}_x \cdot (x_1 + x') \mathbf{u}_x = -\mu m g (x_1 + x')$$

$$x_1 = x_0 - 4x_A .$$

In definitiva ad ogni oscillazione il punto di arresto si sposta di $4x_A$ verso l'origine: dopo due oscillazioni $x_2 = x_0 - 8x_A$, dopo n oscillazioni $x_n = x_0 - 4n x_A$.

Agli stessi risultati si arriva tramite l'equazione del moto: da $x = x_0$ a $x = -x'$

$$-k x \mathbf{u}_x + \mu m g \mathbf{u}_x = m \boldsymbol{a} = m \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \mu g \quad ,$$

che è la stessa equazione non omogenea (4.7) dell'esempio 4.1. Una soluzione particolare è

$$x = \frac{\mu m g}{k} = x_A$$

per $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

e la soluzione generale è

$$x(t) = x_A + a \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad .$$

Le condizioni iniziali sono $x_0 = x_A + a \operatorname{sen} \phi$, $0 = \omega a \cos \phi$ da cui si ricava

$$x(t) = x_A + (x_0 - x_A) \cos \omega t \quad , \quad v(t) = -\omega (x_0 - x_A) \operatorname{sen} \omega t \quad .$$

Il punto si ferma quando $v = 0$, cioè $\omega t = \pi$, e allora x vale $-(x_0 - 2x_A) = -x'$. Da $-x'$ a x_1 l'equazione differenziale è analoga, con il termine noto di segno opposto e le nuove condizioni iniziali, e così via.

Adesso però abbiamo in più l'informazione temporale. Si vede che la velocità si annulla ad intervalli regolari, pari a $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, cioè il moto si inverte ad intervalli regolari; quindi ogni oscillazione (smorzata) del punto si compie nello stesso intervallo di tempo, anche se non con la stessa ampiezza.

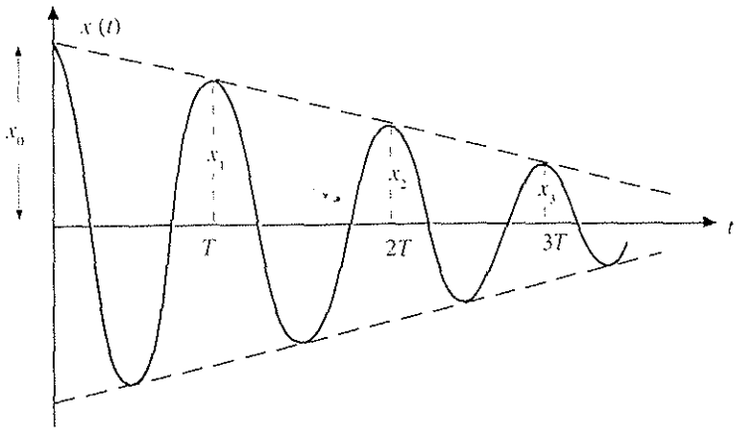


Fig. 4.13

Il moto non è strettamente periodico: l'intervallo di tempo

Pseudoperiodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

si chiama ora *pseudoperiodo*; esso non dipende da μ.

L'andamento della posizione è mostrato in figura 4.13; la curva è formata da archi di sinusoide di ampiezza decrescente linearmente: in uno pseudoperiodo l'ampiezza diminuisce di $4x_A = 4\dfrac{\mu m g}{k}$.

Calcoliamo dove si ferma definitivamente il punto. In ogni estremo esso riparte solo se, in modulo, la forza elastica è maggiore della forza di attrito statico:

$$k x_n > \mu_s m g \quad \Rightarrow \quad x_n > \frac{\mu_s m g}{k} = x'_A \quad .$$

Se la condizione è soddisfatta da x_n, ma non da x_{n+1}, vuol dire che la (n+1)-esima oscillazione non viene completata e che il punto si ferma definitivamente. In tale posizione di arresto

$$k x < \mu_s m g \quad \Rightarrow \quad x < x'_A$$

e quindi si ferma in un intervallo centrato sull'origine di ampiezza $\pm x'_A$, tanto maggiore quanto più grande è l'attrito, a parità di altre condizioni. Il numero di oscillazioni complete si ricava da $x_n = x_0 - 4n\,x_A > x'_A$ ed è il numero n intero minore di $b = (x_0 - x'_A)/4x_A$ e tale che $n+1 > b$.

4.7 OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO DA UNA FORZA VISCOSA.

Oltre alla forza elastica agisca una forza di tipo viscoso, cioè proporzionale e opposta alla velocità, $-\lambda v$. La legge del moto si scrive

$$m\,a = -k\,x - \lambda\,v$$

ovvero

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}\,x = 0\,.$$

Chiamiamo *coefficiente di smorzamento* e *pulsazione propria* rispettivamente

$$\gamma = \frac{\lambda}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4.16}$$

e riscriviamo così l'equazione del moto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\,\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\,x = 0\,. \tag{4.17}$$

Equazione dell'oscillatore armonico smorzato

La (4.17) si chiama *equazione differenziale dell'oscillatore armonico smorzato*; essa è l'esempio più completo di equazione differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti, omogenea.

Abbiamo già visto che l'attrito viscoso porta a uno smorzamento esponenziale (nei paragrafi 1.7 e 2.10), per cui cerchiamo se esiste per (4.17) una soluzione $x(t)$ proporzionale a $e^{\alpha t}$. Deve essere:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,(e^{\alpha t}) + 2\gamma\,\frac{d}{dt}\,(e^{\alpha t}) + \omega_0^2\,e^{\alpha t} = 0\,,$$

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma\,\alpha\,e^{\alpha t} + \omega_0^2\,e^{\alpha t} = e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\,\alpha + \omega_0^2\,) = 0\,.$$

Si deduce che $e^{\alpha t}$ è soluzione di (4.17) solo se α soddisfa l'*equazione caratteristica* di secondo grado

$$\alpha^2 + 2\gamma\,\alpha + \omega_0^2 = 0 \tag{4.18}$$

ovvero se

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{4.19}$$

Vediamo che ci sono tre casi possibili:

① $\gamma^2 > \omega_0^2$, ② $\gamma^2 = \omega_0^2$, ③ $\gamma^2 < \omega_0^2$.

Il tipo di soluzione dipende dalla relazione tra i parametri fisici dell'oscillatore.

Primo caso: smorzamento forte

$\gamma^2 > \omega_0^2$ ovvero in base a (4.16) $\lambda^2 > 4mk$;

α assume i due valori distinti

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad , \quad \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad ,$$

entrambi negativi, e la soluzione più generale è

$$x(t) = A\, e^{\alpha_1 t} + B\, e^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t}\left(A\, e^{t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} + B\, e^{-t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \right)$$

esponenziale decrescente; A e B dipendono dalle condizioni iniziali.

Secondo caso: smorzamento critico

$\gamma^2 = \omega_0^2$ ovvero $\lambda^2 = 4mk$

Le due soluzioni di (4.18) sono coincidenti: $\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$. Si dimostra che in tal caso la soluzione più generale di (4.17) è

$$x(t) = e^{-\gamma t}\,(A\,t + B) \quad ,$$

ancora esponenziale decrescente.

Nella figura 4.14 sono mostrati vari casi possibili; in ascissa il tempo è misurato in unità $T_0 = 2\pi/\omega_0$, periodo dell'oscillatore non smorzato. Passando dalla curva 1 alla curva 3 diminuisce il rapporto γ/ω_0, cioè diminuisce lo smorzamento, fino a che $\gamma = \omega_0$ per la curva 4, corrispondente allo *smorzamento critico*. Questo è il caso in cui il punto tende più rapidamente alla posizione di equilibrio $x = 0$. Nelle condizioni di smorzamento forte o critico non c'è mai oscillazione.

Smorzamento critico

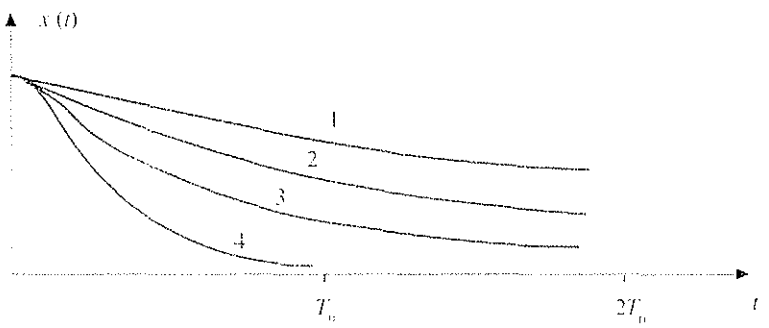


Fig. 4.14

Terzo caso: smorzamento debole

$$\gamma^2 < \omega_0^2 \qquad \text{ovvero} \qquad \lambda^2 < 4m\,k$$

Le soluzioni (4.20) dell'equazione caratteristica (4.19) sono complesse coniugate

$$\alpha_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\,\omega$$

$$\alpha_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\,\omega$$

e la soluzione più generale è

$$x(t) = A\,e^{\alpha_1 t} + B\,e^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t}\,(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}).$$

Utilizzando la *formula di Eulero*

$$e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\,\text{sen}\,\omega t$$

si ottiene

$$x(t) = e^{-\gamma t}[(A + B)\cos\omega t + (A - B)\,i\,\text{sen}\,\omega t].$$

Il risultato deve essere reale e inoltre A e B devono essere diverse; ciò comporta che anche A e B siano complessi coniugati:

$$A = a + ib \quad , \quad B = a - ib \quad \Rightarrow \quad A + B = 2a \quad , \quad A - B = 2ib \quad ;$$

effettuando queste sostituzioni l'espressione di $x(t)$ diviene

$$x(t) = e^{-\gamma t}(2a\cos\omega t - 2b\,\text{sen}\,\omega t)$$

che può sempre essere scritta

$$x(t) = A_0\,e^{-\gamma t}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) \qquad (4.20)$$

con A_0 e ϕ determinate in base alle condizioni iniziali.

Il punto, in condizioni di smorzamento debole, compie oscillazioni di pulsazione

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$

e pseudoperiodo $T = 2\pi/\omega$. L'ampiezza è smorzata esponenzialmente. Il moto si inverte a intervalli regolari, pari a $T/2$, ma non è periodico perché il punto non ripassa nelle stesse posizioni.

Si ha che $x(t + T)/x(t) = e^{-\gamma T}$, cioè in uno pseudoperiodo l'ampiezza si riduce di un fattore $e^{-\gamma T}$. Il punto si ferma in $x = 0$.

Nota. Applicazione agli strumenti di misura.

Consideriamo quegli strumenti di misura in cui la grandezza G da misurare produce una deviazione dalla posizione di equilibrio di un certo sistema, richiamato verso l'equilibrio da una forza di tipo elastico, per cui il sistema assume la nuova posizione di equilibrio x_G. Se non ci fosse attrito l'applicazione di G avrebbe come conseguenza oscillazioni indefinite attorno alla posizione x_G e ciò non va bene, se si vuole leggere il valore di x_G per esempio con un indice mobile. Si introduce allora un fattore di attrito viscoso regolabile in modo da ottenere la condizione di smorzamento critico: il sistema raggiunge x_G, dove si ferma, nel minor tempo possibile. Sono invece da ridurre al minimo gli attriti costanti che falsano la posizione di arresto.
Quanto detto trova applicazione per esempio nelle bilance e negli strumenti elettrici a bobina mobile, in cui si usano rispettivamente smorzatori ad aria o ad altro fluido e smorzatori elettromagnetici.

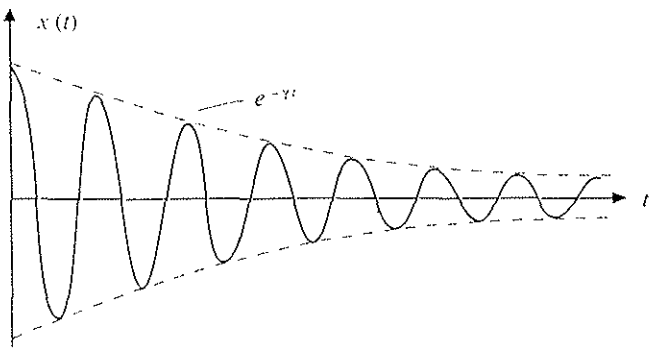


Fig. 4.15

4.8 OSCILLATORE ARMONICO FORZATO.

Riassumiamo i fenomeni di oscillazione visti finora. Quando si sposta il punto dalla posizione di equilibrio esso tende a ritornarci sotto l'azione della forza elastica. Se non c'è attrito si ha un'oscillazione indefinita; se c'è attrito, costante o viscoso, si ha un'oscillazione smorzata che si esaurisce in un certo tempo (fenomeno transitorio). Siccome c'è sempre attrito, l'oscillazione libera è sempre smorzata.

Vogliamo ora studiare come si può rendere l'oscillazione *persistente*, cioè come si può realizzare un sistema fisico reale che oscilli con frequenza definita e ampiezza costante, anche in presenza di attrito viscoso. Applichiamo all'oscillatore una forza sinusoidale $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$ così che l'equazione del moto sia

$$ma = -k x - \lambda v + F_0 \operatorname{sen} \omega t$$

ovvero

Oscillazione forzata

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \operatorname{sen} \omega t \quad . \tag{4.21}$$

in cui abbiamo adottato gli stessi simboli di (4.17); l'equazione però non è più omogenea. Si osservi anche che la forza impressa ha una pulsazione ω che è in

generale diversa da quella propria ω_0 dell'oscillatore. Vogliamo verificare se (4.21) ammette una soluzione particolare oscillatoria non smorzata del tipo $x = A \text{ sen } (\omega t + \phi)$, cioè con la stessa pulsazione della forza impressa. Se la risposta fosse positiva, la soluzione più generale sarebbe in base a (4.4)

$$x(t) = A \text{ sen } (\omega t + \phi) + a\, e^{\alpha_1 t} + b\, e^{\alpha_2 t}$$

e, smorzatosi il fenomeno transitorio in un tempo che è caratterizzato dal coefficiente di smorzamento γ, resterebbe l'oscillazione permanente $x = A \text{ sen } (\omega t + \phi)$ dovuta alla forza impressa.

Inseriamo pertanto $x = A \text{ sen } (\omega t + \phi)$ nella (4.21) ottenendo:

$$-\omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \phi) + 2\gamma\omega A \cos (\omega t + \phi) + \omega_0^2 A \text{ sen } (\omega t + \phi) = \frac{F_0}{m} \text{ sen } \omega t .$$

Di qui, sviluppando sen $(\omega t + \phi)$ e cos $(\omega t + \phi)$, abbiamo:

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \phi - 2\gamma\omega A \text{ sen } \phi] \text{ sen } \omega t + [(\omega_0^2 - \omega^2) A \text{ sen } \phi +$$

$$2\gamma\omega A \cos \phi] \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \text{ sen } \omega t.$$

L'eguaglianza deve valere per qualunque valore di t e così deve essere:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \phi - 2\gamma\omega A \text{ sen } \phi = \frac{F_0}{m} \quad ,$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \text{ sen } \phi + 2\gamma\omega A \cos \phi = 0 \quad ,$$

da cui finalmente si ricava

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad , \tag{4.22}$$

$$\text{tg } \phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad .$$

Riassumiamo le nostre conclusioni, contenute nelle (4.22):

a) a una sollecitazione sinusoidale l'oscillatore armonico risponde con uno spostamento sinusoidale: la pulsazione non è quella propria ω_0, bensì è eguale a quella voluta ω, impressa dall'esterno;
b) lo spostamento è sfasato rispetto alla forza;
c) la risposta dell'oscillatore non è la stessa qualunque sia ω: ampiezza e fase dipendono dal valore di ω;
d) A e ϕ non dipendono dalle condizioni iniziali, da cui dipendono solo le costanti a e b della parte transitoria.

Studio della risposta in funzione di ω.

1) $\omega << \omega_0$ $\quad A \approx \dfrac{F_0}{k}$ $\qquad \phi \approx 0$

$x \approx \dfrac{F_0}{k}$ sen ωt $\qquad$ in fase con la forza,

il parametro dominante è k, costante elastica dell'oscillatore;

2) $\omega >> \omega_0$ $\quad A \approx \dfrac{F_0}{m\,\omega^2}$ $\qquad \phi \approx \pi$

$x \approx -\dfrac{F_0}{m\,\omega^2}$ sen ωt $\qquad$ in opposizione di fase con la forza ,

il parametro dominante è m, massa dell'oscillatore;

3) $\omega = \omega_0$ $\quad A = \dfrac{F_0}{2\,m\,\gamma\,\omega_0}$ $\qquad \phi = \dfrac{\pi}{2}$

$x = \dfrac{F_0}{2\,m\,\gamma\,\omega_0}$ cos ωt $\qquad$ in quadratura di fase con la forza,

il parametro dominante è γ, coefficiente di smorzamento. Si parla in questo caso di *risonanza*.

Risonanza

La funzione $A(\omega)$ è massima per

$$\omega = \omega_M = \sqrt{\omega_0^2 - 2\,\gamma^2} < \omega_0 \quad .$$

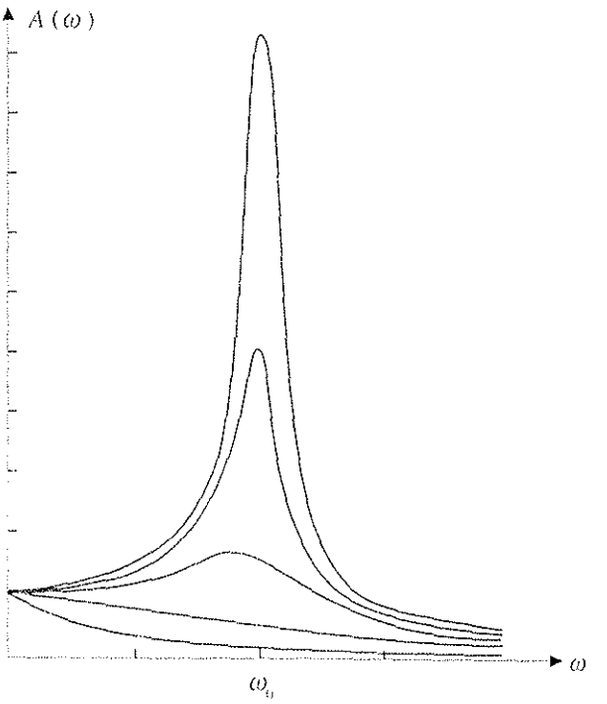


Fig. 4.16

Il massimo però esiste solo se $\omega_0^2 > 2\gamma^2$, cioè per smorzamenti deboli, altrimenti $A(\omega)$ ha un andamento monotono decrescente (prime due curve in basso nella figura 4.16). Il valore di A nel massimo è

$$A_M = A\ (\omega_M) = \frac{F_0}{2\,m\,\gamma\sqrt{\omega_0^2 - 2\,\gamma^2}} > A\ (\omega_0)$$

Se γ tende a zero ω_M tende a ω_0 e A_M tende all'infinito: con smorzamento molto piccolo il massimo dell'ampiezza si ha sostanzialmente in *condizioni di risonanza* (prime tre curve in alto della figura 4.16). Nella pratica si parla di risonanza soltanto quando il sistema è in queste condizioni.

Potenza media fornita dalla forza.

La forza $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$ che fa muovere l'oscillatore armonico con la velocità

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

fornisce al sistema la potenza istantanea

$$P(t) = F\,v = \omega A F_0 \operatorname{sen} \omega t\,(\cos \omega t \cos \phi - \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \phi)$$

$$= \omega A F_0 \cos \phi \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t - \omega A F_0 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen}^2 \omega t$$

$$= \frac{1}{2}\,\omega A F_0 \cos \phi \operatorname{sen} 2\omega t - \omega A F_0 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen}^2 \omega t\,.$$

$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{dx}{dt} = F v \left[\frac{J}{s} = W\right]$

Mediando su un periodo, il primo termine contenente sen $2\omega t$ dà zero, mentre il secondo dà, ricordando che il valor medio di $\operatorname{sen}^2 \omega t$ è 1/2 e che

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} = -\frac{2\,\gamma\,\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\gamma^2\,\omega^2}}\,,$$

$$P_m = \frac{F_0^2\,\omega^2\,\gamma}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\gamma^2\,\omega^2} = \gamma m\,\omega^2 A^2\,.$$

Vediamo che anche la potenza media è funzione di ω e si dimostra facilmente, annullando $dP_m/d\omega$, che il valore massimo è raggiunto per $\omega = \omega_0$, dove vale

$$P_{\text{RIS},m} = \frac{F_0^2}{4m\gamma} = \gamma m\,\omega_0^2 A_{\text{RIS}}^2\,. \qquad (4.23)$$

A_{RIS} è la massima ampiezza

Quindi in risonanza si ha il massimo trasferimento di potenza; in generale, per qualsiasi ω, P_m è proporzionale al quadrato della pulsazione e al quadrato dell'ampiezza ovvero al quadrato della velocità massima ovvero all'energia cinetica massima.

Per valutare la larghezza della curva di risonanza, quando esiste, cerchiamo i valori delle pulsazioni $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ tali che

$$P_m(\omega_1) = P_m(\omega_2) = \frac{1}{2} P_{\text{RIS. }m} \quad .$$

Si trova

$$\omega_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2} \quad , \quad \omega_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2}$$

e si definisce come *larghezza della risonanza* la quantità

Lunghezza della risonanza

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma$$

Più piccolo è lo smorzamento, più marcato è il fenomeno, come già rilevato. Infine si definisce *fattore di merito* della risonanza il rapporto

Fattore di merito

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \sqrt{\frac{k}{4\,m\,\gamma^2}} \quad , \qquad (4.24)$$

che è tanto maggiore quanto più stretta è la risonanza.

Alcune considerazioni sul fenomeno della risonanza.

Ripetiamo che quando si parla di risonanza si intende una situazione in cui l'ampiezza $A(\omega)$ presenta un picco molto pronunciato per $\omega = \omega_0$. Nel caso visto i parametri dell'oscillatore devono soddisfare alla condizione $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ cioè $\lambda^2 < 2mk$: lo smorzamento deve essere debole.

Oltre che di sistemi elastici (corpi solidi, fluidi, corde tese, ecc.) il fenomeno è caratteristico di vari altri sistemi come per esempio circuiti elettrici con induttanze e capacità e cavità contenenti campi elettromagnetici rapidamente variabili.

Il fenomeno della risonanza è utile per mettere in evidenza segnali deboli e a questo scopo è utilizzato nei sintonizzatori di onde elettromagnetiche. Inoltre molti strumenti musicali come pianoforte, violino, organo, funzionano in condizioni di risonanza.

Ci sono naturalmente situazioni opposte in cui si vuole evitare la risonanza, per esempio quando la risposta del sistema deve essere fedele: lo smorzamento non deve essere troppo debole, così $A(\omega)$ non varia molto con ω ed è sostanzialmente proporzionale a F_0. Non si vuole risonanza anche quando le ampie oscillazioni che essa comporta possono provocare rotture nel sistema: creano potenziali situazioni di pericolo per esempio l'azione del vento o di onde sismiche su edifici, il passaggio di veicoli su ponti, l'azione delle onde su una nave; si cerca in tali casi di fare in modo che le pulsazioni di risonanza siano molto diverse dalle possibili pulsazioni che l'ambiente circostante può imprimere al sistema.

4.9 ANALISI DI FOURIER.

L'oscillatore armonico può apparire come un sistema molto particolare che descrive un moto periodico e in effetti ci sono altri sistemi che oscillano con leggi

diverse. Si dedica però tanta attenzione all'oscillatore armonico perché sussiste il seguente *teorema di Fourier*.

Teorema di Fourier

Consideriamo una qualsiasi funzione periodica $f(t)$, con periodo T, la quale deve soddisfare all'unica condizione che l'intervallo T sia divisibile in un numero finito di tratti in cui $f(t)$ sia continua e monotona. Tale $f(t)$ è sempre esprimibile come somma di una serie di termini sinusoidali:

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \operatorname{sen} m\,\omega\, t + b_m \cos m\,\omega\, t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \operatorname{sen} (m\,\omega\, t + \phi_m) \; ; \quad (4.25)$$

i coefficienti di questo *sviluppo in serie di Fourier* si calcolano a partire dalla $f(t)$ stessa:

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} m\,\omega\, t\, dt \quad , \quad b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos m\,\omega\, t\, dt$$

$$c_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \phi_m = \frac{b_m}{a_m} \quad . \qquad (4.26)$$

Come detto, T è il periodo di $f(t)$ e $\omega = 2\pi / T$; a_0 è il valor medio di $f(t)$,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt \quad .$$

Il termine con $m = 1$ si chiama termine fondamentale o *primo armonico* e ha pulsazione ω; i termini con $m > 1$ si chiamano *armonici superiori* e hanno pulsazioni $2\omega, 3\omega, \ldots$

In sostanza lo sviluppo in serie di Fourier di $f(t)$ dice che questa si può sempre pensare come somma di sinusoidi con pulsazioni multiple di $\omega = 2\pi / T$ e ampiezze e sfasamenti calcolabili a partire da $f(t)$. Quando, data $f(t)$, si eseguono i calcoli (4.26) determinando quindi a_m e b_m, ovvero i pesi dei vari termini che compongono $f(t)$, si dice che si è eseguita l'*analisi di Fourier* o l'*analisi armonica* della funzione.

Vediamo subito l'importanza pratica del risultato: se $f(t)$ è applicata per esempio all'oscillatore armonico, per determinare come risponde il sistema prima eseguiamo lo sviluppo in serie di Fourier di $f(t)$, poi calcoliamo la risposta per ciascun termine e infine abbiamo la risposta totale come somma delle singole risposte, in base al principio di sovrapposizione. Si capisce perché nel paragrafo 4.8 abbiamo studiato proprio e soltanto una forza sinusoidale.

Il formalismo di Fourier si può estendere anche a funzioni non periodiche; invece di uno *spettro discreto* (ω, 2ω, 3ω,...) si ha uno *spettro continuo di pulsazioni* da zero all'infinito (ω diventa una variabile continua, non più legata al periodo che in questo caso non esiste):

$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \operatorname{sen} \omega t + b(\omega) \cos \omega t]\, d\omega \; ,$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t\, dt \quad . \qquad (4.27)$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t\, dt \quad .$$

I coefficienti della serie sono sostituiti dalle due funzioni $a(\omega)$ e $b(\omega)$. Perché sia valida questa estensione occorre che sia finito l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$.

Restando nell'ambito dell'esempio appena discusso, la risposta dell'oscillatore armonico a una generica $f(t)$, come potrebbe essere un impulso che dura da t_1 a t_2 ed è nullo prima e dopo, si può calcolare proprio con l'integrale di Fourier che riconduce $f(t)$ a funzioni dal comportamento noto.

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

5

5.1 SISTEMI DI PUNTI. PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE.

Nel capitolo 2 abbiamo studiato la dinamica di un punto materiale, come conseguenza dell'interazione con il resto dell'universo, cioè dell'azione di una forza o di un sistema di forze agenti su di esso.

Consideriamo ora un sistema di n punti materiali, con n maggiore di 1, interagenti tra di loro e con il resto dell'universo.

La forza $\mathbf{F}_i$ agente sull'i-esimo punto si può pensare come risultante delle *forze esterne* agenti sul punto, $\mathbf{F}_i^{(E)}$, e delle forze esercitate dagli altri $n-1$ punti, *forze interne* al sistema, $\mathbf{F}_i^{(I)}$:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)} \,. \tag{5.1}$$

Questa scomposizione è molto utile concettualmente, come si vedrà, ma non possiamo evidenziare dal moto del punto P_i separatamente i due tipi di forze: infatti il moto di P_i dipende da $\mathbf{F}_i$.

La distinzione tra forze interne ed esterne dipende da come viene definito il sistema di punti. Se, per esempio, inglobiamo nel sistema una parte del resto dell'universo, alcune forze, precedentemente considerate esterne, diventano interne. Nel sistema formato dai pianeti che ruotano attorno al sole il moto della terra è determinato dall'interazione della stessa con i singoli pianeti (forze interne) e con il sole e il resto dell'universo (forze esterne). Se invece definissimo come sistema tutti i pianeti eccettuati Marte e Giove, l'interazione della terra con questi due pianeti diventerebbe una forza esterna.

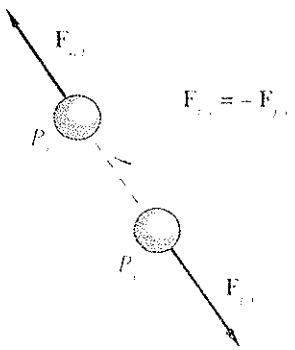


Fig. 5.1

Principio di azione e reazione

Alle forze interne si applica il *principio di azione e reazione*, indicato anche come *terza legge di Newton*. Se il punto i-esimo esercita sul punto j-esimo la forza $\mathbf{F}_{ij}$, il punto j-esimo reagisce esercitando sul punto i-esimo la forza $\mathbf{F}_{ji}$. Sperimentalmente si osserva che queste forze hanno la stessa direzione, verso opposto, stesso modulo e stessa retta di azione; esse possono essere attrattive o repulsive.

Se consideriamo due cariche elettriche puntiformi, P_1 e P_2, positive, osserviamo che la carica P_1 risente di una forza elettrica repulsiva (forza di Coulomb), pari a quella sentita dalla carica P_2. Se invece una delle due cariche, ad esempio P_1, è negativa, essa viene attratta da P_2, come P_2 da P_1 con la stessa forza.

Una possibile configurazione di forze interne ed esterne per un generico sistema di tre punti è schematizzata in figura 5.2.

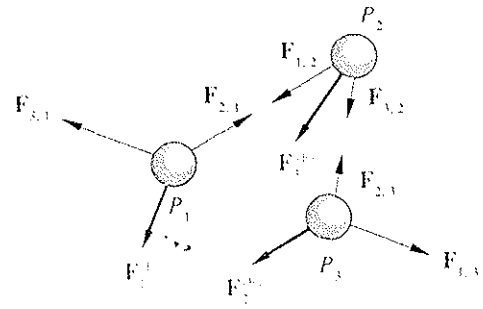


Fig. 5.2

In generale la risultante $\mathbf{F}_i^{(i)}$ delle forze interne agenti sull'i-esimo punto è diversa da zero, però la risultante di tutte le forze interne del sistema è nulla perché, in base al principio di azione e reazione, esse sono a due a due eguali ed opposte:

$$\mathbf{R}^{(i)} = \Sigma_i \mathbf{F}_i^{(i)} = \Sigma_{i,j} \mathbf{F}_{i,j} = 0$$

$$\text{con } i = 1,2,\ldots,n \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \quad , \quad i \neq j \quad . \tag{5.2}$$

Si osservi che il principio di azione e reazione si applica a qualunque interazione e quindi anche alle forze esterne: la reazione in tal caso è applicata al resto dell'universo e non al sistema, il cui moto intendiamo studiare.

In vari esempi e problemi che si incontrano durante lo studio della dinamica del punto materiale si considerano corpi in interazioni tra loro: nella determinazione del moto ogni corpo viene esaminato separatamente e per esso si scrive l'equazione del moto. Si veda a questo scopo il terzo esempio del paragrafo 2.14. Come ulteriore esempio prendiamo due corpi m_1 e m_2 in moto, l'uno rispetto all'altro, con una forza di attrito radente alla superficie di contatto. Il moto complessivo, verso destra, è dovuto alla forza esterna $\mathbf{F}$ e le due equazioni del moto sono:



Fig. 5.3

$$F - \mu_d N = m_1 a_1 \quad , \quad \mu_d N = m_2 a_2 \quad .$$

Il termine di attrito compare per un corpo come forza resistente e per l'altro come forza motrice, eguale in modulo, ma di verso opposto alla precedente: e infatti l'attrito è opposto al verso del moto relativo (rispetto a m_1, m_2 si sposta verso sinistra).

È evidente che le due forze considerate rientrano nel principio di azione e reazione e possono essere inquadrate nell'argomento delle forze interne di un sistema di punti.

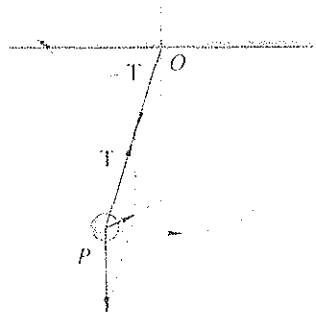


Fig. 5.4

Spieghiamo così perché è teso un filo collegato da una parte ad un punto fisso O e dall'altra ad un punto materiale P che ruota rispetto ad O: nel punto di aggancio filo-P il filo esercita su P la forza centripeta necessaria a mantenerlo su una traiettoria circolare. P reagisce con una forza eguale e contraria, esercitata sul capo del filo, che tende il filo stesso. Analogamente la reazione vincolare nel punto O, dove è fissato il filo, si spiega come reazione del sistema di aggancio, eguale e contraria alla forza esercitata da un corpo esterno, in questo caso il filo. Se al posto del filo venisse inserita una molla, osserveremmo un allungamento della stessa: la forza elastica esercitata dalla molla sul punto P ne determina l'incurvatura della traiettoria mentre la reazione del punto sulla molla ne determina l'allungamento.

Per ciascun punto P_i di massa m_i introduciamo le grandezze, misurate in un sistema di riferimento inerziale:

posizione $\mathbf{r}_i$ *velocità* $\boldsymbol{v}_i$

accelerazione $\boldsymbol{a}_i = \mathbf{F}_i / m_i$ *quantità di moto* $\mathbf{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$,

momento angolare $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$ *energia cinetica* $E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2$.

Per il sistema complessivo di punti possiamo inoltre definire le grandezze:

quantità di moto totale $\mathbf{P} = \Sigma_i \mathbf{P}_i = \Sigma_i m_i \boldsymbol{v}_i$,

momento angolare totale $\mathbf{L} = \Sigma_i \mathbf{L}_i = \Sigma_i \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$,

energia cinetica totale $E_k = \Sigma_i E_{k,i} = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2$.

I momenti angolari vanno riferiti a un polo, che può essere l'origine o un qualsiasi altro punto, fermo o movimento, nel sistema di riferimento inerziale.

5.2 CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA DI PUNTI. TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA.

Si definisce come *centro di massa di un sistema* di punti materiali il punto geometrico la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \ldots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \quad ; \qquad (5.3)$$

le componenti di $\mathbf{r}_{CM}$, ovvero le coordinate del centro di massa in un sistema di coordinate cartesiane con l'origine in O, sono

$$x_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i x_i}{\Sigma_i m_i} \quad , \quad y_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i y_i}{\Sigma_i m_i} \quad , \quad z_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i z_i}{\Sigma_i m_i} \quad .$$

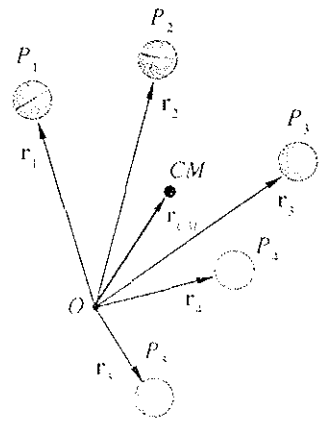


Fig. 5.5

Centro di massa

Si noti che *la posizione* del centro di massa rispetto agli n punti materiali *non dipende dal sistema di riferimento*, mentre le sue coordinate invece variano a seconda del sistema prescelto. In figura 5.6 sono mostrati un sistema di n punti e i centri di due sistemi di riferimento O e O': le posizioni dei punti P_i sono individuate rispettivamente dai raggi $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{r}'_i$ con

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{OO'} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{O'O} \quad .$$

La posizione del centro di massa rispetto ad O è data da (5.3) e rispetto ad O' da

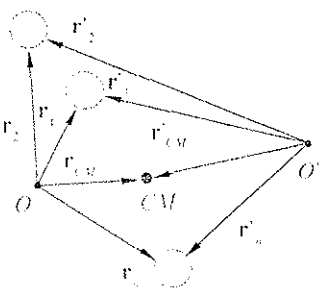


Fig. 5.6

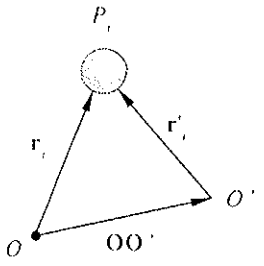


Fig. 5.7

$$\mathbf{r}'_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i \mathbf{r}'_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{O'O})}{\Sigma_i m_i}$$

$$= \frac{\Sigma_i m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma_i m_i} + \mathbf{O'O} = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{O'O} \quad .$$

Se gli n punti sono in movimento, di norma la posizione del centro di massa varia; sulla base della definizione calcoliamo la velocità del centro di massa:

$$\boldsymbol{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\Sigma_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \boldsymbol{v}_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\mathbf{P}}{M} \quad . \tag{5.4}$$

Quantità di moto totale

Abbiamo utilizzato la definizione di quantità di moto totale del sistema data nel paragrafo 5.1 e chiamato $M = \Sigma_i m_i$ la massa totale del sistema. Vediamo quindi che *$\mathbf{P}$ coincide con la quantità di moto $M\boldsymbol{v}_{CM}$ del centro di massa, considerato come un punto materiale che abbia la posizione $\mathbf{r}_{CM}$, la velocità $\boldsymbol{v}_{CM}$ e massa pari alla massa totale M del sistema.*

Analogamente possiamo ricavare l'accelerazione del centro di massa, derivando (5.4):

$$\boldsymbol{a}_{CM} = \frac{d\boldsymbol{v}_{CM}}{dt} = \frac{\Sigma_i m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \boldsymbol{a}_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \boldsymbol{a}_i}{M} \tag{5.5}$$

Se il sistema di riferimento è inerziale

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}$$

secondo (5.1). Sostituendo in (5.5)

$$M\boldsymbol{a}_{CM} = \Sigma_i m_i \boldsymbol{a}_i = \Sigma_i (\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}) = \mathbf{R}^{(E)} + \mathbf{R}^{(I)} = \mathbf{R}^{(E)} ,$$

dato che la risultante (5.2) delle forze interne è nulla. La relazione

Teorema del moto del centro di massa

$$\mathbf{R}^{(E)} = M\,\boldsymbol{a}_{CM} \tag{5.6}$$

esprime il *teorema del moto del centro di massa. Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.*

Utilizzando le (5.4) e (5.6) si ha inoltre

$$\mathbf{R}^{(E)} = M\,\boldsymbol{a}_{CM} = M\frac{d\boldsymbol{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\,\boldsymbol{v}_{CM}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \tag{5.7}$$

La risultante delle forze esterne è eguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.

Il moto del centro di massa è determinato dunque solo dalle forze esterne.

L'azione delle forze interne non può modificare lo stato di moto del centro di massa; invece il moto di ciascun punto dipende dall'azione delle forze esterne ed interne agenti su di esso.

5.3 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO.

Se il sistema di punti considerato è isolato, cioè non soggetto a forze esterne, oppure l'azione delle forze esterne è tale che la loro risultante $\mathbf{R}^{(E)}$ sia nulla, da (5.6) e (5.4) si ha:

$$\boldsymbol{a}_{CM} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{v}_{CM} = \text{costante} \quad , \quad \mathbf{P} = \text{costante} \tag{5.8}$$

Principio della conservazione della quantità di moto

Quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete. Tale risultato esprime *il principio della conservazione della quantità di moto per un sistema di punti materiali.*

La conservazione della quantità di moto può avvenire anche parzialmente, cioè essere riferita a una o due delle componenti. Per esempio se $R_x^{(E)} = 0$, allora $P_x =$ costante.

Osserviamo poi che, pur verificandosi $\mathbf{R}^{(E)} = 0$, le quantità di moto dei vari punti $m_i \boldsymbol{v}_i$ in generale variano nel tempo; resta costante solo la loro somma $\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i$.

Consideriamo ora due punti isolati, che possono quindi interagire solo tra loro:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = \text{costante} \quad . \tag{5.9}$$

Derivando rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt}\left(m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 \right) = m_1 \boldsymbol{a}_1 + m_2 \boldsymbol{a}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 \quad , \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 .$$

Il principio di conservazione della quantità di moto per un sistema isolato di due punti ha come conseguenza che le forze che si esercitano tra i due punti sono eguali in modulo e di verso opposto. Tale risultato non è completamente equivalente al principio di azione e reazione in quanto $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ non implica che le due forze abbiano la stessa retta di azione. Del resto anche la dimostrazione diretta (5.7) che segue da (5.2) e (5.6) non sfrutta il fatto che $\mathbf{F}_{i,j}$ e $\mathbf{F}_{j,i}$ hanno la stessa retta di azione.

Riprenderemo l'argomento parlando della conservazione del momento angolare di un sistema isolato di punti materiali nel paragrafo 5.6. Fatta questa precisazione, potremmo dire che c'è *equivalenza tra conservazione della quantità di moto e principio di azione e reazione, generalizzabile a sistemi più complessi.*

In realtà la conservazione della quantità di moto per un sistema isolato è un principio di portata più generale: si dimostra che esso discende dalla omogeneità dello spazio, cioè dal fatto che non esiste una origine privilegiata per i sistemi di riferimento.

Il principio di conservazione della quantità di moto permette anche di definire dinamicamente la massa, indipendentemente dalla forza peso. Consideriamo infatti due punti materiali fermi agli estremi di una molla compressa. Dato che il centro di massa è in quiete, la quantità di moto del sistema dei due punti è nulla, $\mathbf{P} = 0$. Si lascia

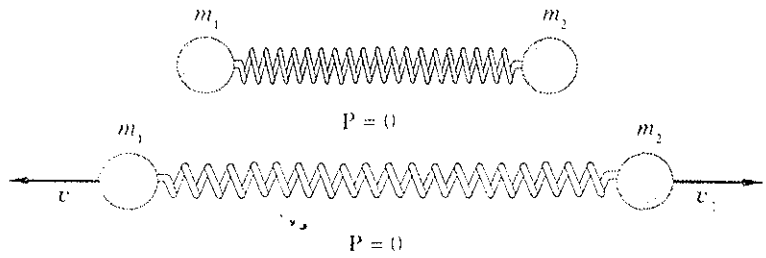


Fig. 5.8

espandere la molla: i due punti si muovono in versi opposti e poiché vengono ad agire, durante il moto, solo forze interne al sistema, resta sempre vero che $\mathbf{P} = 0$.

Da (5.9)

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{in modulo} \quad m_2 = m_1 \frac{v_1}{v_2} \quad .$$

È possibile misurare il valore di una qualsiasi massa, rispetto ad una massa campione, attraverso misure di velocità.

5.4 OSSERVAZIONI SULLE PROPRIETÀ DEL CENTRO DI MASSA. ESEMPI

La definizione introdotta di centro di massa è matematica, nel senso che non esiste il punto materiale centro di massa, ma la massa è distribuita nei singoli punti che si muovono sotto l'azione delle forze interne ed esterne. Tuttavia questo punto matematico gode di notevoli proprietà, che in parte vedremo in seguito.

Per ora è stato dimostrato che, se si assume di concentrare in esso la massa del sistema,

a) la sua quantità di moto è eguale a quella totale del sistema,
b) la sua accelerazione è determinata dalla risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

In questo senso, facendo riferimento a $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}^{(E)}$, possiamo dire che il *centro di massa rappresenta il moto globale o di insieme dei punti materiali.*

Il fatto che ad un certo istante $\boldsymbol{v}_{CM}$ abbia un determinato valore significa solamente che il sistema *in media* si sta spostando in quella data direzione, anche se nessuna delle singole $\boldsymbol{v}_i$ coincide con $\boldsymbol{v}_{CM}$. Analogamente, il fatto che $\boldsymbol{a}_{CM}$ abbia un certo valore a causa dell'azione di $\mathbf{R}^{(E)}$ indica che *nel suo complesso* il sistema sta accelerando in quella data direzione.

$R^{(E)} = M a_{CM}$

$v_{CM} = \frac{P}{M}$

In effetti $\mathbf{r}_{CM}$, $\boldsymbol{v}_{CM}$ e $\boldsymbol{a}_{CM}$ sono le *medie pesate* sulle masse dei raggi vettori, velocità, accelerazioni dei singoli punti e pertanto forniscono *informazioni di proprietà medie* e non sul moto dei singoli punti.

Notiamo infine che la legge del moto (5.6) e la quantità di moto (5.4) del centro di massa coincidono con quelle del punto materiale ideale, di cui il centro di massa costituisce l'esempio migliore, senza approssimazioni sulle dimensioni o sul tipo di moto.

ESEMPIO 5.1

Determinare la posizione del centro di massa di un sistema di due punti materiali, posti a distanza d tra loro, di massa m_1 e m_2.

Soluzione
Il problema è unidimensionale e in base a (5.3) si ha

$$(m_1 + m_2)\, x_{CM} = m_1 x_1 + m_2 x_2 .$$

Dato che $x_2 - x_1 = d$, si ricava

$$x_{CM} = x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, d$$

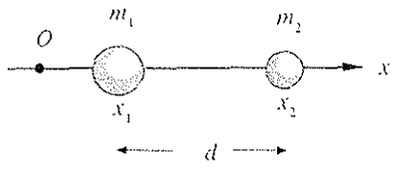


Fig. 5.9

ovvero la posizione del centro di massa rispetto alla posizione di m_1 è

$$x_{CM} - x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, d$$

Indicando con a e b la distanza del centro di massa dai due punti, con $a + b = d$, si ha:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, d \quad , \quad b = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, d \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1} \quad .$$



Fig. 5.10

ESEMPIO 5.2

Determinare la posizione del centro di massa di un sistema di tre punti di eguale massa m, posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato a .

Soluzione
Assumiamo gli assi di riferimento come in figura 5.11. Il centro di massa sta nel piano x, y individuato dai tre punti ($z_1 = z_2 = z_3 = 0$, quindi $z_{CM} = 0$). Le sue coordinate sono

$$x_{CM} = \frac{m \cdot 0 + m\, x_2 + m\, x_3}{3\, m} = \frac{m\, \frac{a}{2} + m\, a}{3\, m} = \frac{a}{2}$$

$$y_{CM} = \frac{m \cdot 0 + m\, y_2 + m \cdot 0}{3\, m} = \frac{y_2}{3} = \frac{h}{3}$$

Il centro di massa sta pertanto sull'altezza del triangolo, a distanza $h / 3$ dalla base. Il risultato non dipende dalla scelta degli assi.
Si poteva procedere diversamente, determinando prima la posizione del centro di massa dei punti P_1 e P_2, che cade nel punto di mezzo della base P_1P_2; in tale punto si assume esservi la massa $2m$. Successivamente si calcola

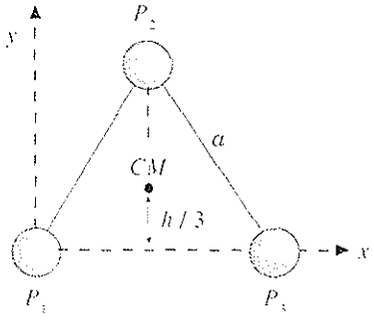


Fig. 5.11

la posizione del centro di massa di P_3 e del centro di massa di P_1 e P_2, utilizzando il risultato dell'esempio 5.1.
Questa procedura è permessa dalla definizione (5.3) di $\mathbf{r}_{CM}$ come sommatoria: il calcolo di $\mathbf{r}_{CM}$ si può effettuare associando gruppi di punti a piacere, determinando i relativi centri di massa, considerando questi come punti materiali e calcolando infine il centro di massa di tali centri di massa parziali.

ESEMPIO 5.3

Calcolare la posizione e la velocità del centro di massa di due punti di eguale massa m, in moto con la stessa velocità $\boldsymbol{v}$ lungo l'asse x.

Soluzione

$$x_{CM} = \frac{m x_1 + m x_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ,$$

$$v_{CM} = \frac{m v + m v}{2m} = v \quad .$$

Il centro di massa si trova sempre nella posizione di mezzo tra i due punti in moto e si muove con la stessa velocità $\boldsymbol{v}$.

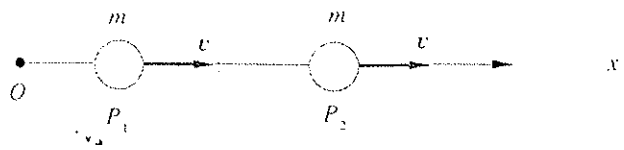


Fig. 5.12

Se invece P_2 fosse fermo, la posizione del centro di massa sarebbe sempre a metà del segmento $P_1 P_2$, ma la velocità sarebbe $\boldsymbol{v}/2$.
Infine, se P_2 avesse velocità $-\boldsymbol{v}$, il centro di massa sarebbe fermo al centro del segmento $P_1 P_2$.

ESEMPIO 5.4

Si determini il moto del centro di massa di un insieme di punti sottoposti solo alla forza peso.

Soluzione
Dato che $\boldsymbol{a}_i = \mathbf{g}$, abbiamo

$$M \boldsymbol{a}_{CM} = \Sigma_i m_i \boldsymbol{a}_i = M \mathbf{g} \quad ,$$

oppure

$$M \boldsymbol{a}_{CM} = \mathbf{R}^{(E)} = \Sigma_i m_i \mathbf{g} = M \mathbf{g} \quad .$$

Risulta dunque $\boldsymbol{a}_{CM} = \mathbf{g}$: il centro di massa si muove con accelerazione $\mathbf{g}$.
Se tra i punti esistono anche forze interne (ad esempio i punti materiali sono elettricamente carichi), per i singoli punti $\boldsymbol{a}_i \neq \mathbf{g}$, dato che essi risentono dell'azione delle forze interne. Il centro di massa si muove però sempre con accelerazione $\mathbf{g}$, descrivendo in generale una traiettoria parabolica, dato che risente solo dell'azione della risultante delle forze esterne $\mathbf{R}^{(E)} = M \mathbf{g}$.
Un'altra situazione che rientra in questo caso è quella relativa a due punti materiali connessi da una molla compressa. Si lascia il sistema libero di cadere, con una certa velocità iniziale, permettendo contemporaneamente alla molla di estendersi. La traiettoria dei singoli punti è assai complicata, a causa dell'oscillazione dovuta alla molla, ma il centro di massa descrive semplicemente una parabola, con accelerazione $\mathbf{g}$, dato che le forze elastiche sono forze interne.

MOMENTO ANGOLARE → momento del vettore quantità di moto

5.5 TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE.

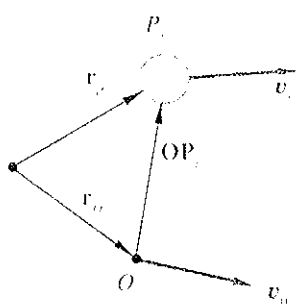


Fig. 5.13

Determiniamo ora a cosa siano dovute le variazioni del momento angolare totale di un sistema di punti materiali, ricordando quanto già studiato relativamente al momento angolare di un punto materiale nel paragrafo 2.22.

Facciamo a questo proposito una premessa: la (2.22) è stata dimostrata nell'ipotesi che il polo fosse un punto fisso in un sistema di riferimento inerziale. Lasciamo ora cadere questa ipotesi, supponendo che il polo O possieda una velocità $\boldsymbol{v}_O$ nel sistema di riferimento inerziale. Il raggio vettore di P_i rispetto ad O è $\mathbf{OP}_i$ e vale la relazione

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_O + \mathbf{OP}_i \quad .$$

(2.22) → $\frac{dL}{dt} = M = r \times F$

Derivando rispetto al tempo

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} + \frac{d\mathbf{OP}_i}{dt} = \boldsymbol{v}_O + \frac{d\mathbf{OP}_i}{dt}$$

ovvero

$$\frac{d\mathbf{OP}_i}{dt} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_O \quad . \tag{5.10}$$

La derivata rispetto al tempo di un raggio vettore che ha tutti e due gli estremi mobili è eguale alla differenza delle velocità dei due estremi. Se O fosse fisso sarebbe $\frac{d\mathbf{OP}_i}{dt} = \boldsymbol{v}_i$, eguale alla velocità rispetto all'origine.

Consideriamo dunque, con riferimento a un generico polo, il momento angolare totale di un sistema di punti materiali; detto $\mathbf{r}_i$ il raggio vettore $\mathbf{OP}_i$ si ha

$$\mathbf{L} = \Sigma_i \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \quad .$$

$L = r \times p = r \times mv$ nel caso del singolo punto materiale

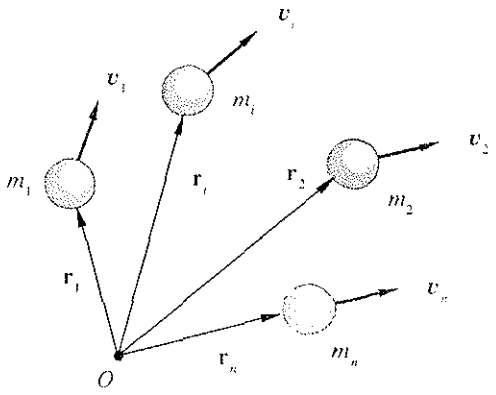


Fig. 5.14

La sua derivata rispetto al tempo è

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \Sigma_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \boldsymbol{v}_i + \Sigma_i \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} \quad .$$

Per $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ usiamo (5.10), potendo il polo essere mobile, per cui $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_O$; inoltre, essendo il sistema di riferimento inerziale,

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = m_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)} \quad .$$

Ne segue

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \Sigma_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_O) \times m_i \boldsymbol{v}_i + \Sigma_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)})$$

$$= \Sigma_i \boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i - \Sigma_i \boldsymbol{v}_O \times m_i \boldsymbol{v}_i + \Sigma_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} + \Sigma_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(I)}$$

$$= -\boldsymbol{v}_O \times M \boldsymbol{v}_{CM} + \mathbf{M}^{(E)} + \mathbf{M}^{(I)} .$$

Infatti $\Sigma_i \boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$ è nulla perché ogni addendo è un prodotto vettoriale di vettori paralleli; $\boldsymbol{v}_O$ è stato portato fuori dalla sommatoria perché indipendente dall'indice i; infine si è usata (5.4).

$$\mathbf{M}^{(E)} = \Sigma_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)}$$

rappresenta il momento totale delle forze esterne rispetto al polo O e

$$\mathbf{M}^{(I)} = \Sigma_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(I)}$$

quello delle forze interne rispetto allo stesso polo. Con riferimento alla figura 5.15 dimostriamo che $\mathbf{M}^{(I)} = 0$. La somma dei momenti delle due forze interne $\mathbf{F}_{i,j}$ e $\mathbf{F}_{j,i}$ rispetto al polo O è

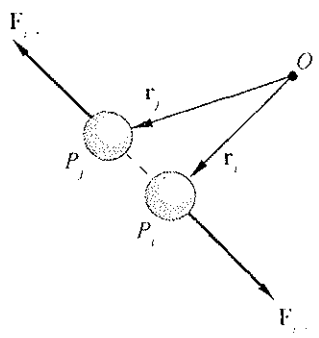


Fig. 5.15

$$\mathbf{M}_{i,j}^{(I)} = \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j,i} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_{i,j} = \mathbf{r}_{i,j} \times \mathbf{F}_{i,j} .$$

Il vettore $\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j$ è parallelo a $\mathbf{F}_{i,j}$ e quindi $\mathbf{M}_{i,j}^{(I)} = 0$. $\mathbf{M}^{(I)}$ è costituito dalla somma di tutti i possibili termini $\mathbf{M}_{i,j}^{(I)}$ e perciò risulta identicamente nullo (qualunque sia la scelta del polo).

In conclusione

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)} - \boldsymbol{v}_O \times M \boldsymbol{v}_{CM}$$

e se il termine $-\boldsymbol{v}_O \times M \boldsymbol{v}_{CM}$ risulta nullo si ha

Teorema del momento angolare

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)} . \qquad (5.11)$$

Il termine $-\boldsymbol{v}_O \times M \boldsymbol{v}_{CM}$ è nullo in questi casi:

a) il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale, $\boldsymbol{v}_O = 0$;
b) il centro di massa è in quiete nel sistema di riferimento inerziale, $\boldsymbol{v}_{CM} = 0$;
c) il polo O coincide con il centro di massa, per cui $\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_{CM}$ e $\boldsymbol{v}_O \times \boldsymbol{v}_{CM} = 0$;
d) $\boldsymbol{v}_O$ è parallelo a $\boldsymbol{v}_{CM}$.

Il *teorema del momento angolare* (5.11) *indica dunque che, se il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale o coincide con il centro di massa* (anche se quest'ultimo non è in generale un punto fisso), *l'evoluzione nel tempo del momento angolare del sistema di punti è determinata dal momento delle forze esterne rispetto ad O, mentre le forze interne non portano contributi.*

Sottolineamo che in (5.11) le quantità di moto sono misurate nel sistema di riferimento inerziale ($\boldsymbol{v}_i$ è la velocità del punto P_i vista dall'origine), i raggi vettori partono dal polo scelto e le forze sono quelle vere.

Si noti infine che il risultato $\mathbf{M}^{(I)} = 0$ si ottiene solo perché si assume che le forze interne siano un insieme di coppie di forze eguali in modulo e di verso opposto, con la stessa retta di azione, ossia coppie di forze con braccio nullo (vedi paragrafo 5.15). Vedremo nel paragrafo seguente che questa assunzione ha una giustificazione sperimentale.

5.6 CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE.

In una situazione in cui valga (5.11), cioè sia $\boldsymbol{v}_O \times M\,\boldsymbol{v}_{CM} = 0$, *se il momento delle forze esterne è nullo il momento angolare resta costante.* La condizione $\mathbf{M}^{(E)} = 0$ si può verificare in due casi:

a) non agiscono forze esterne, il sistema è isolato: allora $\mathbf{L}$ si conserva rispetto a qualsiasi polo per il quale $\boldsymbol{v}_O \times M\,\boldsymbol{v}_{CM} = 0$; in questa situazione, in cui è anche $\mathbf{R}^{(E)} = 0$, si ha pure la conservazione della quantità di moto, $\mathbf{P}$ = costante (si osservi che $\mathbf{R}^{(E)} = 0$ non ha come conseguenza, in generale, $\mathbf{M}^{(E)} = 0$);

b) il momento delle forze esterne è nullo rispetto ad un determinato polo, ma non rispetto a qualsiasi polo, pure in presenza di forze esterne; pertanto si ha conservazione del momento angolare solo se calcolato rispetto a quel polo.

Questa seconda situazione fisica sottolinea l'importanza della scelta del polo per poter risolvere determinati problemi.

L'osservazione sperimentale che, per un sistema isolato, si conserva il momento angolare (rispetto a un polo per cui $\boldsymbol{v}_O \times M\,\boldsymbol{v}_{CM} = 0$) conferma la validità di (5.11) e quindi che sia $\mathbf{M}^{(I)} = 0$. Infatti se fosse $\mathbf{M}^{(I)} \neq 0$, anche in un sistema isolato il momento angolare potrebbe non conservarsi. Di conseguenza, è corretto assumere che le forze interne a due a due abbiano la stessa retta di azione, costituiscono cioè coppie di forze con braccio nullo.

La conservazione del momento angolare di un sistema di punti materiali isolato è una proprietà molto generale: si dimostra che discende dalla caratteristica dello *spazio* di essere *isotropo*, cioè dal fatto che non esiste una direzione privilegiata.

5.7 SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA.

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti materiali è molto utile considerare il *sistema di riferimento del centro di massa*. Esso ha le seguenti caratteristiche:

a) l'origine è nel centro di massa;

b) gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema inerziale e, in particolare, possono essere assunti paralleli a questi;

c) si tratta in generale di un sistema non inerziale: in base a b il moto del sistema del centro di massa è traslatorio, ma non necessariamente rettilineo e uniforme; ciò avviene solo se $\mathbf{R}^{(E)} = 0$ così che $\boldsymbol{a}_{CM} = 0$.

Indichiamo con un apice le grandezze relative al sistema del centro di massa; dalla figura 5.16 si vede che, per il punto P_i ,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM} \quad . \tag{5.12}$$

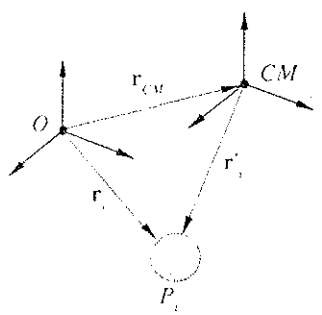


Fig. 5.16

Dal teorema delle velocità relative (3.4) con $\omega = 0$ (moto di trascinamento traslatorio) si ha:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}_{CM} \quad . \tag{5.13}$$

Avendo assunto il centro di massa come riferimento, evidentemente la posizione e la velocità del centro di massa rispetto a se stesso sono nulle:

$$\mathbf{r}'_{CM} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{v}'_{CM} = 0$$

Da (5.3) e (5.4), valide in qualsiasi sistema, segue

$$\Sigma_i m_i \mathbf{r}'_i = 0 \quad , \quad \Sigma_i m_i \boldsymbol{v}'_i = 0 \quad . \tag{5.14}$$

Quantità di moto totale rispetto al centro di massa

Pertanto *la quantità di moto totale del sistema*, $\mathbf{P}' = \Sigma_i m_i \boldsymbol{v}'_i$, *risulta nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa* (i singoli termini $m_i \boldsymbol{v}'_i$ sono però in generale diversi da zero).

Essendo il sistema del centro di massa non inerziale, sui singoli punti sembra agire anche la forza di inerzia $-m_i \boldsymbol{a}_i = -m_i \boldsymbol{a}_{CM}$, in quanto l'accelerazione di trascinamento è pari a quella dell'origine, cioè del centro di massa. Per ogni punto abbiamo quindi da (3.10)

$$\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)} - m_i \boldsymbol{a}_{CM} = m_i \boldsymbol{a}'_i$$

e sommando su tutti i punti

$$\mathbf{R}^{(E)} - (\Sigma_i m_i)\boldsymbol{a}_{CM} = \mathbf{R}^{(E)} - M\,\boldsymbol{a}_{CM} = \Sigma_i m_i \boldsymbol{a}'_i = 0 \quad ,$$

in base a (5.6). Quindi alle (5.14) va aggiunta la proprietà $\Sigma_i m_i \boldsymbol{a}'_i = 0$, che si può ricavare direttamente da (5.5) essendo per definizione $\boldsymbol{a}'_{CM} = 0$.

Il momento risultante delle forze applicate nei singoli punti, calcolato rispetto al centro di massa, vale

$$\Sigma_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} + \Sigma_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(I)} - \Sigma_i \mathbf{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}_{CM} = \mathbf{M}'^{(E)} - (\Sigma_i m_i \mathbf{r}'_i) \times \boldsymbol{a}_{CM} = \mathbf{M}'^{(E)},$$

avendo utilizzato (5.14). *Il momento risultante rispetto al centro di massa è eguale al solo momento delle forze esterne vere, senza contributi dalle forze di inerzia.*

Momento risultante rispetto al centro di massa

Sappiamo che (5.11) è vera anche se si assume, in un sistema di riferimento inerziale, il centro di massa come polo (caso c del paragrafo 5.5). Il momento delle forze esterne è

$$\mathbf{M}'^{(E)} = \Sigma_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{M}'^{(E)} \quad .$$

Il momento angolare rispetto al centro di massa, calcolato nel sistema di riferimento inerziale, è

$$\mathbf{L} = \Sigma_i \mathbf{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \Sigma_i \mathbf{r}'_i \times m_i \,(\boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}_{CM}) =$$

$$= \Sigma_i \mathbf{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i + \Sigma_i \mathbf{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}_{CM} =$$

$$= \mathbf{L}' + (\Sigma_i m_i \mathbf{r}'_i) \times \boldsymbol{v}_{CM} = \mathbf{L}' \quad ,$$

dove abbiamo sfruttato (5.13) e (5.14). Pertanto il momento angolare rispetto al centro di massa ha lo stesso valore sia nel sistema di riferimento inerziale che nel sistema di riferimento del centro di massa. Di conseguenza

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}'^{(E)} \ . \qquad (5.15)$$

il teorema del momento angolare vale anche nel sistema (non inerziale) del centro di massa purché come polo si assuma l'origine, cioè il centro di massa; al calcolo del momento contribuiscono solo le forze vere (esterne).

5.8 TEOREMI DI KÖNIG.

I *teoremi di König* stabiliscono le relazioni tra i momenti angolari e le energie cinetiche di un sistema di punti materiali, valutati in un sistema di riferimento inerziale ($\mathbf{L}$, E_k) e nel sistema di riferimento del centro di massa ($\mathbf{L}'$, E_k').

Teorema di König per il momento angolare

Assumiamo per semplicità come polo l'origine del sistema inerziale; il momento angolare è dato da

$$\mathbf{L} = \Sigma_i \, \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \ .$$

Riscriviamo questa relazione utilizzando (5.12) e (5.13): $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i' + \mathbf{r}_{CM}$, $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{v}_{CM}$

$$\mathbf{L} = \Sigma_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM}) \times m_i (\boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}_{CM}) =$$

$$= \Sigma_i \, \mathbf{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i + \Sigma_i \, \mathbf{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}_{CM} + \Sigma_i \, \mathbf{r}_{CM} \times m_i \boldsymbol{v}'_i + \Sigma_i \, \mathbf{r}_{CM} \times m_i \boldsymbol{v}_{CM} \ .$$

Esaminiamo in dettaglio le quattro sommatorie, ricordando le (5.14).

Il primo termine, $\mathbf{L}' = \Sigma_i \, \mathbf{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i$, rappresenta, come già evidenziato, il momento angolare rispetto al centro di massa.

Il secondo e terzo termine, pari a $(\Sigma_i \, m_i \, \mathbf{r}'_i) \times \boldsymbol{v}_{CM}$ e $\mathbf{r}_{CM} \times (\Sigma_i \, m_i \boldsymbol{v}'_i)$ sono entrambi nulli.

L'ultimo termine, $\mathbf{r}_{CM} \times M \, \boldsymbol{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$, rappresenta il momento angolare, rispetto all'origine del sistema inerziale, di un punto materiale che ha una massa pari a quella totale del sistema, coincide con il centro di massa e ha la velocità dello stesso. Pertanto esso ha il significato di momento angolare del centro di massa.

In conclusione abbiamo il *primo teorema di König*:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times M \, \boldsymbol{v}_{CM} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_{CM} \ . \qquad (5.16)$$

Primo teorema di König

Il momento angolare del sistema si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa, $\mathbf{L}_{CM}$, e di quello del sistema rispetto al centro di massa.

Osserviamo che se $\mathbf{P} = 0$, cioè il sistema è complessivamente fermo, ma sono in moto i vari punti che lo compongono, è $\mathbf{L} \neq 0$ come conseguenza di un momento angolare $\mathbf{L}'$ rispetto al centro di massa. Viceversa $\mathbf{L} = 0$ non comporta $\mathbf{P} = 0$.

Se assumiamo come polo il centro di massa ritroviamo $\mathbf{L} = \mathbf{L}'$ (paragrafo 5.7).

Teorema di König per l'energia cinetica

L'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento inerziale è

$$E_k = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad .$$

Utilizzando (5.13) otteniamo

$$E_k = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}_{CM})^2 = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v'^2_i + \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v^2_{CM} + \Sigma_i m_i \boldsymbol{v}'_i \cdot \boldsymbol{v}_{CM} \quad .$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa, ossia l'energia cinetica rispetto al centro di massa, E'_k. Il secondo termine è pari a $\frac{1}{2} M v^2_{CM}$, energia cinetica di un punto materiale che possiede tutta la massa del sistema e si muove con la velocità del centro di massa, detta brevemente energia del centro di massa. L'ultimo termine è nullo in base a (5.14) perché è eguale a $(\Sigma_i m_i \boldsymbol{v}'_i) \cdot \boldsymbol{v}_{CM} = \mathbf{P}' \cdot \boldsymbol{v}_{CM}$. Pertanto

Secondo teorema di König

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} M v^2_{CM} = E'_k + E_{k,CM} \quad , \tag{5.17}$$

relazione nota come *secondo teorema di König*. *L'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa e di quella del sistema rispetto al centro di massa.*

Anche se il centro di massa è fermo, $\boldsymbol{v}_{CM} = 0$, l'energia cinetica non è necessariamente nulla: il movimento dei singoli punti rispetto al centro di massa rende $E'_k \neq 0$ e quindi $E_k \neq 0$.

Se però $E_k = 0$, necessariamente devono essere nulle E'_k e $E_{k,CM}$, dato che l'energia cinetica non può essere negativa.

È evidente l'analogia strutturale e di significato tra i due teoremi di König che, come apparirà chiaramente in seguito, sono di fondamentale importanza nello studio della dinamica di un corpo rigido.

5.9 ULTERIORI OSSERVAZIONI SULLE PROPRIETÀ DEL CENTRO DI MASSA. ESEMPI

Le equazioni (5.6) e (5.11) costituiscono *le leggi fondamentali della dinamica dei sistemi di punti materiali*; i teoremi di König mettono invece in evidenza l'importanza del moto rispetto al centro di massa.

Vediamo che per quanto riguarda il momento angolare e l'energia cinetica il centro di massa non riassume le proprietà del sistema, a differenza di quanto discusso nel paragrafo 5.4 riguardo a $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}^{(E)}$. Infatti non è sufficiente conoscere il moto del centro di massa, cioè appunto $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}^{(E)}$, per ricavare $\mathbf{L}$ e E_k, ma bisogna tener conto anche del moto rispetto al centro di massa.

D'altra parte la definizione di centro di massa permette una scomposizione semplice e significativa del momento angolare e dell'energia cinetica in termini del moto complessivo o medio del sistema, rappresentato dal moto del centro di massa, e del moto del sistema rispetto al centro di massa stesso.

ESEMPIO 5.5

Si determinino i valori di $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$, $\mathbf{L}_{CM}$ e di E_k, E_k', $E_{k,CM}$ nei quattro casi rappresentati nelle figure. O indica l'origine del sistema di riferimento inerziale e coincide con il polo di riferimento di $\mathbf{L}$ e $\mathbf{L}_{CM}$.

Soluzione

Caso A

Il centro di massa coincide col polo, la sua velocità è nulla; si ha

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' = \mathbf{L}_{CM} = 0.$$

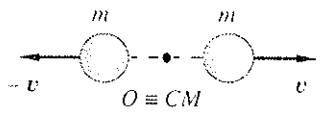


Fig. 5.17

Per l'energia cinetica $E_{k,CM} = 0$, mentre $E_k = E_k' = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 = m v^2$. Notiamo un fatto, che è generale: $\mathbf{L}' = 0$ non implica $E_k' = 0$; infatti il primo dipende da $\boldsymbol{v}'_i$, la seconda da $v_i'^2$. In altre parole, nel moto relativo al centro di massa non c'è relazione tra $\mathbf{L}'$ e E_k', a meno che il sistema non sia un corpo rigido, come vedremo.

Caso B

Di nuovo il centro di massa coincide con il polo e $\boldsymbol{v}_{CM} = 0$. Si ha:

$$\mathbf{L}_{CM} = 0 \quad , \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}' = 2m\, \mathbf{r} \times \boldsymbol{v}.$$

In modulo $L = m\, d\, v$, se d è la distanza tra le traiettorie rettilinee dei due punti. Per le energie cinetiche si hanno gli stessi risultati del caso A (e si vede così la differenza di comportamento tra grandezze vettoriali e grandezze scalari).

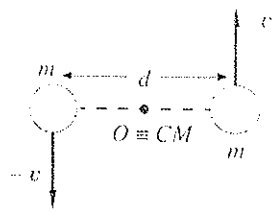


Fig. 5.18

Caso C

Posizione e velocità del centro di massa sono date da

$$2m\, \mathbf{r}_{CM} = m\, \mathbf{r}_1 + m\, \mathbf{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{CM} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$$

$$2m\, \boldsymbol{v}_{CM} = m\, \boldsymbol{v} + m\, \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_{CM} = \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = 2m\, \boldsymbol{v}_{CM}$$



Fig. 5.19

Si ha $\mathbf{L}_{CM} = 0$, dato che $\mathbf{R}_{CM}$ e $\boldsymbol{v}_{CM}$ sono paralleli. $\mathbf{L} = 0$ perché $\mathbf{r}_i$ è parallelo a $\boldsymbol{v}_i$, $\mathbf{L}' = 0$ dato che $v'_i = 0$. Invece $E_k = E_{k,CM} = m v^2$ mentre $E_k' = 0$.

Caso D

È identico al caso C, solo la posizione del polo è diversa. La velocità del centro di massa è ancora $\boldsymbol{v}$ e la sua posizione, relativamente ai due punti, è la stessa. $\mathbf{L}' = 0$ perché $\boldsymbol{v}'_i = 0$, invece $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times 2m\, \boldsymbol{v}_{CM}$: in modulo $L = 2m\, h\, v$. Per le energie cinetiche si hanno gli stessi risultati del caso C. Dal confronto tra i casi C e D si nota la dipendenza di $\mathbf{L}$ dalla scelta del polo.

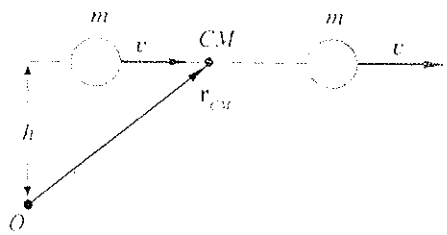


Fig. 5.20

$L = r \wedge mv$

$L = r \wedge p \quad p = mv$

5.10 IL TEOREMA DELL'ENERGIA.

Calcoliamo il lavoro associato al moto di un sistema di punti materiali. Come già visto nel caso di un solo punto, il lavoro per uno spostamento $d\,\mathbf{r}_i$, del punto P_i è

$$dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\,\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\,\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\,\mathbf{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)} \,.$$

Sommando su tutti i punti e integrando lungo le traiettorie Γ_i percorse si ottiene il lavoro totale

$$W = W^{(E)} + W^{(I)} \,,$$

somma del lavoro delle forze esterne e delle forze interne. Questa volta il contributo delle forze interne non scompare: infatti $dW^{(I)}$ è formato da tanti termini del tipo

$$\mathbf{F}_{i,j} \cdot d\,\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{j,i} \cdot d\,\mathbf{r}_j = \mathbf{F}_{i,j} \cdot (d\,\mathbf{r}_j - d\,\mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_{i,j} \cdot d\,(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_{i,j} \cdot d\,\mathbf{r}_{i,j}$$

in generale non nulli e con somma diversa da zero. La struttura di $dW^{(I)}$ implica che *al lavoro delle forze interne è legato un cambiamento delle distanze mutue tra i vari punti*. Se queste non potessero variare, come avviene per esempio se il corpo è rigido (capitolo 6), sarebbe $W^{(I)} = 0$.

Ritornando all'espressione $dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\,\mathbf{r}_i$, sappiamo dal paragrafo 2.15 che essa è eguale a $m_i\, v_i\, dv_i$; sommando su tutti i punti e integrando

$$W = \Sigma_i \, \frac{1}{2}\, m_i\, v_{i,B}^2 - \Sigma_i \, \frac{1}{2}\, m_i\, v_{i,A}^2 = E_{k,B} - E_{k,A}$$

dove $v_{i,A}$ e $v_{i,B}$ sono i moduli delle velocità dell'i-esimo punto nella configurazione iniziale A e nella configurazione finale B, $E_{k,A}$ e $E_{k,B}$ l'energia cinetica del sistema rispettivamente nella configurazione iniziale A e nella finale B.

Mettendo insieme i risultati ottenuti,

Teorema dell'energia

$$W^{(E)} + W^{(I)} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k \,, \qquad (5.18)$$

che esprime il *teorema dell'energia per i sistemi di punti materiali*.

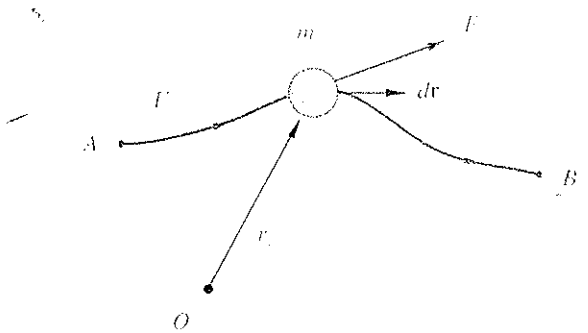


Fig. 5.21

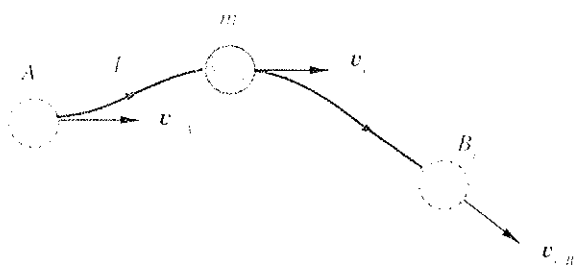


Fig. 5.22

Se le forze interne sono conservative, $W^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}$; analogamente, se lo sono quelle esterne, $W^{(E)} = -\Delta E_p^{(E)}$. Quando tutte le forze agenti, sia interne che esterne, sono conservative, abbiamo la *conservazione dell'energia meccanica del sistema*:

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B} \Rightarrow (E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B = \text{costante} \quad (5.19)$$

Conservazione dell'energia meccanica

L'energia E_p è la somma di tutte le energie potenziali in gioco, associate alle forze interne ed esterne agenti sul sistema.

Se non tutte le forze sono conservative abbiamo invece

$$(E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = W_{\text{diss}} \quad ; \quad (5.20)$$

Lavoro delle forze dissipative

in questa formula il lavoro delle forze conservative è espresso da $E_{p,A} - E_{p,B}$ e quello delle forze non conservative da W_{diss}.

È essenziale osservare che anche in assenza di forze esterne (sistema isolato) non è detto che l'energia meccanica si conservi: ciò dipende dalle caratteristiche delle forze interne.

Nei fenomeni macroscopici la conservazione dell'energia meccanica è un caso limite, praticamente impossibile da realizzare per la presenza di forze di attrito: nella (5.20) è sempre $W_{\text{diss}} < 0$. Come verrà precisato in termodinamica le forze di attrito provocano trasformazioni dell'energia in altre forme: pertanto, se si includono tutte le possibili forme, l'energia complessiva si conserva. Tale risultato sarà espresso dal *primo principio della termodinamica*.

In realtà, tutte le interazioni fondamentali sono conservative e questo fatto si manifesta con la conservazione dell'energia nei fenomeni microscopici, senza eccezioni: la conservazione dell'energia è una legge fondamentale e, come si può dimostrare, essa discende dal fatto che *non esiste un'origine privilegiata per la misura del tempo*.

Riassumendo le conclusioni raggiunte per le leggi di conservazione *in un sistema di punti isolato, si possono sempre applicare la conservazione della quantità di moto totale e del momento angolare totale, mentre la conservazione dell'energia meccanica non va imposta a priori, ma solo se si ha la certezza che le forze interne siano conservative*.

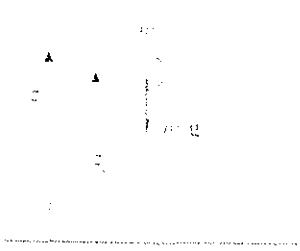
ESEMPIO 5.6

Calcolare l'energia potenziale della forza peso per un sistema di punti materiali.

Soluzione

L'energia potenziale di ciascun punto è $E_{p,i} = m_i g z_i$, avendo scelto come riferimento per l'energia potenziale il piano orizzontale x, y e orientato l'asse z verso l'alto. Per l'insieme dei punti

$$E_p = \Sigma_i E_{p,i} = \Sigma_i m_i g z_i = g \Sigma_i m_i z_i = M g z_{CM} \quad , \quad (5.21)$$



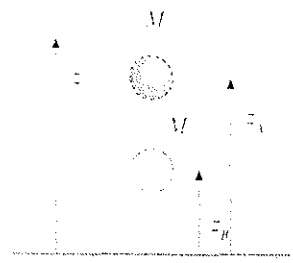


Fig. 5.23

secondo (5.3) proiettata sull'asse z. L'energia potenziale del sistema è eguale a quella del centro di massa, cioè a quella di un punto materiale che occupa la posizione del CM e possiede tutte la massa del sistema.
Pertanto il lavoro della forza peso è semplicemente

$$W_{peso} = -\Delta E_p = M g z_A - M g z_B \ .$$

calcolabile dallo spostamento verticale del centro di massa da A a B. È questa l'espressione che va usata in (5.18), mentre (5.21) va usata in (5.19) e (5.20), per quanto riguarda la forza peso.

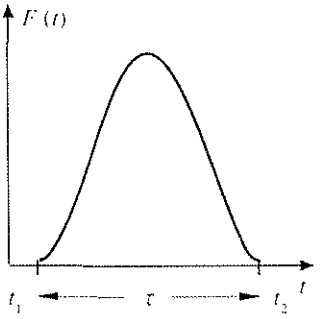


Fig. 5.24

5.11 URTI TRA DUE PUNTI MATERIALI.

Quando due punti materiali vengono a contatto e interagiscono per un intervallo di tempo trascurabile rispetto al tempo di osservazione del sistema, si parla di *urto tra i due punti*. Il fenomeno è di così breve durata da giustificare l'assunzione che durante l'interazione i punti non si muovano in modo apprezzabile.

Nell'urto si possono sviluppare forze molto intense che modificano la quantità di moto di ciascun punto. Queste forze che, come avviene in un urto, agiscono per un tempo breve rispetto al tempo di osservazione, sono chiamate *forze impulsive*. Un esempio è riportato in figura 5.24, dove è rappresentato il modulo della forza in funzione del tempo. L'intervallo di tempo durante il quale agisce la forza è $\tau = t_2 - t_1$.

Osserviamo che le forze che si manifestano durante il processo d'urto sono forze interne al sistema costituito dai due punti materiali interagenti. *In assenza di forze esterne si verifica pertanto durante l'urto la conservazione della quantità di moto totale.*

Se indichiamo con $\boldsymbol{v}_{1,in}$, $\boldsymbol{v}_{2,in}$ le velocità nell'istante precedente all'urto dei due punti materiali, di masse m_1 e m_2, e con $\boldsymbol{v}_{1,fin}$, $\boldsymbol{v}_{2,fin}$ le corrispondenti velocità nell'istante successivo all'urto, la conservazione di $\mathbf{P}$ si scrive

$$\mathbf{P}_{in} = m_1 \boldsymbol{v}_{1,in} + m_2 \boldsymbol{v}_{2,in} = m_1 \boldsymbol{v}_{1,fin} + m_2 \boldsymbol{v}_{2,fin} = \mathbf{P}_{fin} \ . \qquad (5.22)$$

La quantità di moto del centro di massa rimane invariata nell'urto:

$$\mathbf{P} = (m_1 + m_2)\, \boldsymbol{v}_{CM} = \mathbf{P}_{in} = \mathbf{P}_{fin} = \text{costante} \ ; \qquad (5.23)$$

invece variano le quantità di moto di ciascun punto materiale per effetto dell'impulso della forza di interazione:

$$m_1 \boldsymbol{v}_{1,fin} - m_1 \boldsymbol{v}_{1,in} = \mathbf{I}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{2,1}\, dt \ ,$$

$$m_2 \boldsymbol{v}_{2,fin} - m_2 \boldsymbol{v}_{2,in} = \mathbf{I}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{1,2}\, dt \ .$$

$\mathbf{I}_{2,1}$ è l'impulso dovuto alla forza impulsiva $\mathbf{F}_{2,1}$ esercitata dal punto 2 sul punto 1 e analogo significato ha $\mathbf{I}_{1,2}$. Naturalmente

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_{1,2} = -\mathbf{I}_{2,1} \ ;$$

le variazioni di quantità di moto sono eguali ed opposte.

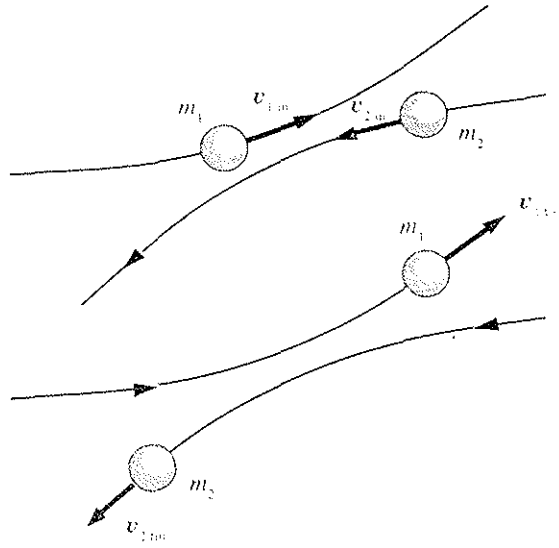


Fig. 5.25

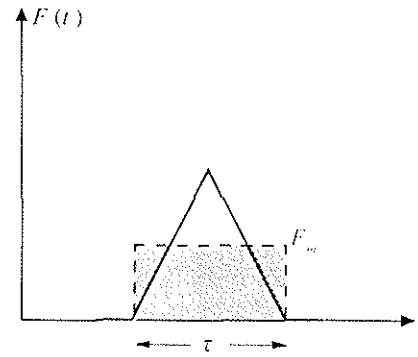


Fig. 5.26

Possiamo conservare la quantità di moto totale anche in presenza di forze esterne? La risposta è positiva se la durata τ dell'urto è sufficientemente piccola e le forze esterne non sono impulsive. Infatti la variazione di quantità di moto totale del sistema *dovuta* alle forze esterne è

$$\Delta \mathbf{P} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{(E)}\, dt = \mathbf{F}_m^{(E)}\, \tau$$

e se τ è molto breve ΔP risulta trascurabile. Il ragionamento non sarebbe corretto se $\mathbf{F}^{(E)}$ fosse impulsiva nell'intervallo τ in quanto in tal caso il valore medio $\mathbf{F}_m^{(E)}$ potrebbe assumere valori notevoli. Alternativamente, considerando $\mathbf{I}_{1,2}$ o $\mathbf{I}_{2,1}$ prima calcolati, si può scrivere

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{F}_m \tau$$

dove $\mathbf{F}_m$ è il valore medio della forza impulsiva nell'intervallo τ. Dato che $\mathbf{I}$ assume un valore finito e τ è molto breve, $\mathbf{F}_m$ può assumere valori estremamente grandi, rispetto ai quali $\mathbf{F}_m^{(E)}$ è certamente trascurabile. La forza esterna non modifica i singoli impulsi durante l'urto e quindi resta vera l'eguaglianza $\mathbf{I}_{1,2} = -\mathbf{I}_{2,1}$ e valida la conservazione della quantità di moto totale.

La conservazione del momento angolare non aggiunge informazioni nel caso dell'urto di due corpi puntiformi. Infatti durante l'urto $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ e quindi se $\mathbf{P}_{in} = \mathbf{P}_{fin}$, risulta anche $\mathbf{L}_{in} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_{in} = \mathbf{L}_{fin} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_{fin}$: le due leggi di conservazione sono in questo caso equivalenti.

Ricordiamo infine che a priori non è noto se le forze interne che si sviluppano nell'urto sono conservative e pertanto non si può assumere la conservazione dell'energia meccanica del sistema durante l'urto.

5.12 URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO.

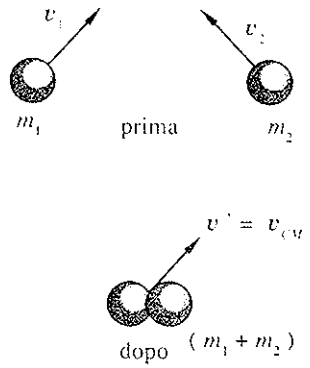


Fig. 5.27

L'*urto* si chiama *completamente anelastico* quando i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa $m_1 + m_2$.

Se $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono le velocità dei due punti nell'istante prima dell'urto e $\boldsymbol{v}'$ la velocità comune immediatamente dopo l'urto, da (5.22) e (5.23) si ha

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\boldsymbol{v}' = (m_1 + m_2)\,\boldsymbol{v}_{CM} \quad ,$$

$$\boldsymbol{v}_{CM} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} \quad .$$

Subito dopo l'urto i punti si muovono con la velocità che aveva il centro di massa un istante prima dell'urto ($\boldsymbol{v}_{CM}$ resta invariata nell'urto). Le variazioni di quantità di moto dei singoli punti sono $m_1\boldsymbol{v}_{CM} - m_1\boldsymbol{v}_1$ e $m_2\boldsymbol{v}_{CM} - m_2\boldsymbol{v}_2$ e si verifica subito che sono eguali ed opposte.

Calcoliamo l'energia cinetica del sistema prima e dopo l'urto:

$$E_{k,\,in} = \frac{1}{2}\,m_1v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2v_2^2 = E'_k + \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,v_{CM}^2 \quad ,$$

avendo applicato il secondo teorema di König (5.17); invece

$$E_{k,\,fin} = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,v_{CM}^2 < E_{k,\,in} \quad .$$

Nell'*urto completamente anelastico viene assorbita l'energia* E'_k *, cioè l'energia cinetica rispetto al centro di massa prima dell'urto.* È infatti dopo l'urto non c'è più moto rispetto al centro di massa, con cui i due punti vengono a coincidere. Nella realtà l'energia cinetica E'_k viene in parte utilizzata per la deformazione permanente dei due corpi.

ESEMPIO 5.7

Consideriamo un punto di massa m_1 con velocità $\boldsymbol{v}_1$ che urta in modo completamente anelastico un punto fermo. Dalla conservazione della quantità di moto

$$m_1\boldsymbol{v}_1 = (m_1 + m_2)\,\boldsymbol{v}_{CM} \quad ,$$

$$\boldsymbol{v}_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\boldsymbol{v}_1$$

Il moto dopo l'urto avviene nella stessa direzione e verso di $\boldsymbol{v}_1$, con velocità minore, ma con la stessa quantità di moto.

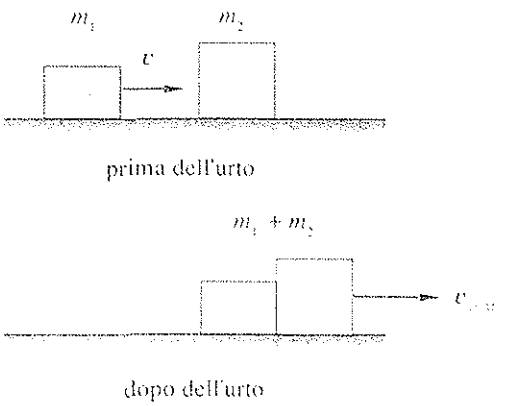


Fig. 5.28

ESEMPIO 5.8

Si studi l'urto tra due punti di massa m_1 e m_2, in moto con velocità $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$, perpendicolari tra di loro.

Soluzione
Prendiamo come origine del sistema di assi x, y il punto in cui avviene l'urto. Chiamiamo θ l'angolo formato dalla quantità di moto totale $\mathbf{P} = M\,\boldsymbol{v}_{CM}$ con l'asse x: $\mathbf{P}$ è costante nell'urto per cui

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\boldsymbol{v}_{CM} \quad .$$

Proiettiamo la legge di conservazione sugli assi:

$$P_{x,\,in} = m_1 v_1 = P_{x,\,fin} = (m_1 + m_2)\,v_{CM}\cos\theta \,,$$

$$P_{y,\,in} = m_2 v_2 = P_{y,\,fin} = (m_1 + m_2)\,v_{CM}\,\text{sen}\,\theta \,,$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} \quad , \quad v_{CM} = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2}$$

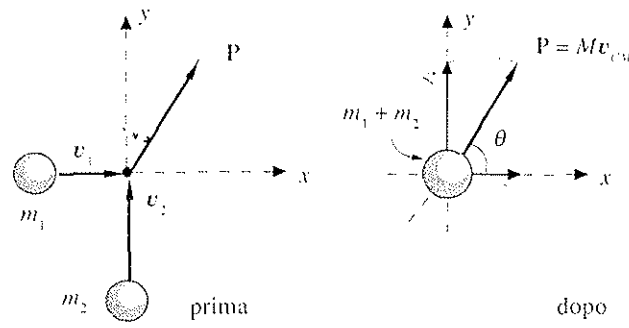


Fig. 5.29

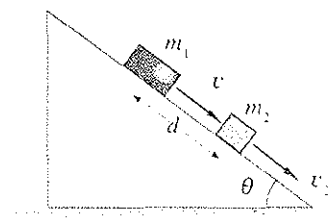
La somma vettoriale delle quantità di moto dei singoli punti un istante prima dell'urto determina

$$\mathbf{P} = (m_1 + m_2)\,\boldsymbol{v}_{CM} = M\,\boldsymbol{v}_{CM} \quad ,$$

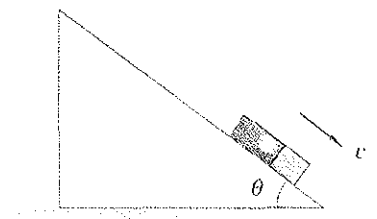
che resta tale dopo l'urto.

ESEMPIO 5.9

Si considerino due corpi puntiformi, di massa m_1 e m_2, che scendono lungo un piano inclinato liscio con velocità v_1 e v_2. All'istante $t = 0$ la distanza tra i due corpi è d e le loro velocità sono $v_{0,1}$ e $v_{0,2}$ con $v_{0,1} > v_{0,2}$. Si determini la velocità dopo l'urto, che viene assunto completamente anelastico.



prima dell'urto



dopo dell'urto

Fig. 5.30

Soluzione
Le velocità dei due corpi sono funzioni del tempo

$$v_1 = v_{0,1} + a\,t \quad , \quad v_2 = v_{0,2} + a\,t$$

con $a = g\,\text{sen}\,\theta$. Il moto relativo è uniforme con velocità

$$v_1 - v_2 = v_{0,1} - v_{0,2}$$

e quindi l'urto avviene al tempo $t^* = d/(v_{0,1} - v_{0,2})$. Applichiamo la conservazione della quantità di moto durante l'urto:

$$m_1 v_{0,1} + m_1 a\,t^* + m_2 v_{0,2} + m_2 a\,t^* = (m_1 + m_2)\,v_{CM}$$

$$v_{CM}(t^*) = \frac{m_1 v_{0,1} + m_2 v_{0,2}}{m_1 + m_2} + a\,t^* = v_{CM}(t = 0) + a\,t^*$$

Dopo l'urto i due corpi scendono uniti con velocità data da

$$v = v_{CM}(t^*) + a\,(t - t^*) = v_{CM}(t = 0) + a\,t$$

Quindi il centro di massa scende con la stessa legge prima e dopo l'urto e la sua velocità non subisce discontinuità nell'urto.
Questo è un caso in cui si applica (5.22) pur in presenza della forza esterna peso, in quanto non impulsiva.

ESEMPIO 5.10. Pendolo balistico

Il pendolo balistico, utilizzato per misurare la velocità di un proiettile, consiste di un grande blocco di legno, appeso verticalmente. Una pallottola di massa m, che viaggia orizzontalmente con velocità v, urta il pendolo rimanendovi conficcata. Se il tempo di collisione è piccolo rispetto al periodo di oscillazione del pendolo, la cordicella che sostiene la massa M resta praticamente verticale durante l'urto. Per tempo di collisione si intende il tempo necessario perché il proiettile si fermi all'interno del legno.
Nessuna forza esterna orizzontale agisce sul sistema e pertanto è possibile conservare nell'urto la componente orizzontale della quantità di moto.
Terminata la collisione, il pendolo con la pallottola inizia ad oscillare raggiungendo un'altezza massima h, misurata rispetto alla posizione di equilibrio, tale che l'energia potenziale corrispondente eguagli l'energia cinetica del sistema subito dopo l'urto. Si può pertanto risalire al valore della velocità del sistema $(M + m)$ e quindi a quella del proiettile prima dell'urto.
La conservazione della quantità di moto durante l'urto, completamente anelastico, dà

$$m v = (m + M) v' \quad .$$

Dopo l'urto, per la conservazione dell'energia meccanica durante l'oscillazione,

$$\frac{1}{2} (m + M) v'^2 = (m + M) g h$$

$$\Rightarrow v' = \sqrt{2 g h} \quad , \quad v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2 g h} \quad .$$

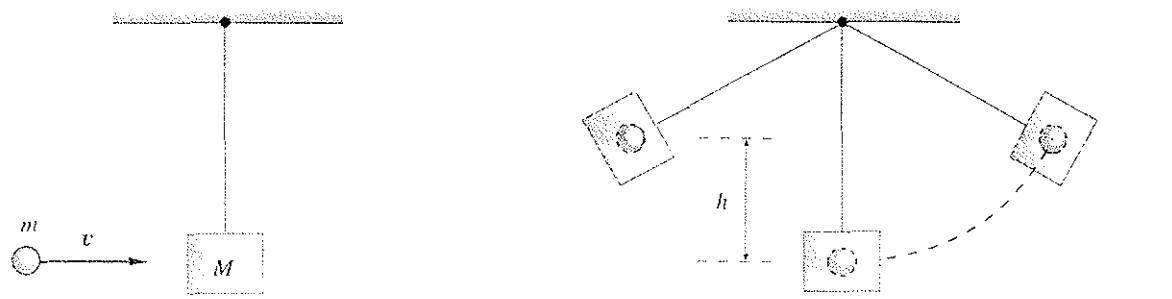


Fig. 5.31

5.13 URTO ELASTICO.

Si definisce come *urto elastico* un urto durante il quale si conserva anche l'energia cinetica del sistema. Questo comporta che le forze interne, che si manifestano durante l'urto, siano conservative. I due corpi reali che si urtano subiscono durante l'urto delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto. L'energia potenziale del sistema prima e dopo l'urto è la stessa e pertanto, se si conserva l'energia meccanica, deve *conservarsi anche l'energia cinetica*.

Nello studio di un urto elastico possiamo utilizzare le equazioni

$$\mathbf{P}_{in} = \mathbf{P}_{fin} \quad , \quad E_{k\,in} = E_{k\,fin} \quad .$$

Il caso più generale è tridimensionale e abbiamo sei incognite, le componenti delle velocità dei due punti dopo l'urto, ma solo quattro equazioni (tre dalla conservazione di $\mathbf{P}$ e una dalla conservazione di E_k). Anche nel caso di urto nel piano, abbiamo quattro incognite e tre equazioni. Quindi per risolvere un problema di urto elastico nel piano o nello spazio, oltre a conoscere le velocità prima dell'urto bisogna avere qualche altra informazione sulle velocità dopo l'urto.

Invece nel *caso unidimensionale* (due punti che si muovono prima e dopo l'urto elastico lungo la stessa direzione) abbiamo due equazioni di conservazione e due incognite (le velocità dei due punti dopo l'urto) e possiamo risolvere il problema. Scriviamo dunque in questo caso:

$$m_1 v_{1,\text{in}} + m_2 v_{2,\text{in}} = m_{1,\text{fin}} + m_2 v_{2,\text{fin}} = (m_1 + m_2)\, v_{CM} \quad ,$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,\text{in}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{in}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,\text{fin}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{fin}}^2 \quad .$$

Per determinare i valori di $v_{1,\text{fin}}$ e $v_{2,\text{fin}}$ in funzione di $v_{1,\text{in}}$ e $v_{2,\text{in}}$ è più comodo considerare l'urto anche nel sistema di riferimento del centro di massa, dove $P' = 0$ e quindi:

$$m_1 v'_{1,\text{in}} = - m_2 v'_{2,\text{in}} \quad , \qquad m_1 v'_{1,\text{fin}} = - m_2 v'_{2,\text{fin}} \quad ,$$

$$\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,\text{in}} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,\text{in}} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,\text{fin}} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,\text{fin}} \quad .$$

Da queste si ottiene la soluzione

$$v'_{1,\text{fin}} = - v'_{1,\text{in}} \quad , \qquad v'_{2,\text{fin}} = - v'_{2,\text{in}} \quad :$$

nel sistema del centro di massa la quantità di moto di ciascun punto resta la stessa in modulo, cambiando solo di verso.

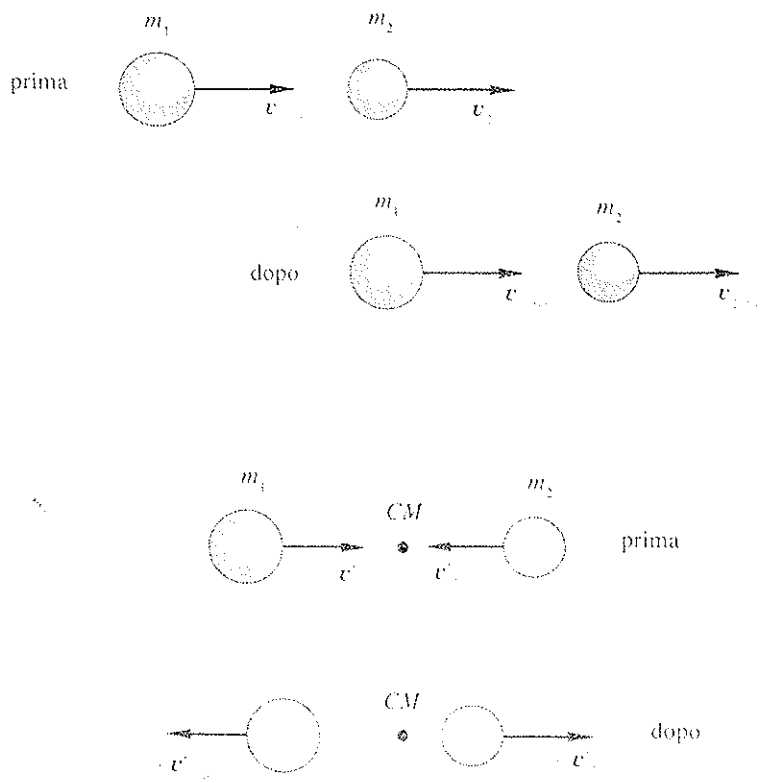


Fig. 5.32

$v_i = v'_i + v_{CM}$

Ritorniamo ora nel sistema inerziale e usiamo (5.13):

$$v_{1,in} = v'_{1,in} + v_{CM} \quad , \quad v_{2,in} = v'_{2,in} + v_{CM}$$

$$v_{1,fin} = v'_{1,fin} + v_{CM} \quad , \quad v_{2,fin} = v'_{2,fin} + v_{CM}$$

Tenendo conto della soluzione trovata nel sistema del centro di massa e del fatto che

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$

si ottiene:

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1,in} + 2 m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2} \quad ,$$

$$v_{2,fin} = \frac{2 m_1 v_{1,in} + (m_2 - m_1) v_{2,in}}{m_1 + m_2} \quad . \qquad (5.24)$$

Consideriamo alcuni casi particolari, riferendoci alla figura 5.33:

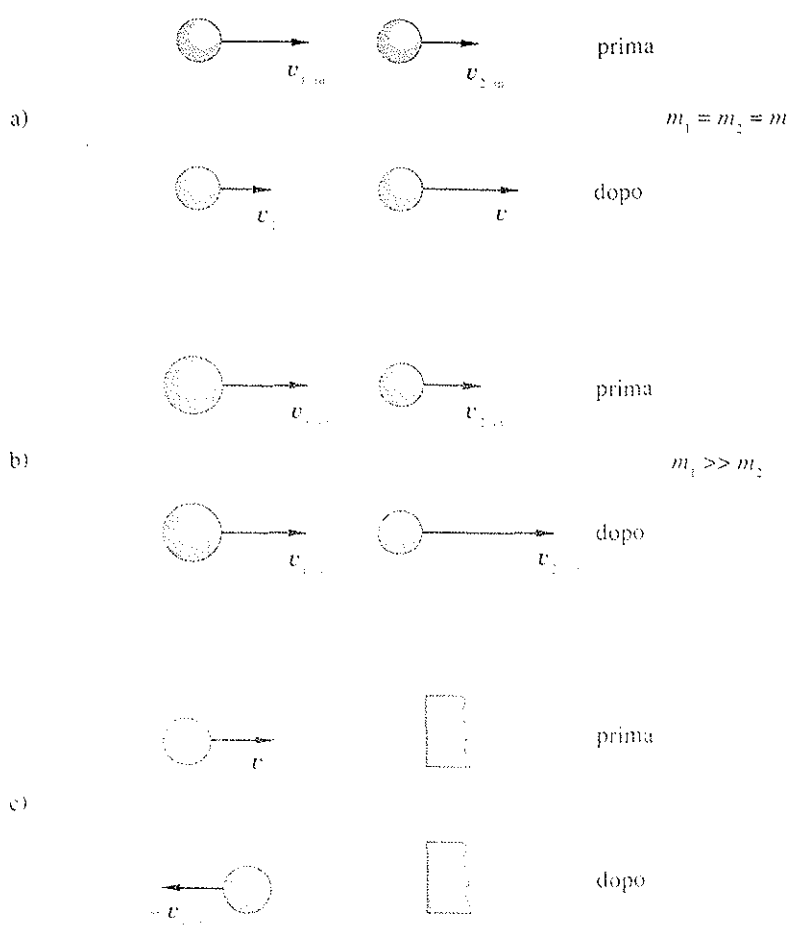


Fig. 5.33

a) $m_1 = m_2 = m$: $v_{1,\text{fin}} = v_{2,\text{in}}$, $v_{2,\text{fin}} = v_{1,\text{in}}$.
Si ottiene a seguito dell'urto uno scambio delle velocità.

b) $m_1 >> m_2$: $v_{1,\text{fin}} \cong v_{1,\text{in}}$, $v_{2,\text{fin}} = 2v_{1,\text{in}} - v_{2,\text{in}}$.
Nell'urto la velocità di m_1 rimane praticamente la stessa.

c) $m_1 << m_2$ e $v_{2,\text{in}} = 0$: $v_{1,\text{fin}} = -v_{1,\text{in}}$, $v_{2,\text{fin}} \cong 0$.
In tale situazione m_1 rimbalza all'indietro e m_2 resta fermo.
Questo è un caso molto particolare, in cui possiamo verificare che si conserva l'energia cinetica, ma non la quantità di moto che prima dell'urto vale $m_1 v_{1,\text{in}}$ e dopo l'urto $-m_1 v_{1,\text{in}}$ (se si assume rigorosamente $v_{2,\text{fin}} = 0$). Per esempio si tratta dell'urto di un punto contro un corpo massiccio, come una parete. Il risultato si spiega considerando che il corpo m_2 viene vincolato a restare fermo, cioè non è libero come avevamo ipotizzato. Allora durante l'urto si sviluppano forze vincolari esterne di tipo impulsivo e quindi paragonabili a quelle interne. Ciò non permette la conservazione della quantità di moto.

d) Urto obliquo contro una parete piana immobile liscia.
Anche questo è un caso particolare; è un urto bidimensionale, ma siccome uno dei due corpi è immobile è possibile risolvere il problema conoscendo la velocità prima dell'urto. Supponiamo che $\boldsymbol{v}_{\text{in}}$ formi l'angolo θ con la normale alla parete e abbia quindi le componenti $v_{\text{in}} \operatorname{sen}\theta$ e $v_{\text{in}} \cos\theta$. Nella direzione parallela alla parete non c'è urto, si conserva la relativa quantità di moto e la componente della velocità vale ancora $v_{\text{in}} \operatorname{sen}\theta$ dopo l'urto; in direzione ortogonale abbiamo la situazione vista nel precedente caso c e $v_{\text{in}} \cos\theta$ diventa $-v_{\text{in}} \cos\theta$. Quindi $\boldsymbol{v}_{\text{fin}}$ è eguale in modulo a v_{in} e forma ancora l'angolo θ con la normale alla parete, come mostrato nella figura 5.34. Si ha una situazione analoga a quella della riflessione di un raggio luminoso da parte di uno specchio piano.

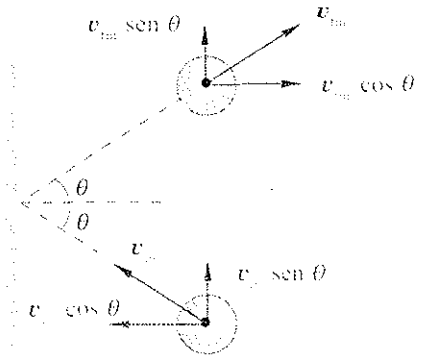


Fig. 5.34

5.14 URTO ANELASTICO.

Questo è il caso più comune: i punti ritornano separati dopo l'urto, durante il quale si conserva la quantità di moto del sistema, se non agiscono forze esterne di tipo impulsivo, ma non l'energia cinetica. Una certa frazione di E'_c, energia cinetica prima dell'urto rispetto al centro di massa, viene assorbita convertendosi, ad esempio, in calore o in energia potenziale di deformazione.

Ciò è determinato, negli urti tra particelle reali, dal fatto che l'impulso della forza di interazione di una particella con l'altra risulta, nella fase di deformazione dei

corpi, superiore a quello nella fase di ritorno dei corpi alla configurazione iniziale. Se l'urto fosse elastico i due impulsi sarebbero eguali (in modulo), mentre per un urto completamente anelastico il secondo sarebbe nullo.

Per chiarire meglio il processo, consideriamolo nel sistema di riferimento del centro di massa. La particella con quantità di moto $p'_{1,in}$ nell'istante precedente all'urto vede, per effetto dell'impulso nella fase di deformazione, ridursi progressivamente a zero la sua quantità di moto fino ad arrestarsi. Nella fase successiva, sempre durante l'urto, la particella riprenderebbe lo stesso valore della quantità di moto se l'urto fosse elastico e cambierebbe solo il verso: abbiamo visto nel paragrafo 5.13 che $p'_{1,fin} = -p'_{1,in}$. Invece nell'urto anelastico ciò non avviene e si definisce il coefficiente di restituzione

$$e = -\frac{p'_{1,fin}}{p'_{1,in}} = \frac{I_{rit}}{I_{def}} = -\frac{p'_{2,fin}}{p'_{2,in}} \quad , \tag{5.25}$$

dove I_{rit} e I_{def} sono i moduli dell'impulso della forza esercitata durante l'urto, rispettivamente nelle fasi di ritorno e di deformazione, dalla seconda particella sulla prima. Ricordiamo che, essendo $P' = 0$, in modulo $p'_{1,in} = p'_{2,in}$ e $p'_{1,fin} = p'_{2,fin}$, per cui il coefficiente di restituzione è lo stesso anche per la seconda particella, come scritto in (5.25).

L'energia cinetica del sistema delle due particelle dopo l'urto è data da

$$E'_{k,fin} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,fin} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,fin} = e^2 \left(\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,in} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,in} \right)$$

$$\Rightarrow E'_{k,fin} = e^2 E'_{k,in} \quad .$$

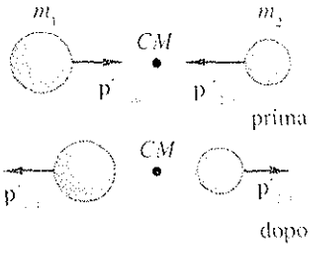


Fig. 5.35

La variazione relativa di energia cinetica nell'urto è

$$\delta = \frac{E'_{k,fin} - E'_{k,in}}{E'_{k,in}} = e^2 - 1 \quad .$$

Nell'urto elastico $e = 1$, $\delta = 0$, l'energia cinetica si conserva. Nell'urto completamente anelastico $e = 0$, $\delta = -1$: tutta l'energia cinetica del moto relativo al centro di massa è assorbita e trasformata. *Nella situazione di urto anelastico il coefficiente di restituzione* e risulta compreso tra zero e uno, $E'_{k,fin}$ *è sempre minore di* $E'_{k,in}$.

Per ricavare la relazione tra le velocità nel sistema inerziale, inseriamo (5.13) in (5.25) ottenendo:

$$v'_{1,fin} = v_{1,fin} - v_{CM} = -ev'_{1,in} = -e(v_{1,in} - v_{CM}) \quad ,$$

$$v'_{2,fin} = v_{2,fin} - v_{CM} = -ev'_{2,in} = -e(v_{2,in} - v_{CM}) \quad ,$$

$$\Rightarrow v_{1,fin} = v_{CM}(1 + e) - ev_{1,in} \quad , \qquad v_{2,fin} = v_{CM}(1 + e) - ev_{2,in} \quad .$$

Poiché $v_{CM} = \dfrac{m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2}$ si ottiene infine

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - e m_2) v_{1,in} + m_2 (1 + e) v_{2,in}}{m_1 + m_2} \tag{5.26}$$

$$v_{2,\mathrm{fin}} = \frac{m_1(1+e)v_{1,\mathrm{in}} + (m_2 - e m_1)v_{2,\mathrm{in}}}{m_1 + m_2} \tag{5.26}$$

con $e = 1$ riotteniamo le (5.24), valide per l'urto elastico, mentre con $e = 0$ si ha $v_{1,\mathrm{fin}} = v_{2,\mathrm{fin}} = v_{CM}$, come è giusto per l'urto completamente anelastico.

Seguendo lo stesso ragionamento utilizzato nel caso dell'urto elastico, è chiaro che le (5.26) sono valide solo per gli urti unidimensionali.

5.15 PROPRIETÀ DEI SISTEMI DI FORZE APPLICATE A PUNTI DIVERSI.

Discutiamo in questo paragrafo alcune proprietà relative a un sistema di forze applicate a punti diversi nello spazio (per esempio agli n punti materiali che costituiscono un sistema di punti).

Indichiamo con $\mathbf{R} = \Sigma_i \mathbf{F}_i$ la risultante delle forze e con

$$\mathbf{M}_O = \Sigma_i \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i = \Sigma_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

il momento risultante delle forze rispetto al polo O. Se cambiano polo, si ha $\mathbf{M}_{O'} = \Sigma_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$ con $\mathbf{r}_i = \mathbf{OO}' + \mathbf{r}'_i$ per cui

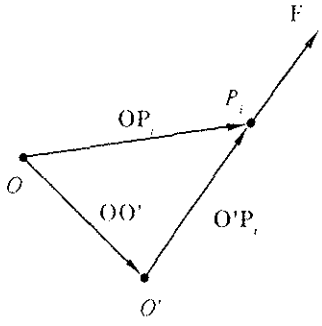


Fig. 5.36

$$\mathbf{M}_O = \Sigma_i (\mathbf{OO}' + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{OO}' \times \Sigma_i \mathbf{F}_i + \Sigma_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{OO}' \times \mathbf{R} + \mathbf{M}_{O'}.$$

Il momento dipende dal polo, a meno che non sia $\mathbf{R} = 0$.

Un'applicazione importante di questo risultato riguarda la coppia di forze. Si chiama così un sistema formato da due forze eguali e di verso opposto, *aventi diversa retta di azione*. La distanza tra le due rette d'azione è chiamata braccio della coppia, b. La risultante delle due forze è nulla e pertanto il momento $\mathbf{M}$ non dipende dalla scelta del polo. $\mathbf{M}$ è ortogonale al piano individuato dalle due rette di azione e modulo $F\,b$, come si ottiene subito scegliendo per esempio P_2 come polo.

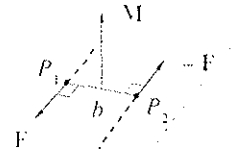


Fig. 5.37

Le forze interne, considerate nei paragrafi precedenti, costituiscono un sistema di coppie a braccio nullo per cui anche il loro momento risultante è nullo, rispetto a qualsiasi polo.

In generale, dato un qualsiasi sistema di forze, i vettori $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_O$ non sono ortogonali tra loro e quindi non è possibile trovare due punti O e P tali che $\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{R}$. Ciò vuol dire che $\mathbf{M}_O$ è indipendente da $\mathbf{R}$ e conferma che le equazioni (5.6) e (5.11) sono indipendenti.

$R^{(E)} = M a_{CM}$

$\frac{dL}{dt} = M^{(E)}$

Quest'ultima osservazione ci porta a concludere che un sistema di forze applicate in punti diversi non può in generale essere rappresentato solo dalla sua risultante. La situazione è diversa da quella considerata nel paragrafo 2.22 in cui le forze erano applicate allo stesso punto: in tal caso, nota la risultante, è noto il momento rispetto a qualsiasi polo, $\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{R}$.

Dall'insieme delle considerazioni riportate possiamo pertanto enunciare un risultato generale: *dato un sistema di forze applicate in punti diversi e fissato un polo per i momenti, con il che sono noti* $\mathbf{R}$ *e* $\mathbf{M}_O$, *questo sistema può essere sempre ridotto a una forza* $\mathbf{R}$ *con retta d'azione passante per il polo (così il momento di* $\mathbf{R}$ *rispetto al polo è nullo) e ad una coppia di forze di momento* $\mathbf{M}_O$ *(che ha risultante nulla e momento indipendente dal polo).*

Vediamo adesso alcuni sistemi speciali di forze, per i quali risultante e momento risultante non sono indipendenti.

Sistema di forze parallele

Tale sistema è formato da forze aventi tutte la stessa direzione, individuata dal versore $\mathbf{u}$. Pertanto $\mathbf{F}_i = F_i\,\mathbf{u}$ e la risultante $\mathbf{R} = \Sigma_i \mathbf{F}_i = (\Sigma_i F_i)\,\mathbf{u}$ risulta parallela a $\mathbf{u}$. Il momento risultante è dato da

$$\mathbf{M} = \Sigma_i \mathbf{r}_i \times F_i\,\mathbf{u} = (\Sigma_i F_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{u}$$

ed è ortogonale a $\mathbf{u}$, ovvero a $\mathbf{R}$. Deve quindi essere possibile trovare un punto C, dove applicare $\mathbf{R}$, tale che

$$\mathbf{M} = \mathbf{OC} \times \mathbf{R} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{R} \quad .$$

Eguagliando le due espressioni scritte per $\mathbf{M}$

$$(\Sigma_i F_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{u} = \mathbf{r}_C \times (\Sigma_i F_i)\,\mathbf{u} = (\Sigma_i F_i)\,\mathbf{r}_C \times \mathbf{u}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_C = \mathbf{OC} = \frac{\Sigma_i F_i \mathbf{r}_i}{\Sigma_i F_i} = \frac{F_1 \mathbf{r}_1 + F_2 \mathbf{r}_2 + \ldots + F_n \mathbf{r}_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} \tag{5.27}$$

Il punto C, individuato dal vettore $\mathbf{r}_C$, *è chiamato centro delle forze parallele* (non va confuso col centro di massa).

A differenza del caso generale di forze con direzioni qualsiasi, un sistema di forze parallele può sempre essere ridotto a una sola forza, pari alla risultante $\mathbf{R}$, applicata in C. Il risultato non dipende dalla scelta di O, ma solo dalla posizione relativa dei punti e può essere generalizzato a qualsiasi sistema di vettori paralleli.

Una interessante applicazione in tal senso è lo studio della traslazione di un sistema di punti, cioè del moto di un insieme di punti materiali che hanno ad ogni istante la stessa velocità $\boldsymbol{v}$.

Le quantità di moto $m_1 \boldsymbol{v}, \ldots, m_n \boldsymbol{v}$ formano un sistema di vettori paralleli, il cui centro è individuato, secondo (5.27), da

$$\mathbf{r}_C = \frac{\Sigma_i m_i v\, \mathbf{r}_i}{\Sigma_i m_i v} = \frac{\Sigma_i m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma_i m_i} = \mathbf{r}_{CM} \quad .$$

Il centro è il centro di massa, come potevamo aspettarci. La risultante delle quantità di moto è $M \boldsymbol{v}_{CM}$ e il momento è $\mathbf{OC} \times M \boldsymbol{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times M \boldsymbol{v}_{CM}$, coincidente col momento angolare $\mathbf{L}$: infatti dato che tutti i punti hanno la stessa velocità, che è anche quella del centro di massa, non c'è moto rispetto al centro di massa e, per il primo teorema di König (5.16), il momento angolare $\mathbf{L}$ è pari a $\mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times M \boldsymbol{v}_{CM}$.

Un sistema molto comune di forze parallele è quello delle forze peso applicate a un insieme di punti. Le singole forze sono pari a $m_i \mathbf{g}$ (modulo $m_i g$), la risultante è $\mathbf{R} = M \mathbf{g}$ e il centro, secondo (5.27), è individuato dal vettore

$$\mathbf{r}_C = \frac{\Sigma_i m_i g\, \mathbf{r}_i}{\Sigma_i m_i g} = \frac{\Sigma_i m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma_i m_i} = \mathbf{r}_{CM} \quad .$$

Il centro delle forze peso, detto anche centro di gravità o baricentro, coincide con il centro di massa.

Per poter considerare le forze peso parallele l'estensione del sistema non deve essere molto grande, così da poter trascurare la curvatura della terra.

Il momento risultante delle forze peso è

$$\mathbf{M} = \mathbf{OC} \times M\,\mathbf{g} = \mathbf{r}_{CM} \times M\,\mathbf{g} \quad . \tag{5.28}$$



Sistema di forze complanari

Consideriamo un sistema di forze $\mathbf{F}_i$, applicate in punti diversi di un piano x, y e parallele al piano stesso, cioè un sistema di forze complanari. La risultante (non nulla) giace anch'essa nel piano. Se pure il polo si trova nel piano delle forze, i singoli momenti delle $\mathbf{F}_i$ e il momento risultante sono ortogonali al piano e hanno la direzione dell'asse z. Deve allora essere possibile individuare un punto C del piano tale che



Fig. 5.38

$$\mathbf{M}_O = \Sigma_i\, \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{OC} \times \mathbf{R} \quad .$$

Assumiamo il polo come origine del sistema di coordinate; poiché il momento è parallelo all'asse z l'equazione precedente è equivalente a un'unica equazione scalare che scriviamo utilizzando quanto esposto nell'appendice C, relazione (C.12):

$$\Sigma_i \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ x_i & y_i & 0 \\ F_{ix} & F_{iy} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ x_C & y_C & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma_i\,(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = x_C R_y - y_C R_x \,.$$

Le coordinate del punto C soddisfano quindi alla condizione

$$y_C = x_C \frac{R_y}{R_x} - \frac{\Sigma_i\,(x_i F_{iy} - y_i F_{ix})}{R_x} = a\,x_C + b \quad ,$$

che è l'equazione di una retta, precisamente della retta di azione di $\mathbf{R}$ visto che il coefficiente angolare è proprio R_y/R_x. Ci sono dunque infiniti punti C, posti lungo una retta del piano x, y.

Il procedimento appena seguito per la ricerca del punto C cade in difetto se la risultante $\mathbf{R}$ del sistema di forze complanari è nulla; lo stesso avviene nel caso delle forze parallele. In entrambe le situazioni resta vero il risultato valido per tutti i sistemi di forze applicate in punti diversi: se $\mathbf{R} = 0$ non è detto che sia $\mathbf{M} = 0$. In generale, quando un sistema di forze parallele o complanari ha risultante nulla, esso si può ridurre a una coppia di forze di momento $\mathbf{M}$ di norma diverso da zero.

Momento assiale

Dato un vettore generico $\boldsymbol{a}$, che può essere sia una forza che una quantità di moto, calcoliamo il suo momento rispetto ai poli O e O':

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \boldsymbol{a} \quad , \quad \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{O'P} \times \boldsymbol{a} \quad .$$

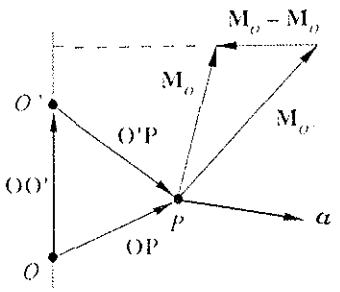


Fig. 5.39

Abbiamo dimostrato nell'appendice C che

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OO'} \times \boldsymbol{a} + \mathbf{M}_{O'} \ .$$

Pertanto il vettore $\mathbf{M}_O - \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{OO'} \times \boldsymbol{a}$ risulta ortogonale a $\mathbf{OO'}$ e conseguentemente i momenti $\mathbf{M}_O$ e $\mathbf{M}_{O'}$ devono avere la stessa componente lungo la direzione dell'asse $\mathbf{OO'}$. Tale componente si chiama *momento assiale del vettore* $\boldsymbol{a}$ *rispetto all'asse* $\mathbf{OO'}$.

In conclusione, se si calcola il momento $\mathbf{M}$ di un vettore rispetto ai vari punti di un dato asse, al variare del punto varia $\mathbf{M}$, però la sua componente lungo l'asse è indipendente da dove si sceglie il polo sull'asse.

Il risultato si estende al momento risultante di un sistema di vettori, come forze e quantità di moto.

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO CENNI DI STATICA

6

6.1 DEFINIZIONE DI CORPO RIGIDO. PRIME PROPRIETÀ.

Un *corpo rigido* viene definito come *un sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare*. Questa definizione si riferisce a un corpo solido ideale in quanto i corpi ordinari sono sempre deformabili.

Possiamo studiare il moto di un corpo rigido considerando:

a) un sistema di riferimento inerziale;
b) il sistema di riferimento del centro di massa del corpo rigido; in tal caso si può studiare solo il moto rispetto al centro di massa: poiché la distanza dei singoli punti dal centro di massa non può cambiare, ciascun punto è visto dallo stesso o fermo o in moto lungo un arco di circonferenza;
c) un sistema di riferimento con gli assi solidali al corpo rigido; tale sistema, in cui ciascun punto del corpo è fermo, può essere utile solo per descrivere il moto del corpo rigido rispetto agli altri due sistemi di riferimento.

Vediamo ora di determinare quanti parametri sono necessari per individuare la posizione nello spazio di un corpo rigido ad un certo istante. Un punto nello spazio è individuato da tre parametri, le sue coordinate, e quindi n punti tra loro indipendenti da $3n$ parametri. Nel caso di un corpo rigido, formato da n punti, la condizione che le distanze tra tutte le possibili coppie di punti siano costanti riduce il numero di parametri ad un valore minore di $3n$.

Consideriamo un sistema x, y, z con l'origine nel centro di massa, figura 6.1, e gli assi, di versori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$, solidali con il corpo rigido (è il caso c appena visto). Ciascuno dei tre assi è individuato, rispetto a un sistema esterno, da tre coseni direttori α, β, γ che sono le componenti cartesiane del versore $\mathbf{u}$ in quel sistema: in tutto quindi nove coseni direttori, che però non sono tra loro indipendenti. Infatti quelli di un dato asse devono soddisfare alla condizione

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

avendo il versore modulo unitario: in totale sono tre condizioni, una per ogni asse. Inoltre gli assi devono essere mutuamente ortogonali, il che comporta $\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = 0$, $\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z = 0$, $\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x = 0$, ovvero le tre condizioni.

$$\alpha_x \alpha_y + \beta_x \beta_y + \gamma_x \gamma_y = 0 \quad .$$

$$\alpha_x\ \alpha_z + \beta_y\ \beta_z + \gamma_y\ \gamma_z = 0,$$

$$\alpha_z\ \alpha_x + \beta_z\ \beta_x + \gamma_z\ \gamma_x = 0.$$

Quindi i parametri indipendenti che individuano i tre assi sono tre (nove coseni direttori con sei condizioni).

Per completare il quadro dobbiamo individuare la posizione del centro di massa, tramite le sue tre coordinate e quindi in totale occorrono sei parametri per descrivere la posizione di un corpo rigido.

Pertanto, se conosciamo dove si trova ad un certo istante un punto P di un corpo rigido (la cui posizione rispetto al sistema x, y, z è fissa e misurabile una volta per tutte), l'evoluzione nel tempo della posizione di P nel sistema di riferimento inerziale è nota se conosciamo il moto del centro di massa, individuato da tre parametri, e il cambiamento nel tempo della direzione dei tre assi x, y, z individuati da altri tre parametri.

Gradi di libertà di un sistema

Il numero l di parametri necessari per descrivere il moto di un sistema si chiama numero di *gradi di libertà del sistema*.

Un corpo rigido ha quindi $l = 6$, un punto materiale $l = 3$, n punti materiali indipendenti $l = 3n$, un punto vincolato a muoversi lungo una linea $l = 1$ o sopra una superficie $l = 2$, due punti vincolati ad avere sempre la stessa distanza tra loro $l = 5$ (sei coordinate dei due punti con una condizione sulla distanza).

Il lavoro delle forze interne è legato al cambiamento tra le mutue distanze tra i vari punti. Essendo questo un corpo rigido le distanze tra le coppie di punti non possono variare, pertanto $W^{(I)} = 0$

Nel paragrafo 5.10 abbiamo visto che il lavoro delle forze interne deve essere nullo in un sistema rigido, dove i punti mantengono invariate le mutue distanze: quindi *la variazione dell'energia cinetica di un corpo rigido è eguale al lavoro delle forze esterne*:

$$\Delta E_k = W^{(E)} \quad .$$

Di conseguenza nel resto del capitolo tralasceremo il simbolo $^{(E)}$ per le grandezze $\mathbf{R}^{(E)}$, $\mathbf{M}^{(E)}$, $W^{(E)}$ non essendo possibile fare confusioni.

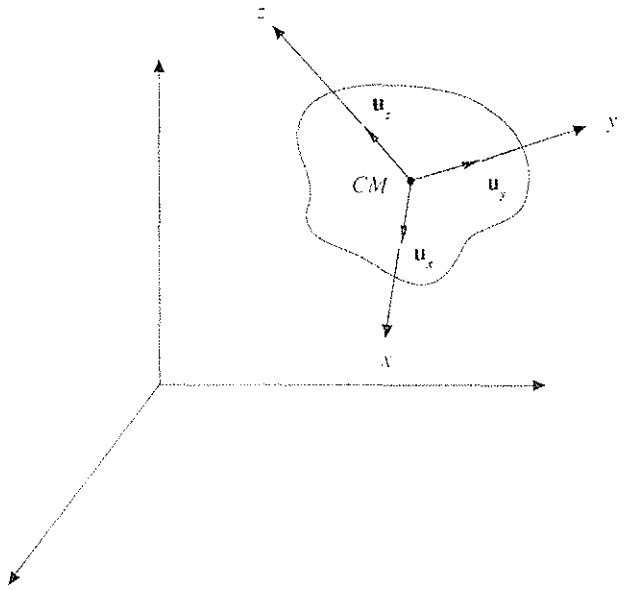


Fig. 6.1

6.2 MOTO DI UN CORPO RIGIDO.

Traslazione di un corpo rigido

Un moto semplice che può compiere un corpo rigido è il *moto di traslazione*. Tutti i punti si muovono con la stessa velocità $\boldsymbol{v}$, che può variare nel tempo in modulo, direzione e verso: $\boldsymbol{v}$ coincide con $\boldsymbol{v}_{CM}$, velocità del centro di massa. Pertanto, nel moto di traslazione, che può essere uniforme o vario, se è noto il moto del centro di massa è noto quello di qualsiasi altro punto. La dinamica è quella di un punto materiale e non c'è movimento rispetto al centro di massa:

$$\mathbf{L}' = 0 \quad , \quad E_k' = 0 \quad .$$

Le grandezze significative in una traslazione sono:

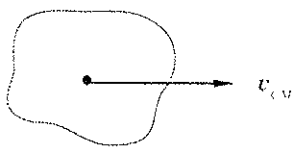


Fig. 6.2

quantità di moto : $\mathbf{P} = M\,\boldsymbol{v}_{CM}$

momento angolare : $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times M\,\boldsymbol{v}_{CM}$

energia cinetica : $E_k = E_{k,CM} = \frac{1}{2}\,M\,\boldsymbol{v}_{CM}^2$.

L'equazione del moto del centro di massa è

$$\mathbf{R} = M\,\boldsymbol{a}_{CM} \quad .$$

Invece l'equazione $\mathbf{M} = d\,\mathbf{L}/dt$ non aggiunge, nel caso del moto di traslazione, alcuna informazione in quanto è conseguenza dell'equazione del moto del centro di massa.

Rotazione di un corpo rigido

Un secondo tipo di moto semplice è *la rotazione*: tutti i punti descrivono un moto circolare con velocità angolare ω, che in generale è funzione del tempo. L'*equazione dinamica di base del moto di rotazione* è

$$\mathbf{M} = d\,\mathbf{L}/dt \quad .$$

I due moti considerati, traslazione e rotazione, sono gli unici da studiare in dettaglio, in quanto si dimostra che il *moto rigido più generale è una rototraslazione: ogni spostamento infinitesimo può sempre essere considerato come somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime, individuate da* $\boldsymbol{v}$ *e* ω, *variabili nel tempo.*

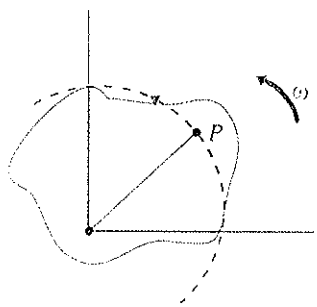


Fig. 6.3

Consideriamo due punti P e Q di un corpo rigido: per un moto di rototraslazione le velocità dei due punti sono:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_O + \omega \times \mathrm{OP} \quad , \quad \boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}_O + \omega \times \mathrm{OQ} \quad .$$

O è un punto generico, che potrebbe anche coincidere con il centro di massa: $\boldsymbol{v}_O$ individua il moto di traslazione, $\omega \times \mathrm{OP}$ e $\omega \times \mathrm{OQ}$ una rotazione istantanea attorno ad un asse passante per O (*asse istantaneo di rotazione*). Sottraendo membro a membro

$$\boldsymbol{v}_P - \boldsymbol{v}_Q = \omega \times (\mathrm{OP} - \mathrm{OQ}) = \omega \times \mathrm{QP}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_Q + \omega \times \mathrm{QP} \, .$$

Il moto di P è ancora una rototraslazione, caratterizzata dalla velocità $\boldsymbol{v}_Q$ e dalla stessa velocità angolare ω, che individua l'asse di rotazione passante per Q. In particolare, se Q è fermo, $\boldsymbol{v}_Q = 0$ e il moto è una pura rotazione.

Quindi la rototraslazione che descrive il moto ad un certo istante è caratterizzata da $\boldsymbol{v}$ e ω, ma mentre ω è unica, $\boldsymbol{v}$ dipende da quale asse di rotazione vogliamo considerare. Vedremo un esempio interessante di ciò nel paragrafo 6.8 che tratta il moto di puro rotolamento, cioè il moto ideale di una ruota.

6.3 CORPO CONTINUO. DENSITÀ

Un corpo macroscopico reale ha un struttura continua (evidentemente non stiamo considerando il livello atomico) e può essere assimilato ad un sistema infinito di punti, ciascuno con massa infinitesima dm. Continuano a valere le definizioni e le proprietà viste per i sistemi discontinui di punti materiali, però le sommatorie diventano ora integrali. La posizione del centro di massa (5.3), ad esempio, è data da

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{m} \quad ; \tag{6.1}$$

m rappresenta la massa totale del corpo. Per eseguire il calcolo dell'integrale bisogna esprimere la massa in funzione delle coordinate, ossia conoscere la distribuzione spaziale della massa del corpo.

Introduciamo a tal scopo il concetto di *densità*. Se la massa infinitesima dm occupa il volume infinitesimo dV, dove dV è considerato molto piccolo rispetto al volume V del corpo, ma sufficientemente grande rispetto alle dimensioni atomiche, si definisce come densità ρ il rapporto finito

Densità di un corpo

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad . \tag{6.2}$$

La massa totale del corpo è quindi

$$m = \int dm = \int_V \rho\, dV \quad . \tag{6.3}$$

dove l'integrale è esteso a tutto il volume del corpo.

In generale la massa non è distribuita uniformemente, cioè la densità è funzione della posizione, $\rho = \rho(x, y, z)$. Si pensi ad esempio alla distribuzione di massa nell'atmosfera, in una soluzione o all'interno della terra.

Spesso si utilizza la grandezza *densità media* $\rho = m/V$, dove m e V sono massa totale e volume del corpo. Quando la massa è distribuita uniformemente, cioè il corpo continuo è omogeneo, la densità è costante e il valore medio coincide col valore locale:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad , \quad m = \rho V \tag{6.4}$$

Utilizzando (6.2), la (6.1) diventa

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r}\,\rho\,dV}{m} \quad . \tag{6.5}$$

Nel risolvere l'integrale si osservi che $\mathbf{r}$ e ρ sono funzioni delle coordinate e che anche dV è esprimibile in termini di coordinate: per esempio, in coordinate cartesiane, $dV = dx\,dy\,dz$. L'integrale è un integrale triplo.

In casi particolari la massa può essere distribuita invece che in un volume su una superficie S, come avviene per membrane, dischi, bolle di sapone, oppure lungo una linea, l, come per fili e bacchette sottili. In corrispondenza si introducono i concetti di *densità superficiale* e di *densità lineare*:

$$\rho_s = \frac{dm}{dS} \Rightarrow m = \int \rho_s\,dS \quad , \qquad \rho_l = \frac{dm}{dl} \Rightarrow m = \int \rho_l\,dl \quad . \tag{6.6}$$

Densità superficiale
Densità lineare

lungo una superficie — lungo una linea

ESEMPIO 6.1

Si calcoli la posizione del centro di massa di un semianello rigido omogeneo di massa m e raggio R.

Soluzione

La massa del semianello è data da $m = \rho_l \pi R$; ρ_l, densità lineare dell'anello, è costante poiché il corpo è omogeneo. Individuiamo un punto sull'anello tramite il vettore $\mathbf{r} = R\,\mathbf{u}_r$, dove $\mathbf{u}_r = \text{sen}\,\phi\,\mathbf{u}_x + \cos\phi\,\mathbf{u}_y$. La posizione del centro di massa si calcola con (6.5), adattata al caso unidimensionale:

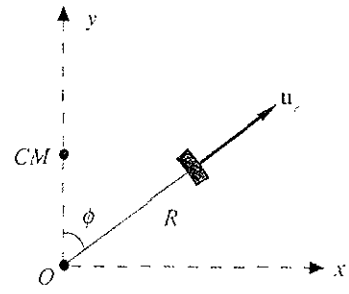


Fig. 6.4

$$m\,\mathbf{r}_{CM} = \int_l \rho_l\,\mathbf{r}\,dl = \int_l \rho_l R\,\mathbf{u}_r R\,d\phi = \rho_l R^2 \int_l \mathbf{u}_r\,d\phi =$$

$$= \rho_l R^2 \int_l (\text{sen}\,\phi\,\mathbf{u}_x + \cos\phi\,\mathbf{u}_y)\,d\phi =$$

$$= \rho_l R^2 \left[\mathbf{u}_x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \text{sen}\,\phi\,d\phi + \mathbf{u}_y \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\phi\,d\phi \right]$$

Il primo integrale è nullo mentre il secondo vale 2. Pertanto

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{2\,\rho_l R^2}{m}\,\mathbf{u}_y = \frac{2\,\rho_l R^2}{\rho_l \pi R}\,\mathbf{u}_y = \frac{2R}{\pi}\,\mathbf{u}_y = 0.637\,R\,\mathbf{u}_y \quad .$$

Il centro di massa si trova sull'asse y, come poteva essere previsto per ragioni di simmetria.

ESEMPIO 6.2

Si trovi la posizione del centro di massa di una lamina piana omogenea di spessore trascurabile, avente la forma di un semicerchio: la massa è m, il raggio R.

Soluzione

Si consideri un elemento dS di lamina, definito da due rette parallele al diametro AB, a distanza y e $y + dy$ dall'origine (vedi figura 6.5). La lunghezza dell'elemento è $2x = 2\sqrt{R^2 - y^2}$, l'altezza dy, la massa $dm = \rho_s\,dS = \rho_s\,2x\,dy$, con ρ_s densità superficiale della lamina.

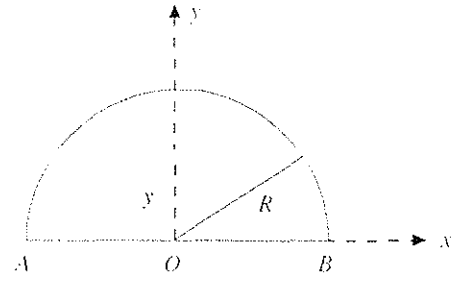


Fig. 6.5

costante. La massa della lamina è $m = \rho_S \pi R^2/2$.
Per ragioni di simmetria il centro di massa si troverà sull'asse y, quindi calcoliamo l'ordinata y_{CM} del centro di massa, sempre da (6.5) opportunamente riscritta e proiettata sull'asse y:

$$m\, y_{CM} = \int_S y\, \rho_S\, 2\, x\, dy = 2\, \rho_S \int_0^R x\, y\, dy \quad .$$

Si osservi che la variabile y può andare da zero a R e che in corrispondenza la variabile x va da R a zero. Da $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ si ricava

$$dy = -\frac{x\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}\, dx \Rightarrow y\, dy = -x\, dx$$

e quindi

$$m\, y_{CM} = -2\, \rho_S \int_R^0 x^2\, dx = 2\, \rho_S \int_0^R x^2\, dx = \frac{2}{3}\, \rho_S R^3 \quad .$$

Sostituendo il valore di m si trova infine

$$y_{CM} = \frac{4\, R}{3\, \pi} = 0.424\, R \quad .$$

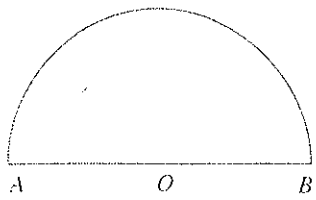


Fig. 6.6

Un metodo alternativo consiste nel considerare una diversa superficie dS (vedi figura 6.6), con $dS = \pi r\, dr$ (base πr per altezza dr). Su dS è distribuita la massa $dm = \rho_S\, dS$. Poiché dS è assimilabile a un semianello di raggio r, sappiamo dall'esempio 6.1 che il relativo centro di massa ha ordinata $y = 2r/\pi$. Il semicerchio è costituito da infiniti semianelli infinitesimi e quindi

$$m\, y_{CM} = \int_S y\, \rho_S\, dS = \int_0^R \frac{2r}{\pi}\, \rho_S\, \pi r\, dr = 2\, \rho_S \int_0^R r^2\, dr =$$

$$= \frac{2}{3}\, \rho_S R^3$$

e si ritrova il risultato precedente.

ESEMPIO 6.3

Si determini la posizione del centro di massa di una bacchetta rettilinea omogenea di massa m e lunghezza l.

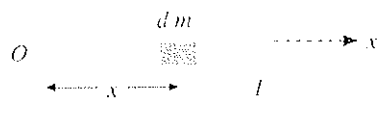


Fig. 6.7

Soluzione
Per ragioni di simmetria il centro di massa deve trovarsi al centro della bacchetta. Consideriamo un elemento di massa $dm = \rho_l\, dx$ posto a distanza x da un estremo della bacchetta, coincidente con l'origine dell'asse x lungo cui è disposta la bacchetta (vedi figura 6.7). Abbiamo

$$m\, x_{CM} = \int_0^l x\, \rho_l\, dx = \rho_l\, \frac{l^2}{2} \quad .$$

Poiché la massa della bacchetta è $m = \rho_l\, l$ troviamo $x_{CM} = \frac{l}{2}$ come previsto.

ESEMPIO 6.4

Si determini la posizione del centro di massa di una bacchetta di massa m e lunghezza l, la cui densità lineare è ρ_1 nel primo tratto lungo $l/3$ e ρ_2 nel secondo tratto lungo $2\,l/3$.

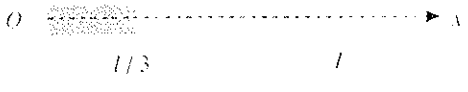


Fig. 6.8

Soluzione
Il centro di massa della prima parte della bacchetta si trova a distanza $l/6$ dall'estremo O, mentre il centro di massa della seconda parte si trova a distanza $\left(\frac{l}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{2l}{3}\right) = \frac{2l}{3}$ dallo stesso estremo. Calcoliamo ora la posizione del centro di massa di due punti materiali,

di massa rispettivamente $\rho_1 \frac{l}{3}$ e $\rho_2 \frac{2l}{3}$, posti nei centri di massa delle due parti della bacchetta. Abbiamo da (5.3):

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_1 \frac{l}{3}\frac{l}{6} + \rho_2 \frac{2l}{3}\frac{2l}{3}}{\rho_1 \frac{l}{3} + \rho_2 \frac{2l}{3}} = \frac{l}{6}\frac{\rho_1 + 8\rho_2}{\rho_1 + 2\rho_2} .$$

Ovviamente, se $\rho_1 = \rho_2$, $x_{CM} = \frac{l}{2}$.

6. ROTAZIONI RIGIDE ATTORNO AD UN ASSE FISSO IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE.

La rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale è una situazione particolare che però si presenta in molti problemi pratici, come ad esempio le rotazioni di parti di macchine o di motori. I punti dell'asse di rotazione sono punti fissi e quindi possono essere utilizzati come poli per il calcolo dei momenti. Si osservi che l'asse di rotazione può essere esterno al corpo e che il centro di massa non è detto sia un punto dell'asse stesso. Il vettore velocità angolare ω ha direzione fissa, quella dell'asse di rotazione, mentre il modulo è in generale variabile nel tempo; il verso di ω indica il verso della rotazione. Se ω varia, è diverso da zero il vettore accelerazione angolare $\alpha = d\omega/dt$, anch'esso parallelo all'asse di rotazione. Nella rotazione rigida ciascun punto P_i del corpo descrive in un piano ortogonale all'asse una traiettoria circolare con centro sull'asse e raggio R_i pari alla distanza di P_i dall'asse. La velocità del punto è $\boldsymbol{v}_i$, di modulo ωR_i, l'accelerazione è $\boldsymbol{a}_i$, con componente normale $\omega^2 R_i$ e tangente αR_i.

Nel seguito, per l'espressione di grandezze additive, useremo per comodità sommatorie sui singoli punti, proprie di un corpo rigido discontinuo. È chiaro peraltro come si passa alla struttura continua e agli integrali.

Calcolo del momento angolare

Assumiamo l'asse z come asse di rotazione; ω è quindi parallelo all'asse z. Il polo dei momenti è il punto O sull'asse z. Il raggio vettore $\mathbf{r}_i$ del punto P_i forma un angolo θ_i con l'asse z e un angolo di $\pi/2$ con la velocità $\boldsymbol{v}_i$ del punto P_i.

In figura 6.9 è mostrata anche la traiettoria del punto P_i, di raggio R_i, e si vede che $R_i = r_i \operatorname{sen} \theta_i$.

Il momento angolare del punto P_i rispetto al polo O è dato da $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$; $\mathbf{L}_i$ è ortogonale al piano individuato dai vettori $\mathbf{r}_i$, $\boldsymbol{v}_i$ e forma un angolo $\frac{\pi}{2} - \theta_i$ con l'asse z. Il modulo di $\mathbf{L}_i$ è

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega .$$

Calcoliamo ora la proiezione del momento angolare $\mathbf{L}_i$ sull'asse di rotazione, ovvero il *momento angolare assiale*:

$$L_{i,z} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \operatorname{sen} \theta_i = m_i r_i \operatorname{sen} \theta_i R_i \omega = m_i R_i^2 \omega .$$

Il momento angolare del corpo è $\mathbf{L} = \Sigma_i \mathbf{L}_i$ e in generale non è parallelo all'asse di rotazione: ciò vuol dire che in generale non esiste una relazione di proporzionalità tra $\mathbf{L}$ e ω. La proiezione di $\mathbf{L}$ sull'asse z è

$$L_z = \Sigma_i L_{iz} = (\Sigma_i m_i R_i^2)\omega = I_z \omega \quad . \tag{6.8}$$

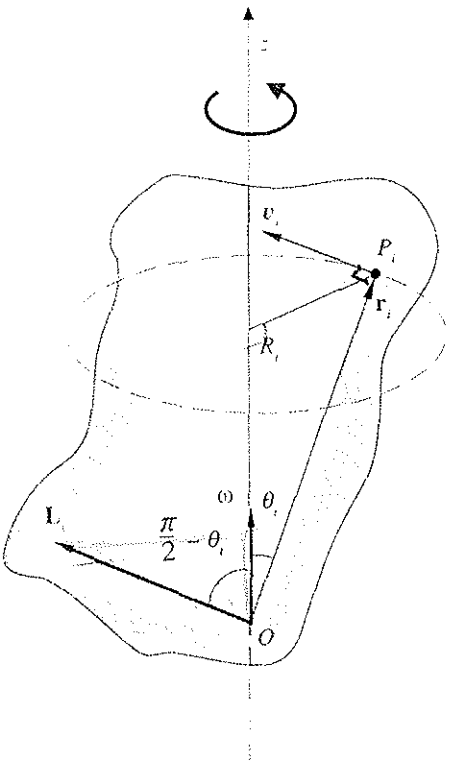


Fig. 6.9

Momento d'inerzia rispetto ad un asse

Il coefficiente I_z si chiama *momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse* z:

$$I_z = \Sigma_i m_i R_i^2 = \Sigma_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \, . \tag{6.9}$$

Il momento d'inerzia dipende quindi dalle masse e dalla loro posizione rispetto all'asse di rotazione: non è una caratteristica del corpo che si possa calcolare nota la sua struttura (come la posizione del centro di massa), ma per definirlo è necessario conoscere anche la posizione rispetto al corpo dell'asse di rotazione.

La (6.8) pertanto dice che *la componente del momento angolare rispetto all'asse di rotazione è proporzionale alla velocità angolare e dipende, tramite il coefficiente I_z, solo dalla forma del corpo e dalla posizione dell'asse rispetto al corpo.*

Riassumendo: il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse non è in generale parallelo all'asse di rotazione e ruota attorno a questo assieme al corpo. La componente parallela all'asse può variare solo in modulo, è proporzionale a ω e non dipende dalla scelta del polo. Invece la *componente ortogonale all'asse* varia in direzione, può variare in modulo e dipende dalla scelta del polo; essa

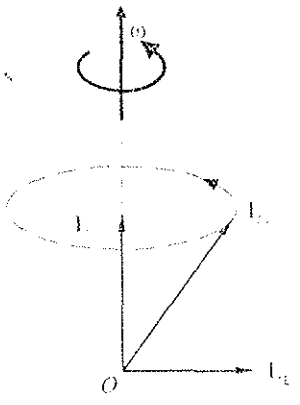


Fig. 6.10

è data dalla somma vettoriale di contributi, ciascuno dei quali vale in modulo

$$L_{i,\perp} = L_i \cos\theta_i = m_i\, r_i\, R_i\, \omega \cos\theta \quad . \tag{6.10}$$

Il momento angolare risulta certamente parallelo all'asse di rotazione e quindi a ω quando l'asse di rotazione è un asse di simmetria del corpo (per ogni $\mathbf{L}_i$ c'è un $\mathbf{L}_j$ simmetrico rispetto all'asse così che la loro somma vettoriale è parallela all'asse) o, più in generale, quando coincide con un asse principale d'inerzia, come vedremo nel paragrafo 6.10. In tali condizioni

$$\mathbf{L} = I\,\omega \quad , \quad L = L_\parallel \quad , \quad L_\perp = 0 \quad . \tag{6.11}$$

ASSE DI ROTAZIONE È QUELLA DI SIMMETRIA

Un moto come quello di $\mathbf{L}$, che ruota attorno all'asse di rotazione, si chiama, come già discusso nel paragrafo 1.11, *moto di precessione* e in particolare moto di precessione uniforme se la velocità angolare è costante. In questo caso anche $\mathbf{L}$ è costante in modulo e dalla (1.32) e (5.11) si ha vedi anche 1.33

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \omega \times \mathbf{L} \tag{6.12}$$

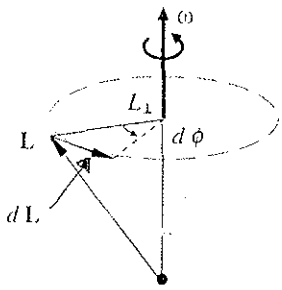


Fig. 6.11

La variazione di $\mathbf{L}$ nel tempo, che si riferisce solo alla variazione di direzione e non del modulo, è espressa semplicemente da $\omega \times \mathbf{L}$; $d\mathbf{L}$ è ortogonale a $\mathbf{L}$ e parallelo a $\mathbf{M}$ e il suo modulo vale, in base alla figura 6.11, $dL = L_\perp\, d\phi$. Pertanto, sempre in modulo

$$M = \frac{dL}{dt} = L_\perp \frac{d\phi}{dt} = L_\perp\, \omega \quad . \tag{6.13}$$

La situazione dinamica dunque è la seguente, nel caso di ω costante: il momento angolare, che non è parallelo a ω, cambia nel tempo secondo (6.12) e ciò è dovuto al momento delle forze esterne, il cui modulo è dato da (6.13). Resta da determinare quali siano le forze esterne che agiscono durante la rotazione uniforme del corpo rigido.

A tal fine utilizziamo un esempio: due punti materiali fissati rigidamente ad O e che ruotano con velocità angolare costante ω, come mostrato nella figura 6.12. Per ciascuno, secondo (6.10), $L_{i,\perp} = m\, r\, R\, \omega \cos\theta$ e quindi $L_\perp = 2\, m\, r\, R\, \omega \cos\theta$; da (6.13) risulta $dL/dt = 2\, m\, r\, R\, \omega^2 \cos\theta$.

Ciascun punto descrive un'orbita circolare e quindi deve agire su di esso la forza centripeta $F_c = m\,\omega^2 R$. Tale forza è esercitata dal supporto rigido, che deve bilanciare inoltre il peso dei due punti. Le due forze centripete costituiscono una coppia di braccio $2\, r \cos\theta$ (vedi figura 6.13) e il momento della coppia vale

$$(m\,\omega^2 R)\,(2\, r \cos\theta) = 2\, m\, r\, R\, \omega^2 \cos\theta \quad ,$$

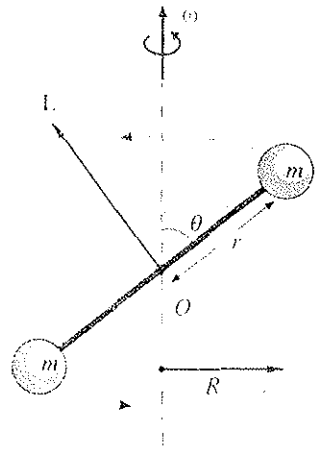


Fig. 6.12

eguale a dL/dt. Rispetto ad O il peso ha momento nullo, secondo (5.28) in quanto $O \equiv CM$. Pertanto il momento esterno che soddisfa alla (6.12) è quello delle forze centripete.

Se fosse $\theta = \pi/2$, ossia se i punti fossero distribuiti simmetricamente rispetto all'asse di rotazione, le due forze centripete formerebbero una coppia di braccio

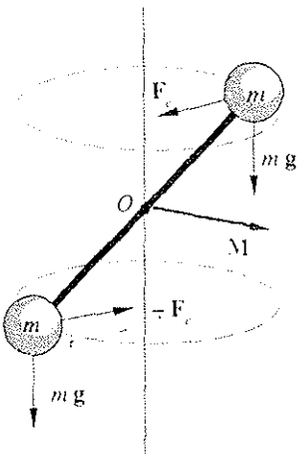


Fig. 6.13

nullo con $\mathbf{M} = 0$ e il momento angolare, in tal caso parallelo a ω, sarebbe costante in direzione e verso oltre che in modulo.

Invece, anche se la rotazione è uniforme, quando le masse sono distribuite in modo tale che $\mathbf{L}$ e ω non siano paralleli, esiste un momento esterno responsabile delle variazioni di $\mathbf{L}$ nel tempo. Tale momento, dovuto alle forze centripete, tende a cambiare l'inclinazione dell'asse di rotazione e quindi sono necessari dei supporti capaci di equilibrare $\mathbf{M}$ e mantenere fisso l'asse di rotazione. Questi supporti sono evidentemente sollecitati, proporzionalmente a ω^2, e devono essere dimensionati in modo adeguato per evitarne la rottura. In pratica conviene, quando ciò non sia in contrasto con altri requisiti, realizzare per sistemi in rotazione una configurazione per cui $\mathbf{L}$ sia parallelo a ω. Questo è il motivo, per esempio, della procedura di equilibratura delle ruote di un'automobile.

I supporti dell'asse di rotazione devono anche sostenere il peso del corpo rigido. Se il centro di massa si trova sull'asse di rotazione, non ci sono altri effetti sui supporti. Se il centro di massa invece ruota attorno all'asse insieme al corpo, i supporti devono fornire la forza centripeta necessaria per mantenere il centro di massa sull'orbita circolare, $\mathbf{F} = m\,\boldsymbol{a}_{CM}$ pari in modulo a $m\,\omega^2 R_{CM}$, ed il momento che bilancia il momento del peso (pari a $\mathbf{r}_{CM} \times m\,\mathbf{g}$).

Nel caso in cui ω non sia costante in modulo oltre agli effetti descritti, che sono ora variabili nel tempo, intervengono altri momenti.

Equazione del moto

Nel caso più semplice in cui $\mathbf{L}$ è parallelo a ω, valgono le (6.11) per cui

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\,\omega) = I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\,\alpha$$

e la (5.11) si scrive

Equazione del moto di rotazione

$$\mathbf{M} = I_z\,\alpha \,. \qquad (6.14)$$

Questa è *l'equazione del moto di rotazione*: la conoscenza del momento delle forze esterne permette di calcolare l'accelerazione angolare, se è noto il momento di inerzia; sia α che $\mathbf{M}$ sono paralleli all'asse di rotazione, cioè a ω.

Si può quindi ottenere la legge oraria, note le condizioni iniziali del moto, cioè la posizione angolare e la velocità angolare iniziali:

$$\alpha = \frac{M}{I_z} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha\,dt \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega\,dt \quad ,$$

che sono le (1.28) e (1.29).

Se $M = 0$ il corpo resta in quiete o si muove con moto circolare uniforme.

$$\alpha = 0 \quad , \quad \omega = \omega_0 \quad , \quad \theta = \theta_0 + \omega t \,.$$

Nel caso che M sia costante il moto è circolare uniformemente accelerato:

$$\alpha = \text{costante} \quad , \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad , \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad .$$

Infine con M generico, $\alpha = \alpha(t)$ e il moto è circolare vario.

Quando invece $\mathbf{L}$ non è parallelo a ω si utilizza (6.8):

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$$

e proiettando (5.11) sull'asse di rotazione

$$M_z = I_z \alpha \quad . \tag{6.15}$$

Da questa si ricava $\alpha = M_z / I_z$ e la legge oraria, con le stesse formule appena scritte: il moto di rotazione dipende adesso dal momento assiale delle forze esterne.

Resta l'altra proiezione di (5.11) in direzione ortogonale all'asse di rotazione, cioè $dL_\perp / dt = M_\perp$. Questa non porta a variazione di α, ma è responsabile degli effetti descritti precedentemente nell'esempio successivo alla (6.13).

La situazione è analoga a quella vista nel moto circolare di un punto materiale. La legge $\mathbf{F} = m\,\boldsymbol{a}$ proiettata sulla tangente alla traiettoria determina l'accelerazione tangenziale $\boldsymbol{a}_T$ e quindi la legge oraria, mentre la proiezione ortogonale alla traiettoria permette di calcolare la forza centripeta necessaria perché avvenga il moto, ma non ha influenza sulla legge oraria.

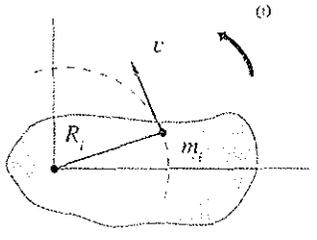


Fig. 6.14

Calcolo dell'energia cinetica e del lavoro.

L'energia cinetica del corpo rigido nel moto di rotazione è data da

$$E_k = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad . \tag{6.16}$$

Anche l'energia cinetica dipende dal momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione. La (6.16) mostra l'altra possibile maniera per arrivare alla definizione di questa grandezza, in accordo con (6.9).

Se il momento angolare è parallelo a ω, da (6.11) abbiamo:

$$E_k = \frac{L^2}{2I_z} \quad ;$$

nel caso contrario $E_k = L_z^2 / 2I_z$.

Quando un corpo rigido in quiete o in rotazione con velocità angolare ω_{in} viene portato a ruotare con velocità angolare ω_{fin} a seguito dell'applicazione di un momento esterno, l'energia cinetica subisce una variazione e quindi è stato compiuto un lavoro. La (5.18) si scrive nel caso in esame

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_{fin}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{in}^2 \tag{6.17}$$

Ricaviamo ora la relazione tra momento e lavoro. La (6.17) in forma infinitesima dà, tenendo conto di (6.16) e (6.15),

$$dW = dE_k = I_z \omega\, d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha\, dt = I_z \alpha\, d\theta = M_z\, d\theta \quad .$$

Integrando dalla posizione iniziale a quella finale

$$W = \int_0^{\theta} M_z \, d\theta \quad . \tag{6.18}$$

Se in particolare $\mathbf{L} = I_z \, \omega$, a M_z va sostituito M. In ogni caso per eseguire il calcolo bisogna conoscere la dipendenza del momento dall'angolo.

La potenza istantanea è data da

$$\frac{dW}{dt} = M_z \frac{d\theta}{dt} = M_z \, \omega \quad .$$

Nella trattazione della rotazione di un corpo rigido abbiamo incontrato situazioni già viste nel moto circolare; anche la (6.18) è formalmente identica alla (2.25). Questo fatto non deve sorprendere perché si tratta sempre di moto circolare, anche se non di un punto, ma di un insieme di punti con distanze mutue invariabili. La legge dinamica è diversa: in essa l'azione esterna è rappresentata dal momento delle forze e l'inerzia del corpo dal momento d'inerzia (come discuteremo nel paragrafo 6.5), però alla fine si arriva a calcolare l'accelerazione angolare α, che è identica per tutti i punti come lo è la velocità angolare, e da questo punto in poi la cinematica è la stessa. Altro fatto in comune, che abbiamo già sottolineato, è la presenza di forze centripete, necessarie perché ci sia un moto circolare.

ESEMPIO 6.5

Si consideri un disco omogeneo, di raggio r e massa m_2, che può ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso orizzontale passante per il suo centro di massa O. Sul bordo del disco è avvolto un filo inestensibile che non slitta rispetto al disco e sostiene un punto materiale di massa m_1. Si determini il moto del sistema, la tensione del filo e la reazione dei supporti che agiscono sull'asse di rotazione. Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione vale $I = \frac{1}{2} m_2 r^2$.

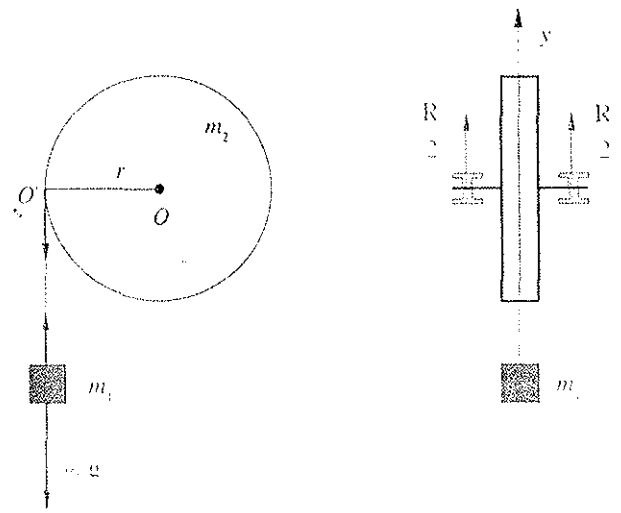


Fig. 6.15

Soluzione

Per l'equilibrio verticale del disco vale l'equazione

$$m_2 \mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{R}_v = 0$$

dove $\mathbf{T}$ è la tensione del filo e $\mathbf{R}_v$ la reazione dei supporti, ciascuno dei quali esercita una reazione $\mathbf{R}_v / 2$ (si veda la figura 6.15).

Come polo dei momenti scegliamo il centro di massa del disco O. Rispetto a tale polo il momento della forza peso è nullo come pure quello di $\mathbf{R}_v$. Solo la tensione del filo ha momento diverso da zero e l'equazione del moto del disco è

$$I \alpha = \mathbf{M}_z = \mathbf{r} \times \mathbf{T} \quad .$$

Per il punto di massa m_1 l'equazione del moto è

$$m_1 \mathbf{g} + \mathbf{T} = m_1 \boldsymbol{a} \quad .$$

Inoltre, data la situazione di non slittamento del filo rispetto al disco, si ha $a = \alpha \, r$: l'accelerazione di m_1 è eguale a quella di tutti i punti del filo e quindi anche di O', che sta sul bordo.

Dalla seconda e terza relazione, riscritte come

$$\frac{1}{2} m_2 r^2 \frac{a}{r} = r T \quad , \qquad m_1 g - T = m_1 a \quad .$$

si ottiene

$$a = \frac{2 m_1}{2 m_1 + m_2}\, g \quad , \quad T = \frac{m_1 m_2}{2 m_1 + m_2}\, g$$

Si sostituisce nella prima relazione e si ha

$$R_v = m_2 g + T = \frac{3 m_1 + m_2}{2 m_1 + m_2}\, m_2 g \quad .$$

che risulta minore di $(m_1 + m_2) g$, reazione dei supporti quando il sistema è fermo.

Il moto del punto materiale è rettilineo uniformemente accelerato (con accelerazione minore di g), mentre per il disco il moto è circolare uniformemente accelerato con accelerazione angolare $\alpha = a/r$.

Suggeriamo, per esercizio, di prendere come polo il punto O' e verificare che la soluzione è la stessa.

L'accelerazione di m_1 e quindi del disco può essere calcolata anche utilizzando la conservazione dell'energia :

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + m_1 g y + \frac{1}{2} I \omega^2 = \text{costante}$$

L'asse verticale y è orientato verso l'alto per cui la velocità del punto materiale è $v = - dy/dt$. Derivando la precedente relazione

$$m_1 v \frac{dv}{dt} - m_1 g v + \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 v\, a - m_1 g v + \frac{1}{2} m_2 r^2 \frac{v}{r} \frac{a}{r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{2 m_1}{2 m_1 + m_2}$$

Dalla conservazione dell'energia possiamo ottenere direttamente la velocità v e la velocità angolare ω in funzione della quota y .

6.5 MOMENTO D' INERZIA

Nello studio delle rotazioni rigide il momento d'inerzia ha un ruolo fondamentale, analogo a quello della massa nella legge di Newton: a parità di momento applicato un corpo assume un'accelerazione angolare maggiore o minore a seconda del valore del momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione. C'è però una profonda differenza nel paragone tra il ruolo della massa e del momento d'inerzia, come abbiamo già sottolineato: mentre possiamo associare ad ogni corpo una certa massa, non ha senso parlare di momento d'inerzia di un corpo di determinata forma, ma bisogna sempre specificare l'asse di rotazione a cui si fa riferimento.

$I_z = \sum m_i R_i^2$

Il *momento d'inerzia per un corpo continuo* si deduce da (6.9) con lo stesso procedimento che porta da (5.3) a (6.5) per la posizione del centro di massa:

$$I = \int R^2 \, dm = \int \rho R^2 \, dV = \int \rho (x^2 + y^2) \, dV \quad ; \qquad (6.19)$$

R è la distanza dell'elemento di massa dm dall'asse z, assunto come asse di rotazione.

Essendo il momento d'inerzia additivo, cioè definito attraverso sommatorie o integrali, se si suddivide un corpo in tante parti *il momento d'inerzia totale è la somma dei momenti d'inerzia parziali, calcolati tutti rispetto allo stesso asse* ; si ricordi il ragionamento analogo fatto per la posizione del centro di massa.

Nella tabella seguente sono riportati i momenti d'inerzia di alcuni corpi rigidi omogenei, rispetto agli assi indicati, che sono assi di simmetria passanti per il centro di massa.

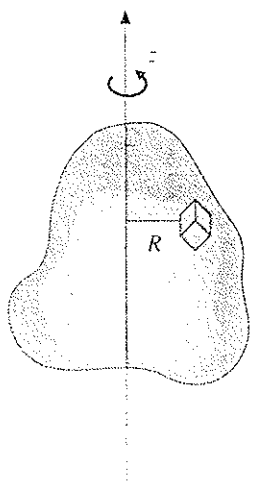
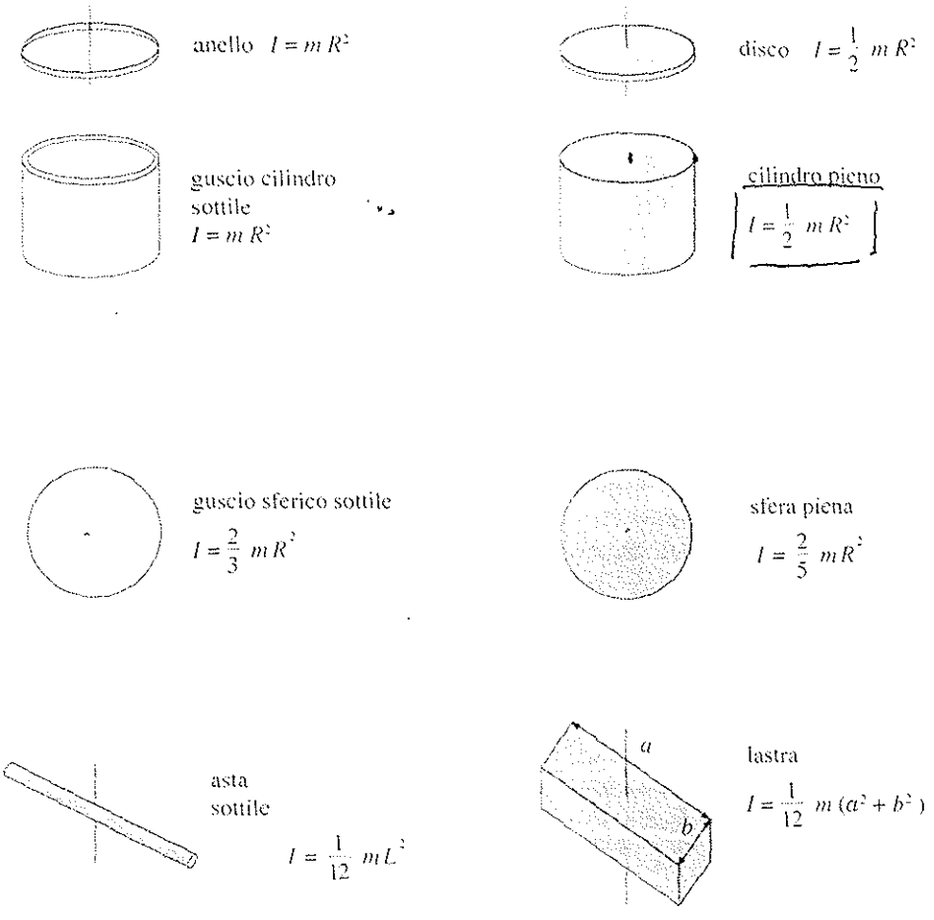


Fig. 6.16



Negli esempi che seguono è indicato il metodo di calcolo di alcuni momenti d'inerzia.

ESEMPIO 6.6

Calcolare il momento d'inerzia di un anello omogeneo, di massa m e raggio R, rispetto ad un asse z passante per il centro dell'anello e ortogonale al piano dell'anello, come nella relativa figura della tabella. Estendere il calcolo a un guscio cilindrico sottile.

Soluzione

Consideriamo prima l'anello: la massa è distribuita uniformemente lungo una circonferenza e pertanto ciascun elemento di massa dell'anello dista della stessa quantità R dall'asse z: il momento d'inerzia vale quindi $I = m R^2$.
Eseguiamo a scopo didattico il calcolo partendo da (6.19) e tenendo conto che la densità è lineare:

$$I = \int R^2 \, dm = \int \rho \, R^2 \, dl = \rho_l R^2 \int dl = \rho_l R^2 \, 2 \pi R.$$

Poiché la massa dell'anello è $m = \rho_l \, 2 \pi R$, si ottiene $I = m R^2$.
Il guscio cilindrico sottile si può considerare come un insieme di anelli sovrapporti e, se m è la massa totale, di nuovo si ha $I = m R^2$ ($= \Sigma_i m_i R^2$).

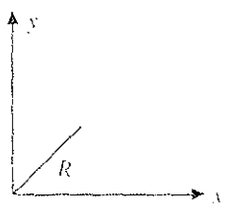


Fig. 6.17

ESEMPIO 6.7

Calcolare il momento d'inerzia di un disco sottile omogeneo, di massa m e raggio R, rispetto ad un asse z ortogonale al piano del disco e passante per il suo centro. Estendere il calcolo a un disco spesso, ovvero a un cilindro pieno.

Soluzione
La massa è distribuita uniformemente sulla superficie del disco, con densità superficiale ρ_S : $m = \rho_S \pi R^2$; il momento d'inerzia è

$$I_z = \int r^2 \, d m = \int \rho_S r^2 \, d S \quad ,$$

dove r rappresenta la distanza dell'elemento di massa $d m$ dall'asse e varia tra zero e R. Per eseguire il calcolo è più semplice utilizzare le coordinate polari nel piano. La superficie infinitesima $d S$ è quella tratteggiata in figura 6.18 e la sua area vale, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $d S = r \, d r \, d \phi$. Pertanto si ha

$$I_z = \rho_S \int r^2 \, r \, d r \, d \phi = \rho_S \int r^3 \, d r \, d \phi \ .$$

Dato che la funzione integranda non dipende da ϕ , è possibile spezzare l'integrale :

$$I_z = \rho_S \int_0^R r^3 \, d r \int_0^{2\pi} d \phi = 2 \pi \rho_S \int_0^R r^3 \, d r = \frac{1}{2} \pi \rho_S R^4 \ .$$

Utilizzando l'espressione della massa, $I_z = \frac{1}{2} m R^2$.
Un cilindro è equivalente ad un insieme di dischi sottili sovrapposti e quindi $I_z = \frac{1}{2} m R^2$ se m è la massa totale.
A questo risultato si può arrivare attribuendo ad ogni disco sottile la massa $d m$ e il momento d'inerzia $d I = R^2 d m$ e sommando tutti i contributi: $I_z = \int d I$; oppure si può pensare alla somma di tanti termini finiti, come fatto per il guscio cilindrico nell'esempio 6.6.

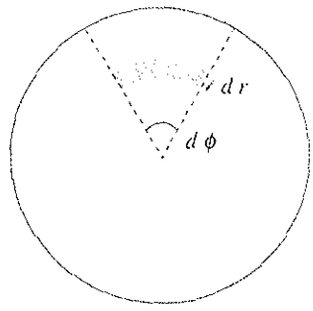


Fig. 6.18

ESEMPIO 6.8

Calcolare il momento d'inerzia di un guscio sferico sottile, di massa m e raggio R, rispetto ad un asse z coincidente con un diametro.

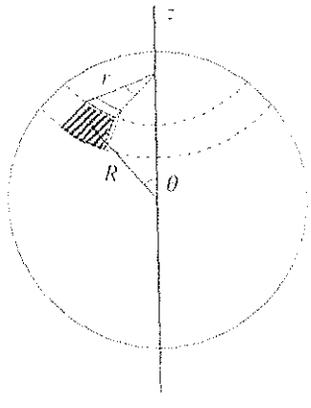


Fig. 6.19

Soluzione
La massa è distribuita uniformemente con densità ρ_σ su una superficie sferica; l'elemento di superficie $d S$ mostrato in figura 6.19 ha l'area

$$d S = r \, d \varphi \, R \, d \theta$$

e su di esso si trova la massa $d m = \rho_\sigma d S$, che dista dall'asse di rotazione $r = R \operatorname{sen} \theta$. Pertanto :

$$I_z = \int r^2 \, d m = \int r^2 \, \rho_\sigma \, r \, d \varphi \, R \, d \theta = \rho_\sigma R^5 \int \operatorname{sen}^3 \theta \, d \theta \, d \varphi$$
$$= \rho_\sigma R^5 \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta \, d \theta \int_0^{2\pi} d \varphi = 2 \pi \rho_\sigma R^5 \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta \, d \theta .$$

L'integrale $\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta \, d \theta$ si può scrivere

$- \int_1^{-1} (1 - \cos^2 \theta) \, d \cos \theta = \frac{4}{3}$; per cui

$$I_z = \frac{8}{3} \pi \rho_\sigma R^5 = \frac{2}{3} m R^2$$

considerando che $m = \rho_\sigma 4 \pi R^2$.

ESEMPIO 6.9

Calcolare il momento d'inerzia di una sfera omogenea, di massa m e raggio R, rispetto ad un asse z coincidente con un diametro.

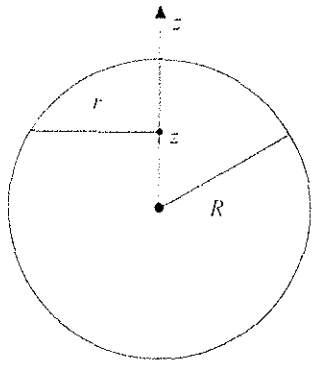


Fig. 6.20

Soluzione
La massa, distribuita uniformemente all'interno della sfera con densità ρ, vale $m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$. Dividiamo la sfera in sezioni circolari di raggio $r = \sqrt{R^2 - z^2}$, distanti z dal centro e ortogonali all'asse z, con spessore dz. Ciascuna è assimilabile a un disco di massa

$$dm = \rho\, dV = \rho\, \pi r^2\, dz$$

e momento d'inerzia

$$dI = \frac{1}{2} dm\, r^2 = \rho\, \pi (R^2 - z^2)^2 dz \quad .$$

Integriamo per z variabile da zero a R e moltiplicando il risultato per due così da coprire l'intera sfera:

$$I_z = \rho\, \pi \int_0^R (R^4 + z^4 - 2R^2 z^2)\, dz$$

$$= \rho\, \pi \left(R^5 + \frac{R^5}{5} - \frac{2}{3} R^5\right) = \rho\, \pi R^5 \frac{8}{15} = \frac{2}{5} m R^2 \quad .$$

Alternativamente, si può considerare la sfera come formata da gusci sferici infinitesimi, cioè di raggio r e spessore dr, con r variabile da zero a R. Ciascun guscio ha massa

$$dm = \rho\, dV = \rho\, 4\, \pi r^2 dr$$

e momento d'inerzia, secondo l'esempio 6.8,

$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{8}{3} \rho\, \pi\, r^4 dr$$

$$\Rightarrow \quad I_z = \frac{8}{3} \rho\, \pi \int_0^R r^4\, dr = \frac{8}{15} \rho\, \pi R^5 = \frac{2}{5} m R^2 \quad .$$

ESEMPIO 6.10

Calcolare il momento d'inerzia di una sottile asta omogenea, di massa m e lunghezza L, rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante per il suo centro. Ripetere il calcolo se invece l'asse passa per un estremo dell'asta.

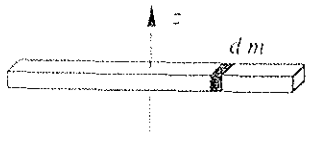


Fig. 6.21

Soluzione
Detta S la sezione dell'asta, la massa è $m = \rho\, S\, L$; un elemento di massa $dm = \rho\, S\, dx$ si trova a distanza x dall'asse (si assume che le dimensioni trasversali siano trascurabili rispetto a L), pertanto

$$I_z = \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dm = \rho S \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dx = \frac{1}{12} \rho\, S\, L^3 \quad .$$

Utilizzando la massa dell'asta, $I_z = \frac{1}{12} m L^2$.

Nel secondo caso, semplicemente

$$I_z = \int_0^L x^2\, dm = \rho S \int_0^L x^2\, dx = \frac{1}{3} \rho\, S\, L^3 = \frac{1}{3} m L^2 \quad .$$

ESEMPIO 6.11

Dato un corpo piatto, per esempio una lamina sottile, che ha una dimensione trascurabile rispetto alle altre due, calcolare i momenti di inerzia rispetto ai tre assi, x, y, z della figura 6.22.

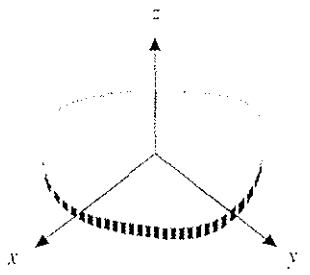


Fig. 6.22

Soluzione
Si può assumere, dato lo spessore trascurabile del corpo, $z = 0$, per cui

$$I_x = \int \rho\,(y^2 + z^2)\,dV = \int \rho\, y^2\, dV$$

$$I_y = \int \rho\,(x^2 + z^2)\,dV = \int \rho\, x^2\, dV$$

$$I_z = \int \rho\,(x^2 + y^2)\,dV = I_x + I_y\ .$$

Se il corpo piatto è un anello con centro nell'origine

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}\, I_z = \frac{1}{2}\, m R^2.$$

Analogamente, per un disco, $I_x = I_y = \frac{1}{2}\, I_z = \frac{1}{4}\, m R^2$.

In tutte le formule trovate il momento d'inerzia ha un'espressione del tipo $I = \int f\, m\, d^2$, dove m è la massa del corpo, d una dimensione significativa (ad esempio il raggio per un sfera, la lunghezza per un'asta ecc.) e f un fattore numerico legato alla struttura del sistema (forma del corpo e posizione dell'asse di rotazione). Pertanto il momento d'inerzia si può sempre scrivere come

$$I = m\,k^2 \quad , \quad k = \sqrt{f}\ d = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad ; \qquad (6.20)$$

Raggio giratore

k è il *raggio giratore* del corpo. Dato un corpo con momento d'inerzia I rispetto ad un asse, si immagini di concentrare la sua massa in un punto: k rappresenta la distanza dall'asse a cui bisogna porre questo punto per avere lo stesso momento d'inerzia I.

Unità di misura

In questo capitolo sono state introdotte due nuove grandezze, la densità e il momento d'inerzia. Abbiamo le seguenti unità di misura:

densità	kg / m^3
densità superficiale	kg / m^2
densità lineare	kg / m
momento d'inerzia	kg m^2.

Si faccia attenzione al fatto che talvolta le densità sono date in g / cm^3 e che 1 kg / m^3 = 10^{-3} g / cm^3; per esempio, la densità dell'acqua nel sistema internazionale (SI) è 10^3 kg / m^3.

6.6 TEOREMA DI HUYGENS-STEINER.

Abbiamo già messo in evidenza, nei precedenti calcoli di momenti d'inerzia, come siano stati scelti assi di rotazione particolari, cioè assi di simmetria passanti per il centro di massa. Se si sceglie un altro asse per il quale vengono meno le condizioni di simmetria il calcolo dei vari integrali può diventare a volte assai complicato.

Il *teorema di Huygens-Steiner* (H.S.) semplifica enormemente il problema. Esso stabilisce che *il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che si trova a una distanza a dal centro di massa del corpo è dato da*

Teorema di Huygens-Steiner

$$I = I_c + m\,a^2 \tag{6.21}$$

dove I_c è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

Per dimostrare il teorema, consideriamo due assi z e z', tra loro paralleli, distanti a ; l'asse z' passa per il centro di massa. La relazione tra le coordinate nei due sistemi, con centro in O e nel centro di massa, è dato da

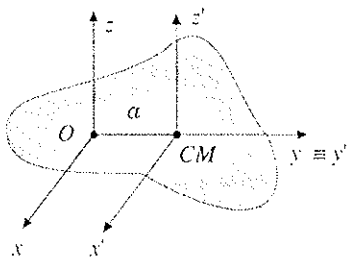


Fig. 6.23

$$x = x' \quad , \quad y = y' + a \quad , \quad z = z' \quad .$$

Il momento d'inerzia di un punto generico P_i rispetto all'asse z è dato da

$$m_i\,(x_i^2 + y_i^2)\,.$$

Sommiamo su tutti i punti utilizzando le formule di trasformazione:

$$I_z = \Sigma_i\, m_i\,(x_i^2 + y_i^2) = \Sigma_i\,[\,x_i'^2 + (\,y_i' + a\,)^2\,] =$$

$$= \Sigma_i\, m_i\,(x_i'^2 + y_i'^2) + \Sigma_i\, m_i\, a^2 + 2\,a\,\Sigma_i\, m_i\, y_i' = I_{z'} + m\,a^2$$

Il primo termine è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse z', il secondo è $m\,a^2$ e il terzo è nullo in quanto $\Sigma_i\, m_i\, y_i' = m\, y_{CM}'$ e y_{CM}', coordinata del centro di massa nel sistema del centro di massa, è nulla. Abbiamo quindi trovato la (6.21).

Il teorema di H.S. si rivela così un utilissimo strumento di calcolo: è sufficiente determinare il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e lo si può ricavare rispetto a qualunque altro asse parallelo; notiamo che è sempre $I' > I_c$.

Per esempio, il momento d'inerzia di un disco rispetto ad un asse ortogonale al disco e passante per il bordo vale

$$I = \frac{1}{2}\,m\,R^2 + m\,R^2 = \frac{3}{2}\,m\,R^2 \quad .$$

Analogamente il momento d'inerzia di un'asta lunga L rispetto ad un asse passante per un estremo e ortogonale all'asta si scrive

$$I = \frac{1}{12}\,m\,L^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\,m\,L^2 \,,$$

come ricavato direttamente nell'esempio 6.10.

ESEMPIO 6.12

Calcolare il momento d'inerzia di una lastra piana omogenea rettangolare, di lati a e b e massa m, rispetto ad un asse z di rotazione ortogonale alla lastra e passante per il suo centro.

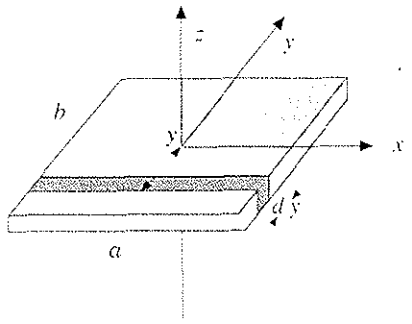


Fig. 6.24

Soluzione
Sulla lastra della figura 6.24 è tracciato un elemento a forma di asta sottile, lungo a, largo $d\,y$, con il centro distante y dall'origine e di massa $d\,m = \rho\, d\,S = \rho\, a\, d\,y$. Il suo momento d'inerzia, per (6.21), è

$$d\,I = \frac{1}{12}\, d\,m\, a^2 + d\,m\, y^2$$

e il momento d'inerzia della lastra, di massa $m = \rho\, a\, b$, risulta

$$I_z = \int_S d\,I = \frac{1}{12}\, m\, a^2 + \int y^2\, d\,m$$

$$= \frac{1}{12}\, m\, a^2 + \rho\, a \int_{-b/2}^{b/2} y^2\, d\,y =$$

$$= \frac{1}{12}\, m\, a^2 + \rho\, a\, \frac{b^3}{12} = \frac{1}{12}\, m\,(a^2 + b^2).$$

ESEMPIO 6.13

Calcolare il momento d'inerzia di un sistema costituito da un'asta omogenea di lunghezza L e massa m, con agli estremi due sfere omogenee di raggio R e massa M (i centri delle sfere si trovano sulla retta individuata dall'asta) rispetto ad un asse passante per il centro C dell'asta e a questa ortogonale.

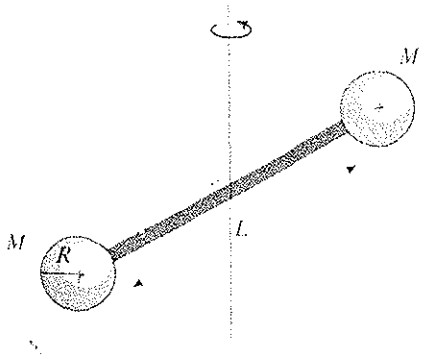


Fig. 6.25

Soluzione
Calcoliamo il momento di inerzia di una delle due sfere rispetto all'asse di rotazione, applicando il teorema di H.S. :

$$I_s = \frac{2}{5}\, M\, R^2 + M \left(\frac{L}{2} + R\right)^2 \quad ;$$

$\frac{L}{2} + R$ è la distanza tra il centro della sfera e il centro dell'asta. Per l'asta

$I_a = \frac{1}{12}\, m\, L^2$ e in totale

$$I = 2\, I_s + I_a = 2\, M \left[\frac{2}{5}\, R^2 + \left(\frac{L}{2} + R\right)^2\right] + \frac{1}{12}\, m\, L^2 \,.$$

Riprendiamo in esame l'espressione (6.16) dell'energia cinetica di rotazione, dove I_z è il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse z di rotazione, e applichiamo il teorema di H.S. (6.21):

$$E_k = \frac{1}{2}\,(I_z + m\, a^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}\, I_z\, \omega^2 + \frac{1}{2}\, m\, a^2\, \omega^2 \quad ;$$

I_z è il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse z, mentre a è la distanza tra i due assi. D'altra parte $a\ \omega$ rappresenta la velocità v_{CM} del centro di massa, che percorre una traiettoria circolare di raggio a rispetto all'asse z; quindi

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \ ,$$

in accordo col risultato del teorema di König per l'energia cinetica (5.17) e con le caratteristiche del moto rigido: quando il centro di massa non è sull'asse di rotazione, l'energia cinetica è data dalla somma di $E'_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$, tipico della rotazione che costituisce il moto rispetto al centro di massa, e di $E_{k,CM} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$, energia cinetica del centro di massa.

6.7 PENDOLO COMPOSTO

Si chiama *pendolo composto*, o pendolo fisico, *ogni corpo rigido che possa oscillare, per azione del suo peso, in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il centro di massa*. In figura 6.26 è rappresentata la sezione del pendolo contenente il centro di massa CM ; O è la traccia dell'asse di rotazione, ortogonale al foglio, e h è la distanza del centro di massa da O.

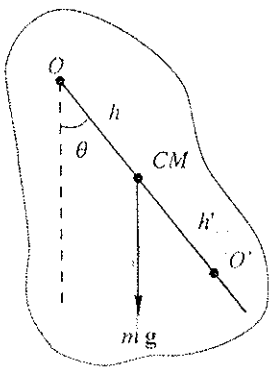


Fig. 6.26

Se si sposta il pendolo composto dalla posizione di equilibrio statico ($\theta = 0$, centro di massa sulla retta verticale passante per O), sia a destra che a sinistra, l'azione del peso è tale da riportare il pendolo verso la posizione di equilibrio.

Il momento della forza peso, che agisce come un momento di richiamo verso $\theta = 0$, è parallelo all'asse di rotazione e vale $M_z = -m g h \ \text{sen}\ \theta$. Se non esistono momenti di forze di attrito nella rotazione attorno all'asse, gli eventuali momenti dovuti alle reazioni dei supporti sono ortogonali all'asse stesso e pertanto l'equazione del moto è (6.15):

$$M = \frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m g h \ \text{sen}\ \theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m g h}{I_z} \ \text{sen}\ \theta = 0 \ ;$$

I_z è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione orizzontale, z ; per il teorema di H.S., $I_z = I_0 + m h^2$.

Se l'ampiezza delle oscillazioni è piccola, $\text{sen}\ \theta \cong \theta$, e si ottiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m g h}{I_z} \theta = 0 \ ,$$

che è l'equazione del moto armonico e ha la soluzione

$$\theta = \theta_0 \ \text{sen}\ (\Omega t + \phi) \ .$$

La pulsazione è $\Omega = \sqrt{m g h / I_c}$ e il periodo vale

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{m g h}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad ; \qquad (6.22)$$

Lunghezza ridotta del pendolo composto

$l = I_c / m h$ rappresenta la *lunghezza ridotta del pendolo composto* e corrisponde alla lunghezza del filo di un pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo.

Quando l'ampiezza dell'oscillazione è grande il pendolo si muove ancora di moto periodico, ma non più armonico (si riveda la discussione a proposito del pendolo semplice nel paragrafo 2.13).

Non è più armonico perché il periodo dipende dalla ampiezza.

Osserviamo che, posto $h' = I_c / m h$ ovvero $I_c = m h h'$, si ha

$$l = \frac{I_c}{m h} = \frac{I_c + m h^2}{m h} = \frac{I_c}{m h} + h = h' + h > h \quad :$$

la lunghezza l individua rispetto a O un punto O' distante h' dal centro di massa (come mostrato in figura 6.26). Se facciamo oscillare il pendolo rispetto ad un asse orizzontale passante per O' (e parallelo al precedente asse), la distanza tra il centro di oscillazione e il centro di massa è ora h'. Chiamiamo I' il momento d'inerzia del corpo rispetto al nuovo asse di rotazione; la nuova lunghezza ridotta è

$$l' = \frac{I'}{m h'} = \frac{I_c + m h'^2}{m h'} = \frac{m h h' + m h'^2}{m h'} = h + h' = l \quad ,$$

eguale alla precedente. I due assi passanti per O e O' si chiamano *assi reciproci* e concludiamo che il periodo di oscillazione attorno ai due assi reciproci è lo stesso.

Il pendolo fisico viene impiegato per misurare accuratamente il valore dell'accelerazione di gravità g: la precisione può raggiungere una parte su 10^6. Nel dispositivo detto pendolo reversibile di Kater il corpo è un'asta che può essere sospesa in due punti O e O': i due assi di rotazione passanti per O e O' sono all'incirca reciproci. Si possono fare scorrere lungo l'asta due piccole masse, in modo da variare il momento d'inerzia e la posizione del centro di massa, fino a trovare una configurazione in cui i periodi di oscillazione rispetto ai due assi sono eguali. D'altra parte la distanza fissa $l = OO'$ è misurabile con precisione. Pertanto dalla misura del periodo si ricava g attraverso (6.22).

6.8 MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

Passiamo adesso a considerare una situazione fisica differente in cui l'asse di rotazione non viene mantenuto fisso da opportuni supporti. Abbiamo un corpo rigido, a simmetria cilindrica o sferica, che si trova sopra un piano e si muove rispetto ad esso. Se le velocità di tutti i punti sono eguali tra loro e parallele al piano abbiamo un moto di traslazione e il corpo striscia sul piano. In generale però il corpo in questione rotola sul piano e il punto di contatto ha velocità non nulla rispetto al piano: si dice allora che il *corpo rotola e striscia*. Se invece la velocità del punto di contatto è nulla si ha un *moto di puro rotolamento*, le cui proprietà vogliamo studiare. L'esempio pratico immediato di questo problema è il moto di una ruota.

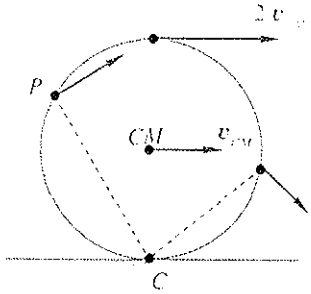


Fig. 6.27

In ogni istante il corpo che rotola senza strisciare può venire considerato come

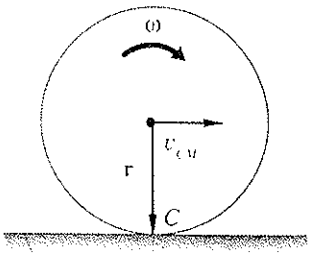


Fig. 6.28

se ruotasse rispetto ad un asse fisso, passante per il punto di contatto C e ortogonale al piano della figura 6.27, con velocità angolare ω. La velocità di ogni punto del corpo di conseguenza è ortogonale alla linea che congiunge il punto con C ed è in modulo proporzionale alla distanza da C, $v_P = \omega\, |PC|$. In un istante successivo il contatto avviene in un altro punto C', infinitamente vicino a C, e si ripete la rotazione attorno ad un altro asse fisso passante per C' e così di seguito.

È evidente che deve agire una forza per tenere fermo, nell'intervallo dt, il punto C: si tratta di una *forza di attrito statico* (il punto C è fermo) *che si esercita tra il piano e il corpo*.

La velocità del punto C, distante r dal centro di massa, si può sempre scrivere $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, somma della velocità del centro di massa e della velocità di C relativa al centro di massa; si ricordi che la velocità angolare, rispetto ad un asse passante per il centro di massa parallelo all'asse fisso o rispetto a quest'ultimo, è sempre la stessa. La condizione di puro rotolamento è $\boldsymbol{v} = 0$ e quindi

$$\boldsymbol{v}_{CM} = -\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

(nella figura 6.28 $\boldsymbol{\omega}$ è diretto verso il foglio, $\mathbf{r}$ da CM a C e quindi $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ risulta opposto a $\boldsymbol{v}_{CM}$). In modulo

$$v_{CM} = \omega r \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \alpha r \qquad (6.23)$$

nel moto di puro rotolamento esiste una precisa relazione tra la velocità con cui avanza il centro di massa e la velocità angolare, cioè queste due grandezze non sono indipendenti, come invece succede in una generica rototraslazione.

Per trattare una situazione dinamica completa consideriamo un corpo rigido di forma circolare, massa m, raggio r, momento d'inerzia $I = m\,k^2$ rispetto ad un asse orizzontale passante per il centro di massa e parallelo all'asse z della figura 6.29 in accordo con (6.20). Questo corpo rotola senza strisciare sul piano orizzontale x , z sotto l'azione di una forza $\mathbf{F}$, parallela all'asse x e applicata nel centro di massa, e di un momento $\mathbf{M}$, parallelo all'asse z e applicato all'asse passante per il centro di massa.

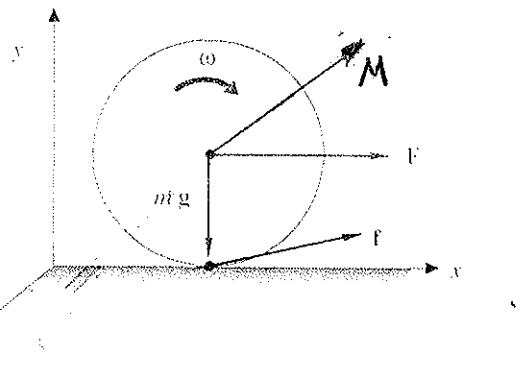


Fig. 6.29

Le forze agenti sul corpo sono la forza $\mathbf{F}$ e il peso m g, applicati nel centro di massa, e la reazione $\mathbf{f}$ del piano, applicata nel punto di contatto. Il moto avviene lungo l'asse x, nel piano verticale x, y.

Scriviamo prima l'equazione (5.6) del moto del centro di massa:

$$\mathbf{F} + \mathbf{f} + m\,\mathbf{g} = m\,\boldsymbol{a}_{CM}$$

$$\Rightarrow F\,\mathbf{u}_x + f_x\,\mathbf{u}_x + f_y\,\mathbf{u}_y - m\,g\,\mathbf{u}_y = m\,a_{CM}\,\mathbf{u}_x$$

Pertanto lungo i due assi si ha

$$F + f_x = m\,a_{CM} \qquad \text{equazione del moto}$$

$$f_y = m\,g \qquad \text{equazione dell'equilibrio verticale.}$$

Nella rotazione rispetto al centro di massa $\mathbf{L}' = I\,\boldsymbol{\omega}$, per cui, utilizzando (5.11) e (6.14) abbiamo

$$\mathbf{M}^{(E)} = \frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{f} \Rightarrow -m\,k^2\,\alpha\,\mathbf{u}_z = -M\,\mathbf{u}_z + r\,f_x\,\mathbf{u}_z \ .$$

Il segno negativo è conseguenza del fatto che $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{M}$ hanno verso opposto rispetto all'asse z. Tenendo conto di (6.23) scriviamo

$$m\,k^2\,a_{CM} = r\,M - r^2 f_x \qquad \text{equazione della rotazione}$$

Risolviamo nelle due incognite a_{CM} e f_x :

$$a_{CM} = \frac{r\,(r\,F + M)}{m\,(r^2 + k^2)} \quad , \quad f_x = \frac{r\,M - k^2\,F}{r^2 + k^2} \ . \qquad (6.24)$$

Perché il punto di contatto sia fermo deve essere soddisfatta la condizione

$$f_x \le \mu_s\,f_y = \mu_s\,m\,g \ .$$

La forza di attrito statico f_x necessaria per mantenere fermo il punto di contatto non può superare il valore massimo che si può esplicare tra le due superfici a contatto, pari al prodotto del coefficiente di attrito statico per la componente normale della reazione vincolare. Se questo non succede il corpo rotola e striscia contemporaneamente.

In particolare, per una ruota omogenea $I = \frac{1}{2}\,m\,r^2$, $k^2 = \frac{r^2}{2}$ e le (6.24) diventano

$$a_{CM} = \frac{2}{3}\,\frac{r\,F + M}{m\,r} \quad , \quad f_x = \frac{2\,M - r\,F}{3\,r} \ .$$

Se sulla ruota agisce solo una forza trainante e quindi $M = 0$, si ha:

$$a_{CM} = \frac{2\,F}{3\,m} \quad , \quad f_x = -\frac{F}{3} \ ;$$

la forza di attrito è opposta a $\mathbf{F}$: questa tende a spostare il punto di contatto nella direzione positiva dell'asse x e pertanto la forza di attrito deve essere opposta per mantenere fermo il punto C ; è il momento di $\mathbf{f}$ a provocare la rotazione.

Se invece agisce solo il momento (per esempio dovuto a un motore), $F = 0$ e

$$a_{CM} = \frac{2M}{3m\,r} \quad , \quad f_s = \frac{2M}{3r} \quad ;$$

la forza di attrito è ora positiva (e provoca l'accelerazione del centro di massa), ma il suo momento si oppone a **M**. Infatti **M** tende a portare il punto di contatto all'indietro e quindi f_s deve essere positiva.

Infine se $F = 0$ e $M = 0$, anche $a_{CM} = 0$, $f_s = 0$; il corpo rimane in quiete o si muove con moto uniforme, v_{CM} = costante, ω = costante (si noti che in tal caso la traiettoria di un punto sul bordo della ruota è la cicloide del paragrafo 1.13).

Esiste inoltre un caso in cui, con forza e momento non nulli, si può avere puro rotolamento con forza di attrito nulla:

$$\text{se} \quad M = \frac{r}{2} F \quad , \quad a_{CM} = \frac{F}{m} \quad , \quad f_s = 0 \quad .$$

In conclusione, nel moto di rotolamento di un corpo rigido si possono realizzare condizioni in cui la reazione del piano è tale da tenere fermo il punto di contatto, così che il corpo rotola senza strisciare (*moto di puro rotolamento*).

Per avere un moto accelerato la presenza dell'attrito (statico) è essenziale, salvo casi particolari. Però le forze e i momenti agenti devono essere tali che la componente della reazione vincolare lungo il piano (forza di attrito) non superi la forza massima di attrito statico, altrimenti il corpo oltre a rotolare striscia. In questo caso agisce la forza di attrito dinamico.

Nel moto di puro rotolamento la forza di attrito non compie lavoro, in quanto applicata ad un punto che resta fermo (c'è forza, ma non c'è spostamento); pertanto *si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica.*

Il moto di puro rotolamento è la condizione che si cerca sempre di realizzare quando un corpo deve rotolare, per esempio per le ruote di un qualsiasi veicolo, su strada o su rotaia, anche nella fase di frenata.

Attrito volvente

Attrito volvente

Sperimentalmente si osserva che un corpo che rotola senza strisciare sopra un piano orizzontale, in assenza di forze e momenti applicati, si arresta dopo un certo tempo. Deve esistere perciò un'altra forma di attrito (*attrito volvente o di rotolamento*), che viene attribuito alla deformazione locale del piano ed è schematizzato con l'azione di un momento $M_v = h\,m\,g$, che si oppone al moto; h è il *coefficiente di attrito volvente*, espresso in metri. Per vincere il momento dovuto all'attrito volvente si deve applicare al corpo di forma circolare, di massa m e raggio r, una forza di trazione $F_2 \geq h\,m\,g/r$.

Consideriamo ad esempio un cilindro di acciaio ($m = 10^3$ kg, $r = 0.2$ m) posto sopra un piano di acciaio; siano $\mu_s = 0.2$ e $h = 5 \cdot 10^{-5}$ m rispettivamente il coefficiente di attrito statico e di attrito volvente. La trazione limite per farlo strisciare è $F_1 = \mu_s\, m\, g = 1960$ N, mentre quella per farlo rotolare è $F_2 = h\,m\,g/r = 2.5$ N. Dato che $F_2 << F_1$ è più vantaggiosa la ruota!

ESEMPIO 6.14

Determinare la velocità che raggiunge alla fine del percorso un corpo rigido che rotola senza strisciare lungo un piano inclinato.

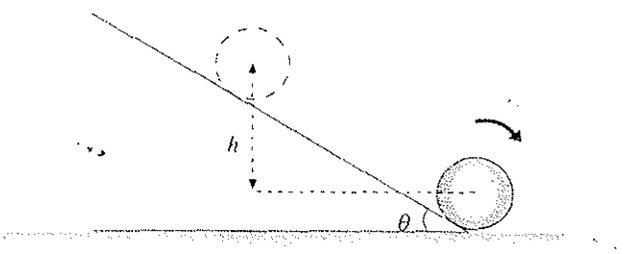


Fig. 6.30

Soluzione

Applichiamo la conservazione dell'energia, assumendo che per $t = 0$ il corpo sia in quiete. La variazione di energia potenziale, data da (5.21), è $m g h$; per l'energia cinetica finale utilizziamo il teorema di König (5.17):

$$m g h = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} m k^2 \frac{v_{CM}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \quad .$$

Pertanto

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2 g h}{1 + \dfrac{k^2}{r^2}}} < \sqrt{2 g h} \quad .$$

Se il corpo scivolasse senza attrito arriverebbe in fondo con velocità maggiore, $v_{CM} = \sqrt{2gh}$. Invece, se rotola senza strisciare, l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica di traslazione $\frac{1}{2} m v_{CM}^2$ e in energia cinetica di rotazione nel moto rispetto al centro di massa $\frac{1}{2} I_c \omega^2$. Per questa ragione la velocità finale deve essere inferiore a $\sqrt{2gh}$.

L'accelerazione e la forza di attrito statico agente durante il moto di puro rotolamento si ottengono dalle equazioni

$$m g \operatorname{sen} \theta - f = m a_{CM} \quad , \quad f r = I_c \alpha = m k^2 \frac{a_{CM}}{r} \quad ,$$

che sono le (6.24) con $M = 0$, $f_s = -f$ e $F = m g \operatorname{sen} \theta$. Inoltre deve essere soddisfatta la condizione

$$f \le \mu_s m g \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \theta \le \mu_s \left(1 + \frac{r^2}{k^2} \right) \quad .$$

Il significato di quest'ultimo risultato è che, per avere moto di puro rotolamento, l'angolo di inclinazione del piano non deve superare il valore

$$\theta_M = \operatorname{arctg} \mu_s \left(1 + \frac{r^2}{k^2} \right) \quad .$$

Osserviamo, per curiosità, che in una gara tra un anello, un disco e una sfera, di eguale massa e raggio, che scendono rotolando senza strisciare lungo un piano inclinato, la vittoria spetta alla sfera e l'ultimo posto all'anello. Infatti dalla tabella del paragrafo 6.5 per l'anello $k^2/r^2 = 1$ e $v_{CM} = \sqrt{g h}$, per il disco $k^2/r^2 = 1/2$ e $v_{CM} = \sqrt{1.33\, g h}$, per la sfera $k^2/r^2 = 2/5$ e $v_{CM} = \sqrt{1.43\, g h}$. A parità di massa e raggio, la differenza sta nella distribuzione della massa rispetto all'asse di rotazione.

$$a_{CM} = \frac{g \operatorname{sen} \theta}{1 + \dfrac{k^2}{r^2}} \quad , \quad f = \frac{m g \operatorname{sen} \theta}{1 + \dfrac{r^2}{k^2}} \quad .$$

ESEMPIO 6.15

Un disco, di raggio r e massa m, scende srotolando un filo, che non slitta rispetto al bordo del disco. Determinare l'accelerazione del centro di massa e la tensione del filo.

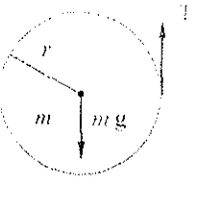


Fig. 6.31

Soluzione

Il moto del centro di massa obbedisce alla relazione

$$m g - T = m a_{CM}$$

mentre per il moto rispetto al centro di massa si ha

$$T r = I_c \alpha = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a_{CM}}{r}$$

Pertanto

$$a_{CM} = \frac{2}{3} g \quad , \quad T = \frac{1}{3} m g .$$

Il moto è uniformemente accelerato con velocità

$$v_{CM} = \frac{2}{3} g t \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2 g t}{3 r}$$

se la velocità iniziale è nulla.

Si noti che la tensione del filo quando il disco è in moto è inferiore al valore $m g$ che si avrebbe se il disco fosse fermo.

Il problema può essere risolto anche con la conservazione dell'energia, analogamente a quanto visto nell'esempio 6.5. Assumendo l'asse y verticale orientato verso l'alto

$$\frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 + m g y_{CM} = \text{costante}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} m v_{CM}^2 + m g y_{CM} = \text{costante}$$

in quanto $\omega = v_{CM}/r$ e $I_c = \frac{1}{2} m r^2$. Si deriva rispetto al tempo:

$$\frac{3}{2} m v_{CM} a_{CM} - m g v_{CM} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{2}{3} g .$$

ESEMPIO 6.16

Un cilindro di raggio $R/4$ rotola senza strisciare dentro un tubo di raggio R. Nella metà di destra del tubo l'attrito è nullo. Se all'istante iniziale il cilindro è fermo e la quota del centro di massa è $R/2$, determinare la posizione di arrivo del cilindro e la velocità angolare ω.

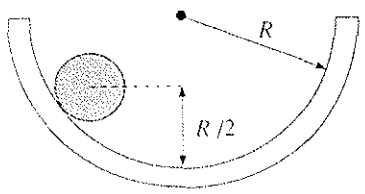


Fig. 6.32

Soluzione

Nel punto più basso il centro di massa è sceso della quantità $\frac{R}{2} - \frac{R}{4} = \frac{R}{4}$ rispetto alla posizione iniziale. Pertanto, conservando l'energia,

$$m g \frac{R}{4} = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

con $I = \frac{1}{2} m \left(\frac{R}{4}\right)^2$ e $v_{CM} = \omega \frac{R}{4}$. Allora, nel punto più basso

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{g R}{3}} \quad , \quad \omega = 4 \sqrt{\frac{g}{3 R}} .$$

Quando risale nella parte destra il cilindro non incontra attrito e quindi ω rimane costante, come pure l'energia cinetica di rotazione:

$$\frac{1}{2} I_c \omega^2 = \frac{1}{12} m g R = \frac{1}{3} m g \left(\frac{R}{4}\right) = \text{costante} .$$

L'energia cinetica di traslazione si trasforma invece in energia potenziale:

$$\frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{6} m g R = \frac{2}{3} m g \left(\frac{R}{4}\right) = m g \Delta h$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{R}{6} = \frac{2}{3} \frac{R}{4} .$$

La quota finale del centro di massa è $\frac{R}{4} + \frac{2}{3} \frac{R}{4} = \frac{5}{3} \frac{R}{4}$; questo valore è pari a $\frac{5}{6}$ del valore iniziale $\frac{R}{2}$. In conclusione, il centro di massa è sceso di $\frac{R}{4}$ e poi risale di $\frac{2}{3} \frac{R}{4}$: un terzo dell'energia potenziale iniziale si è trasformata in energia cinetica di rotazione, come visto prima.

Nell'istante in cui il corpo si ferma e torna indietro, la sua energia è dunque cinetica di rotazione e potenziale: quando ripassa nel punto più basso, l'energia è tutta cinetica. Nella risalita lungo il tratto con attrito il moto non è di puro rotolamento (il corpo ruota nel verso sbagliato) e il momento dell'attrito frena la rotazione, con conseguente dissipazione di energia. Perciò alla fine, dopo una serie di oscillazioni, il corpo si ferma.

6.9 MOMENTO DELL'IMPULSO

Un modo particolare per mettere in rotazione rispetto ad un asse fisso o per fare rotolare un corpo rigido è di applicargli per un tempo molto breve una forza (abbiamo visto nel paragrafo 5.11 il concetto di *forza impulsiva*), ovvero di applicargli *l'impulso* $\mathbf{J} = \int \mathbf{F}\, dt$. Sappiamo che ciò causa una variazione di quantità di moto. D'altra parte, ricordando (2.24), il *momento dell'impulso*, rispetto al polo scelto per i momenti, è

$$\mathbf{r} \times \mathbf{J} = \Delta \mathbf{L} = \mathbf{L}_{fin} - \mathbf{L}_{in}$$

e quindi abbiamo anche una variazione di momento angolare.

$$\int_0^t \mathbf{M}\, dt = \int_0^t (\mathbf{r} \times \mathbf{F})\, dt = \mathbf{r} \times \int_0^t \mathbf{F}\, dt = \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \Delta \mathbf{L}$$

$$\text{e } \mathbf{J} = \Delta \mathbf{p}$$

ESEMPIO 6.17

Si consideri un pendolo composto, costituito da un'asta di lunghezza l e massa m, libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale, passante per un suo estremo O. Inizialmente l'asta è ferma in posizione verticale. Si determini l'impulso $\mathbf{J}$, ortogonale all'asta, che si deve applicare a distanza $r \le l$ da O per far compiere all'asta una rotazione di 90°.

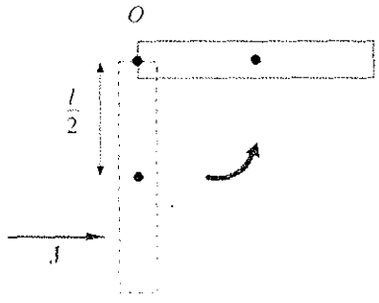


Fig. 6.33

Soluzione

Il momento dell'impulso, rispetto ad O, è dato in modulo da rJ. Applichiamo il teorema del momento dell'impulso con $L_{in} = 0$ e quindi $L_{fin} = I\,\omega = rJ$. I è il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per O e vale $\frac{1}{3} ml^2$. La velocità angolare che l'asta acquista a seguito dell'applicazione dell'impulso è

$$\omega = \frac{3\, rJ}{m\, l^2} \quad .$$

L'applicazione dell'impulso ha durata così breve da poter considerare l'asta ferma in tale intervallo di tempo. Subito dopo però l'asta inizia a ruotare e, dopo una rotazione di 90°, il centro di massa si è sollevato di $l/2$, per cui l'energia potenziale dell'asta è aumentata di $m\,g\,l/2$. Per la conservazione dell'energia

$$m\,g\,\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2 \Rightarrow J = \frac{m}{r} \sqrt{\frac{g\, l^3}{3}} \quad .$$

Osserviamo un fatto importante: da ω possiamo calcolare la velocità del centro di massa subito dopo l'applicazione dell'impulso. Risulta

$$v_{CM} = \omega\, \frac{l}{2} = \frac{3\, rJ}{2\, m\, l} \quad ,$$

diversa da J/m. Questo perché durante l'applicazione di $\mathbf{J}$ si sviluppa nel polo O una reazione vincolare impulsiva, di cui bisogna tener conto. Anzi, proprio dal calcolo della variazione di quantità di moto, che è $m\, v_{CM}$, e da J si può determinare l'impulso della reazione.

L'impulso di reazione non compare invece nel momento dell'impulso perché rispetto ad O ha momento nullo.

In conclusione, bisogna fare attenzione e considerare tutti i possibili contributi nella relazione

$$(m\, \mathbf{v}_{CM})_{fin} - (m\, \mathbf{v}_{CM})_{in} = \mathbf{J} \quad ,$$

soprattutto quando il corpo è vincolato.

ESEMPIO 6.18

Una sfera omogenea di massa m e raggio r è posta sopra un *piano orizzontale scabro*; inizialmente la sfera è in quiete. Viene applicato un impulso orizzontale **J**, la cui retta di azione passa per il centro della sfera. Determinare il moto della sfera.

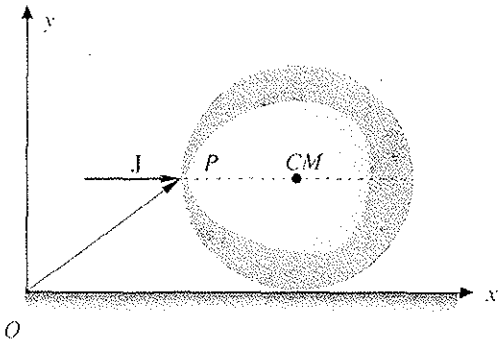


Fig. 6.34

Soluzione
La velocità iniziale del centro di massa nell'istante successivo all'azione di **J**, si ottiene applicando il teorema dell'impulso:

$$\mathbf{J} = m\,\boldsymbol{v}_{CM} \Rightarrow v_{CM}(0) = \frac{J}{m}$$

(la sfera non è vincolata, la forza di attrito non è impulsiva).
Inoltre, dal teorema del momento dell'impulso, prendendo come polo l'origine O del sistema di riferimento, si ha:

$$\mathbf{OP} \times \mathbf{J} = \mathbf{L}_O = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times m\,\boldsymbol{v}_{CM} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{J} \ ,$$

dove si è utilizzata (5.16). In modulo $r\,J = I_c\,\omega + r\,J$ e quindi $\omega = 0$: il corpo, nell'istante successivo all'azione dell'impulso, inizia a strisciare con velocità $v_{CM}(0)$, ma non rotola, $\omega\ (0) = 0$.
Successivamente agisce solo la forza di attrito $\mu_d\,m\,g$ opposta al moto:

$$m\,a_{CM} = -\mu_d\,m\,g \quad , \quad a_{CM} = -\mu_d\,g \ ,$$

$$v_{CM}(t) = v_{CM}(0) - \mu_d\,g\,t = \frac{J}{m} - \mu_d\,g\,t \ .$$

Per effetto del momento della forza di attrito il corpo inizia a rotolare, pur continuando a strisciare. Assumendo come polo il centro di massa

$$\mu_d\,m\,g\,r = I_c\,\alpha = \frac{2}{5}\,m\,r^2\alpha \quad , \quad \alpha = \frac{5}{2}\,\mu_d\,\frac{g}{r} \quad ,$$

$$\omega(t) = \alpha\,t = \frac{5}{2}\,\mu_d\,\frac{g\,t}{r}$$

All'istante iniziale $v_{CM} > \omega\,r$ e finché vale questa diseguaglianza il corpo prosegue nel suo moto di rotolamento con strisciamento. Poiché però v_{CM} decresce e ω aumenta, ad un certo istante t^* $v_{CM} = \omega\,r$ ovvero

$$\frac{J}{m} - \mu_d\,g\,t^* = \frac{5}{2}\,\mu_d\,g\,t^*$$

$$\Rightarrow\ t^* = \frac{2}{7}\,\frac{J}{\mu_d\,m\,g} \quad , \quad v_{CM}(t^*) = \frac{5\,J}{7\,m} = \frac{5}{7}\,v_{CM}(0) \ .$$

Considerato che non agiscono sulla sfera forze motrici o momenti motori e che è soddisfatta la condizione $v_{CM} = \omega\,r$, per $t > t^*$ il moto della sfera diventa uniforme e di puro rotolamento.
Notiamo che durante il moto il momento della forza di attrito rispetto ad O è sempre nullo e che quindi, rispetto ad O, si conserva il momento angolare. All'inizio $L = J\,r$, durante il moto $L = I_c\,\omega + r\,m\,v_{CM}$; eguagliando e imponendo $v_{CM} = \omega\,r$ si trova subito $v_{CM} = 5\,J\,/\,7m$. Questo tipo di soluzione non ci dà però il valore di t^*.
Applichiamo ora l'impulso **J** ad un'altezza h rispetto al piano del moto, diversa da r, e cerchiamo qual è il valore

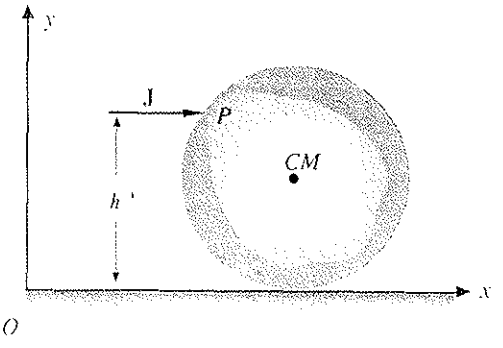


Fig. 6.35

di h per cui la sfera inizia a muoversi con moto di puro rotolamento.
È sempre $v_{CM}(0) = J\,/\,m$. Dal teorema del momento dell'impulso rispetto al centro di massa abbiamo

$$\mathbf{r} \times \mathbf{J} = \mathbf{L} = I_c\,\boldsymbol{\omega} \quad , \quad (h - r)\,J = \frac{2}{5}\,m\,r^2\,\omega \ ,$$

$$\omega = \frac{5}{2}\,\frac{(h - r)\,J}{m\,r^2} \ .$$

Imponendo $J\,/m = \omega\,r$ si ottiene $h = \frac{7}{5}\,r$.
Si osservi che con $h > r$ $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$ ovvero ω è diretto verso il foglio, cioè il moto di rotazione è orario, come deve in questo caso . Se fosse $h < r$ ω sarebbe invece diretto verso il lettore e non si potrebbe realizzare un moto di puro rotolamento (verso destra).
Le situazioni descritte sono tipiche del moto di una palla di bigliardo colpita con la stecca.

6.10 TEOREMA DI POINSOT. ELLISSOIDE D'INERZIA

Consideriamo, figura 6.36, un punto qualsiasi O di un corpo rigido e assumiamo un sistema di riferimento con origine in O e con i tre assi x, y, z solidali al corpo stesso. Il versore di un qualsiasi asse di rotazione passante per O si scrive $\mathbf{u} = \alpha\,\mathbf{u}_x + \beta\,\mathbf{u}_y + \gamma\,\mathbf{u}_z$, dove α, β, γ, coseni direttori dell'asse, sono le componenti di $\mathbf{u}$ rispetto ai tre assi di riferimento (si veda il paragrafo 6.1).

Un punto P_i del corpo è individuato dal vettore posizione

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{OP}_i = x_i\,\mathbf{u}_x + y_i\,\mathbf{u}_y + z_i\,\mathbf{u}_z \quad .$$

La sua distanza dall'asse di rotazione è

$$R_i = r_i\ \text{sen}\ \theta_i = |\ \mathbf{u} \times \mathbf{r}_i\ |$$

e il momento d'inerzia vale

$$m_i\,R_i^2 = m_i\,(\ \mathbf{u} \times \mathbf{r}_i\ )^2 \quad .$$

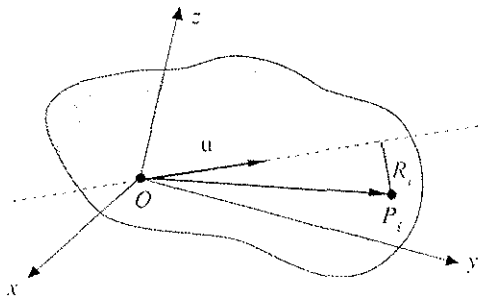


Fig. 6.36

Il prodotto vettoriale, espresso tramite le componenti di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{r}_i$ (vedi appendice C), si scrive

$$\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i = (\ \beta z_i - \gamma y_i\ )\,\mathbf{u}_x + (\ \gamma x_i - \alpha z_i\ )\,\mathbf{u}_y + (\ \alpha y_i - \beta x_i\ )\,\mathbf{u}_z \quad .$$

Eseguendo il quadrato di $\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i$ abbiamo il momento d'inerzia di P_i rispetto all'asse di rotazione. Il *momento d'inerzia del corpo* si ottiene sommando su tutti i punti:

$$I = I_{xx}\,\alpha^2 + I_{yy}\,\beta^2 + I_{zz}\,\gamma^2 - 2\,I_{xy}\,\alpha\beta - 2\,I_{yz}\,\beta\gamma - 2\,I_{zx}\,\gamma\alpha \quad , \qquad (6.25)$$

dove i coefficienti I_{ij} hanno le seguenti espressioni:

$I_{xx} = \Sigma_i\, m_i\,(\ y_i^2 + z_i^2\ )$ momento d'inerzia rispetto all'asse x

$I_{yy} = \Sigma_i\, m_i\,(\ x_i^2 + z_i^2\ )$ momento d'inerzia rispetto all'asse y

$I_{zz} = \Sigma_i\, m_i\,(\ x_i^2 + y_i^2\ )$ momento d'inerzia rispetto all'asse z

$I_{xy} = \Sigma_i\, m_i\,x_i\,y_i \quad , \quad I_{yz} = \Sigma_i\, m_i\,y_i\,z_i \quad , \quad I_{zx} = \Sigma_i\, m_i\,z_i\,x_i \quad .$

Gli ultimi tre termini sono detti *prodotti d'inerzia*.

La formula (6.25), che fornisce il momento d'inerzia in funzione dei coseni direttori dell'asse di rotazione, è valida qualunque sia l'asse di rotazione.

Consideriamo ora sull'asse di rotazione il punto geometrico P, la cui distanza da O vale $d = 1 / \sqrt{I}$; le coordinate di tale punto sono :

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I}} \quad , \quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I}} \quad , \quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}} \quad .$$

Infatti, per ricavare i valori delle coordinate di P basta ricordare che l'estremo del vettore $\mathbf{u}$, che dista di una lunghezza unitaria da O, ha coordinate α, β, γ e quindi un punto che dista d ha coordinate αd, βd , γd .

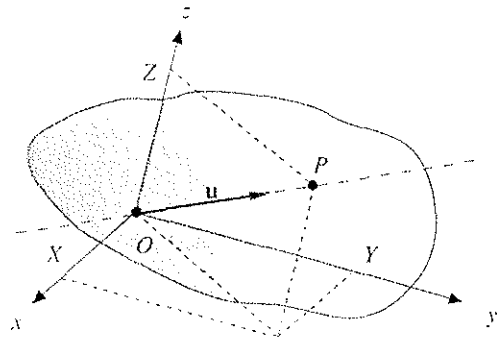


Fig. 6.37

Dividiamo l'espressione (6.25) proprio per I :

Ellissoide d'inerzia
Teorema di Poinsot

$$1 = I_{xx} X^2 + I_{yy} Y^2 + I_{zz} Z^2 - 2 I_{xy} X Y - 2 I_{yz} Y Z - 2 I_{zx} Z X \, . \qquad (6.26)$$

Questa relazione dà la condizione a cui soddisfano le coordinate di un qualsiasi punto che dista dall'origine di una lunghezza $1 / \sqrt{I}$, essendo I il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione individuato dai punti O e P. Geometricamente, il luogo dei punti che soddisfano (6.26) è una superficie tridimensionale detta ellissoide di centro O ; nel caso specifico esso prende il nome di *ellissoide d'inerzia del corpo relativo al punto O*.

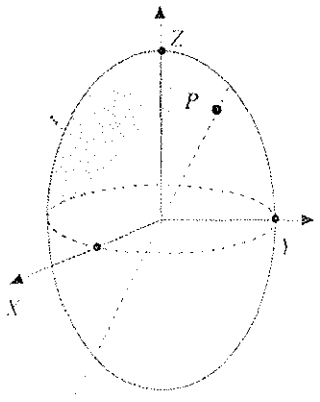


Fig. 6.38

Il risultato ora ottenuto, valido qualunque sia la distribuzione di massa del corpo e comunque si scelga il punto O, rappresenta il *teorema di Poinsot* : fissato il punto O, in base alle caratteristiche del problema, e tre assi cartesiani con centro in O, è possibile immediatamente calcolare i coefficienti I_{ij} e determinare l'equazione dell'*ellissoide d'inerzia*, che è *fisso rispetto al corpo* e quindi *non dipende dalla scelta del sistema di riferimento, ma solo da O*. Se si prende ora un qualsiasi asse di rotazione, passante per O, e si calcola la distanza tra O e il punto geometrico P di intersezione dell'asse con l'ellissoide, questa vale $1 / \sqrt{I}$ e quindi è ottenuto il momento d'inerzia del corpo rispetto a quell'asse. La determinazione, sempre possibile, dell'ellissoide d'inerzia fornisce la conoscenza del momento d'inerzia del corpo rispetto a qualsiasi asse di rotazione passante per il centro dell'ellissoide.

Nel tipo più generale di ellissoide si possono individuare, nel piano equatoriale, un diametro massimo ed uno minimo, tra loro perpendicolari; tali assi, con un terzo perpendicolare a entrambi, vengono chiamati *assi dell'ellissoide*.

Se come assi x, y, z solidali al corpo si scelgono proprio gli assi dell'ellissoide, si può dimostrare che la (6.26) assume la forma

$$I_1 X^2 + I_2 Y^2 + I_3 Z^2 = 1 \quad , \qquad (6.27)$$

dove I_1, I_2, I_3 sono i momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi dell'ellissoide e si chiamano *momenti principali d'inerzia*. Gli assi dell'ellissoide, fissi rispetto al corpo, si chiamano *assi principali d'inerzia*. I tre semiassi dell'ellissoide (vedi figura 6.38) hanno lunghezze rispettivamente

$$1/\sqrt{I_1} \quad , \quad 1/\sqrt{I_2} \quad , \quad 1/\sqrt{I_3} \quad .$$

Se il punto O coincide con il centro di massa, si parla di *ellissoide centrale d'inerzia* e di *assi centrali d'inerzia*.

Ellissoide centrale d'inerzia

Gli assi centrali d'inerzia, come gli assi principali d'inerzia, sono sempre almeno tre, ma possono essere di numero superiore se il corpo è dotato di particolari simmetrie. Ciò è evidente dalla forma dell'ellissoide d'inerzia: se si tratta, ad esempio, di un ellissoide di rotazione rispetto all'asse Z, cioè ottenuto facendo ruotare un'ellisse attorno ad un suo asse, qualsiasi asse nel piano X, Y passante per il centro è asse centrale d'inerzia. Se inoltre l'ellissoide si riduce ad una superficie sferica, qualsiasi asse passante per il centro è asse centrale d'inerzia.

Rivediamo, alla luce di quanto discusso in questo paragrafo, la relazione tra il momento angolare $\mathbf{L}$ e il vettore velocità angolare ω.

Il momento angolare, rispetto al polo O, è dato da:

$$\mathbf{L} = \Sigma_i \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \Sigma_i \mathbf{r}_i \times m_i (\omega \times r_i) \; ;$$

ω è parallelo all'asse di rotazione e può essere espresso come

$$\omega = \omega_1 \mathbf{u}_1 + \omega_2 \mathbf{u}_2 + \omega_3 \mathbf{u}_3 \quad .$$

Sviluppando il prodotto vettoriale $\Sigma_i \mathbf{r}_i \times m_i (\omega \times \mathbf{r}_i)$ e calcolando le componenti si ottiene

$$L_1 = I_{11} \omega_1 - I_{12} \omega_2 - I_{13} \omega_3$$

$$L_2 = -I_{21} \omega_1 + I_{22} \omega_2 - I_{23} \omega_3$$

$$L_3 = -I_{31} \omega_1 - I_{32} \omega_2 + I_{33} \omega_3 \quad .$$

Gli elementi della matrice simmetrica detta *matrice d'inerzia*

$$\begin{vmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{vmatrix}$$

Matrice d'inerzia

sono gli stessi che compaiono nella (6.25).

Se scegliamo come assi di riferimento gli assi principali d'inerzia relativi ad O *la matrice d'inerzia risulta diagonalizzata* e la relazione tra $\mathbf{L}$ e ω si semplifica:

momenti principali di inerzia

$$\mathbf{L} = I_x \omega_x \mathbf{u}_x + I_y \omega_y \mathbf{u}_y + I_z \omega_z \mathbf{u}_z \quad , \tag{6.28}$$

dove I_x, I_y, I_z hanno lo stesso significato che nella (6.27).

La (6.28) evidenzia che per un generico asse di rotazione passante per O, ossia per una generica direzione di ω rispetto al corpo, $\mathbf{L}$ non è parallelo a ω. Però, se si sceglie come asse di rotazione proprio un asse principale d'inerzia, ω è parallelo a quell'asse e quindi ha componente solo lungo quell'asse (le altre due componenti sono nulle); conseguentemente risulta $\mathbf{L} = I\,\omega$, dove I rappresenta il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse principale d'inerzia coincidente con l'asse di rotazione.

Quest'ultimo argomento mette in luce l'importanza degli assi principali d'inerzia: dato un corpo rigido e fissato un suo punto O, *esistono sempre almeno tre assi passanti per quel punto e ortogonali tra loro tali che quando il corpo ruota rispetto ad uno di essi il momento angolare* $\mathbf{L}$ *è parallelo a* ω, *ovvero all'asse di rotazione.* È quindi possibile, nella pratica, realizzare nelle parti rotanti di una macchina la condizione $\mathbf{L} = I\,\omega$, essenziale per ridurre al minimo le sollecitazioni ai supporti dell'asse di rotazione, come discusso nel paragrafo 6.4.

Si noti che se un corpo, sottoposto alla forza peso, viene posto in rotazione rispetto ad un asse centrale d'inerzia, con il che il centro di massa sta sull'asse di rotazione, non c'è alcun momento esterno che faccia cambiare direzione all'asse; è sufficiente un supporto che sostenga il peso del corpo e l'asse conserva invariata la propria direzione. Discuteremo tale situazione nel prossimo paragrafo.

Valutiamo ora l'energia cinetica del corpo nel sistema di riferimento degli assi principali d'inerzia. Con sviluppi analoghi a quelli precedenti si trova

$$E_k = \frac{1}{2}\left(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2\right) \quad .$$

Utilizzando (6.28) si ottiene

$$E_k = \frac{1}{2}\,(\omega \cdot \mathbf{L}) = \frac{1}{2}\left(\frac{L_x^2}{I_x} + \frac{L_y^2}{I_y} + \frac{L_z^2}{I_z}\right) . \tag{6.29}$$

Se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia l'energia cinetica vale

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

dove I coincide con I_x o I_y o I_z.

Come osservazione conclusiva sottolineamo un aspetto del teorema di Poinsot: anche se a livello della distribuzione geometrica delle masse, cioè a livello della forma del corpo, non ci sono evidenti simmetrie, c'è sempre una simmetria nei momenti d'inerzia, che si manifesta con l'esistenza dell'ellissoide d'inerzia.

6.11 GIROSCOPI

Si chiama *giroscopio un corpo rigido con un punto che è mantenuto fisso da un opportuno sistema di vincoli*. Il moto del giroscopio risulta in una rotazione rispetto ad un asse passante per il punto fisso, asse che in generale varia nel tempo. Il moto è piuttosto complicato e ci limitiamo, pertanto, ad esaminare solo qualche caso semplice.

1° Caso

Il punto fisso coincide con il centro di massa, non ci sono momenti esterni rispetto al centro di massa ($\mathbf{M} = 0$) e la rotazione avviene attorno ad un asse centrale d'inerzia, per cui $\mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$.

Tale situazione si realizza tramite dispositivi a *sospensione cardanica*, come in figura 6.39. Il giroscopio è il disco interno che ruota intorno all'asse z. L'anello esterno può ruotare attorno all'asse x, mentre quello interno attorno all'asse y. L'asse di rotazione z può essere orientato in qualsiasi direzione. Il peso del giroscopio è equilibrato dalla reazione dei supporti dell'asse x.

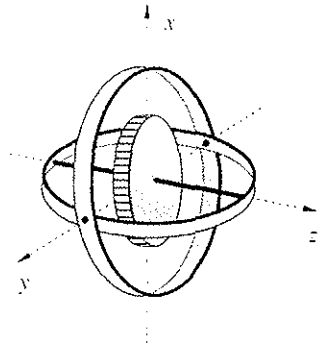


Fig. 6.39

Dato che $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{L}$ = costante e quindi anche ω = costante. *L'asse di rotazione resta fisso nel tempo.*

Un'applicazione di questa proprietà si realizza negli stabilizzatori di direzione. Un giroscopio, montato su un corpo in movimento, mantiene la direzione del suo asse fisso, ad esempio posizionata, all'inizio del moto del corpo, parallelamente alla direzione da seguire. Se il corpo devia da questa direzione cambia l'orientazione relativa tra corpo e giroscopio. Questa deviazione, evidenziata da opportuni sensori, attiva il dispositivo per la correzione automatica della rotta.

2° Caso

Il punto fisso coincide con il centro di massa, la rotazione ha luogo attorno ad un asse centrale d'inerzia, $\mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, ma agisce rispetto al punto fisso un momento esterno.

Avendo come riferimento la figura 6.39, supponiamo che l'asse di rotazione sia orizzontale e che venga applicata una forza verticale, come in figura 6.40a. Il momento rispetto al centro di massa è $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ e giace in un piano orizzontale. la variazione di $\mathbf{L}$ è $d\mathbf{L} = \mathbf{M}\,dt$, parallela a $\mathbf{M}$: l'asse si sposta in un piano orizzontale e non verso il basso ($\mathbf{L}$, costante in modulo, *precede* rispetto ad un asse verticale con velocità angolare Ω tale che $\mathbf{M} = \Omega \times \mathbf{L}$). Se invece la forza applicata è orizzontale (figura 6.40b) l'asse ruota in un piano verticale.

Precessione del giroscopio

Il comportamento sarebbe ben diverso se fosse $\omega = 0$: lo spostamento dell'asse seguirebbe $\mathbf{F}$ e non sarebbe a 90° rispetto a $\mathbf{F}$, i momenti sarebbero ancora quelli disegnati, ma sia $\mathbf{L}$ che $d\mathbf{L}$ risulterebbero paralleli a $\mathbf{M}$.

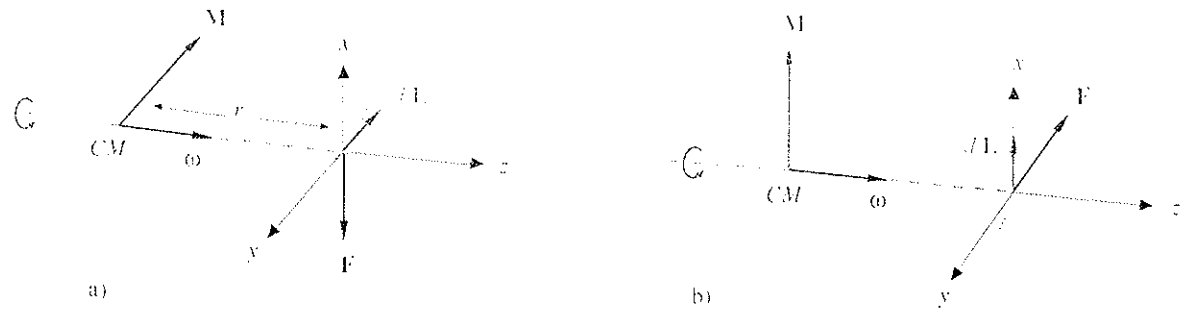


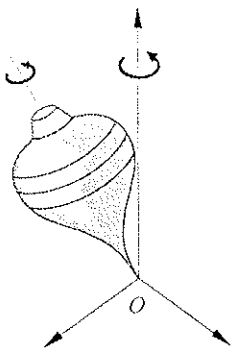
Fig. 6.40

3° Caso

Il punto fisso coincide con il centro di massa, non ci sono momenti esterni, però $\mathbf{L} \neq I\,\omega$. Per fare questo nel dispositivo della figura 6.39 bisogna aggiungere qualche massa al disco, oppure bisogna modificare il tipo di sospensione.

Dalla condizione $\mathbf{M} = 0$ si ha sempre $\mathbf{L}$ = costante, però ω non è costante. Rispetto alla direzione costante individuata da $\mathbf{L}$ varia la direzione dell'asse di rotazione, che non è più un asse centrale d'inerzia; risulta che l'asse di rotazione non è fisso nemmeno rispetto al corpo. Il fenomeno si chiama *nutazione*.

Nutazione del giroscopio



4° Caso

Il punto fisso O è diverso dal centro di massa e quindi, rispetto a O, è diverso da zero il momento della forza peso.

L'esempio tipico è costituito dal moto di una trottola (figura 6.41). Il punto fisso, assunto come polo, è il punto di contatto della trottola con il piano di appoggio. L'asse di rotazione, che è un asse centrale d'inerzia, passa per O e per il centro di massa. Abbiamo $\mathbf{L} = I\,\omega$ con ω costante in modulo.

Il momento della forza peso è $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\,\mathbf{g}$, mentre il momento della reazione del piano è nullo. Pertanto

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times m\,\mathbf{g}$$

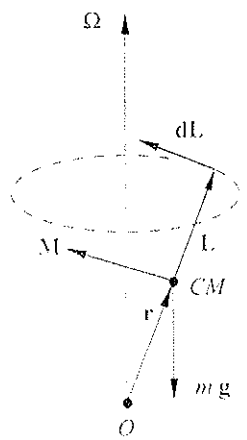


Fig. 6.41

Periodo di precessione

e, siccome $\mathbf{L}$ è costante in modulo, vale anche la (6.12):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \Omega \times \mathbf{L} = \Omega \times I\,\omega \quad ; \qquad M = \frac{dL}{dt} = \omega \times L$$

Ω è *la velocità angolare di precessione del vettore* $\boldsymbol{L}$, ovvero dell'asse di rotazione della trottola, rispetto all'asse verticale passante per O. Eguagliando

$$\Omega \times I\,\omega = \mathbf{r} \times m\,\mathbf{g}$$

$$\Rightarrow \Omega = -\frac{mr}{I\,\omega}\,\mathbf{g}$$

La *velocità angolare di precessione* è inversamente proporzionale alla velocità angolare della trottola. Il *periodo del moto di precessione* è

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi I\,\omega}{m\,g\,r}$$

La precessione descritta qui è analoga a quella vista nel secondo caso. Il fenomeno si verifica quando è applicata all'asse di rotazione una forza costante con momento normale all'asse.

Osserviamo, anche se a posteriori, che nell'analisi del moto della trottola abbiamo fatto un'approssimazione: $\mathbf{L}$ non coincide completamente con $I\omega$ perché il corpo, oltre a ruotare attorno all'asse passante per O e per il centro di massa, ruota anche rispetto ad un asse verticale. Tuttavia, se ω è grande la precessione è molto lenta e il suo contributo al momento angolare è piccolo.

Se l'asse di rotazione non è un asse centrale di inerzia alla precessione si aggiunge la nutazione.

6.12 CORPO RIGIDO LIBERO.

Nello studio del moto di un corpo rigido libero, cioè di un corpo in cui nessun punto è vincolato, si utilizzano le due equazioni:

$\mathbf{R} = m\,\boldsymbol{a}_{CM}$ moto del centro di massa,

$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ moto rispetto al centro di massa.

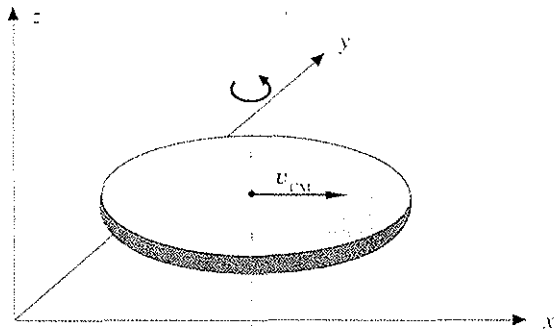


Fig. 6.42

Il moto è in generale complicato in quanto l'asse di rotazione può variare nel tempo, anche rispetto al corpo. Se rispetto al centro di massa $\mathbf{M} = 0$, come nel caso agisca solo la forza peso, $\mathbf{L}$ = costante. Si ha ω = costante solo se la rotazione avviene attorno ad un asse centrale d'inerzia.

Un esempio molto semplice di corpo rigido libero è un disco che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo centro e contemporaneamente si sposta in un piano in assenza di attrito (v_{CM} = costante, ω = costante).

Un caso interessante si ricava dall'esempio 6.17. Nell'istante in cui si applica l'impulso $\mathbf{J}$ in un punto posto alla distanza d dal centro di massa l'asta è lasciata libera. La velocità con cui si muove il centro di massa subito dopo l'applicazione dell'impulso è $\boldsymbol{v}_{CM} = \mathbf{J}/m$. Inoltre l'asta inizia a ruotare, attorno ad un asse orizzontale passante per il centro di massa, in verso antiorario e con velocità angolare ω ricavabile tramite il momento dell'impulso:

$$\mathbf{d} \times \mathbf{J} = \mathbf{L} = I_c\,\omega = \frac{1}{12} m l^2 \omega \quad , \quad \omega = \frac{12\,d\,J}{m l^2} \quad .$$

Successivamente l'asta continua a ruotare con velocità angolare costante ω attorno all'asse orizzontale passante per il centro di massa, che a sua volta percorre una traiettoria parabolica in un piano verticale. L'equazione del moto del centro di massa è $m\,\boldsymbol{a}_{CM} = m\,\mathbf{g}$, con la condizione iniziale $\boldsymbol{v}_{CM}(0) = \mathbf{J}/m$.

Consideriamo infine il moto della terra. Le forze esercitate dal sole e dalla luna hanno momento non nullo rispetto al centro di massa della terra e pertanto si ha una precessione dell'asse di rotazione terrestre rispetto ad un asse ortogonale al piano dell'orbita. L'angolo di precessione è di 23°27', mentre il periodo della precessione, detta degli equinozi, è di 27725 anni. Inoltre l'asse di rotazione non è un asse centrale d'inerzia per cui alla precessione si sovrappone la *nutazione* con periodo di 19 anni.

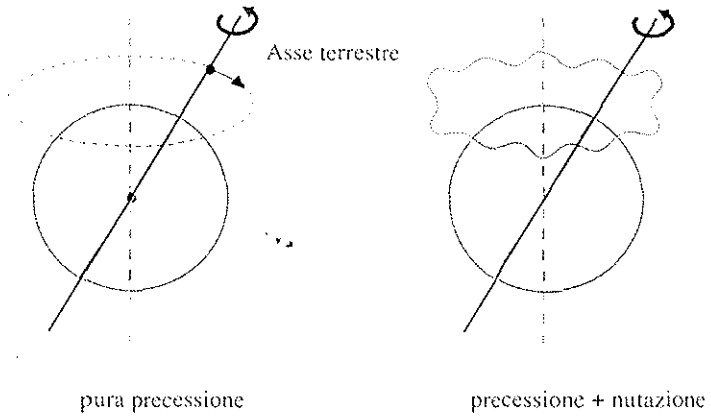


Fig. 6.43

6.13 LEGGI DI CONSERVAZIONE NEL MOTO DI UN CORPO RIGIDO.

Puntualizziamo in questo paragrafo considerazioni già fatte sulle leggi di conservazione, adattandole alle caratteristiche specifiche dei moti dei corpi rigidi.

Consideriamo la *conservazione della quantità di moto del sistema*, $\mathbf{P} = m\,\boldsymbol{v}_{CM}$. Se la risultante delle forze esterne è nulla, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, ma il moto dei singoli punti non è detto sia traslatorio rettilineo uniforme. Si guardi, ad esempio, un punto di un corpo che compie un moto di puro rotolamento uniforme oppure un punto di un disco, posto su un piano orizzontale senza attrito, che ruota attorno ad un asse verticale passante per il centro di massa e contemporaneamente si muove nel piano con $\boldsymbol{v}_{CM}$ = costante. L'argomento si estende da un solo corpo rigido ad un sistema di corpi rigidi in moto.

Assumendo come polo un punto fisso in un sistema di riferimento inerziale o il centro di massa, se $\mathbf{M} = 0$ il momento angolare resta costante in modulo, direzione e verso. Questo però non comporta ω = costante, in quanto non è detto che il moto di rotazione avvenga attorno ad un asse principale d'inerzia, cioè che sia $\mathbf{L} = I\,\omega$.

Sono di particolare interesse i casi in cui si ha conservazione del momento angolare in un sistema formato da più corpi rigidi, dove la variazione della posizione relativa delle singole parti determina una variazione del momento d'inerzia del sistema.

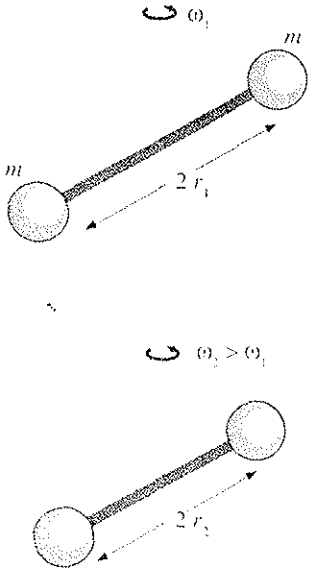


Fig. 6.44

Si abbiano ad esempio due sferette eguali, ciascuna di massa m e raggio r, collegate da un'asta orizzontale di lunghezza variabile e di momento d'inerzia trascurabile. Le due sfere, inizialmente poste a distanza $2\,r_1 >> r$, sono in rotazione con velocità angolare costante ω_1 attorno ad un asse verticale equidistante dalle due sferette. Rispetto al centro di massa del sistema, posto sull'asse di rotazione, tutti i momenti esterni sono nulli, pertanto il momento angolare resta costante:

$$L = I_1\,\omega_1 = \text{costante} \quad , \quad I_1 = 2\left[\frac{2}{5}m\,r^2 + m\,(r + r_1)^2\right] \cong 2m\,r_1^2 \quad .$$

Riduciamo la distanza tra le due sferette, avvicinandole da $2\,r_1$ a $2r_2$, con $r_2 < r_1$. Il momento d'inerzia diventa $I_2 = 2\,m\,r_2^2 < I_1$. Le forze che applichiamo per avvicinare le sferette hanno momento nullo rispetto al centro di massa e quindi $L_2 = L_1$:

$$2m\, r_2^2\, \omega_2 = 2\, m\, r_1^2 \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\, \omega_1 > \omega_1 \ .$$

La variazione del momento d'inerzia porta a una variazione della velocità angolare, anche se $\mathbf{L}$ è costante.

A causa dell'avvicinamento delle sferette c'è una variazione dell'energia cinetica:

$$E_{c,\,fin} - E_{c,\,in} = m\, r_2^2 \omega_2^2 - m\, r_1^2\, \omega_1^2 = m\ r_1^2\, \omega_1^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right) > 0 \ .$$

La variazione di energia cinetica è positiva e corrisponde al lavoro positivo svolto dalle forze che fanno variare la posizione relativa delle due sferette. Su ciascuna sferetta agisce una forza pari a $m\omega^2 r$, per cui il lavoro vale :

$$W = -2 \int_{r_1}^{r_2} m\, \omega^2\, r\, dr \quad , \quad \omega = \omega\ (r) = \frac{r_1^2}{r^2}\, \omega_1 \ .$$

Quindi

$$W = -2\, m\, r_1^4\, \omega_1^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^3} = m_1\, r_1^4\, \omega_1^2 \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) = \Delta E_k \ .$$

Il segno negativo tiene conto del fatto che l'incremento $d\,r$ è negativo (il raggio è orientato dal centro alla sferetta); il lavoro però è certamente positivo essendo la forza concorde con lo spostamento.

Questo esempio ci permette di verificare, in un caso differente da quelli visti precedentemente, *l'indipendenza della legge di conservazione del momento angolare da quella dell'energia*. Nel sistema esaminato $\mathbf{L}$ è costante, però a diverse configurazioni con lo stesso momento angolare corrispondono energie diverse, cioè l'energia non si conserva (e in altre situazioni può succedere il contrario). Un modo più generale di calcolare il lavoro è il seguente:

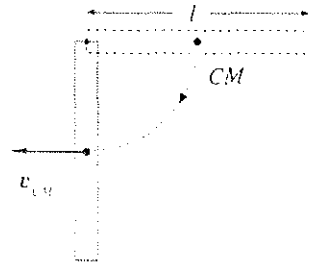


Fig. 6.45

$$W = \Delta E_k = E_{c,\,fin} - E_{c,\,in} = \frac{L^2}{2\, I_{fin}} - \frac{L^2}{2\, I_{in}}$$

e si verifica subito che il risultato è lo stesso.

La legge di conservazione dell'energia meccanica nel moto di un corpo è valida quando non ci sono attriti o quando, come nel moto di puro rotolamento, le forze di attrito non compiono lavoro, pur essendo presenti. Osserviamo inoltre che le reazioni vincolari che tengono fissi uno o più punti del corpo, non compiono lavoro, mentre la presenza di momenti di attrito che agiscono sull'asse di rotazione determina un lavoro che provoca una diminuzione dell'energia meccanica.

Supponendo che siano verificate le condizioni per la conservazione dell'energia meccanica e che agisca solo la forza peso, se il centro di massa resta in un piano orizzontale $\Delta E_p = 0$ ed è sufficiente considerare solo l'energia cinetica; se invece cambia la quota del centro di massa, $\Delta E_p = m\, g\, \Delta z_{CM}$.

Consideriamo ad esempio un'asta, di massa m e lunghezza l, che può ruotare in un piano verticale attorno ad un suo estremo (come nell'esempio 6.17). Se viene

lasciata cadere, con velocità iniziale nulla, dalla posizione orizzontale, quando raggiunge la posizione verticale ha velocità angolare ω e il suo centro di massa ha velocità v_{CM} che si possono calcolare imponendo la conservazione dell'energia meccanica :

$$E_{in} = m\,g\,l \quad , \quad E_{fin} = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 + m\,g\,\frac{l}{2}$$

con $I = \frac{1}{3}\,m\,l^2$. Pertanto

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} \quad , \quad v_{CM} = \omega\,\frac{l}{2} = \sqrt{\frac{3g\,l}{4}} \quad .$$

Se si ha un sistema di corpi rigidi bisogna esaminare anche la natura delle forze interne prima di applicare la legge di conservazione dell'energia.

6.14 URTI TRA PUNTI MATERIALI E CORPI RIGIDI O TRA CORPI RIGIDI.

Nei problemi d'urto trovano in generale applicazione le leggi di conservazione che abbiamo discusso nel paragrafo precedente.

Riassumendo sinteticamente, in un urto l'energia cinetica del sistema rimane costante solo se l'urto è dichiaratamente elastico. Se agiscono solo forze interne, o quelle esterne non sono di tipo impulsivo, si conserva la quantità di moto totale. Se invece esiste un vincolo che tiene fermo un punto del corpo rigido, e quindi sviluppa una forza di tipo impulsivo durante l'urto, non si verifica la conservazione della quantità di moto. Infine, qualora rispetto a un certo polo, fisso in un sistema di riferimento inerziale o coincidente con il centro di massa, il momento delle forze esterne, comprese quelle vincolari, è nullo, si conserva il momento angolare rispetto a tale polo. Se agiscono solo forze interne $\mathbf{L}$ si conserva sempre, indipendentemente dalla scelta del polo.

Quando il corpo urtato è vincolato, il sistema di vincoli può esplicare durante l'urto un sistema di forze che ha una risultante $\mathbf{R}$ e un momento risultante $\mathbf{M}$. L'effetto complessivo, nel brevissimo tempo di durata dell'urto, è dato dall'impulso della forza $\mathbf{J} = \int \mathbf{R}\,dt$ e dall'impulso del momento $\int \mathbf{M}\,dt$, eguali rispettivamente alla variazione della quantità di moto e alla variazione del momento angolare del sistema.

Essendo la quantità di moto e il momento angolare grandezze vettoriali, è possibile realizzare situazioni in cui la loro conservazione è parziale; per esempio, P_x e P_y si conservano, P_z cambia: questo vuol dire che l'impulso ha componenti J_x e J_y nulle, mentre J_z è diversa da zero. Analogamente per $\mathbf{L}$ e l'impulso del momento.

A proposito di quest'ultima grandezza, che abbiamo introdotto esplicitamente solo adesso, si osservi che non va confusa col momento dell'impulso. L'eguaglianza sussiste solo per un punto materiale, come visto con la (2.24), o in situazioni particolari, come quella dell'esempio 6.17. In generale però, per un qualsiasi sistema di forze applicate in punti diversi, il momento dell'impulso è diverso dall'impulso del momento; basta pensare a un sistema di forze con risultante nulla e momento risultante diverso da zero.

ESEMPIO 6.19

Un'asta è ferma sopra un piano orizzontale liscio; la massa è m_1, la lunghezza l. Un punto materiale, di massa m_2 e velocità $\boldsymbol{v}$ perpendicolare all'asta, colpisce l'asta a distanza x dal centro O e vi resta attaccato. Determinare la velocità lineare e quella angolare del sistema dopo l'urto.

Soluzione

Durante l'urto, completamente anelastico, agiscono solo forze interne e pertanto si ha conservazione della quantità di moto $\mathbf{P}$ e del momento angolare $\mathbf{L}$.

La conservazione di $\mathbf{P}$ fornisce la velocità del centro di massa prima e dopo l'urto. Dopo l'urto coincide con quella del sistema asta più punto materiale attaccato all'asta:

$$m_2 \boldsymbol{v} = (m_1 + m_2)\, \boldsymbol{v}_{CM} \quad , \quad \boxed{\boldsymbol{v}_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, \boldsymbol{v}} \; .$$

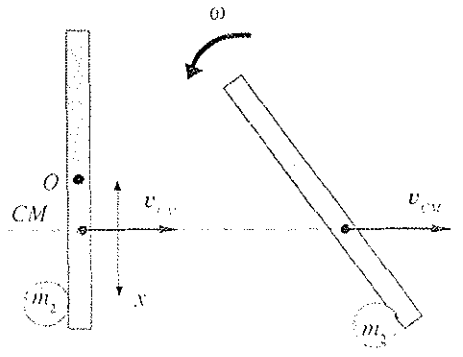


Fig. 6.46

Determiniamo la posizione del centro di massa rispetto al centro dell'asta nell'istante in cui avviene l'urto:

$$(m_1 + m_2)\, x_{CM} = m_2 x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, x} \; .$$

Prima e dopo l'urto il centro di massa si muove lungo la linea tratteggiata in figura 6.46, *con velocità* $\boldsymbol{v}_{CM}$.

Per quanto riguarda la conservazione di $\mathbf{L}$, assumendo come polo il centro di massa possiamo scrivere

$$(x - x_{CM})\, m_2\, v = I\, \omega \; , \; I = m_1 \frac{l^2}{12} + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x - x_{CM})^2$$

e quindi

$$\omega = \frac{(x - x_{CM})\, m_2\, v}{m_1 \dfrac{l^2}{12} + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x - x_{CM})^2} =$$

$$= \frac{m_2\, x\, v}{(m_1 + m_2)\dfrac{l^2}{12} + m_2 x^2} \; .$$

La rotazione avviene in senso antiorario. Se l'urto avesse luogo dall'altra parte rispetto al centro dell'asta il verso di rotazione sarebbe orario. Non si ha rotazione solo con un urto al centro dell'asta ($x = 0$, $\omega = 0$).

Dopo l'urto il centro di massa si muove con moto rettilineo uniforme, mentre gli altri punti hanno un moto composto da una traslazione con velocità $\boldsymbol{v}_{CM}$ e da una rotazione, con velocità angolare ω, rispetto ad un asse verticale passante per il centro di massa.

In particolare, se $m_1 = m_2 = m$, $x_{CM} = \dfrac{x}{2}$,

$$v_{CM} = \frac{v}{2} \quad , \quad \omega = \frac{x\, v}{l^2/6 + x^2} \; .$$

ESEMPIO 6.20

Nell'esempio precedente assumiamo che l'asta sia vincolata ad un estremo, attorno al quale può ruotare senza attrito. Per semplicità sia $m_1 = m_2 = m$; indichiamo con r la distanza del punto d'impatto dall'estremo fisso. Determinare la velocità angolare ω del sistema asta più punto materiale dopo l'urto e l'impulso della reazione vincolare durante l'urto.

Soluzione

In questo caso non possiamo conservare la quantità di moto del sistema, in quanto durante l'urto agisce una forza esterna di tipo impulsivo esplicata dal vincolo. È possibile però conservare il momento angolare rispetto al punto fisso perché il momento angolare delle forze vincolari è nullo rispetto a tale polo:

$$r\,m\,v = I\,\omega \quad , \quad I = m\,\frac{l^2}{3} + m\,r^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{r\,v}{l^2/3 + r^2} \, .$$

Durante l'urto la quantità di moto del sistema varia per effetto dell'impulso **J** delle forze vincolari :

$$\mathbf{J} = \Delta\,\mathbf{P} = \mathbf{P}_{fin} - \mathbf{P}_{in} \quad ,$$

$\mathbf{P}_{in} = m\,\boldsymbol{v}$ mentre $\mathbf{P}_{fin}$ può essere calcolata come somma delle quantità di moto del punto e dell'asta o come quantità di moto del centro di massa del sistema, nell'istante successivo all'urto. Nel primo caso:

$$\mathbf{P}_{fin} = m\,\omega\,r\,\mathbf{u}_v + m\,\omega\,\frac{l}{2}\,\mathbf{u}_v = m\,(\,r + \frac{l}{2}\,)\,\omega\,\mathbf{u}_v \quad ,$$

dove $\omega\,r$ è la velocità del punto e $\omega\,\frac{l}{2}$ la velocità del centro di massa dell'asta, subito dopo l'urto, e $\mathbf{u}_v$ è il versore della velocità $\boldsymbol{v}$ del punto prima dell'urto. Con la seconda procedura, bisogna prima calcolare la posizione del centro di massa del sistema nell'istante dell'urto:

$$x_{CM} = \frac{m\,\frac{l}{2} + m\,r}{2\,m} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{l}{2}\right)$$

e quindi $\mathbf{P}_{fin} = 2\,m\,\boldsymbol{v}_{CM} = 2\,m\,x_{CM}\,\omega\,\mathbf{u}_v = m\left(r + \frac{l}{2}\right)\omega\,\mathbf{u}_v$.
Solo durante l'urto $\mathbf{P}_{fin}$ e $\mathbf{P}_{in}$ hanno la stessa direzione, dopo **P** cambia anche di direzione.
Pertanto l'impulso della reazione vincolare è dato da

$$\mathbf{J} = m\left[\omega\left(r + \frac{l}{2}\right) - v\right]\mathbf{u}_v = m\,l\,v\,\frac{\frac{r}{2} - \frac{l}{3}}{\frac{l^2}{3} + r^2}\,\mathbf{u}_v \, .$$

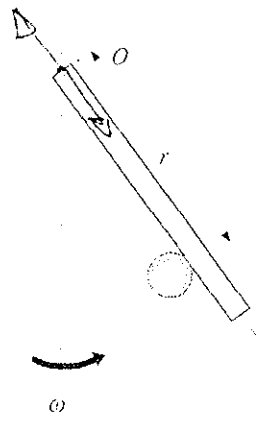


Fig. 6.47

Osserviamo che per $r > \frac{2}{3}\,l$ l'impulso è parallelo e concorde a $\boldsymbol{v}$, mentre per $r < \frac{2}{3}\,l$ esso è opposto a $\boldsymbol{v}$. L'impulso è nullo se $r = \frac{2}{3}\,l$: in tale caso durante l'urto il vincolo non agisce, è come se fossimo nell'esempio precedente con $x = \left(\frac{2}{3}\,l - \frac{l}{2}\right) = \frac{l}{6}$ e infatti troviamo, in ambedue i casi, lo stesso valore della velocità angolare, $\omega = \frac{6}{7}\,\frac{v}{l}$ (naturalmente il vincolo agisce dopo l'urto, facendo ruotare l'asta attorno all'estremo fisso).
Questi risultati si spiegano considerando che a causa dell'urto il sistema tende ad avanzare sul piano, ma anche a ruotare. Pertanto l'estremo, che resta fisso, è sollecitato sia ad avanzare, dal che deriva una reazione vincolare negativa, che a ruotare rispetto ad un asse verticale passante per il centro di massa del sistema, fatto che dà origine a una reazione vincolare positiva o negativa a seconda del punto di impatto. Solo se $r = \frac{2}{3}\,l$ i due effetti sono eguali e contrari.

ESEMPIO 6.21

Un'asta, di massa m_1 e lunghezza l, è libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un asse fisso orizzontale passante per il suo centro, figura 6.48. Un punto materiale, di massa m_2 e velocità $\boldsymbol{v}$ parallela all'asse di rotazione, colpisce l'asta a un estremo e vi resta attaccato. Nell'istante dell'urto l'asta sta ruotando con velocità angolare ω in verso antiorario. Determinare la velocità angolare ω' dopo l'urto, l'impulso e l'impulso del momento delle reazioni vincolari.

Soluzione
Nell'urto si conserva la componente del momento angolare parallela all'asse di rotazione non essendoci momenti esterni con questa direzione. Invece il momento angolare del punto materiale, ortogonale all'asse di rotazione, viene annullato nell'urto dal momento esplicato dai supporti vincolari dell'asse, che impediscono la modifica dell'asse di rotazione. Ovviamente non si conservano quantità di moto e energia.

Assumendo come polo il centro dell'asta abbiamo

$$I\,\omega = \left(I + m_2 \frac{l^2}{4}\right) \omega' \quad , \quad I = m_1 \frac{l^2}{12} \quad ,$$

$$\omega' = \frac{m_1}{m_1 + 3\,m_2}\,\omega \, .$$

La rotazione è sempre in verso antiorario. Dopo l'urto, per effetto del momento della forza peso del punto materiale, la velocità angolare cambierà.
L'impulso delle forze vincolari si calcola tramite la variazione della quantità di moto del sistema. L'impulso ha due componenti, una lungo la direzione dell'asse di rotazione x , dovuta all'arresto del proiettile, l'altra lungo una direzione ortogonale y , dovuta all'inizio della rotazione del proiettile (l'asta non contribuisce) :

$$P_{in,x} = m_2 v \quad , \quad P_{fin,x} = 0 \quad ,$$

$$P_{in,y} = 0 \quad , \quad P_{fin,y} = m_2 \frac{l}{2}\,\omega' \quad .$$

Pertanto il modulo dell'impulso è dato da

$$J = \sqrt{(m_2 v)^2 + \left(m_2 \frac{l}{2}\,\omega'\right)^2} = m_2 \sqrt{v^2 + \frac{l^2}{4}\,\omega'^2} \, .$$

In figura 6.48 J, che sta nel piano x , y ortogonale al piano in cui ruota l'asta, forma con questo l'angolo

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{J_y}{J_x} = \frac{2\,v}{l\,\omega'} \quad .$$

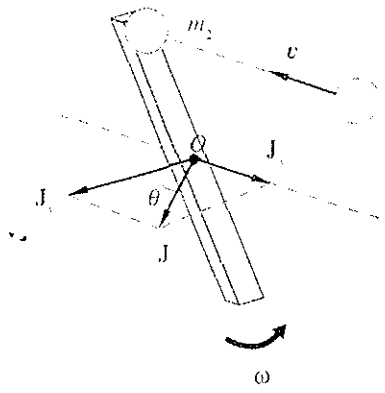


Fig. 6.48

L'impulso del momento esplicato dai supporti agenti sull'asse di rotazione è eguale alla variazione della componente del momento angolare ortogonale all'asse di rotazione (la componente parallela si conserva) e quindi è eguale ed opposto al momento iniziale del punto materiale:

$$\int \mathbf{M}\, dt = -\,\mathbf{OP} \times m_2\, \boldsymbol{v}$$

essendo **OP** il raggio vettore dal centro dell'asta al punto d'impatto.

In modulo l'impulso del momento vale $m_2 \frac{l}{2}\, v$.
Pertanto, durante l'urto, le reazioni vincolari fanno cambiare in direzione e modulo la quantità di moto del punto materiale, mentre il loro momento risultante mantiene orizzontale l'asse di rotazione.

ESEMPIO 6.22

Un disco, di massa m_1 e raggio R, ruota con velocità angolare ω in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il centro. Da un'altezza h viene lasciato cadere sul disco un punto materiale di massa m_2 . Il punto urta il disco ad una distanza $d < R$ dal centro del disco e vi rimane attaccato. Determinare la velocità angolare del sistema nell'istante successivo all'urto, l'impulso e l'impulso del momento delle reazioni vincolari.

Soluzione
Il problema è analogo al precedente, per cui diamo una spiegazione concisa: conservazione del momento angolare parallelamente all'asse di rotazione

$$I\,\omega = (I + m_2 d^2)\,\omega' \quad , \quad I = \frac{1}{2}\, m_1 R^2$$

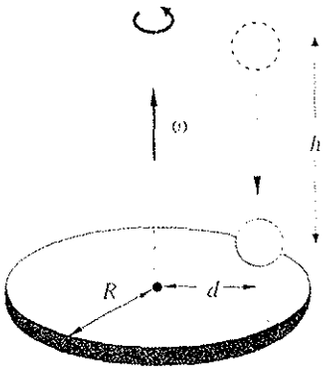


Fig. 6.49

$$\omega' = \frac{m_1 R^2}{m_1 R^2 + 2 m_2 d^2}\,\omega \quad ;$$

componente dell'impulso nel piano orizzontale $m_2 d\,\omega'$;

componente verticale dell'impulso $m_2\sqrt{2\,g\,h}$;

modulo dell'impulso $J = m_2\sqrt{d^2\,\omega'^2 + 2\,g\,h}$;

angolo di $\mathbf{J}$ rispetto alla verticale $\theta = \text{arctg}\,\dfrac{d\,\omega'}{\sqrt{2\,g\,h}}$;

modulo dell'impulso del momento $m_2 d\sqrt{2\,g\,h}$.

ESEMPIO 6.23

Un'asta di massa m_1 e lunghezza l, è libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro. Inizialmente l'asta è in quiete in posizione orizzontale. Un punto materiale, di massa m_2, colpisce con velocità $\boldsymbol{v}$, ortogonale all'asta in direzione verticale, l'estremo dell'asta. Assumendo che l'urto sia elastico e che la velocità $\boldsymbol{v}'$ del punto materiale dopo l'urto sia parallela a $\boldsymbol{v}$, determinare nell'istante successivo all'urto la velocità angolare ω dell'asta e il modulo e il verso di $\boldsymbol{v}'$.

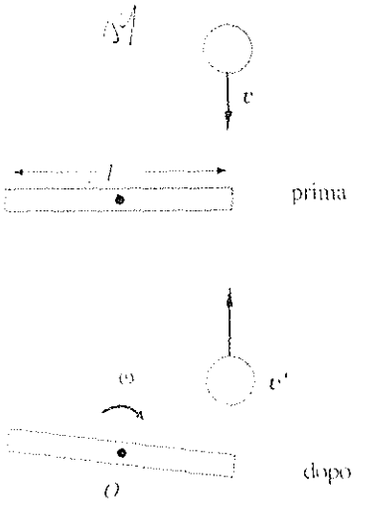


Fig. 6.50

Soluzione

Data la presenza di una forza vincolare in O non è possibile conservare la quantità di moto; possiamo però conservare rispetto ad O il momento angolare e, dato che l'urto è elastico, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia. Pertanto, assumendo v' positiva se ha il verso indicato in figura.

$$m_2 v\,\frac{l}{2} = I\,\omega - m_2 v'\,\frac{l}{2} \quad , \qquad I = m_1\,\frac{l^2}{12} \quad ;$$

$$\frac{1}{2}\,m_2 v^2 = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,m_2 v'^2 \quad .$$

Risolvendo il sistema si trova

$$\omega = \frac{12\,m_2}{m_1 + 3\,m_2}\,\frac{v}{l} \quad , \qquad v' = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + 3m_2}\,v \quad .$$

Il punto materiale prosegue il suo moto nello stesso verso se $3\,m_2 > m_1$ ($v' < 0$), rimbalza se $3\,m_2 < m_1$ ($v' > 0$), si ferma nell'istante dell'urto se $3\,m_2 = m_1$ ($v' = 0$) .

ESEMPIO 6.24

Un disco, di massa m e raggio R, scivola con velocità $\boldsymbol{v}$ su un piano orizzontale liscio. Esso urta un altro disco identico, inizialmente in quiete e con il centro a distanza R dalla retta percorsa dal centro del primo disco (vedi figura 6.51). Dopo l'urto i due dischi restano attaccati e procedono come un unico corpo rigido. Determinare che velocità angolare deve avere il primo disco affinché dopo l'urto la velocità angolare del sistema sia nulla.

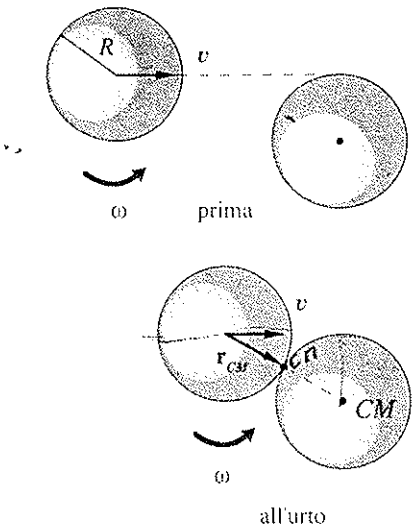


Fig. 6.51

Soluzione
Nell'urto si conserva il momento angolare, rispetto a qualsiasi polo. Prendendo come polo il centro di massa del sistema e volendo che dopo l'urto il moto sia traslatorio, abbiamo $\mathbf{L}_{fin} = 0$; quindi, rispetto al centro di massa, deve essere $\mathbf{L}_{in} = 0$. Prima dell'urto solo il disco in movimento contribuisce al momento angolare, per cui abbiamo

$$\mathbf{L}_{in} = I\,\omega + \mathbf{r}_{CM} \times m\,\boldsymbol{v}\ ,$$

secondo il teorema di König; $I\,\omega$ è il momento angolare del disco rispetto al proprio centro di massa ($I = \frac{1}{2} m R^2$), $\mathbf{r}_{CM} \times m\,\boldsymbol{v}$ è il momento angolare del centro di massa del disco rispetto al centro di massa del sistema e vale in modulo $\frac{R}{2}\, m\, v$ (il centro di massa del sistema dista $R/2$ dalla retta individuata da $\boldsymbol{v}$). Si osservi che $\mathbf{r}_{CM} \times m\,\boldsymbol{v}$ è diretto verso il foglio; se $\mathbf{L}_{in} = 0$, $I\,\omega$ deve essere diretto verso il lettore, cioè il primo disco deve ruotare in senso antiorario. Allora in modulo

$$I\,\omega - \frac{R}{2}\, m\, v = 0, \qquad \text{per cui} \qquad \omega = \frac{v}{R}\ .$$

6.15 STATICA

La condizione di equilibrio statico per un punto materiale è che la risultante delle forze applicate al punto sia nullo, $\mathbf{R} = 0$. Se il punto è inizialmente in quiete, rimane in tale stato. Abbiamo già discusso questa situazione nel paragrafo 2.4.

Per un corpo rigido inizialmente in quiete si ha l'equilibrio statico se

$$\mathbf{R} = 0 \quad , \quad \mathbf{M} = 0. \tag{6.30}$$

Equilibrio statico

Con $\mathbf{R} = 0$ si realizza l'equilibrio statico del centro di massa, $\boldsymbol{v}_{CM} = 0$, mentre con $\mathbf{M} = 0$ non si ha moto rotatorio, $\omega = 0$.

Ricordiamo che se $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M}$ è indipendente dal polo; quindi, se è nullo rispetto ad un polo, lo è rispetto a qualsiasi altro.

ESEMPIO 6.25

Un'asta di massa m, orizzontale in quiete, è appoggiata su due supporti P_1 e P_2. Determinare le reazioni F_1 e F_2 dei due supporti.

Soluzione
La condizione $\mathbf{R} = 0$ comporta

$$F_1 + F_2 = m\,g \quad ,$$

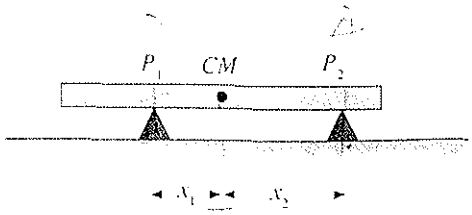


Fig. 6.52

mentre $\mathbf{M} = 0$ impone, avendo scelto il centro di massa come polo,

$$x_1 F_1 = x_2 F_2$$

Pertanto il risultato è

$$F_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} m g \quad , \quad F_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} m g \quad .$$

Vettorialmente $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ sono verticali e opposte a $m\,\mathbf{g}$. Se i supporti sono disposti simmetricamente rispetto al centro di massa $x_1 = x_2$ e $F_1 = F_2 = \frac{1}{2} m g$.

ESEMPIO 6.26. PROBLEMA DELLA SCALA

Una scala, di massa m e lunghezza l, è appoggiata con un estremo A ad un muro verticale e con l'altro estremo B al suolo. L'attrito in A è nullo, mentre in B c'è ovviamente attrito. Determinare la reazione in B.

Soluzione
Rappresentiamo in figura 6.53 la distribuzione di forze per poterne valutare correttamente il momento, tenendo conto che il vincolo in A è liscio e quindi la forza $\mathbf{F}_A$ è ortogonale alla parete. La condizione $\mathbf{R} = 0$ comporta :

$$F_A = F_{B,O} \qquad \text{lungo l'asse x},$$

$$m g = F_{B,y} \qquad \text{lungo l'asse } y .$$

L'equilibrio dei momenti, assumendo B come polo, dà

$$F_A \, l \cos\theta = m g \, \frac{l}{2} \operatorname{sen}\theta .$$

Si ottiene pertanto

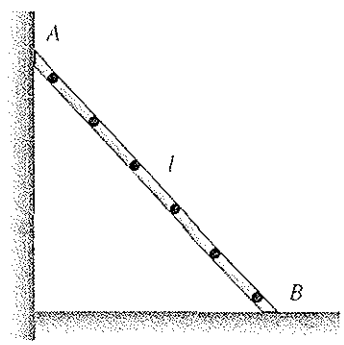
$$F_A = F_{B,O} = \frac{1}{2} m g \operatorname{tg}\theta$$

è la reazione in B, in modulo, vale

$$F_B = \sqrt{F_{B,O}^2 + F_{B,y}^2} = m g \sqrt{1 + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2\theta} \quad .$$

L'angolo ϕ che $\mathbf{F}_B$ forma con la verticale è dato da

$$\phi = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{1}{2} \operatorname{tg}\theta\right] \quad , \quad \operatorname{tg}\phi = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\theta \quad .$$



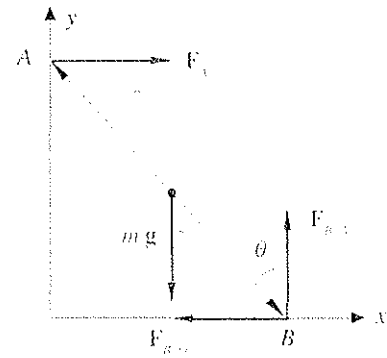


Fig. 6.53

La scala resta in equilibrio all'angolo dato se il suolo riesce ad esplicare la forza di attrito $F_{B,O} = \frac{1}{2} m g \operatorname{tg}\theta$ e quindi è soddisfatta la condizione

$$\frac{1}{2} m g \operatorname{tg}\theta \le \mu_s F_{B,y} = \mu_s m g \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta \le 2\mu_s .$$

ESEMPIO 6.27. Equilibrio di carrucole

A. Determinare la condizione di equilibrio di una carrucola. Si trascurino le masse della carrucola e dei fili che la sostengono e che sono avvolti sulla carrucola stessa.

Soluzione
Per l'equilibrio statico del centro di massa la tensione del filo di sostegno è eguale a $F_1 + F_2$. Per l'equilibrio rotazionale deve essere $F_1 = F_2$. La situazione di equilibrio è pertanto quella mostrata nella figura 6.54, a destra.

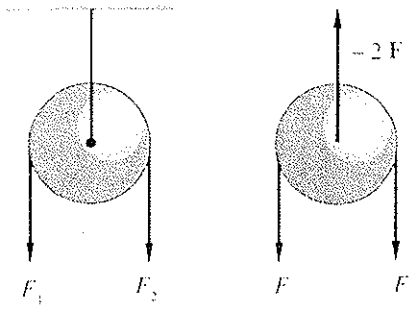


Fig. 6.54

B. Si hanno n + 1 carrucole disposte come in figura 6.55. Determinare il valore di **F** necessario per equilibrare il peso della massa m.

Soluzione
Utilizziamo il risultato del caso A :
per la prima carrucola $m\,g = 2\,F_1$, per la seconda $F_1 = 2\,F_2$, per la terza $F_2 = 2\,F_3$, per la quarta $F_3 = 2\,F_4$, per l'ultima $F = F_4$. Quindi, per le quattro carrucole più una della figura 6.55, $m\,g = 2^4 F$. Con n + 1 carrucole $m\,g = 2^n F$ e in conclusione per equilibrare il peso della massa m basta la forza

$$F = m\,g\,/\,2^n \quad .$$

Naturalmente il soffitto deve essere capace di equilibrare la forza $m\,g + F$.

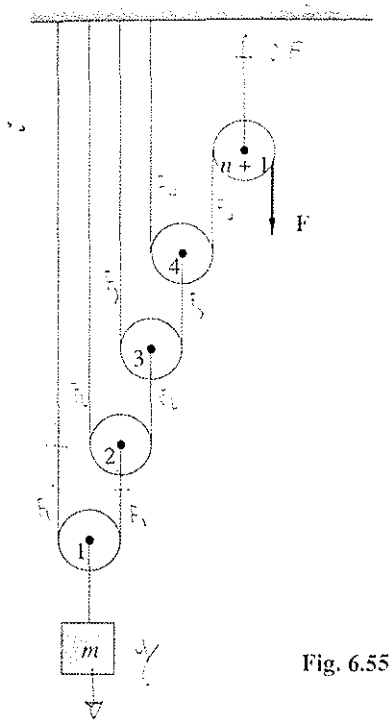


Fig. 6.55

ESEMPIO 6.28

Un uomo di peso P_1 si trova su una piattaforma di peso P_2. Utilizzando il sistema di carrucole rappresentato in figura 6.56, l'uomo sostiene la piattaforma. Determinare la forza F_1 che egli deve esercitare su filo e quella P_3 con cui preme sulla piattaforma.

Soluzione
In equilibrio $F_1 = F_2$ e $F_3 = F_2 = 2\,F_1$; inoltre $P_1 + P_2 = F_1 + F_2 + F_4$ (eguale alla forza che esercita il soffitto). Ne segue

$$F_1 = \frac{P_1 + P_2}{4} \quad .$$

Infine $P_3 = P_1 - F_1 = \frac{3}{4}\,P_1 - \frac{1}{4}\,P_2$.

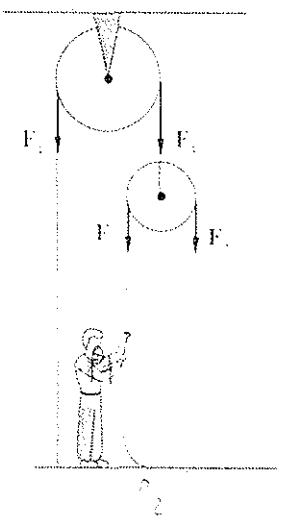


Fig. 6.56

6.16 RIEPILOGO

Riassumendo gli argomenti più importanti sviluppati in questo capitolo. Il *moto più generale* di un corpo rigido è *rototraslatorio*. Nella traslazione tutti i punti hanno lo stesso moto, pari a quello del centro di massa, e pertanto possiamo utilizzare le relazioni fisiche introdotte nello studio del moto di un punto materiale. L'*energia cinetica* è $E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$, mentre *il momento angolare* è dato da $\mathbf{L} = \mathbf{r}_{CM} \times m \boldsymbol{v}_{CM}$.

Nella rotazione tutti i punti ruotano con la stessa velocità angolare ω attorno all'asse di rotazione, parallelo a ω. Il *momento d'inerzia rispetto all'asse* è dato da $I = \Sigma_i m_i R_i^2$ (o utilizzando l'espressione per un corpo continuo $I = \int R^2 dm$), il *momento angolare* rispetto all'asse o momento angolare assiale è $L_z = I\omega$ e *l'energia cinetica* è $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$.

Se l'asse è fisso in un sistema di riferimento inerziale e s'identifica con un *asse principale d'inerzia*, $\mathbf{L} = I\omega$ e l'equazione del moto di rotazione è

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha .$$

Se invece l'asse di rotazione non è un asse principale d'inerzia, nell'equazione del moto compaiono i momenti assiali: $M_z = dL_z / dt = I\alpha$.

Il problema si complica se l'asse di rotazione è variabile nel tempo, pur restando sempre valido il teorema del momento angolare. Nel caso che un punto sia fisso, si hanno i cosiddetti fenomeni giroscopi.

Un caso interessante di moto di rototraslazione è il moto di *puro rotolamento*.

Richiamiamo adesso alcune regole di opportunità nella scelta del polo per $\mathbf{L}$ e per $\mathbf{M}$, utili soprattutto nella risoluzione di problemi.

Se il moto di rotazione avviene rispetto ad un asse fisso il polo viene scelto di norma tra i punti dell'asse. Se un punto P del corpo è mantenuto fisso conviene sceglierlo come polo, in modo tale da annullare il momento delle forze che sono applicate in P (forze vincolari in genere). È importante l'applicazione negli *urti con corpi vincolati*. In ogni caso, si deve sempre considerare la possibilità di scegliere come polo il centro di massa, facendo attenzione, nel caso di sistemi composti, a prendere il centro di massa di tutti i punti.

Ricordiamo infine che se il centro di massa è fermo, $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ non dipendono dal polo.

Concludiamo con un riferimento al capitolo 3: un sistema cartesiano si muove come un sistema rigido (le posizioni relative degli assi sono invariabili) e quindi è corretto che, in ogni istante, qualsiasi punto abbia la stessa velocità angolare ω, come dicono le formule di Poisson.

GRAVITAZIONE 7

7.1 LA FORZA GRAVITAZIONALE.

Richiamiamo brevemente le conoscenze sul moto dei pianeti che si avevano prima di Newton (vissuto dal 1642 al 1727).

Verso il 1500 era stata avanzata da Copernico l'ipotesi eliocentrica: il sole, e non la terra, era il corpo celeste attorno al quale si svolgeva il moto dei pianeti. Successivamente, le posizioni assunte da questi nel tempo erano state oggetto di numerose e accurate misure da parte di Brahe, misure su cui si basò Keplero per formulare, intorno al 1600, le sue tre leggi.

Prima legge

I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse.

Seconda legge

La velocità areale con cui il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive l'orbita è costante.

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \text{cost}$$

Terza legge

Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse: $T^2 = k r^3$ (i valori della costante k sono dati nella tabella del paragrafo 7.7).

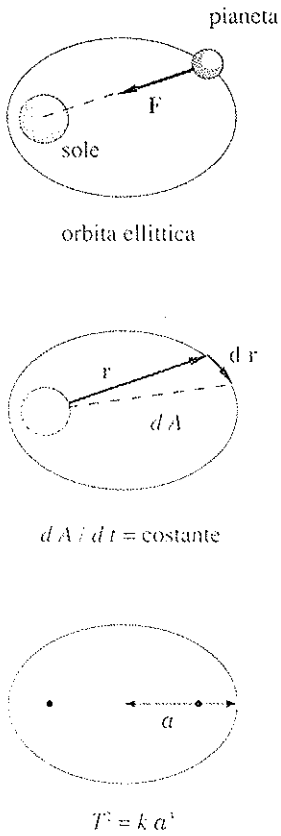


Fig. 7.1

Le tre leggi di Keplero danno una descrizione cinematica del moto dei pianeti. La spiegazione dinamica venne trovata da Newton nel 1666 e resa nota solamente nel 1687. Da essa prese corpo la *teoria della gravitazione universale*, i cui aspetti più semplici sono esaminati in questo capitolo.

Diamo una traccia del ragionamento di Newton, inizialmente approssimato. Le orbite dei pianeti, pur essendo certamente ellittiche, sono molto prossime a circonferenze (si veda il paragrafo 7.7); immaginiamo allora che siano circolari. Se questo è vero e se la velocità areale è costante, il moto di un pianeta è circolare uniforme: infatti, ricordando dal paragrafo 2.23 che

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

la costanza della velocità areale e di r dà $d\theta / dt = \text{costante}$.

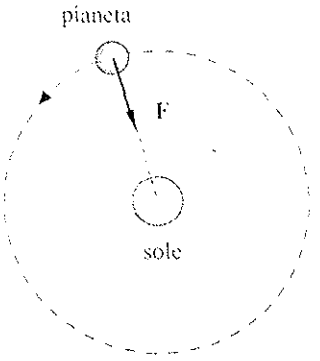


Fig. 7.2

La forza che agisce sul pianeta, permettendogli di percorrere una traiettoria circolare con velocità costante, deve essere esclusivamente centripeta (cioè senza componente tangenziale, figura 7.2), e si scrive

$$F = m\,\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \quad ,$$

essendo T il periodo di rivoluzione, m la massa e r il raggio dell'orbita del pianeta.

Utilizziamo ora la terza legge di Keplero $T^2 = k\,r^3$, confondendo il raggio della circonferenza con il semiasse maggiore dell'ellisse, così che la forza diviene

$$F = \frac{4\pi^2}{k}\,\frac{m}{r^2} \quad .$$

Questo è il primo risultato fondamentale: la forza esercitata dal sole sui pianeti, che incurva la loro orbita, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole.

Consideriamo il sistema sole–terra: la forza esercitata dal sole sulla terra può quindi essere scritta

$$F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{k_T}\,\frac{m_T}{r^2}$$

mentre la forza esercitata dalla terra sul sole ha l'espressione

$$F_{T,S} = \frac{4\pi^2}{k_S}\,\frac{m_S}{r^2}$$

eguale in modulo a $F_{S,T}$ per il *principio di azione e reazione*. Dall'eguaglianza si ottiene $m_T k_S = m_S k_T$.

Definendo la costante

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T k_S} = \frac{4\pi^2}{m_S k_T}$$

abbiamo per il modulo della forza sole–terra

Legge di Newton

$$F = \gamma\,\frac{m_S\, m_T}{r^2} \quad ;$$

la direzione è quella della retta congiungente il sole alla terra.

La formula ottenuta è molto semplice ed è simmetrica nei due corpi: Newton ipotizzò che si trattasse di una formula universale ed enunciò la seguente *legge di gravitazione universale:*

date due masse qualsiasi, di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza mutua, tra di esse agisce una forza attrattiva diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo dipende direttamente dal prodotto delle masse e inversamente dal quadrato della distanza.

La costante di proporzionalità γ *è una costante universale*, che non dipende dai valori delle masse e dalla geometria del sistema, ma è caratteristica dell'interazione

gravitazionale.

In termini vettoriali (Figura 7.3) l'espressione della forza gravitazionale che la massa m_1 esercita sulla massa m_2 è

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_{1,2} \quad . \tag{7.1}$$

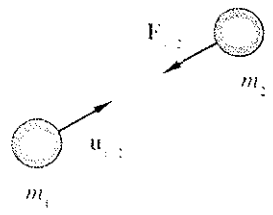


Fig. 7.3

La forza $\mathbf{F}_{2,1}$, subita da m_1 ad opera di m_2, è $-\mathbf{F}_{1,2}$.

Innumerevoli verifiche sperimentali, soprattutto in campo astronomico, hanno confermato la correttezza dell'ipotesi.

La prima verifica è dovuta sempre a Newton. La (7.1) deve valere anche per un corpo di massa m posto sulla terra, che è un corpo sferico di massa m_T e raggio R: per la forza subita dal corpo scriviamo

$$F = \gamma \frac{m_T m}{R^2} \quad .$$

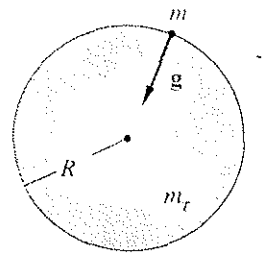


Fig. 7.4

Questa formula è valida se si ammette che un corpo a simmetria sferica eserciti una forza come se la massa fosse tutta concentrata nel suo centro (vedi paragrafo 7.5); la prova di questa proprietà fu una delle cause che ritardò la pubblicazione della (7.1). D'altra parte $F = m\,g$ per cui

$$g = \gamma \frac{m_T}{R^2} \quad .$$

Però Newton non conosceva né il valore di γ né la massa della terra. Tuttavia, con riferimento al sistema terra–luna, si può scrivere

$$F_{T,L} = \gamma \frac{m_T m_L}{r_L^2} = m_L\, \omega_L^2\, r_L \quad .$$

per la forza esercitata dalla terra sulla luna, centripeta per la luna: segue $\gamma\, m_T = \omega_L^2\, r_L^3$ e dunque dal periodo di rotazione della luna attorno alla terra e dalla distanza terra–luna è possibile determinare il prodotto γm_T e quindi g.

Con i valori oggi noti l'accordo è perfetto. Al tempo di Newton il valore stimato per la distanza terra–luna era sbagliato e solo dopo una misurazione astronomica più precisa Newton poté trovare un buon accordo tra g e $\gamma\, m_T / R^2$ (altro fatto che ritardò la pubblicazione della teoria).

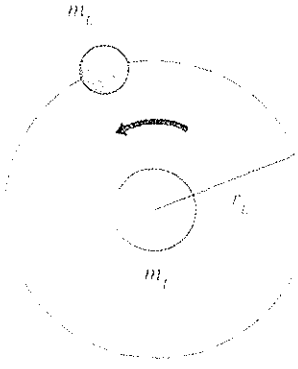


Fig. 7.5

La misura diretta di γ e quindi la prima determinazione della massa della terra, venne effettuata da Cavendish nel 1798; egli si servì di una bilancia di torsione (vedi paragrafo 8.4) per misurare la forza di attrazione tra due masse sferiche, misura molto difficile essendo la forza dell'ordine di 10^{-9} N a causa del piccolo valore di γ. Le determinazioni più recenti danno

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \quad , \quad m_T = 5.98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \quad .$$

Si noti che solo conoscendo γ si possono determinare le masse dei corpi celesti, come vedremo nell'esempio 7.3 (paragrafo 7.4).

La (7.1) mostra che la forza gravitazionale è una forza centrale: viene così

chiarito il perché della validità della seconda legge di Keplero (paragrafo 2.23). Vedremo più avanti come si spieghino la prima e la terza legge.

Sottolineamo infine che, a differenza delle forze finora considerate, che si manifestavano al contatto (macroscopico) tra i corpi, la forza gravitazionale si manifesta a distanza, senza che le masse vengano a contatto. In effetti tutte le interazioni fondamentali conosciute sono forze a distanza, che differiscono però nel raggio di azione (oltre che per altre proprietà): la forza gravitazionale e la forza tra cariche elettriche hanno la stessa dipendenza dalla distanza ($1/r^2$) e si dice che il loro *raggio di azione* è *infinito*, invece la forza forte e quella debole decrescono molto più rapidamente con la distanza e sono efficaci solo a livello subatomico.

7.2 MASSA INERZIALE E MASSA GRAVITAZIONALE.

$F_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} u_{12}$

La legge (7.1) esprime un particolare tipo di interazione esistente in natura il cui valore numerico dipende da γ, che è tipica dell'interazione, dalla geometria del sistema e da una caratteristica dei corpi che partecipano all'interazione, che abbiamo indicato con m e chiamiamo massa gravitazionale.

A priori non c'è nessuna ragione logica per cui la massa gravitazionale, legata a una particolare interazione, debba essere eguale alla massa inerziale che compare nella legge di Newton $\mathbf{F} = m\,\boldsymbol{a}$; qui la grandezza m caratterizza l'inerzia del corpo, qualunque sia la forza agente, e sappiamo che essa può essere determinata con misure cinematiche indipendenti dalla forza peso.

Sulla superficie terrestre vale l'equazione

$$m_I\, g = \gamma \frac{m_{T,G}\, m_G}{R^2}$$

Massa inerziale
Massa gravitazionale

dove m_I e m_G sono le *masse inerziale e gravitazionale* del corpo attirato dalla terra, la cui massa gravitazionale è $m_{T,G}$. Ne ricaviamo

$$g = \gamma \frac{m_{T,G}}{R^2} \frac{m_G}{m_I} \,.$$

Sperimentalmente, in uno stesso luogo g è indipendente dai corpi, quindi per qualsiasi corpo il rapporto m_G / m_I è pari a una costante, indipendente dal corpo: le due masse m_I e m_G sono per lo meno proporzionali.

Poiché non c'è un modo diretto per misurare il rapporto m_G / m_I, l'ipotesi più semplice è supporre $m_G = m_I$; in pratica questo vuol dire che nell'esperimento di Cavendish i valori delle masse delle sfere sono quelli inerziali e che quindi il valore di g si basa sull'ipotesi $m_G = m_I$.

Il fatto che la massa inerziale e la massa gravitazionale di un corpo siano eguali non ha tuttora una spiegazione teorica.

7.3 CAMPO GRAVITAZIONALE.

La struttura della legge (7.1) si presta a una considerazione interessante: possiamo infatti scrivere:

$$\mathbf{F}_{1,2} = \left(-\gamma \frac{m_1}{r^2} \mathbf{u}_{1,2} \right) m_2 \quad , \quad \mathbf{F}_{2,1} = \left(-\gamma \frac{m_2}{r^2} \mathbf{u}_{2,1} \right) m_1 \quad ,$$

e dire che la forza gravitazionale $\mathbf{F}_{1,2}$ esercitata dal corpo m_1 sull'altro di massa m_2 è pari al prodotto di un vettore, che non dipende dalla massa m_2, ma solo da m_1 e dalla distanza da m_1, per la massa m_2 sottoposta all'azione di m_1; viceversa nel caso di $\mathbf{F}_{2,1}$.

Il vettore tra parentesi si chiama *campo gravitazionale* $\mathbf{G}$ generato dalla massa sorgente del campo nel punto P distante r:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= -\gamma \frac{m_1}{r^2} \mathbf{u}_1 \quad , \quad \mathbf{F}_{1,2} = m_2 \mathbf{G}_1 \quad , \\ \mathbf{G}_2 &= -\gamma \frac{m_2}{r^2} \mathbf{u}_2 \quad , \quad \mathbf{F}_{2,1} = m_1 \mathbf{G}_2 \quad ; \end{aligned} \tag{7.2}$$

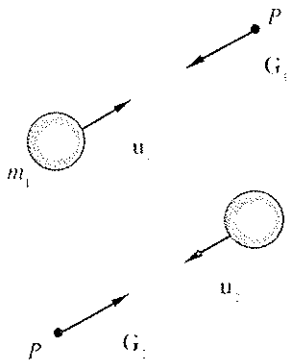


Fig. 7.6

$\mathbf{u}_i$ è un vettore uscente radialmente dal punto in cui si trova la massa sorgente m_i (vedi figura 7.6). $\mathbf{G}_1$ è diverso da $\mathbf{G}_2$, anche in modulo, però $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$.

Le formule (7.2) sono valide per masse puntiformi, o a simmetria sferica; in tal caso anche il campo è a simmetria sferica, cioè è centrale, ed è sempre rivolto verso la sorgente.

Il campo gravitazionale totale $\mathbf{G}$ in un punto P (figura 7.7) dovuto a più masse puntiformi $m_1, \ldots, m_i, \ldots m_n$ si ottiene sommando vettorialmente i vari contributi

$$\mathbf{G}_i = -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i$$

delle singole masse:

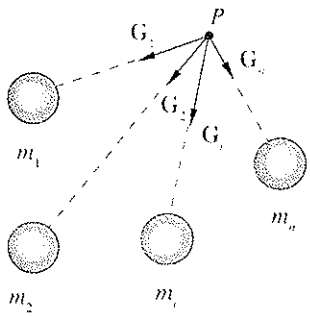


Fig. 7.7

$$\mathbf{G}(P) = \sum_1^n \mathbf{G}_i = \sum_1^n \left(-\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i \right) \quad , \tag{7.3}$$

Il campo gravitazionale $\mathbf{G}$ in un punto P (figura 7.8) dovuto a una massa m continua, contenuta in una regione limitata, come il corpo C della figura, si calcola in modo analogo: si divide la massa m in parti infinitesime $dm = \rho\, dV$, ognuna delle quali genera in P un campo

$$d\mathbf{G} = -\gamma \frac{dm}{r^2} \mathbf{u} \quad ,$$

e si integra vettorialmente su tutti i contributi:

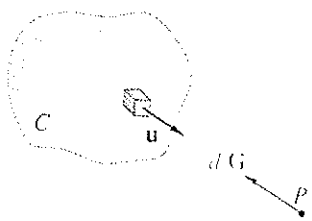


Fig. 7.8

$$\mathbf{G}(P) = \int_C -\gamma \frac{dm}{r^2} \mathbf{u} = \int_C -\gamma \rho \frac{dV}{r^2} \mathbf{u} \quad . \tag{7.4}$$

La forza tra due corpi estesi C_1 e C_2 di masse m_1 e m_2 si ottiene calcolando in ciascun elemento di m_2 la forza $d\mathbf{F}_{1,2} = dm_2\, \mathbf{G}_1$ esercitata dal corpo di massa m_1, con $\mathbf{G}_1$ dato da un'espressione come (7.4) e integrando vettorialmente su tutto C_2:

$$\mathbf{F}_{1,2} = \int_{C_2} \mathbf{G}_1\, dm_2 \quad . \tag{7.5}$$

La nozione di campo è utile concettualmente: per esempio attraverso di esso si esprime agevolmente una proprietà notevole come il teorema di Gauss (paragrafo 7.5) oppure si eseguono più chiaramente calcoli complessi quando le masse sono estese; però non appare indispensabile.

Guardando l'argomento in modo un po' diverso, ci si può chiedere se il campo $\mathbf{G}$ è una grandezza che ha un significato indipendente da m_1 e m_2.

Cominciando da m_2, se non si mette la massa m_2 nel campo di m_1 e non si misura $\mathbf{F}_{1,2}$, ha senso parlare di $\mathbf{G}_1$? La risposta può essere in un certo senso affermativa: la presenza di m_1 modifica lo spazio circostante indipendentemente da m_2, come si verifica osservando che la traiettoria di raggi luminosi che attraversano un campo gravitazionale risulta incurvata, in accordo con le previsioni della teoria della *relatività generale*. Durante un'eclisse di sole è possibile vedere dalla terra la luce proveniente da stelle che stanno dietro il sole, come è mostrato qualitativamente nella figura 7.9 (in cui non è rappresentata la luna che causa l'eclisse). L'effetto dovuto al campo gravitazionale del sole si verifica sempre, però il fenomeno non si può osservare senza eclisse perché il sole è troppo luminoso.

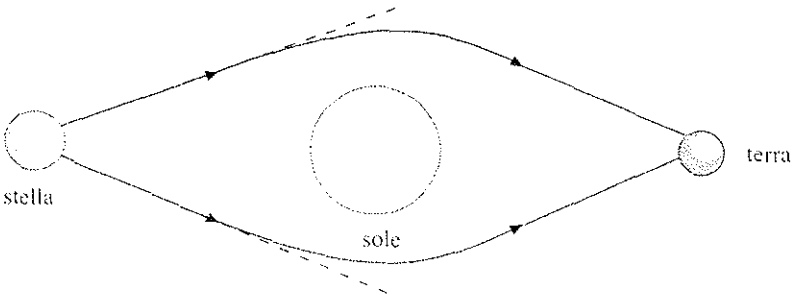


Fig. 7.9

Può esistere un campo $\mathbf{G}$ senza sorgente m? Sarebbe possibile in questa situazione: la massa m in opportune condizioni variabili nel tempo genera un campo variabile che si propaga; si potrebbe allora rivelare $\mathbf{G}$ molto lontano da m e molto dopo l'emissione, quando magari m non esiste più. Un fenomeno analogo si verifica per esempio nell'esplosione di una supernova che avviene tra l'altro con notevole emissione di luce che noi riveliamo sulla terra quando la sorgente oramai non esiste. Però ancora l'esistenza delle *onde gravitazionali* non è stata provata sperimentalmente.

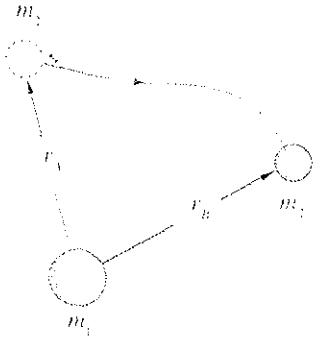


Fig. 7.10

7.4 ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Dimostriamo direttamente che la forza gravitazionale è conservativa: in effetti sappiamo già che è così in quanto si tratta di una forza centrale, però il calcolo ci serve per trovare l'espressione dell'energia potenziale.

In figura 7.10 è mostrata la traiettoria di una massa m_2 nel campo di una massa

m_1 . Il lavoro compiuto durante lo spostamento $d\,\mathbf{s}$ è

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\,\mathbf{u}_1 \cdot d\,\mathbf{s} \quad ;$$

il prodotto scalare $\mathbf{u}_1 \cdot d\,\mathbf{s}$, figura 7.11, è pari alla proiezione di $d\,\mathbf{s}$ su $\mathbf{u}_1$ e quindi a dr, variazione del modulo della distanza tra m_1 e m_2 a seguito dello spostamento $d\,\mathbf{s}$. Pertanto

$$W = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr =$$

$$= -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} - \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_B} \right) = E_{p,A} - E_{p,B} \quad .$$

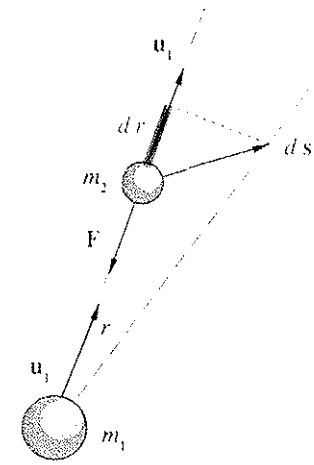


Fig. 7.11

Verifichiamo così che il lavoro non dipende dalla traiettoria, ma solo dalle posizioni iniziale e finale, e che *l'energia potenziale* ha l'espressione

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad . \tag{7.6}$$

Energia potenziale

Il segno negativo deriva da quello di (7.1) e significa che la forza gravitazionale è attrattiva.

Possiamo giustificarlo anche così: per due masse molto distanti $r \cong \infty$ per cui $F = 0$, $E_p = 0$; a rigore E_p è definita a meno di una costante additiva, però è ragionevole che a distanza infinita, quando cioè non c'è interazione, l'energia potenziale sia nulla e quindi la costante, che ha il significato di valore dell'energia potenziale per $r = \infty$, si assume nulla. Quando m_2 si avvicina a m_1 la forza gravitazionale compie un lavoro positivo e m_2 acquista energia cinetica; siccome la forza è conservativa, l'energia meccanica, somma dell'energia cinetica e dell'energia gravitazionale, resta costante e quindi se E_k aumenta E_p deve diminuire; essendo nulla per distanza infinita, E_p deve essere negativa per distanze finite.

ESEMPIO 7.1

Due masse m_1 e m_2 si trovano a distanza molto grande, praticamente infinita; la massa m_1 è ferma, la massa m_2 ha energia cinetica $E_{k,\infty} = \frac{1}{2}\, m_2 v_0^2$. Calcolare la velocità della massa m_2 quando è a distanza r da m_1.

Soluzione

L'energia meccanica iniziale del sistema delle due masse è $E_m = E_{k,\infty} = \frac{1}{2}\, m_2 v_0^2$, mentre quando le masse distano r tra loro l'energia meccanica vale

$$E_m = \frac{1}{2}\, m_2 v^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

Eguagliando le due espressioni si trova

$$v^2 = v_0^2 + 2\gamma \frac{m_1}{r} \quad .$$

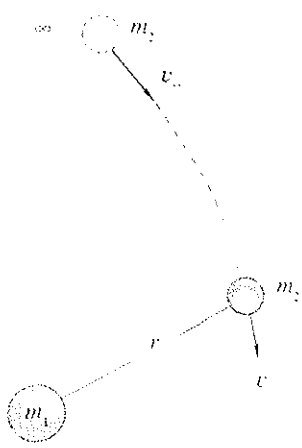


Fig. 7.12

Il risultato è vero qualunque sia la traiettoria seguita da m_2 nel campo di m_1 .

ESEMPIO 7.2

Calcolare la velocità di fuga di un corpo dalla terra.

Soluzione
Nella condizione iniziale abbiamo un corpo di massa m sulla superficie terrestre, con energia cinetica $E_{c,in} = \frac{1}{2} m v^2$. Alla fine si vuole che il corpo sia a distanza infinita con velocità $v_0 \geq 0$. Scriviamo la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m m_T}{R_T} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

per cui

$$v^2 = v_0^2 + 2 \gamma \frac{m_T}{R_T} \quad .$$

Si vede che il problema è l'inverso del precedente. Il valore limite (inferiore) di v, detto v_F, *velocità di fuga*, corrisponde a $v_0 = 0$: il corpo arriva a distanza infinita dalla terra con velocità nulla. Si trova

$$v_F = \sqrt{2 \gamma \frac{m_T}{R_T}} \quad ,$$

indipendente dalla massa del corpo. Poiché $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m, inserendo i valori di γ e m_T dati nel paragrafo 7.1, abbiamo

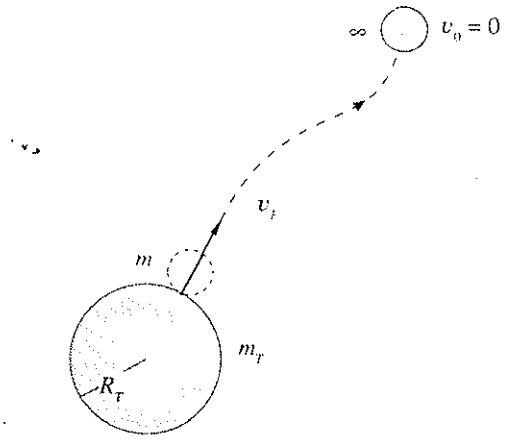


Fig. 7.13

$$v_F = 11.2 \text{ km/s} \cong 4 \cdot 10^4 \text{ km/ora} \quad .$$

La stessa formula vale per qualsiasi altro pianeta, con gli appropriati valori di massa e raggio. Nel caso della luna si trova, per esempio, $v_F = 2.4$ km/s $\cong 8.5 \cdot 10^3$ km/ora. Per i pianeti del sistema solare il maggior valore della velocità di fuga si ha su Giove, dove $v_F = 60$ km/s = $21.6 \cdot 10^4$ km/ora.

ESEMPIO 7.3

Un satellite di massa m descrive un'orbita circolare attorno ad un pianeta di massa M; il raggio dell'orbita è r e il periodo di rivoluzione è T. Calcolare il valore della massa M del pianeta e l'energia del satellite.

Soluzione
La legge di Newton $\mathbf{F} = m \boldsymbol{a}$ applicata al satellite si scrive

$$\gamma \frac{m M}{r^2} = m \omega^2 r \quad .$$

Al posto di ω si sostituisce $4\pi^2 / T^2$ e si trova

$$M = \frac{4 \pi^2}{T^2} \frac{r^3}{\gamma} \quad .$$

Vediamo che, noto il valore di γ, la massa del pianeta si può dedurre da misure geometriche e cinematiche sul moto del satellite: il risultato non dipende dalla massa del satellite.

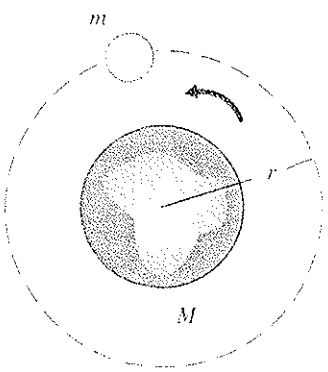


Fig. 7.14

L'energia meccanica del satellite è

$$E_m = \frac{1}{2}\, m\, v^2 - \gamma\, \frac{m\, M}{r} \quad .$$

Riprendendo la legge del moto

$$\gamma\, \frac{m\, M}{r^2} = m\, \omega^2\, r = m\, \frac{v^2}{r}$$

possiamo esprimere l'energia cinetica in funzione di r:

$$E_k = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, \gamma\, \frac{m\, M}{r} \quad ;$$

troviamo quindi che $|E_p| = \gamma\, \frac{m\, M}{r}$ è maggiore di E_k e che l'energia totale risulta

$$E_m = -\gamma\, \frac{m\, M}{2\, r} < 0 \quad .$$

Il sistema è legato, il satellite non può cioè sfuggire all'attrazione del pianeta.

Anche a (7.6) si può applicare il ragionamento del paragrafo 7.3, che introduce il concetto di *campo gravitazionale*. Precisamente l'energia potenziale si può scrivere $E_p = m_2 V_1$ ponendo

$$V_1 = \frac{E_p}{m_2} = -\gamma\, \frac{m_1}{r} \quad ; \qquad (7.7)$$

Potenziale gravitazionale

la grandezza $V_1(r)$ si chiama *potenziale gravitazionale* del campo prodotto da m_1. Chiaramente la situazione è simmetrica nelle masse: si può scrivere anche $E_p = m_1 V_2$ con $V_2 = -\gamma m_2 / r$, potenziale gravitazionale del campo prodotto da m_2.

Il lavoro per uno spostamento generico della massa m_2 dalla posizione A alla posizione B nel campo di m_1 è

$$W = -\Delta E_p = -m_2\, \Delta V_1 = -m_2\, (V_{1,B} - V_{1,A}).$$

Tra campo e potenziale esiste la relazione fondamentale

$$\mathbf{G} = -\operatorname{grad} V, \qquad (7.8)$$

che si ricava da (2.20) inserendo (7.1) e (7.6) e dividendo entrambi i membri per m_2 o per m_1.

Grafici dell'energia

L'energia totale di un sistema di due masse può assumere valore positivo, nullo o negativo a seconda che sia

$$E_k > |E_p| \quad , \quad E_k = |E_p| \quad , \quad E_k < |E_p| \quad .$$

Nei grafici della figura 7.15 sono rappresentati i tre casi: r è la distanza mutua, E l'energia totale costante; la doppia freccia indica la differenza $E - E_p = E_k$ per un particolare calore r. La curva continua mostra $E_p = -\gamma\, m_1 m_2 / r$ ed è eguale nei tre casi. Vediamo che nel terzo caso r è limitato ($r \leq r_0$), mentre nei primi due casi non ci sono limiti. Correggeremo parzialmente queste conclusioni nel paragrafo 7.6 dove calcoleremo un'espressione esplicita per l'energia totale del sistema di due masse.

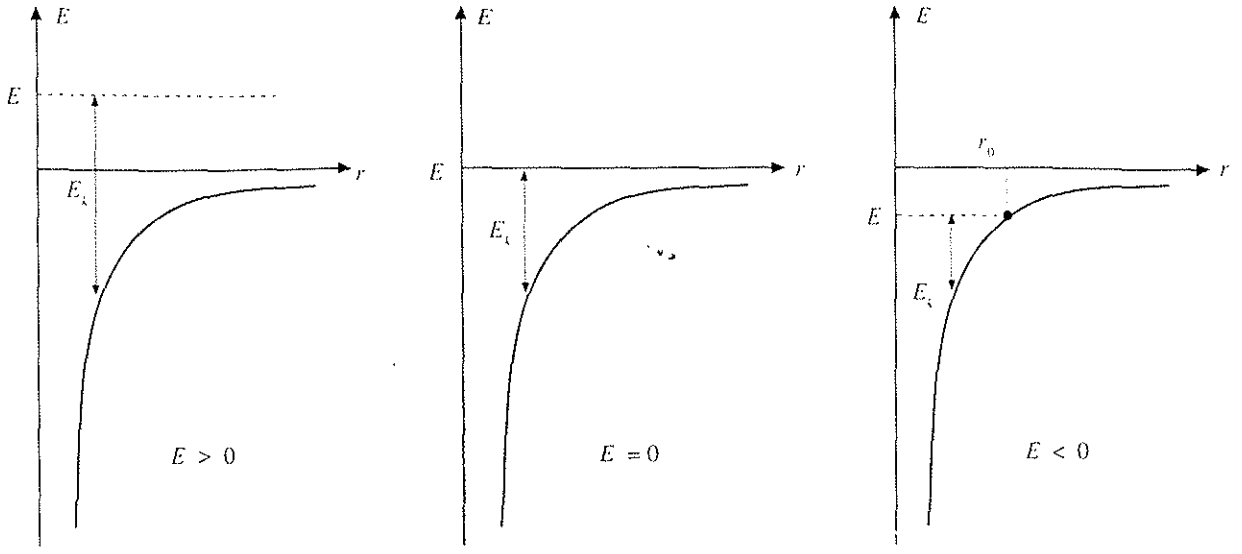


Fig. 7.15

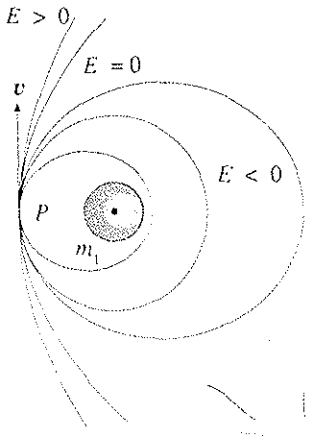


Fig. 7.16

Sempre nel paragrafo 7.6 vedremo che:

se $E > 0$ l'*orbita* è *iperbolica*
se $E = 0$ l'*orbita* è *parabolica*
se $E < 0$ l'*orbita* è *ellittica*

Il caso trattato nell'esempio 7.3 appartiene all'ultima categoria: l'energia totale è negativa, l'orbita è limitata.

La situazione descritta per le orbite è mostrata in figura 7.16. In P c'è la massa m_2 con velocità $\boldsymbol{v}$. Sono disegnate una possibile traiettoria iperbolica, l'unica traiettoria parabolica e tre possibili traiettorie ellittiche (la centrale in realtà è circolare). Controllando v si può scegliere la traiettoria voluta, come avviene con i satelliti artificiali.

7.5 TEOREMA DI GAUSS. DISTRIBUZIONE SFERICA DI MASSA

Consideriamo n masse e una superficie geometrica chiusa, figura 7.17, che ne racchiude solo un certo numero n_i; in ogni punto della superficie determiniamo $\mathbf{G}$, che è dovuto a tutte le masse presenti (interne ed esterne) e calcoliamo la quantità scalare

$$d\Phi = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_\searrow \, dS \quad ;$$

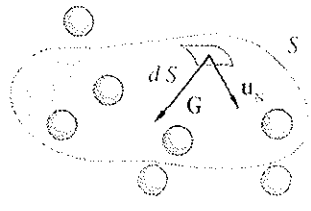


Fig. 7.17

$\mathbf{u}_\searrow$ è il vettore normale alla superficie, che assumiamo orientato verso l'interno, e dS è l'elemento di superficie intorno al punto in cui è calcolato $\mathbf{G}$. L'integrale esteso a tutta la superficie chiusa

$$\Phi = \oint d\Phi = \oint \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_\searrow \, dS$$

si chiama *flusso del vettore* **G** *attraverso la superficie chiusa S* .

Il *teorema di Gauss*, che enunciamo senza dimostrazione, afferma che *il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla somma delle masse interne alla superficie*:

$$\phi = 4\,\pi\,\gamma \sum_{i}^{n} m_i \quad . \qquad (7.9)$$ Teorema di Gauss

Nella dimostrazione è essenziale il fatto che il campo gravitazionale di una massa puntiforme è una funzione della distanza del tipo $1/r^2$: il teorema di Gauss cioè vale esclusivamente per i campi vettoriali che dipendono inversamente dal quadrato della distanza. In tal senso dire che per un determinato campo vale il teorema di Gauss è equivalente a dire che la sua intensità diminuisce come $1/r^2$.

Il teorema di Gauss, dimostrato agli inizi dell'ottocento, permette di verificare facilmente che il campo di una distribuzione sferica di massa è pari a quello di una eguale massa puntiforme posta nel centro della distribuzione.

Cominciamo con una massa m distribuita su una superficie sferica di raggio R in modo uniforme, cioè con densità $\rho_S = dm\,/dS$ = costante. Nel punto P (figura 7.18) il campo **G** è radiale: esso è dovuto alla somma di contributi simmetrici, eguali in modulo, che danno risultante radiale; se così non fosse, $dm\,/dS$ non sarebbe costante. In qualsiasi altro punto che abbia dal centro la stessa distanza di P la situazione è la stessa: il campo **G** è radiale e il suo modulo dipende solo da r.

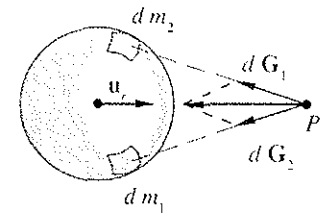


Fig. 7.18

$$\mathbf{G} = -\,G\,(r)\,\mathbf{u}_r$$

Per calcolare $G\,(r)$ utilizziamo il teorema di Gauss (7.9): come superficie di integrazione prendiamo una superficie sferica S concentrica a m e di raggio $r \geq R$, nei cui punti il campo ha lo stesso valore; la massa contenuta all'interno è appunto m. Abbiamo:

$$\Phi = \oint -\,G\,(r)\,\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_N\,dS = G\,(r) \oint dS = 4\,\pi\,r^2\,G\,(r) = 4\,\pi\,\gamma m$$

$$\Rightarrow G\,(r) = \gamma\,\frac{m}{r^2} \quad . \qquad (7.10)$$

come se m fosse concentrata nel centro. Il risultato vale per $r \geq R$; all'interno, per $r < R$, qualsiasi superficie di integrazione si consideri, questa non contiene massa e dunque il flusso attraverso di essa è nullo; deve quindi essere $G = 0$ ovunque.

In figura 7.19 è rappresentato il modulo del campo gravitazionale di una massa distribuita uniformemente su una superficie sferica; si osservi che il campo è discontinuo per $r = R$, cioè nell'attraversare la massa.

Se m è distribuita uniformemente in tutto il volume sferico, all'esterno il discorso è lo stesso:

$$G\,(r) = \gamma\,\frac{m}{r^2} \quad , \quad r \geq R \quad . \qquad (7.11)$$

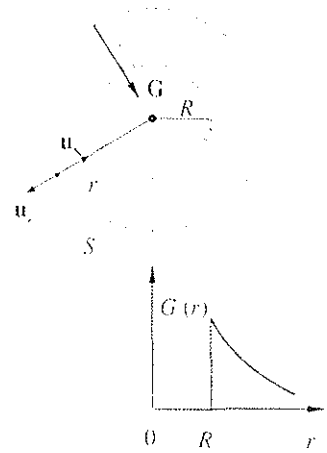


Fig. 7.19

All'interno invece cambia tutto. G non è più nullo; resta però vero l'argomento di simmetria radiale. All'interno di una superficie sferica S_1 di raggio $r \leq R$, figura 7.20, c'è la massa

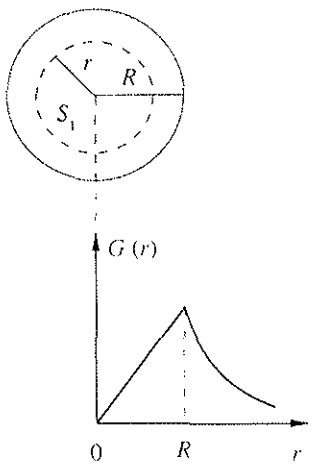


Fig. 7.20

$$m(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3} \pi r^3 = m \frac{r^3}{R^3}$$

e applicando (7.9)

$$\Phi(r) = 4 \pi r^2 G(r) = 4 \pi \gamma m \frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow G(r) = \gamma \frac{m}{R^3} r \,. \tag{7.12}$$

Il campo all'interno di una sfera omogenea cresce linearmente con la distanza dal centro; il grafico di $G(r)$ è mostrato in figura 7.20. Questo caso è una dimostrazione di come una massa estesa possa generare un campo che non ha l'andamento $1/r^2$, tipico della massa puntiforme. Osserviamo infine da (7.12) che una massa puntiforme m_p subisce all'interno della sfera omogenea la forza

$$\mathbf{F} = m_p \mathbf{G} = -\gamma \frac{m m_p}{R^3} \mathbf{r} = -k \mathbf{r} \quad ,$$

cioè una forza di tipo elastico. Se lungo un diametro si scavasse un foro e si abbandonasse sulla superficie un punto materiale con velocità nulla, questo descriverebbe un moto armonico all'interno del foro, con ampiezza pari al raggio R.

Riassumendo, da (7.10) e (7.11) si vede che il campo gravitazionale in un punto P all'esterno di una distribuzione sferica uniforme di massa in ogni caso vale

$$\mathbf{G}(r) = -\gamma \frac{m}{r^2} \mathbf{u}_r \quad , \tag{7.13}$$

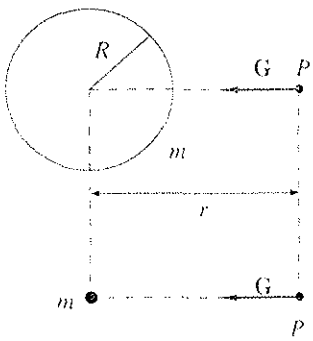


Fig. 7.21

indipendente, tra l'altro, dal raggio della distribuzione. Questo è anche, in base a (7.2), il campo gravitazionale in P prodotto da una massa m concentrata nel centro della distribuzione (figura 7.21).

Come conseguenza di ciò dimostriamo che la forza gravitazionale tra due sfere omogenee di masse m_1 e m_2, poste a una distanza r tra i loro centri O_1 e O_2, è eguale alla forza gravitazionale tra due masse puntiformi m_1 e m_2 distanti r.

Ciascun elemento dm_2 della seconda sfera è soggetto a una forza, esercitata dalla prima sfera, che equivale a quella di una massa puntiforme m_1 posta in O_1; quindi, secondo (7.2) e (7.13),

$$d\mathbf{F}_{1,2} = dm_2 \mathbf{G}_1 = -\gamma \frac{m_1 dm_2}{r_1^2} \mathbf{u}_1 \quad ,$$

essendo $\mathbf{G}_1$ il campo della prima sfera e r_1 la distanza della massa dm_2 da O_1. Per calcolare la risultante di tutte queste forze $d\mathbf{F}_{1,2}$ osserviamo che, in base al principio di azione e reazione, dm_2 esercita in O_1 una forza eguale e contraria,

$$d\mathbf{F}_{2,1} = -d\mathbf{F}_{1,2} = \gamma \frac{m_1 dm_2}{r_1^2} \mathbf{u}_1 \quad ,$$

e che, per le proprietà appena viste, l'effetto risultante in O_1 è quello di una massa

m_2 puntiforme posta in O_2. Quindi la forza risultante è, in modulo, $\gamma m_1 m_2 / r_{1,2}^2$ con $r_{1,2}^2 = O_1O_2^2 = r^2$. I passi del procedimento sono visualizzati in figura 7.22.

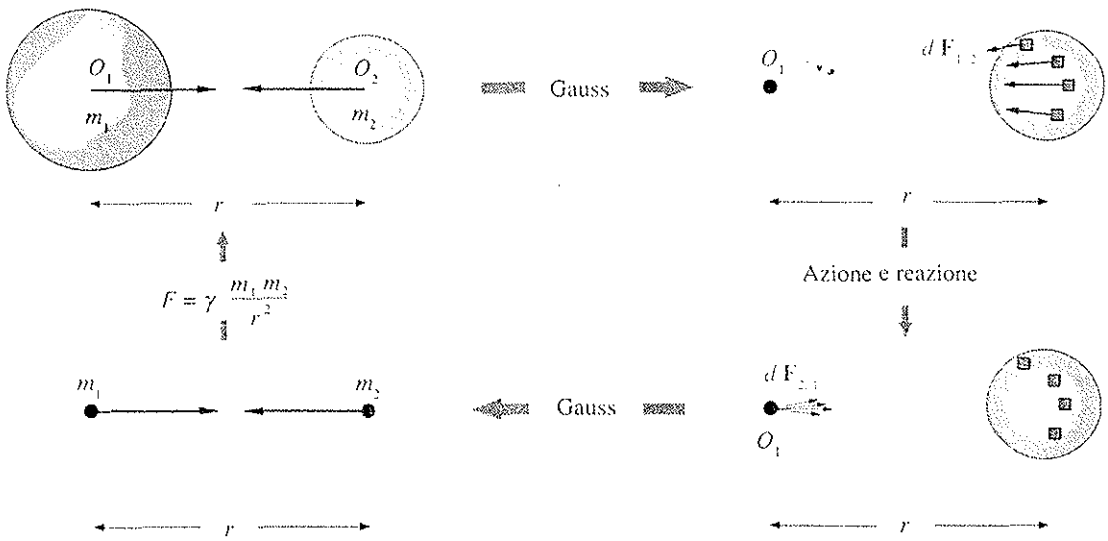


Fig. 7.22

È importante mettere in evidenza che il risultato è vero anche se i raggi delle due sfere sono confrontabili con la distanza tra i centri, cioè anche se le sfere sono molto vicine o a contatto. Inoltre si può anche rilasciare l'ipotesi che le sfere siano omogenee, purché la densità sia funzione solo del raggio, $\rho = \rho(r)$, in modo da conservare la simmetria sferica in ciascuno dei gusci sferici di cui si può pensare composta la sfera.

Le proprietà dimostrate in questo paragrafo discendono dal teorema di Gauss e pertanto valgono per tutti i campi il cui modulo varia come $1/r^2$. In particolare esse sono valide per il campo elettrostatico, come si vedrà nello studio delle forze tra cariche elettriche.

Energia gravitazionale di una massa sferica omogenea

Supponiamo di costruire la sfera, di massa m e raggio R, per gusci successivi, ciascuno compreso tra r e $r + dr$, e calcoliamo il lavoro necessario; il risultato non dipenderà dal procedimento perché la forza è conservativa.

Se è già stata fatta la sfera di raggio r, figura 7.23, il lavoro per portare da distanza

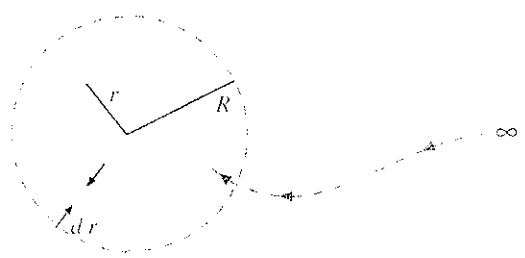


Fig. 7.23

infinita a distanza r dal centro la massa dm che si distribuisce nel guscio tra r e $r + dr$ è

$$dW = -dE_p = -\gamma \frac{m(r)\,dm}{r} \quad ,$$

secondo (7.6), con $m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, $dm = \rho\, dV$, $\rho = m / \frac{4}{3}\pi R^3$, $dV = 4\pi r^2 dr$, volume del guscio. Pertanto

$$dW = 3\gamma \frac{m^2}{R^6} r^4 dr \Rightarrow W = \int_0^R dW = \frac{3}{5}\gamma \frac{m^2}{R} \quad .$$

Questo lavoro è fornito dalla forza gravitazionale ed è eguale a $E_{p,\text{in}} - E_{p,\text{fin}}$. Però $E_{p,\text{in}} = 0$ perché inizialmente tutte le parti della sfera sono infinitamente lontane tra loro e quindi

$$E_{p,\text{fin}} = -W = -\frac{3}{5}\gamma \frac{m^2}{R} \quad . \tag{7.14}$$

Questa è l'energia potenziale gravitazionale di una sfera omogenea di massa m e raggio R.

Notiamo che al contrarsi della massa l'energia aumenta in modulo: al limite per $R \to 0$ l'energia diverge. Questo vuol dire che da un punto di vista energetico una massa puntiforme non ha significato (in fisica classica, mentre invece per particelle subnucleari elementari è possibile superare il problema di queste divergenze).

Si può dimostrare che quando il raggio ha un valore R_0 tale che

$$\frac{3}{5}\gamma \frac{m^2}{R_0} = mc^2 \quad ,$$

essendo c la velocità della luce nel vuoto, dalla sfera non può sfuggire alcun segnale luminoso: essa si comporta come un *buco nero*.

Il sole ha massa $m_S = 1.98 \cdot 10^{30}$ kg e raggio $R_S = 6.96 \cdot 10^8$ m : la sua energia potenziale vale in modulo

$$|E_p| = \frac{3}{5}\gamma \frac{m_S^2}{R_S} = 2.25 \cdot 10^{41}\ \text{J} \quad .$$

Il valore di $R_0 = \frac{3}{5}\gamma \frac{m_S}{c^2}$ risulta pari a 880 m, molto minore di R_S. Il sole cioè è ancora molto lontano dal somigliare a un buco nero.

7.6 DETERMINAZIONE DELLA TRAIETTORIA.

Vogliamo adesso dimostrare che l'orbita dei pianeti è ellittica (1ª *legge di Keplero*) e che il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore (3ª *legge di Keplero*).

Dobbiamo però premettere alcune proprietà delle coniche.

Parentesi geometrica sulle coniche

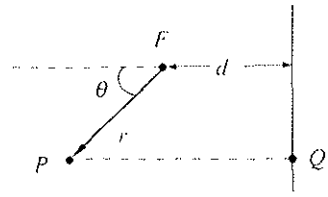


Fig. 7.24

Una conica è una curva piana definita (vedi figura 7.24) come luogo dei punti per i quali il rapporto tra la distanza da un punto (fuoco) e la distanza da una retta (direttrice) è pari a una costante che si chiama eccentricità ε :

$$\varepsilon = \frac{PF}{PQ} = \frac{r}{d + r\cos\theta} \quad .$$

Pertanto l'equazione di una conica in coordinate polari di centro F è

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon d} - \frac{1}{d}\cos\theta \quad . \tag{7.15}$$

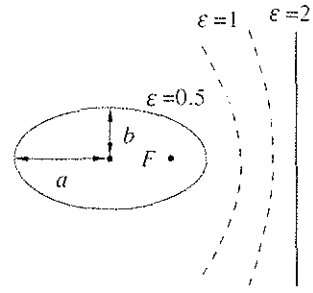


Fig. 7.25

Se $\varepsilon < 1$ abbiamo un'ellisse, se $\varepsilon = 1$ una parabola, se $\varepsilon > 1$ un'iperbole. In particolare per un'ellisse valgono le relazioni:

$$a = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2} \tag{7.16}$$

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad .$$

L'area dell'ellisse è $A = \pi a b = \pi a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ ($\varepsilon = 0$ quindi corrisponde a una circonferenza).

Equazione del moto. Traiettoria

Consideriamo due punti isolati, di masse M e m, tra i quali esiste la forza gravitazionale $\gamma M m / r^2$. In un sistema di riferimento inerziale

$$\mathbf{F} = m\,\boldsymbol{a}_m \quad , \quad -\mathbf{F} = M\,\boldsymbol{a}_M \quad .$$

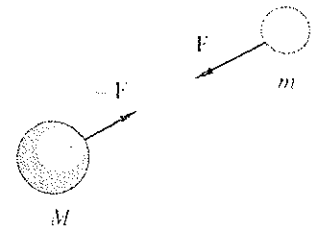


Fig. 7.26

Analogamente a quanto visto per la velocità di un punto rispetto ad un altro in movimento, relazione (5.10), l'accelerazione relativa di m rispetto a M è

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_M = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\mathbf{F} = \frac{1}{\mu}\mathbf{F} \quad ,$$

dove

$$\mu = \frac{mM}{m + M}$$

si chiama *massa ridotta* del sistema ($\mu < m$ e $\mu < M$). Pertanto

Massa ridotta

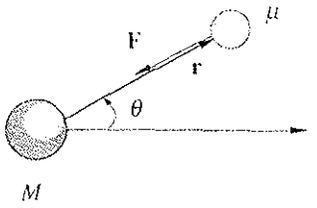


Fig. 7.27

$$\mathbf{F} = \mu \boldsymbol{a} \quad . \tag{7.17}$$

Il moto relativo di due punti materiali sottoposti alla loro interazione mutua è equivalente al moto di un punto con massa eguale alla massa ridotta e sottoposto a una forza eguale alla forza di interazione mutua. Ovvero, l'equazione del moto di m rispetto a M, $\mathbf{F} = \mu \boldsymbol{a}$, è identica a quella valida in un sistema di riferimento inerziale, col solo scambio $m \to \mu$ e con la forza $\mathbf{F}$ immutata, anche se M si muove di moto accelerato.

Il risultato non dipende dal tipo di forza agente e mostra che il problema del moto relativo di due punti è riconducibile al moto di un punto materiale.

Introduciamo adesso al posto di $\mathbf{F}$ l'espressione $-\gamma \frac{m M}{r^2} \mathbf{u}_r$ in quanto vogliamo studiare il moto di m rispetto a M sotto l'azione dell'interazione gravitazionale tra le due masse (che possono essere estese, purché con simmetria sferica).

Binet:

$$a = -\frac{L^2}{m^2 r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]u_r$$

La forza è centrale e quindi il moto si svolge in un piano, con momento angolare costante. Possiamo usare per $\boldsymbol{a}$ la *formula di Binet* (2.27), che dà l'accelerazione, in un campo di forze centrali, in funzione delle coordinate polari di m rispetto a M e del valore costante di $\mathbf{L}$. Nella (2.27) bisogna però sostituire μ^2 a m^2, come dobbiamo fare in tutte le espressioni che riguardando il moto di m (ma non nella forza). La (7.17) diventa allora

$$-\gamma \frac{m M}{r^2} \mathbf{u}_r = -\mu \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]\mathbf{u}_r$$

ovvero

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r} = \gamma\mu\frac{m M}{L^2} \quad . \tag{7.18}$$

La legge del moto porta all'equazione differenziale (7.18), la cui soluzione dà $r(\theta)$, ovvero la traiettoria di m rispetto a M. Nella (7.18) riconosciamo la nota struttura $\frac{d^2 f}{dx^2} + f$, tipica dell'oscillatore armonico; però l'equazione non è omogenea. Ricordiamo dal paragrafo 4.2 che la soluzione più generale è somma di una soluzione particolare dell'equazione (7.18), come $\gamma\mu \frac{m M}{L^2}$, e della soluzione generale dell'omogenea associata $A \cos\theta$. Pertanto

$$\frac{1}{r} = \gamma\mu \frac{m M}{L^2} + A\cos\theta \quad . \tag{7.19}$$

Confrontando (7.19) con (7.15) vediamo che la traiettoria è una conica.

Momento angolare. Energia

Un primo risultato del suddetto confronto è che

$$L^2 = \gamma\mu\, m M\, \varepsilon\, d \quad . \tag{7.20}$$

I parametri della traiettoria ε e d *danno il valore costante del momento angolare.*

L'energia totale è

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}\mu v^2 - \gamma \frac{m M}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \gamma \frac{m M}{r} \quad , \tag{7.21}$$

avendo fatto ricorso a (1.19), valida perché il moto è piano. Per la stessa ragione possiamo usare la (2.21), riscritta come

$$L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad . \tag{7.22}$$

Il primo termine di (7.21) si può trasformare ricorrendo a (7.15):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{d}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu \frac{r^4}{d^2}\operatorname{sen}^2\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{d^2}\frac{L^2}{\mu},$$

avendo utilizzato (7.22). Questa permette di trasformare anche il secondo termine di (7.21):

$$\frac{1}{2}\mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} \quad .$$

Infine il terzo termine di (7.21) tramite (7.20) diviene

$$-\gamma \frac{m M}{r} = -\frac{L^2}{\varepsilon d \mu r}$$

Mettendo insieme i vari risultati

$$E = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{d^2}\frac{L^2}{\mu} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} - \frac{L^2}{\varepsilon d \mu r} \quad .$$

Riutilizzando (7.15) per $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{r^2}$, e (7.20) si ottiene

$$E = \frac{L^2}{2\mu\varepsilon^2 d^2}(\varepsilon^2 - 1) = \gamma \frac{m M}{2\varepsilon d}(\varepsilon^2 - 1) \quad . \tag{7.23}$$

Anche l'*energia totale*, costante perché la forza è conservativa, *si ricava dai parametri dell'orbita*. Viceversa, fissati i valori di L ed E, si possono calcola-

re ε e d.

La (7.23) ci permette di dimostrare quanto enunciato nel paragrafo 7.4. Con $\varepsilon < 1$, orbita ellittica, l'energia è negativa, con $\varepsilon = 1$, orbita parabolica, l'energia è nulla, con $\varepsilon > 1$, orbita iperbolica, l'energia è positiva.

Poiché il sistema pianeta–sole è legato l'energia totale è negativa e quindi l'orbita del pianeta è un'ellisse, come prescrive la prima legge di Keplero.

Nel caso particolare di orbite ellittiche utilizziamo (7.16) per trasformare (7.20) e (7.23):

$$L^2 = \gamma \mu m M a (1 - \varepsilon^2) \quad , \quad E = -\gamma \frac{mM}{2a} . \tag{7.24}$$

Data l'energia totale E, è fissato solo il semiasse maggiore a, ma non l'eccentricità ε: a parità di energia si possono avere ellissi diverse (stessa a, diversa ε) con momento angolare diverso, a conferma che energia e momento angolare sono indipendenti.

Infine, dalla (2.26) che dà il periodo di rivoluzione riscritta come

$$T = 2\mu \frac{A}{L} = 2\mu \frac{\pi a^2}{L} \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

e confrontata con la prima delle (7.24) si ottiene

$$L^2 = \frac{4\pi^2 \mu^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)}{T^2} = \gamma \mu m M a (1 - \varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \mu a^3}{\gamma m M} = \frac{4\pi^2}{\gamma (m + M)} a^3 = k a^3 \quad ,$$

che è la *terza legge di Keplero*. Si osservi che la costante

$$k = \frac{4\pi^2}{\gamma (m + M)}$$

è praticamente eguale per tutti i pianeti, essendo la massa m di ciascun pianeta molto minore della massa M del sole.

Riprendiamo adesso, alla luce di (7.21), l'argomento relativo ai grafici dell'energia, trattato nel paragrafo 7.4 (figura 7.15). Nella (7.21) il secondo termine si può scrivere $L^2/2\mu r^2$ come abbiamo dimostrato, per cui

$$E = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{mM}{r} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{p.eff}$$

con

$$E_{p.eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{mM}{r} \quad ,$$

Energia potenziale efficace

detta *energia potenziale efficace*, somma dell'energia potenziale gravitazionale e

del termine $L^2/2\mu r^2$, che è una parte dell'energia cinetica, ma che, in presenza di forze centrali, si può esprimere come funzione delle coordinate in quanto dipende solo dalla distanza di m da M.

Se confrontiamo $L^2/2\mu r^2$ con $-\gamma m M/r$ vediamo che per r grande predomina E_p, ma che per r tendente a zero predomina $L^2/2\mu r^2$. La loro somma $E_{p.eff}$ ha l'andamento mostrato in figura 7.28.

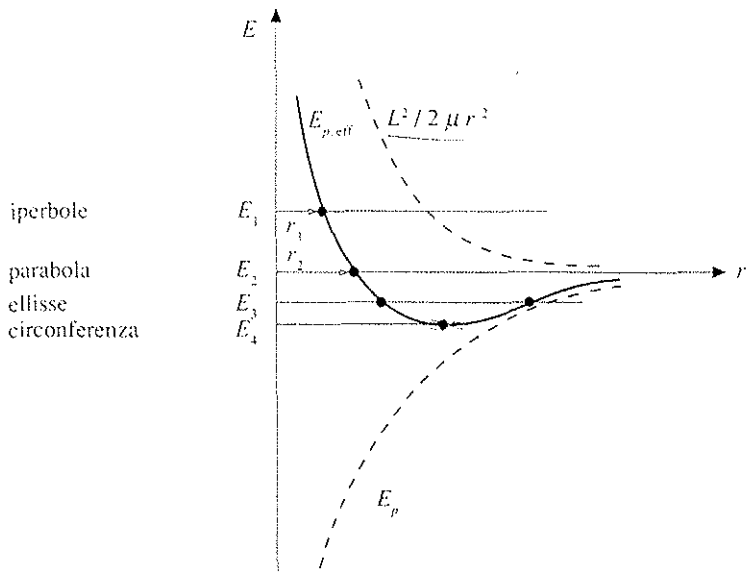


Fig. 7.28

Quando l'energia totale è positiva o nulla (E_1 o E_2) r ha un valore minimo r_1 o r_2: al disotto di questi sarebbe $E < E_{p.eff}$, che non è possibile. La distanza tra m e M non può quindi scendere al di sotto di un certo valore che dipende da E (retta orizzontale) e da L (curva di $E_{p.eff}$): a parità di E, maggiore è L maggiore è la distanza minima.

Quando l'energia totale è negativa (E_3) la distanza tra m e M ha un valore minimo e uno massimo, salvo nel caso di E_4 in cui è permesso un solo valore di r e l'orbita è circolare. Non sono possibili valori minori di E_4 perché deve sempre essere $E \geq E_{p.eff}$. La configurazione con energia minima è dunque quella con orbita circolare, tutte le altre configurazioni hanno un livello energetico superiore.

In definitiva, dalla figura 7.28 si hanno informazioni interessanti sul moto di m rispetto a M. Fissate le masse, la curva di E_p è fissata; le condizioni iniziali danno E e L; il valore di E determina se il sistema è legato o meno e quindi il tipo di traiettoria, il valore di L determina, tra l'altro, il valore della distanza di minimo impatto. In pratica, solo se la velocità iniziale è nulla o diretta lungo la retta di azione della forza, m cade sicuramente su M, altrimenti descrive un'orbita, aperta o chiusa, attorno a M a cui si avvicina più o meno a seconda del valore di L: siccome però né M né m sono in generale puntiformi, può anche accadere che l'orbita di m incontri la superficie di M: si riveda la figura 7.16 immaginando M di dimensioni maggiori.

Nella realtà sperimentale, in astronomia l'orbita è data e da essa si possono calcolare energia e momento angolare; invece, nel lancio di satelliti artificiali, si possono fissare le condizioni iniziali e scegliere l'orbita più appropriata.

Al termine $L^2/2\mu r^2$ si dà talvolta il nome di *energia potenziale centrifuga*, anche

Energia potenziale centrifuga

se nel sistema non c'è alcuna forza centrifuga; si usa tale termine per sottolineare il fatto che maggiore è L maggiore è la distanza minima e quindi è come se ci fosse una forza repulsiva dipendente da L^2 (diretta da M e m, cioè centrifuga); si parla anche di *barriera centrifuga*, per visualizzare l'impossibilità di scendere al di sotto di un certo valore di r.

7.7 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE.

Le leggi della meccanica che abbiamo studiato nei capitoli precedenti forniscono il quadro generale in cui collocare e risolvere situazioni specifiche. Il caso della forza tra due masse e del moto che ne risulta è un esempio classico, molto importante. Per risolverlo abbiamo usato varie proprietà, dimostrate in generale e applicate al caso in cui la forza abbia appunto l'espressione (7.1).

Un altro esempio di grande rilevanza verrà trattato in Fisica II: si tratta della forza elettrostatica che ha una struttura identica a (7.1), a parte la differenza fondamentale dell'esistenza di cariche di due segni (mentre la massa ha solo un segno), che rende la fenomenologia più varia. Si vedrà così l'applicazione di proprietà come il teorema di Gauss e di concetti come campo e potenziale.

Con riferimento alla discussione del capitolo 2 sul significato di $\mathbf{F} = m\,\boldsymbol{a}$, la scoperta della (7.1) è un esempio di deduzione della forza da misure geometriche e cinematiche; l'uso successivo è invece un esempio di come dalla conoscenza della forza si possano calcolare le traiettorie. Un caso storico famoso è il seguente: dallo studio di anomalie nella traiettoria di Urano, non giustificabili come perturbazioni, da parte dei pianeti conosciuti, della forza esercitata dal sole, si calcolò dove si sarebbe potuto trovare un altro pianeta, fino ad allora sconosciuto, la cui presenza avrebbe fatto tornare i conti e si scoprì così, nel 1846, il pianeta Nettuno.

Concludiamo con una precisazione: abbiamo detto che le orbite dei pianeti attorno al sole sono certamente ellittiche, a parte piccole perturbazioni dovute alle forze tra pianeti, ma poco diverse da circonferenze.

Nella tabella sono riportati vari dati relativi ai pianeti, tra cui l'eccentricità dell'orbita. Da questa si calcola il rapporto tra i semiassi dell'ellisse, $b/a = \sqrt{1-\varepsilon^2}$. All'eccentricità massima di Plutone, $\varepsilon = 0.250$, corrisponde un rapporto $b/a = 0.968$, contro un valore $b/a = 1$ per una traiettoria circolare ($\varepsilon = 0$). L'eccentricità dell'orbita terrestre è $\varepsilon = 0.017$, per cui $b/a = 0.999$.

Pianeta	Massa (kg)	Raggio (m)	Periodo (s)	Eccentricità	Semiasse magg. (m)	T^2 / a^3 (s^2 / m^3)
Mercurio	$0.32 \cdot 10^{24}$	$2.43 \cdot 10^{6}$	$0.76 \cdot 10^{7}$	0.206	$5.79 \cdot 10^{10}$	$2.98 \cdot 10^{-19}$
Venere	$4.88 \cdot 10^{24}$	$6.06 \cdot 10^{6}$	$1.94 \cdot 10^{7}$	0.007	$1.08 \cdot 10^{11}$	2.99
Terra	$5.98 \cdot 10^{24}$	$6.37 \cdot 10^{6}$	$3.16 \cdot 10^{7}$	0.017	$1.50 \cdot 10^{11}$	2.96
Marte	$0.64 \cdot 10^{24}$	$3.37 \cdot 10^{6}$	$5.94 \cdot 10^{7}$	0.093	$2.28 \cdot 10^{11}$	2.98
Giove	$19.0 \cdot 10^{26}$	$6.99 \cdot 10^{7}$	$3.74 \cdot 10^{8}$	0.048	$7.78 \cdot 10^{11}$	2.97
Saturno	$5.68 \cdot 10^{26}$	$5.85 \cdot 10^{7}$	$9.35 \cdot 10^{8}$	0.056	$1.43 \cdot 10^{12}$	2.99
Urano	$0.87 \cdot 10^{26}$	$2.33 \cdot 10^{7}$	$2.65 \cdot 10^{9}$	0.046	$2.87 \cdot 10^{12}$	2.97
Nettuno	$1.03 \cdot 10^{26}$	$2.21 \cdot 10^{7}$	$5.22 \cdot 10^{9}$	0.009	$4.50 \cdot 10^{12}$	2.99
Plutone	$1.08 \cdot 10^{24}$	$3 \cdot 10^{6}$	$7.82 \cdot 10^{9}$	0.250	$5.92 \cdot 10^{12}$	2.95

PROPRIETÀ MECCANICHE DEI SOLIDI

8

La nozione di corpo rigido deriva per astrazione dalla caratteristica dei corpi solidi ordinari di avere forma e dimensioni ben definite. In realtà tutti i corpi solidi si deformano sotto l'azione delle varie sollecitazioni meccaniche esterne. Le proprietà meccaniche governano la risposta dei materiali alle sollecitazioni.

8.1 DEFORMAZIONE ELASTICA.

Quando un materiale viene sollecitato tramite una forza, che chiamiamo carico, di piccola intensità, esso subisce una deformazione proporzionale al carico; tale deformazione si annulla con l'annullarsi del carico stesso.

La proporzionalità tra deformazione e carico costituisce la *legge di Hooke*, già evidenziata nello studio di una molla. Se applichiamo una forza **F** all'estremo di una molla, fissata nell'altro estremo ad un punto vincolato, essa subisce un allungamento Δx, raggiungendo una configurazione di equilibrio, con Δx proporzionale a F. L'allungamento origina nella molla una reazione elastica, proporzionale all'allungamento stesso, la quale fa equilibrio a **F**.

Uno studio della deformazione elastica di un corpo solido può essere realizzato utilizzando il semplice dispositivo in figura 8.1. Una sbarra solida omogenea è posata su un tavolo e bloccata a una estremità; all'altra estremità viene applicata una forza di modulo F, per esempio dovuta alla forza peso della massa m. In questo caso il carico è di *trazione* e, come nella situazione con una molla, si raggiunge un equilibrio in cui la reazione elastica della sbarra eguaglia la forza applicata. Se la sbarra subisce l'azione di una forza di verso contrario alla precedente, si parla di *compressione*.

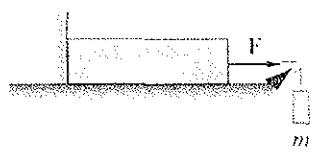


Fig. 8.1

Nella pratica, più che i valori assoluti della deformazione e del carico, si utilizzano quelli specifici o unitari. Si definisce come *carico specifico* o unitario σ il *rapporto tra la forza applicata ortogonalmente a una superficie e la superficie stessa*, ovvero la forza applicata ortogonalmente all'unità di superficie. Analogamente la *deformazione specifica* o unitaria, detta anche *allungamento lineare unitario* ε, è l'allungamento subito da un materiale di lunghezza unitaria ovvero il *rapporto tra allungamento e lunghezza*. In formule

Carico specifico

Deformazione specifica

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{8.1}$$

Il rapporto tra carico specifico e allungamento unitario, per valori del carico tali

che le due grandezze siano proporzionali, è definito come *modulo di Young* o modulo di elasticità E :

Modulo di Young

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{E}\sigma \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S} \cdot \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \qquad (8.2)$$

La (8.2) rappresenta la relazione tra allungamento lineare e forza applicata, in funzione delle dimensioni geometriche del solido e delle sue caratteristiche elastiche. Un alto valore di E determina, a parità di carico specifico, un allungamento specifico minore. In figura 8.2 è riportato il grafico comunemente usato nello studio delle proprietà elastiche di un corpo.

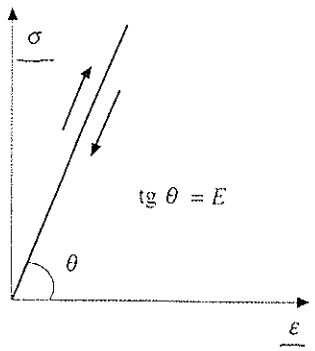


Fig. 8.2

Nella tabella 8.1 sono elencati i valori del modulo di Young di alcuni materiali, alla temperatura di 20°C.. Da (8.1) e (8.2) si vede che l'unità di misura di E, eguale a quella di σ, è il N/m^2; ε invece è adimensionale.

Tabella 8.1 - Modulo di Young

Materiale	E
acciaio	$2.1 \cdot 10^{11}$ N/m^2
alluminio	$7.0 \cdot 10^{10}$
argento	$7.5 \cdot 10^{10}$
ferro	$2.0 \cdot 10^{11}$
gomma	$5–80 \cdot 10^{6}$
ottone	$9.1 \cdot 10^{10}$
piombo	$1.4 \cdot 10^{10}$
platino	$1.5 \cdot 10^{11}$
polietilene	$1–14 \cdot 10^{8}$
rame	$1.1 \cdot 10^{11}$
tungsteno	$3.5 \cdot 10^{11}$
vetro per finestre	$7.0 \cdot 10^{10}$

Il modulo di Young presenta, in genere, per i metalli valori decrescenti al crescere della temperatura, fino a che non si verifichi una trasformazione di fase cioè una modifica della struttura cristallina. Ad esempio, per l'alluminio, il modulo di Young varia da $7 \cdot 10^{10}$ N/m^2 alla temperatura di 20°C (temperatura ambiente) a $5 \cdot 10^{10}$ N/m^2 a 500°C, mentre per il ferro varia da $2 \cdot 10^{11}$ N/m^2, a 20°C, a $1.5 \cdot 10^{11}$ N/m^2 a 500°C.

ESEMPIO 8.1

Determinare, per un filo di alluminio, di diametro d = 1 mm e lunghezza l = 1.2 m, l'allungamento per effetto di una sollecitazione a trazione con carico F = 120 N.

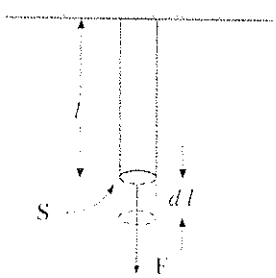


Fig. 8.3

Soluzione

La sezione del filo è

$$S = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi (5 \cdot 10^{-4})^2 = 7.85 \cdot 10^{-7}\ m^2 \ .$$

pertanto il carico specifico vale

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{120}{7.85 \cdot 10^{-7}} = 1.53 \cdot 10^{8}\ \mathrm{N/m^2}.$$

L'allungamento è dato da (8.2), con $E = 7 \cdot 10^{10}$ N/m^2 (vedi tab. 8.1)

$$\Delta l = l\ \frac{\sigma}{E} = 1.2\ \frac{1.53 \cdot 10^{8}}{7 \cdot 10^{10}} = 2.6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 2.6\ \mathrm{mm};$$

l'allungamento unitario ε vale $\Delta l / l = 2.2 \cdot 10^{-3}$.

ESEMPIO 8.2

Una sbarra di rame lunga 40 mm viene sottoposta a un carico di trazione, così da assumere la lunghezza di 46 mm. Calcolare il valore del carico specifico.

Soluzione
La deformazione specifica è

$$\varepsilon = \frac{46 - 40}{40} = 0.15;$$

pertanto da (8.2), con E dato dalla tabella 8.1:

$$\sigma = E\,\varepsilon = 1.1 \cdot 10^{11} \cdot 0.15 = 1.65 \cdot 10^{10}\ \mathrm{N/m^2}.$$

ESEMPIO 8.3

Una sbarra omogenea AB, di sezione S e lunghezza l, è posta su un piano orizzontale con un estremo B vincolato ad un supporto fisso. All'estremo libero A viene applicata una forza F costante e distribuita uniformemente sulla sezione. Determinare la variazione di lunghezza nei due casi:
a) in presenza di vincolo;
b) senza vincolo.

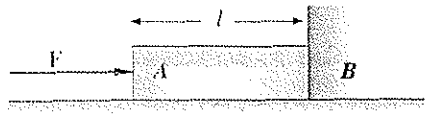


Fig. 8.4

Soluzione
In presenza di vincolo, da (8.2)

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} = \frac{l F}{E S}.$$

In assenza di supporto la sbarra si muove con moto uniformemente accelerato. La forza di compressione su una sezione a distanza x dall'estremo A è dato da

$$T = F\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Infatti, detta a l'accelerazione del centro di massa della sbarra, e quindi di tutti i punti materiali che la costituiscono, si ha

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{\rho\, l\, S}$$

con ρ densità della sbarra. Un elemento di lunghezza $l - x$, che si muove con la stessa accelerazione, risente della forza

$$F_1 = \rho S (l - x)\, a = \rho S (l - x)\, \frac{F}{\rho\, l\, S} = F\left(1 - \frac{x}{l}\right) = T$$

In sostanza questa è la forza che attraverso la parte lunga x viene trasmessa alla successiva parte lunga $l - x$; tale forza di compressione decresce linearmente lungo la sbarra dal valore F per $x = 0$ al valore zero per $x = l$.
La variazione di lunghezza di un elemento dx posto a distanza x da A in base alla 8.2 è

$$d\xi = \frac{T}{E S}\, dx = \frac{F}{E S}\left(1 - \frac{x}{l}\right) dx,$$

avendo usato (8.2) con $\varepsilon = d\xi / dx$, la variazione di lunghezza della sbarra in moto è

$$\Delta l' = \int_0^l d\xi = \frac{F}{E S} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = \frac{1}{2}\ \frac{l F}{E S};$$

la variazione $\Delta l'$ è la metà della variazione Δl per la sbarra vincolata.



Fig. 8.5

Osserviamo che tutti gli elementi dx si muovono con l'accelerazione a, come detto: per ciascuno il prodotto massa per accelerazione vale

$$\rho S\, dx = \frac{F}{\rho S l} = \frac{F}{l}\, dx$$

e si verifica che è eguale a $T(x) - T(x+dx)$. Sull'elemento agiscono quindi la forza motrice dell'elemento che lo precede e la forza resistente dell'elemento che lo segue. Nella (8.2) però la forza che compare è la forza $T(x)$ di compressione e non la reazione del supporto contro cui l'elemento è compresso. In effetti, se l'elemento è fermo, la forza di compressione è eguale in modulo alla reazione ed è sottinteso che la deformazione avviene sotto l'azione di queste due forze. Se il corpo è in moto sotto l'azione di una forza, per ciascun elemento dx la situazione è quasi identica: esso è compresso contro l'elemento successivo, però le forze non sono esattamente eguali e contrarie e anzi è proprio la differenza tra di esse che fornisce la forza necessaria per il moto; facendo il calcolo si trova che la differenza di deformazione tra moto e quiete è di un fattore 2. Se invece il moto fosse uniforme, $\Delta l' = 0$: lungo la sbarra non c'è compressione, gli elementi dx non premono uno contro l'altro.

ESEMPIO 8.4

Un'asta sottile, di sezione S, lunghezza l e massa m, ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse verticale, perpendicolare all'asta stessa e passante per un suo estremo. Determinare la variazione di lunghezza Δl.

Soluzione

Si segue il ragionamento dell'esempio precedente. Attraverso la sezione distante x dall'asse viene esercitata sul resto dell'asta la forza $T(x)$ necessaria per il moto circolare. Questa forza è la risultante delle forze agenti su tutti gli elementi dx compresi tra x e l, cioè delle forze

$$dm\ \omega^2 x = \rho S\ \omega^2 x\ dx \quad ;$$

$$T(x) = \int_0^l \rho S\ \omega^2 x\, dx = \frac{1}{2}\, \rho S\ \omega^2 (l^2 - x^2) \quad .$$

La variazione di lunghezza $d\xi$ di un elemento dx distante x dall'asse è dato da (8.2):

$$d\xi = \frac{T}{S E}\, dx = \frac{1}{2}\, \rho\, \frac{\omega^2}{E} (l^2 - x^2)\, dx \quad ,$$

integrando su tutta la lunghezza della sbarra

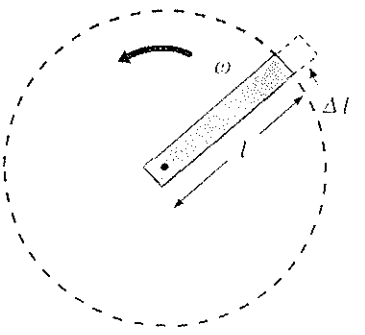


Fig. 8.6

$$\Delta l = \int_0^l d\xi = \frac{1}{2}\, \rho\, \frac{\omega^2}{E} \int_0^l (l^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\, \rho\, \frac{\omega^2}{E}\, l^3 = \frac{1}{3}\, m l^2\, \frac{\omega^2}{S E} \quad .$$

Per esempio, un'asta di acciaio, $E = 2.11 \cdot 10^{11}$ N/m^2, lunga 1 m, di sezione 1 cm^2 e massa 0.78 kg, che ruota con velocità angolare $\omega = 100$ rad/s, si allunga di $\Delta l = 0.12$ mm.

Per effetto della trazione la sbarra non solo si allunga, ma subisce anche una variazione di sezione. Se r è una dimensione trasversale, ad esempio per una sbarra cilindrica, si trova, ricordando (8.1) e (8.2),

Legge di Poisson

$$\frac{\Delta r}{r} = -\nu \frac{\Delta l}{l} = -\nu\varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E} \quad ; \qquad (8.3)$$

vale con ν piccolo !!

ν, grandezza adimensionale, rappresenta il *coefficiente di Poisson*. I suoi valori sono compresi tra zero, per il sughero, e 0.5, per il caucciù. La (8.3) è valida per valori non troppo elevati di σ.

In tabella 8.2 riportiamo i valori di ν per alcuni materiali alla temperatura di 20°C.

Tabella 8.2 - Coefficiente di Poisson

Materiale	ν
acciaio	0.30
alluminio	0.33
caucciù	0.50
ferro	0.30
ottone	0.35
piombo	0.40
platino	0.38
rame	0.34
vetro per finestre	0.25

Nella trazione il volume della sbarra non diminuisce. Consideriamo infatti una sbarra cilindrica (anche se la trattazione è applicabile in generale) di volume iniziale $V = \pi r^2 l$. Dopo la trazione il volume diventa

$$V + \Delta V = \pi (r + \Delta r)^2 (l + \Delta l) = \pi r^2 l + \pi r^2 \Delta l + 2 \pi r l \Delta r \quad ,$$

trascurando i termini, di ordine superiore al primo, contenenti $(\Delta r)^2$, $\Delta r \Delta l$ e $(\Delta r)^2 \Delta l$. Se supponiamo $\Delta V \geq 0$ deve essere $\Delta l / l \geq -2 \Delta r / r$. Dalla (8.3) deriva $\nu \leq 0.5$ come condizione perché sia $\Delta V \geq 0$.

Sperimentalmente $\nu \leq 0.5$: concludiamo pertanto che il volume della sbarra sottoposta a trazione non diminuisce mai, qualunque sia il materiale di cui è composta la sbarra. Il volume rimane costante se $\nu = 0.5$, mentre aumenta per $\nu < 0.5$. Al contrario, il volume di una sbarra sottoposta ad un carico di compressione non aumenta mai.

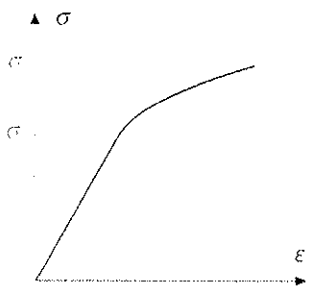


Fig. 8.7

8.2 DEFORMAZIONE PLASTICA. ROTTURA. ISTERESI ELASTICA.

Il comportamento elastico del materiale si manifesta entro certi valori del carico. Al di sopra di un *valore critico del carico*, che dipende dal tipo di materiale, si determina una deformazione permanente, che prende il nome di *deformazione plastica*, e che non è reversibile quando viene rimosso il carico.

Il carico specifico sotto cui avviene l'inizio della deformazione plastica è definito come *carico specifico di snervamento* σ_s. Per valori superiori a σ_s si osserva un notevole aumento della deformazione, anche per aumenti limitati del carico, come si vede in figura 8.7: nel tratto lineare si ha deformazione elastica (reversibile), per $\sigma > \sigma_s$ si ha deformazione plastica (non reversibile, nel senso che preciseremo tra breve).

Deformazione plastica

Carico specifico di snervamento

Per l'acciaio $\sigma_s = 30$, per il rame è compreso tra 7 e 30, per il piombo è dell'ordine di 1, in unità 10^7 N/m^2.

L'inizio della deformazione plastica può manifestarsi in certi materiali bruscamente, così che è facile individuare il valore σ_S, mentre in altri materiali il passaggio dalla deformazione elastica a quella plastica è graduale.

Carico di rottura

Aumentando ulteriormente il carico il materiale arriva alla *rottura*. Il carico specifico a cui avviene la rottura è chiamato carico specifico ultimo o *carico unitario di rottura* σ_u.

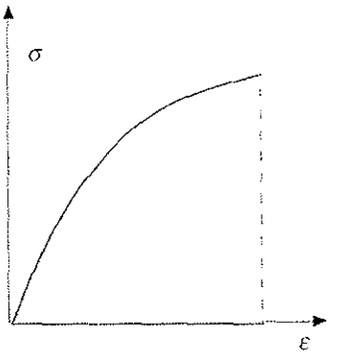


Fig. 8.8

Il carico di rottura a trazione, sempre in unità 10^7 N/m^2, è per l'acciaio compreso tra 50 e 200, a seconda della composizione, mentre scende a 10 per l'alluminio, 3–9 per il vetro e intorno a 1 per il piombo. Il carico di rottura in compressione può differire da quello in trazione: nel vetro esso è pari a 60–120, per il piombo a 5.

Il prodotto tra il carico specifico σ e l'allungamento specifico ε ha le dimensioni di un'energia per unità di volume:

$$\sigma\,\varepsilon = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} \quad .$$

In grafici come quelli della figura 8.7 e della figura 8.8 l'area sottesa dalla curva carico–allungamento è data dall'integrale $\int \sigma\, d\,\varepsilon$ e ha dunque il significato di una energia assorbita dal materiale per unità di volume W_v. Tale area viene spesso indicata come *modulo di tenacità*.

Modulo di tenacità

In effetti un materiale ad alta resistenza meccanica, cioè in grado di sopportare elevati carichi specifici, assorbe una considerevole quantità di energia prima di arrivare alla condizione di rottura. Tale *materiale* è chiamato *tenace*. Un materiale, invece, nel quale la rottura ha luogo senza una apprezzabile deformazione plastica, e quindi con un assorbimento minore di energia, è chiamato *fragile*.

Duttilità

La *duttilità di un materiale* è indice della deformazione plastica prima della rottura e può essere espressa dall'allungamento specifico (o riduzione specifica) intervenuto sotto carico. Un *materiale duttile è anche tenace*, in quanto è in grado di deformarsi in modo elevato prima della rottura.

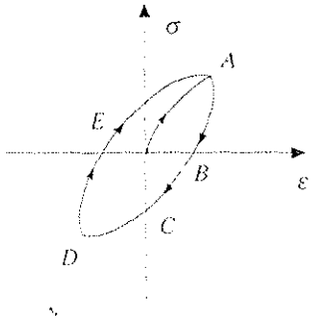


Fig. 8.9

Proprietà caratteristica dei corpi solidi è *l'isteresi elastica*. Consideriamo una sbarra sottoposta a trazione e rappresentiamo in un grafico, simile a quello della figura 8.7, il legame tra σ ed ε. Si inizia dalla situazione a riposo ($\sigma = 0$, $\varepsilon = 0$), per un materiale che non ha superato il limite di elasticità, cioè non ha mai subito deformazione plastica. Aumentando il carico specifico la deformazione aumenta linearmente fino a $\sigma = \sigma_s$, poi più rapidamente. Quando siamo nel punto A riduciamo la forza di trazione: si osserva che non ripercorriamo all'indietro la curva σ (ε) appena trovata, ma che la sbarra resta più deformata: per $\sigma = 0$ di ha $\varepsilon > 0$ (punto B). Occorre comprimere la sbarra ($\sigma < 0$) per ritornare a trovare $\varepsilon = 0$ (punto C). Continuando a comprimere riduciamo la lunghezza della sbarra ($\varepsilon < 0$), fino ad arrivare nel punto D, simmetrico di A. Adesso diminuiamo la compressione e torniamo indietro: si trova che il percorso è diverso e che, per $\sigma = 0$, la sbarra è ancora compressa ($\varepsilon < 0$, punto E). Applicando una trazione si ritorna in A.

Ciclo di isteresi

Il ciclo descritto $ABCDE$ nel piano $\sigma - \varepsilon$ si chiama *ciclo di isteresi*: esso mostra che la relazione tra σ ed ε non è univoca (come nel tratto di comportamento elastico) per un corpo che abbia subito carichi superiori a quello di deformazione plastica, ma dipende da come è stato trattato il corpo. Il fenomeno dell'isteresi non si presenta se il punto A si trova nel tratto di comportamento elastico. Il comportamento mostrato in figura 8.9 giustifica l'uso dei termini, a seconda dei casi, di deformazione reversibile o irreversibile.

L'area del ciclo $\oint \sigma d\varepsilon$ rappresenta l'energia, per unità di volume W_v, assorbita durante il processo e fornita dal lavoro delle forze di trazione e compressione: poiché il materiale ritorna nello stato di partenza, ma il lavoro speso nel ciclo è positivo, ci rendiamo conto che le forze in gioco non sono conservative. *L'energia meccanica assorbita in un ciclo* è completamente dissipata: risulta che *viene trasformata in calore*.

È possibile ritornare allo stato iniziale, $\sigma = 0$ ed $\varepsilon = 0$, percorrendo una serie di cicli di area sempre minore, come mostrato in figura 8.10. Se invece si prende come punto di partenza il punto B della figura 8.9, si trova che il materiale ha un comportamento elastico fino ad un carico specifico $\sigma' > \sigma_s$. Superando σ' e poi riducendo il carico a zero il nuovo punto di riposo B' è a destra di B. Iterando il processo si riesce a innalzare considerevolmente il limite di elasticità del materiale: si parla di *processo di incrudimento*. Con un riscaldamento a temperatura elevata per un certo tempo (*ricottura*) si riesce a riportare il materiale nelle condizioni primitive.

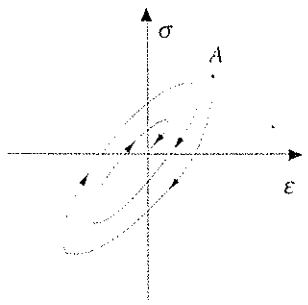


Fig. 8.10

8.3 SCORRIMENTO.

Consideriamo un parallelepipedo solido incollato su due facce opposte a due lastre rigide, una bloccata e una mobile parallelamente all'altra. Applicando una forza **F** come in figura 8.11, si osserva uno *scorrimento* della faccia superiore rispetto a quella inferiore, che si può misurare tramite l'angolo θ. Si trova che tra il carico specifico $\sigma = F/S$ e l'angolo θ esiste una relazione lineare

$$\sigma = G\,\theta \tag{8.4}$$

Il parametro G, che caratterizza questo tipo di deformazione, si chiama *modulo di rigidità* o di *taglio* ed è tipico del materiale.

Modulo di rigidità

All'applicazione di **F** il corpo reagisce elasticamente e si ottiene una situazione di equilibrio con $\theta = \sigma/G$. Quando **F** viene tolta il corpo riassume la configurazione iniziale.

In tabella 8.3 riportiamo i valori del modulo di rigidità per alcuni materiali, alla temperatura di 20°C.

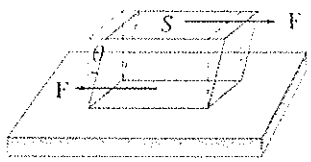


Fig. 8.11

Tabella 8.3 - Modulo di rigidità

Materiale	G
acciaio	$8.5 \cdot 10^{10}$ N/m² · rad
alluminio	$2.5 \cdot 10^{10}$
ferro	$8.0 \cdot 10^{10}$
ottone	$3.0 \cdot 10^{10}$
piombo	$5.0 \cdot 10^{9}$
platino	$6.0 \cdot 10^{10}$
rame	$4.0 \cdot 10^{10}$
tungsteno	$1.4 \cdot 10^{11}$
vetro	2.5–$3.2 \cdot 10^{10}$

Anche per lo scorrimento vale quanto discusso nel paragrafo 8.3 sul limite di elasticità.

Si dimostra che tra le costanti elastiche viste finora esiste la relazione

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (8.5)$$

valida per piccole deformazioni, ovvero per carichi non troppo elevati.

ESEMPIO 8.5

Un cubetto di ferro di 1 cm di lato è soggetto a un processo di scorrimento per effetto di un carico specifico σ, raggiungendo una situazione di equilibrio con $\theta = 10^{-3}$ rad. Determinare il valore della forza di taglio applicata.

Soluzione
Da (8.4) e consultando la tabella 8.3
$\sigma = G\,\theta = 8 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^{7}$ N/m^2,
$F = \sigma S = 8 \cdot 10^{7} \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{3}$ N.

8.4 TORSIONE. PENDOLO E BILANCIA DI TORSIONE.

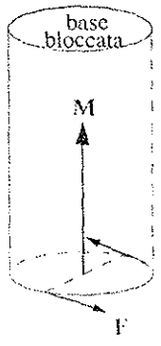


Fig. 8.12

Consideriamo ancora una sbarra cilindrica di raggio r e lunghezza l, bloccata su una base, e applichiamo all'altra una coppia di forze con momento **M**, parallelo all'asse della sbarra, che risulta così sottoposto a *torsione*. Il valore di **M** necessario per far ruotare la base inferiore rispetto a quella superiore di un angolo θ si ricava dall'espressione

$$M = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l} \theta = k\,\theta \qquad (8.6)$$

L'effetto di torsione dipende fortemente dalle dimensioni trasversali: con una sbarra molto sottile, ad esempio un filo, si ottiene una deviazione misurabile anche con l'applicazione di un momento molto piccolo.

ESEMPIO 8.6

Determinare il momento necessario per provocare la torsione di $\theta = 1°$ di una sbarra cilindrica di ferro ($G = 8.0 \cdot 10^{10}$ N/m^2 rad) con $r = 1$ cm e $l = 1$ m.

Soluzione
Il coefficiente k nella (8.6) vale

$$k = \frac{\pi}{2} 8 \cdot 10^{10} \frac{10^{-8}}{1} = 1.26 \cdot 10^{3} \text{ Nm / rad.}$$

Dato che $\theta = 1°$ corrisponde a $1.7 \cdot 10^{-2}$ rad, $M = 21.4$ Nm.

La reazione elastica della sbarra si manifesta con un momento $-\mathbf{M}$, il cui modulo vale quindi $-k\,\theta$, cioè proporzionale all'angolo di torsione. Su questo fatto si basano sia il pendolo che la *bilancia di torsione*.

Pendolo di torsione

Un pendolo di torsione si realizza sospendendo un corpo solido a un filo: generalmente il punto di aggancio coincide con il centro di massa. Per esempio, un possibile *pendolo di torsione* consiste in un disco sospeso al centro (figura 8.13), essendo il filo verticale e il disco in un piano orizzontale. Se ruotiamo il disco di un angolo θ, mantenendolo orizzontale, il filo di sospensione subisce una torsione e sviluppa un momento elastico $-k\,\theta$, con k dato da (8.6). Se ora lasciamo libero il

corpo, esso si mette in rotazione sotto l'azione del momento elastico, secondo l'equazione

$$-k\,\theta = I\,\alpha = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

dove I è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione, coincidente col filo. La soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\,\theta = 0$$

è data da $\theta = \theta_0 \,\text{sen}\,(\omega t + \phi)$, con $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$. Il sistema descrive una *oscillazione armonica*.

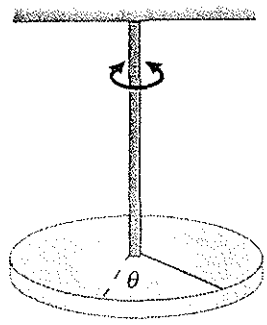


Fig. 8.13

Si noti che, a differenza del pendolo semplice e del pendolo composto, non dobbiamo imporre, per avere un moto armonico, una piccola ampiezza di oscillazione, perché il filo anche con una torsione di parecchi giri sviluppa un momento proporzionale all'angolo. L'unica limitazione è di essere in condizioni di comportamento elastico del filo in torsione.

Se è noto k il pendolo di torsione può servire, determinandone il periodo di oscillazione, per misurare momenti d'inerzia oppure, noto I, per misure di k e quindi del modulo di rigidità.

Bilancia di torsione

Su un principio analogo si basa la *bilancia di torsione*: si sfrutta il fatto che un filo sviluppa un momento di reazione alla torsione calcolabile dall'angolo di torsione e che in equilibrio il momento elastico è eguale al momento esterno, che ha causato la torsione. Se questo momento è dato dall'applicazione di una coppia di forze di braccio l (l potrebbe essere la lunghezza di un'asta sospesa al centro e che quindi costituisce la bilancia di torsione), deve essere $F\,l = k\,\theta$. Dalla misura dell'angolo di equilibrio θ si può calcolare il valore di F.

La bilancia di torsione risulta uno strumento molto sensibile, in grado cioè di misurare forze molto piccole (fino a 10^{-9} N); storicamente essa è servita a Cavendish per misurare la costante γ nella (7.1) e a Coulomb per determinare la forza che si esercita tra cariche elettriche.

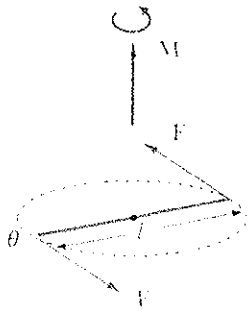


Fig. 8.14

8.5 PRESSIONE. COMPRESSIONE UNIFORME.

Nei capitoli precedenti abbiamo sempre considerato forze applicate a punti; in questo capitolo, trattando le proprietà elastiche dei solidi, compare il rapporto tra forza agente e superficie su cui è applicata la forza, F/S. Tale rapporto si chiama *pressione* e questa grandezza acquista notevole importanza nello studio dei fluidi, come vedremo nel capitolo 9 a cui rimandiamo per una migliore definizione e per le unità di misura, e in termodinamica.

Per ora ci limitiamo a considerare la pressione nell'ambito di una particolare maniera di deformare un corpo, la cosiddetta compressione uniforme, che consiste nell'applicare alla superficie del corpo una pressione ovunque costante (pressione idrostatica). Ciò si realizza facilmente immergendo il corpo in un fluido. In figura 8.15 è rappresentato un cubo compresso su ogni faccia da forze perpendicolari alla superficie.

Se V è il volume del corpo in corrispondenza della *pressione esterna* p, ad una variazione Δp corrisponde una *variazione di volume* ΔV data da

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta}\,\Delta p \tag{8.7}$$

Modulo di compressibilità isoterma

dove β si chiama *modulo di compressibilità isoterma*; ciò vuol dire che la variazione di volume è misurata in condizioni sperimentali tali che la temperatura del corpo rimanga costante durante la compressione. Le unità di misura di β sono eguali a quelle della pressione. In tabella 8.4 riportiamo alcuni valori di β (in N/m^2), alla temperatura di 20°C.

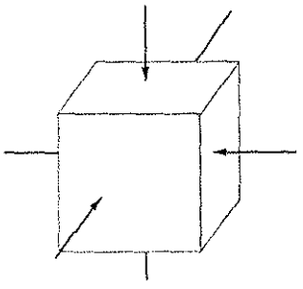


Fig. 8.15

Tabella 8.4 - Modulo di compressibilità isoterma

Materiale	β
acciaio	$1.6 \cdot 10^{11}$ N/m^2
acqua	$2.1 \cdot 10^{9}$
alluminio	$7.0 \cdot 10^{10}$
ferro	$1.7 \cdot 10^{11}$
mercurio	$2.8 \cdot 10^{10}$
ottone	$6.1 \cdot 10^{10}$
rame	$1.4 \cdot 10^{11}$
tungsteno	$2.0 \cdot 10^{11}$
vetro per finestre	5.0–$5.5 \cdot 10^{10}$

Tra β e le altre costanti elastiche esiste la relazione

$$\beta = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{8.8}$$

analoga alla (8.5). In pratica si vede come sono indipendenti due sole costanti elastiche: per un dato materiale si possono determinare, con esperimenti di trazione e di torsione, E e G e poi calcolare ν e β attraverso (8.5) e (8.8).

ESEMPIO 8.7

Determinare la variazione percentuale di volume di una sbarra di ferro sottoposta a una compressione uniforme, a temperatura costante, con una pressione $p_0 = 1.5 \cdot 10^8$ N/m^2, noti il modulo di Young e il coefficiente di Poisson.

Soluzione

I valori delle costanti elastiche sono $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ N/m^2 (tabella 8.1) e $\nu = 0.30$ (tabella 8.2), per cui da (8.8) si ottiene $\beta = 1.7 \cdot 10^{11}$ N/m^2, in accordo con la tabella 8.4.

Pertanto da (8.7) si ha

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1.5 \cdot 10^{8}}{1.7 \cdot 10^{11}} = -0.88 \cdot 10^{-2} = -0.88\ \%\ .$$

Si osservi che Δp sarebbe eguale a $p_0 - p_a$, dove p_a è la pressione atmosferica, pari a $\sim 10^5$ N/m^2: quindi $\Delta p \simeq p_0$.

Notiamo che in tabella 8.4 sono riportati valori del modulo di compressibilità anche per i liquidi, come l'acqua o il mercurio. Nei liquidi β è più piccolo che nei solidi, ma sempre di valore elevato. In pratica solidi e liquidi sono molto poco compressibili: è appunto questo il significato di un grande valore di β. Per far variare dell'1% un dato volume d'acqua occorre una variazione di pressione di $2.1 \cdot 10^7$ N/m^2, circa 200 volte il valore della pressione atmosferica.

Completamente diverso è il caso dei gas, che studieremo in dettaglio nei capitoli successivi. Vogliamo ora solo ricordare che in condizioni isoterme un gas segue con buona approssimazione la legge di Boyle, $p\,V$ = costante. Di qui differenziando otteniamo $p\,dV + V\,dp = 0$ ovvero

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \Rightarrow \beta = p\,; \tag{8.9}$$

il *coefficiente di compressibilità isoterma per un gas è pari alla pressione stessa.* I gas sono dunque comprimibili assai facilmente: per esempio, partendo da 1 m^3 di gas alla pressione di 10^5 N/m^2, il volume si riduce a metà semplicemente raddoppiando le pressione, si riduce a un decimo decuplicando la pressione, ecc.

Queste stesse variazioni di pressione producono in un liquido o in un solido variazioni relative di volume estremamente piccole e trascurabili nella pratica.

Osserviamo che il modulo di compressibilità è l'unica grandezza caratteristica di una deformazione elastica che possiamo definire per un fluido. Lo scorrimento, la trazione e la torsione perdono significato in quanto un fluido non sviluppa le corrispondenti reazioni elastiche. Bisogna poi dire che la compressione di un fluido è un processo sempre reversibile, cioè il comportamento del fluido è sempre elastico, senza fenomeni simili all'isteresi.

8.6 DUREZZA.

La *durezza* è definita come la resistenza di un corpo alla penetrazione da parte di un altro corpo opportunatamente sagomato a forma di sferetta di piccolo raggio o di punta. La durezza di un materiale è un dato importante da un punto di vista tecnico e presenta due aspetti interessanti, la facilità di misura e la possibilità di correlarla alla resistenza meccanica del materiale; resta però un concetto piuttosto empirico , come si capisce dai metodi di misura che adesso descriviamo. Durezza

Il *metodo di Brinell* misura la durezza in relazione all'impronta lasciata nel materiale da una sfera di acciaio con diametro di ~1 cm, sottoposta a un carico dell'ordine di 10^4 N, che può essere variato in base alla durezza del materiale. Per un materiale duro l'impronta è piccola, mentre una grande impronta caratterizza un materiale di bassa durezza.

Un secondo *metodo* è quello di *Rockwell* che utilizza un corpo penetrante di piccole dimensioni (*indentatore*) e l'*indice di durezza* è legato alla profondità del solco lasciato.

Infine citiamo il *metodo di Vickers*, che utilizza come indentatore una piramide di diamante a base quadrata, con angolo al vertice ottuso (136°). L'impronta prodotta è di piccole dimensioni e la sua misura si effettua con un microscopio.

Numericamente la durezza è generalmente misurata come rapporto tra la forza premente e l'area dell'impronta permanente lasciata.

Una relazione lineare intercorre tra il carico specifico necessario a produrre la rottura e la durezza Brinell, nel caso di leghe metalliche (figura 8.16).

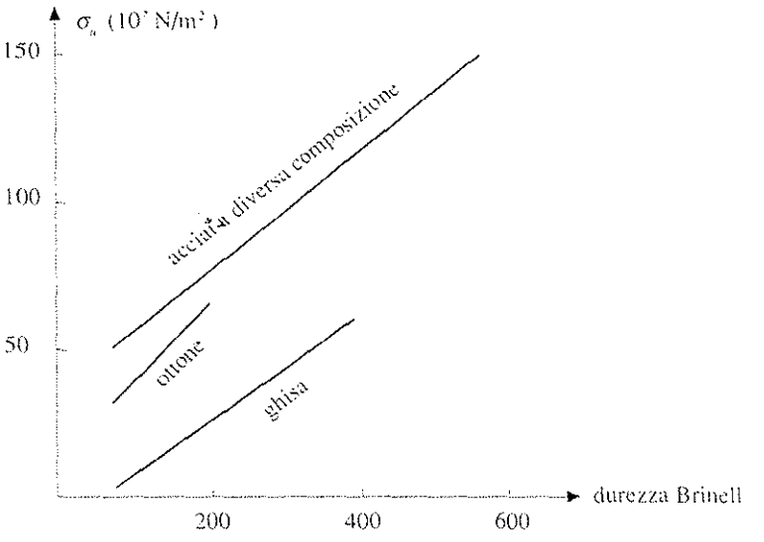


Fig. 8.16

8.7 ONDE ELASTICHE IN UNA SBARRA SOLIDA.

Nelle situazioni fisiche esaminate abbiamo applicato una forza o un momento costanti ad un corpo solido e determinato le caratteristiche della deformazione. Nel caso di una sbarra sottoposta a trazione l'allungamento è dato dalla (8.2) se la sbarra è vincolata; nell'esempio 8.3 è stata considerata la possibilità che la sbarra sia libera: sotto l'azione di una forza costante si ha un moto accelerato e anche una deformazione, minore di quella a riposo. In ogni caso si tratta di fenomeni che non variano nel tempo: passata la fase transitoria di applicazione della forza, le deformazioni di ogni elemento di sbarra sono costanti nel tempo.

Supponiamo invece di applicare una forza impulsiva ad un estremo della sbarra, per esempio con un colpo di martello: sappiamo che essa si mette in movimento con velocità $v = J/m$, se J è il modulo dell'impulso della forza e m la massa della sbarra. Però, a causa delle proprietà elastiche della sbarra, avviene anche un altro fenomeno: il tratto iniziale di sbarra, compresso dalla forza impulsiva, successivamente si dilata comprimendo l'elemento contiguo e così via; si osserva che dopo un certo tempo la perturbazione applicata ad un estremo è arrivata all'altro estremo della sbarra. Diciamo che *una perturbazione elastica* si è *propagata* lungo la sbarra e, come vedremo tra poco, la *velocità di propagazione* della perturbazione dipende dalle caratteristiche fisiche del materiale che costituisce la sbarra.

Consideriamo un elemento di sbarra a distanza x dall'estremo colpito e lungo dx; nella figura 8.17 esso è rappresentato come un cilindretto di base S, sezione della sbarra, e altezza dx. Sulle due basi di questo cilindretto agiscono le forze $F(x)$ e $F(x + dx)$ esercitate rispettivamente dagli elementi di sbarra che stanno a sinistra

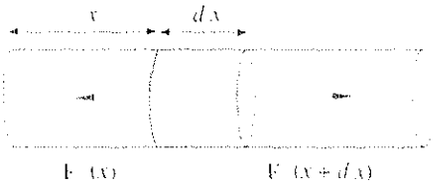


Fig. 8.17

e a destra del cilindretto. Nel processo di propagazione la forza F non è costante lungo la sbarra, ma varia sia lungo l'asse x che nel tempo.

Sotto l'azione di queste forze ogni sezione cambia, seppur di poco, posizione; indichiamo con $\xi\ (x, t)$ la funzione che descrive lo spostamento dalla posizione iniziale, all'ascissa x e al tempo t, e con $\xi\ (x + dx, t)$ lo spostamento nello stesso istante all'ascissa $x + dx$. Le configurazioni del cilindretto sono mostrate in figura 8.18, la lunghezza, che era dx, diventa

$$x + dx + \xi\,(x + dx, t) - x - \xi\ (x, t) = dx + d\xi$$

in quanto $\xi\ (x + dx, t) = \xi\,(x, t) + d\xi$. L'allungamento relativo del cilindretto è $d\xi / dx$ o, meglio, $\partial\xi / \partial x$: il simbolo di derivata parziale evidenzia che stiamo considerando una variazione solo rispetto a x e non rispetto al tempo. Dalla (8.2) abbiamo quindi:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{E}\frac{F}{S} \Rightarrow F\,(x) = E\,S\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right).$$

espando la formula

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$$

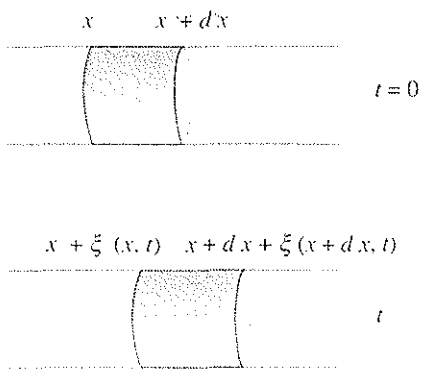


Fig. 8.18

Utilizzando questa relazione possiamo scrivere la risultante delle forze che agiscono sul cilindretto come

$$F\ (x + dx) - F\ (x) = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx = E\,S\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,dx \quad .$$

D'altra parte il moto del cilindretto, di massa $dm = \rho S\,dx$, avviene con accelerazione $a = \partial^2 \xi / \partial t^2$ e, per la legge di Newton,

$$E\,S\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,dx = \rho\,S\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\,dx \quad .$$

In definitiva si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad . \qquad (8.10)$$

avendo indicato con

Velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{8.11}$$

una grandezza che ha necessariamente le dimensioni di una velocità.

Nel processo di propagazione della perturbazione lungo la sbarra lo spostamento $\xi(x, t)$ che, come vedremo, è la grandezza fisica che si propaga, soddisfa a una precisa equazione differenziale del secondo ordine secondo cui la derivata seconda di $\xi(x, t)$ rispetto al tempo deve essere proporzionale alla derivata seconda di $\xi(x, t)$ rispetto alla posizione con un coefficiente di proporzionalità che ha le dimensioni del quadrato di una velocità. Escluso il caso banale $\xi = 0$, che rappresenta una sbarra non soggetta a perturbazione, e ξ = costante (deformazione statica), la soluzione di questa equazione differenziale dirà come avviene la propagazione della perturbazione lungo la sbarra.

Matematicamente si dimostra che le soluzioni di (8.10) sono *tutte e solo* le funzioni nel cui argomento la variabile x e la variabile t compaiono con una combinazione lineare $x - v\,t$ o $x + v\,t$, cioè funzioni del tipo

$$f(z) = f(x - v\,t) \quad , \quad g(z') = g(x + v\,t) \quad .$$

Lo verifichiamo direttamente nel caso $f(z)$ eseguendo le varie derivate:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -v\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Pertanto $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, che è la (8.10): la funzione $f(z) = f(x - v\,t)$ soddisfa alla condizione (8.10), indipendentemente da quale sia la sua particolare forma. Insomma: $(x - v\,t)^2$, $\operatorname{sen} k\,(x - v\,t)$, $e^{k(x - v\,t)}$ sono soluzioni di (8.10); $x^2 - v^2 t^2$, $x\,v\,t$, $x / v\,t$ non lo sono. Lo stesso discorso vale per $g(z') = g(x + v\,t)$.

Si dimostra anche che la soluzione più generale di (8.10) è data dalla somma

$$G(x, t) = f(x - v\,t) + g(x + v\,t) \tag{8.12}$$

Vediamo adesso il significato fisico di $f(x - v\,t)$, soluzione di (8.10). Consideriamo la funzione nell'istante t_0 e sia x_0 un punto in cui la funzione vale f_0:

$$f_0 = f(x_0 - v\,t_0)$$

In un qualunque istante successivo $t > t_0$ la funzione assume il valore f_0 nel punto x che soddisfa alla condizione

$$x - v\,t = x_0 - v\,t_0 \implies x = x_0 + v(t - t_0) \quad .$$

relazione che esprime un moto rettilineo uniforme con velocità v. Pertanto f assume il valore f_0 all'istante t_0 in un punto x_0 e successivamente in punti x la cui coordinata cresce linearmente nel tempo: $f(x - v t)$ rappresenta quindi una funzione che si muove nel verso positivo dell'asse x con velocità v. Parimenti $g(x + v t)$ si muove nel verso negativo dell'asse x con velocità v; la figura 8.19 mostra f e g in due istanti diversi.

Si chiama *onda una perturbazione che si propaga con una velocità ben definita*; la (8.10), che esprime matematicamente la condizione per la propagazione, si chiama *equazione differenziale delle onde piane o equazione di D'Alembert*. Le funzioni $f(x - v t)$ e $g(x + v t)$ allora rappresentano, rispettivamente, un'onda piana che si propaga lungo il verso positivo dell'asse x e un'onda piana che si propaga lungo il verso negativo, entrambe con velocità v.

Si parla di onda piana in quanto tutti i punti con lo stesso valore della coordinata x, cioè quelli in un piano perpendicolare all'asse x, hanno in un certo istante lo stesso valore della perturbazione $\xi(x, t)$.

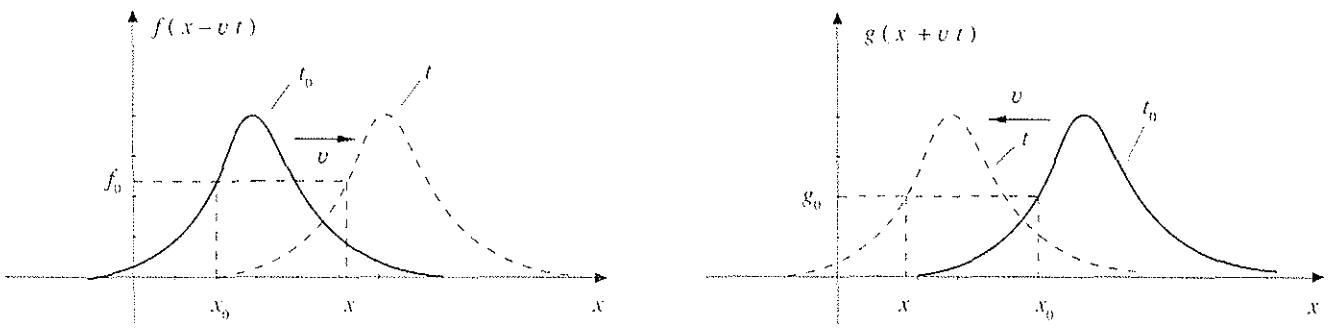


Fig. 8.19

Nel caso della sbarra quindi i risultati precedenti si riassumono dicendo che lungo la sbarra si propaga un'onda di spostamento $\xi(x - v t)$ con una velocità v che dipende dal modulo di Young E e dalla densità del materiale ρ.

ESEMPIO 8.8

Le densità di alluminio, ferro, piombo, rame, sono, rispettivamente, $2.7 \cdot 10^3$, $7.9 \cdot 10^3$, $11.4 \cdot 10^3$, $9.0 \cdot 10^3$ kg/m^3. Calcolare le velocità di propagazione di un'onda elastica in una sbarra costituita da tali metalli.

Soluzione

Nella tabella 8.1 si trovano i valori del modulo di Young, che riportiamo nell'ordine: $0.7 \cdot 10^{11}$, $2.0 \cdot 10^{11}$, $0.14 \cdot 10^{11}$, $1.1 \cdot 10^{11}$ N/m^2. Da (8.11) abbiamo: $v_{Al} = 5090$, $v_{Fe} = 5030$, $v_{Pb} = 1110$, $v_{Cu} = 3500$ m/s.

Insieme allo spostamento ξ dalla posizione di equilibrio si propaga lungo la sbarra anche la forza F. Infatti dalla relazione $F = E S \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ e da (8.10) si ricava:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = E S \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} = E S \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E S v^2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} .$$

dove il secondo passaggio è reso possibile dal noto teorema di analisi secondo cui una derivata mista non dipende dall'ordine con cui si eseguono le derivate. Inoltre

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = E S \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = E S \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

e si conclude che

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Lungo la sbarra abbiamo anche un'onda di forza o, meglio, di pressione se ricordiamo che nei processi di compressione e di torsione è significativo il rapporto F/S.

Onda longitudinale

Sia lo spostamento $\xi(x \mp v t)$ che la forza $F(x \mp v t)$, che descrivono le onde che si propagano lungo l'asse x, sono paralleli a questo asse. *Onde* che hanno una tale proprietà si dicono *longitudinali*.

8.8 ONDE IN UNA CORDA TESA.

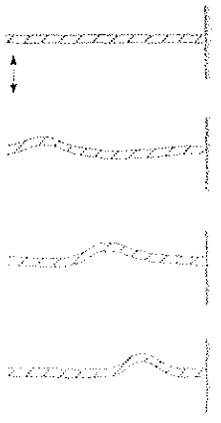


Fig. 8.20

Quando si sposta rapidamente l'estremità di una corda tesa, che abbia ad esempio l'altra estremità fissa, come in figura 8.20 si ha una perturbazione che si propaga lungo la corda, visualizzata da una *gobba* che si sposta progressivamente da un'estremità all'altra.

Anche in questo caso lo spostamento dalla posizione di equilibrio si manifesta dapprima nell'estremo in cui si esercita la perturbazione esterna e successivamente e progressivamente negli altri punti della corda.

Supponiamo di spostare di poco la corda dalla sua posizione di equilibrio, coincidente con l'asse x, e di chiamare $\xi(x, t)$ la funzione che descrive lo spostamento dall'equilibrio. Consideriamo un piccolo tratto di corda $d l$ sottoposto ad una tensione T che agisce ad entrambi gli estremi e siano α e α' gli angoli formati con l'asse x dalla tangente all'elemento $d l$ negli estremi, ovvero dalla tensione T. La risultante delle forze di tensione agenti su $d l$ ha una componente parallela all'asse x e una all'asse y:

$$F_x = T(\cos \alpha' - \cos \alpha)$$

$$F_y = T(\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha)$$

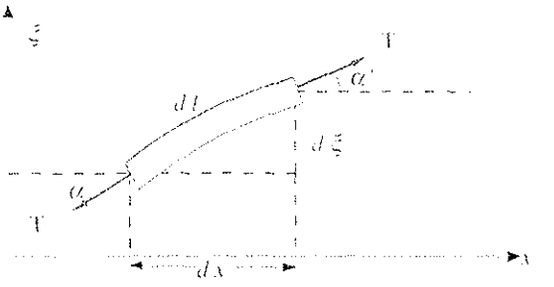


Fig. 8.21

Se gli spostamenti della corda sono piccoli, come abbiamo ipotizzato, anche la curvatura della corda è piccola: allora nello sviluppo in serie delle funzioni

$$\text{sen } \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots \quad , \qquad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots \quad ,$$

$$\text{tg } \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots \quad ,$$

si possono trascurare tutti i termini di ordine superiore al primo. Di conseguenza

$$\text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha = \alpha \quad , \quad \text{sen } \alpha' = \text{tg } \alpha' = \alpha' \quad ,$$

$$\cos \alpha = 1 \quad , \quad \cos \alpha' = 1$$

e per le componenti della forza agente sull'elemento $d\,l$ si ottiene

$$F_x = 0 \quad , \quad F_y = T\,(\,\text{tg } \alpha' - \text{tg } \alpha\,) = T\,\frac{\partial}{\partial x}\,\text{tg } \alpha\, dx \quad ,$$

ammettendo che, a causa della piccolezza di dx, α e α' siano poco diversi così che

$$\text{tg } \alpha' = \text{tg } \alpha + \frac{\partial}{\partial x}\,\text{tg } \alpha\, dx \quad .$$

Il risultato $F_x = 0$ dice che non c'è spostamento lungo la direzione della corda ovvero che il moto di ogni elemento di corda avviene in direzione perpendicolare all'asse x sotto l'azione della forza F_y. Poiché, come si vede in figura 8.21 e come discende dalla definizione di derivata, $\text{tg } \alpha = \partial\xi / \partial x$, abbiamo

$$F_y = T\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,dx \quad .$$

La massa dell'elemento di corda dl è

$$dm = \rho S\, dl = \rho S\,\frac{dx}{\cos \alpha} = \rho S\, dx = \rho_l\, dx \quad ,$$

indicando con $\rho_l = dm/dx = \rho S$ la *densità lineare di massa* (paragrafo 6.3), costante se la corda è omogenea (ρ = costante) e calibra (S = costante, sezione della corda). L'accelerazione dello stesso elemento è $a = \partial^2\xi / \partial t^2$ e, per la legge di Newton,

$$T\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,dx = \rho_l\, dx\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

da cui:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_l}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad ,$$

che è ancora la (8.10); la velocità di propagazione risulta data da

Velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \quad . \tag{8.13}$$

Lo spostamento trasversale, provocato in un estremo della corda, si propaga lungo la corda con una velocità v, che dipende dalla tensione della corda e dalla massa per unità di lunghezza.

In un filo di acciaio di raggio 1 mm e $\rho_l = 0.025$ kg / m, se $T = 10$ N, risulta $v \cong 20$ m/s.

Osserviamo che le approssimazioni fatte per sen α, cos α, tg α non sono particolarmente stringenti: fino a 15° sen α differisce da tg α al più del 3.5%, come del resto della stessa percentuale cos α differisce da 1.

Onda trasversale

L'*onda di spostamento* lungo la corda si dice *trasversale* poiché la grandezza che si propaga giace in un piano perpendicolare alla direzione di propagazione.

8.9 ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLE ONDE.

L'argomento onde viene trattato estesamente nel corso di Fisica II; noi lo incontreremo ancora quando parleremo delle onde in un gas. Senza entrare in questioni generali, facciamo alcune considerazioni, soprattutto di carattere esplicativo.

Un fenomeno di propagazione si presenta ogni qual volta l'evoluzione spaziale e temporale di una grandezza fisica obbedisce a una equazione del tipo (8.10): la funzione soluzione si propaga lungo l'asse x conservando la stessa forma, come abbiamo mostrato nella figura 8.19.

È interessante osservare come si è arrivati alla (8.10) nei due casi considerati. Nella propagazione in una sbarra il risultato si ottiene unendo l'equazione caratteristica del fenomeno elastico considerato (compressione) alla legge del moto di Newton; lo stesso avviene in altri fenomeni elastici, come per esempio nelle onde di torsione o nelle onde di pressione in un gas. Invece in una corda (o in una membrana) tesa basta la sola equazione del moto per dimostrare la propagazione.

Questi risultati fanno vedere che, mentre normalmente la soluzione dell'equazione del moto $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ descrive il moto di un corpo dotato di massa e quindi di un *movimento di materia*, in alcuni casi porta a predire nuovi fenomeni in cui *la materia*, pur muovendosi, *rimane mediamente ferma* e invece si ha la propagazione di una *perturbazione locale*, che si trasmette cioè progressivamente da un elemento al successivo.

Per fare un esempio consideriamo la corda della figura 8.20 e applichiamo all'estremo libero una perturbazione di tipo armonico,

$$\xi (x_0 , t) = \xi_0 \operatorname{sen} k (x_0 - v\, t) \quad ,$$

con k costante opportuna e ξ_0 sufficientemente piccola da poter ritenere validi i risultati del paragrafo 8.8. La perturbazione si propaga lungo la corda con legge

$$\xi (x, t) = \xi_0 \operatorname{sen} k (x - v\, t) \quad ,$$

che chiaramente è soluzione di (8.10). In un punto P_1 di coordinata x_1

$$\xi (x, t) = \xi_0 \operatorname{sen} k (x_1 - v\, t) \quad ;$$

il punto P_1 compie oscillazioni armoniche di ampiezza ξ_0 intorno alla posizione di equilibrio. Si tratta delle stesse oscillazioni dell'estremo con $x = x_0$, solo che avvengono con un certo ritardo, dovuto al tempo di propagazione: la differenza di fase tra le due oscillazioni è $k\,(x_1 - x_0)$.

Se eseguiamo una fotografia del sistema all'istante t_0 (figura 8.22 in alto), la posizione di tutti i punti della corda è data da

$$\xi\,(x\,,\,t_0) = \xi_0 \operatorname{sen} k\,(x - v\,t_0) \quad ;$$

la corda pertanto assume la forma di una sinusoide di ampiezza ξ_0. In istanti successivi t la forma è la stessa, però è spostata verso destra di $v\,(t - t_0)$.

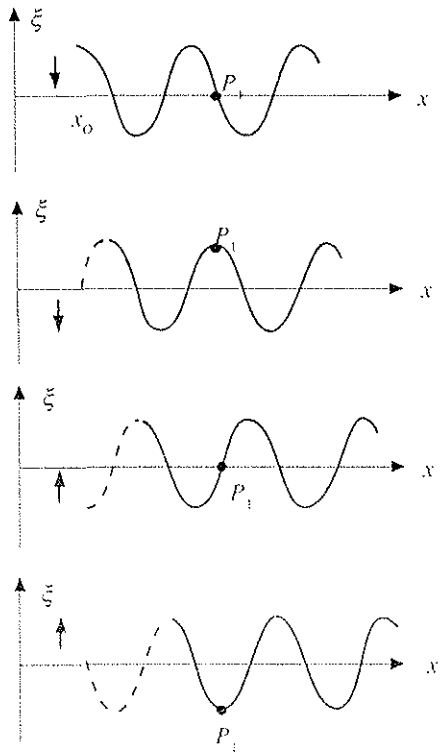


Fig. 8.22

La corda nel suo complesso in media rimane ferma: nessun punto si muove verso un estremo o l'altro, *non si ha spostamento netto di materia*.

Dobbiamo quindi considerare un'onda, nel contesto che stiamo studiando, come il moto di una perturbazione e non un moto di particelle dotate di massa, anche se l'origine di entrambi i moti è nella legge di Newton.

Citiamo infine il fatto che quando un'onda si propaga vi è anche un trasporto di quantità di moto e di energia, forniti dalla sorgente esterna che genera il fenomeno e che ritroviamo lungo la direzione di propagazione, come risultato delle interazioni locali tra particelle contigue: per esempio ogni elemento di corda oscillando trasmette energia all'elemento adiacente.

9 PROPRIETÀ MECCANICHE DEI FLUIDI

9.1 GENERALITÀ SUI FLUIDI. PRESSIONE

Una delle caratteristiche di un corpo solido è di avere una forma propria; invece una sostanza liquida o gassosa non ha questa proprietà, essa assume la forma del recipiente che la contiene. A una tale sostanza ci si riferisce in generale col nome di *fluido*.

Passiamo in rassegna alcune proprietà dei fluidi, mettendo in evidenza prima le diversità tra liquidi e gas e considerando successivamente gli aspetti comuni.

I liquidi hanno un volume definito e una superficie limite, mentre i gas non presentano un volume proprio, ma tendono ad occupare tutto il volume a disposizione. La densità dei liquidi è molto maggiore di quella dei gas: ad esempio per l'acqua $\rho = 10^3$ kg/m^3, per un gas come l'aria, a pressione atmosferica e a temperatura ambiente, $\rho = 1.3$ kg/m^3. I *liquidi*, per quanto riguarda il comportamento elastico, *sono* praticamente *incomprimibili* come i solidi, mentre un *gas* risulta *comprimibile* con facilità.

Tali differenze sono dovute alla diversa forza dei legami tra atomi e molecole nella fase liquida o nella fase gassosa. Malgrado ciò, è possibile trattare in modo unificato le proprietà meccaniche di liquidi e gas.

Da un punto di vista macroscopico i fluidi sono sistemi continui, composti cioè da un numero infinito di elementi, ciascuno di massa $d\,m = \rho\,d\,V$. Caratteristica principale è la possibilità di scorrimento di una qualsiasi parte di fluido rispetto ad un'altra adiacente o alla parete del contenitore. Allo scorrimento si oppone una forza di attrito interno (paragrafo 9.6). Tuttavia il fluido non può opporsi allo scorrimento, cioè non esiste una forza di attrito statico che determini una situazione di equilibrio, come avviene tramite l'attrito radente statico per certi valori della forza applicata nei solidi o nel fenomeno elastico dello scorrimento, sempre nei solidi.

Quindi, se un fluido è in quiete, le forze tra gli elementi di fluido devono essere normali alle superficie di separazione, altrimenti i vari elementi inizierebbero a scorrere uno rispetto all'altro, abbandonando lo stato di quiete.

Non si può parlare di forza applicata in un punto del fluido: per ciascun elemento $d\,m$ si considerano forze di volume, proporzionali a $d\,V$, come la forza peso $d\,F = g\,d\,m = g\,\rho\,d\,V$, e forze di superficie, proporzionali a $d\,S$, $d\,F = p\,d\,S$ dove p è la pressione già introdotta nel paragrafo 8.5.

Dalla definizione di fluido in equilibrio è possibile dedurre che la *pressione in*

un fluido non ha caratteristiche direzionali; essa è una funzione scalare del punto che si considera all'interno del fluido e non dipende dall'orientazione della superficie su cui è misurata. Pertanto, nel seguito del capitolo e quando studieremo le proprietà dei gas da un punto di vista termodinamico, intendiamo come pressione in un punto del fluido il rapporto tra la forza agente su una superficie infinitesima che circonda il punto e l'area della superficie stessa, cioè

Pressione in un fluido

$$p = \frac{d F}{d S} \quad , \quad p = \frac{F}{S} \quad . \tag{9.1}$$

dove la seconda espressione vale per una superficie finita se nei punti di questa la pressione è costante.

La misura della pressione all'interno di un fluido può essere semplicemente realizzata introducendo una piccola scatola con una parete deformabile. Dalla deformazione della parete si deduce la forza F dovuta al fluido che agisce sulla superficie S della parete ovvero la pressione. Cambiando l'orientazione della scatola, e quindi della superficie deformabile, si verifica che la pressione in un medesimo punto è sempre la stessa. Questo strumento di misura è chiamato *barometro aneroide*.

Barometro aneroide

Microscopicamente, la pressione sulla parete del barometro è dovuta agli urti delle molecole del fluido: l'invarianza della pressione rispetto alla direzione evidenzia pertanto l'isotropia delle velocità molecolari.

L'unità di misura della pressione è il N/m^2, chiamato pascal (Pa). Un multiplo importante è il bar = 10^5 Pa: la pressione atmosferica media vale 1.013 bar. Altre unità, che sono state abbandonate per legge, sono l'atmosfera, pari a 1.01325 bar e il torr, pari a $1.333 \cdot 10^{-3}$ bar = 1 / 760 atmosfere.

9.2 EQUILIBRIO STATICO DI UN FLUIDO.

In un fluido in quiete per definizione tutti gli elementi hanno velocità nulla, in un sistema di riferimento inerziale: le forze agenti devono pertanto avere risultante eguale a zero. Siccome sull'elemento $d m$ di fluido agiscono forze di pressione $\mathbf{F}_p$ e forze di volume $\mathbf{F}_v$, deve essere $\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_v = 0$ e ovviamente è nulla la somma delle componenti lungo qualsiasi asse.

Consideriamo un elemento di fluido, per semplicità di forma cubica come mostrato in figura 9.1: le componenti delle forze di pressione lungo l'asse z, in generale variabili con la posizione, sono:

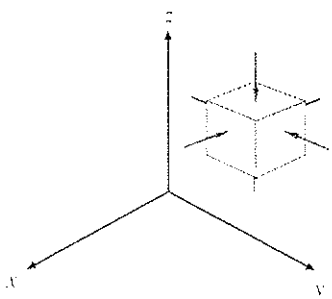


Fig. 9.1

$$p(z)\, d S - p(z + d z)\, d S = d S \left\{ p(z) - \left[p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} d z \right] \right\} =$$

$$= - \frac{\partial p}{\partial z} d z \, d S = - \frac{\partial p}{\partial z} d V \quad ;$$

$d z$, $d S$, $d V$ sono rispettivamente altezza, area di una faccia e volume del cubetto. La componente della forza di volume è data da

$$f_z \, d m = f_z \, \rho \, d V$$

con f_z componente lungo l'asse z della forza per unità di massa, cioè dell'accelerazione (non indicata in figura 9.1).

La condizione di equilibrio si scrive

$$-\frac{\partial p}{\partial z}\, dV + f_z\, \rho\, dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \quad .$$

Relazioni analoghe si ottengono lungo gli assi x e y per cui la condizione di equilibrio statico di un elemento di fluido è dato da

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \quad ,$$

che si riassumono nell'unica equazione vettoriale

Equilibrio statico di un fluido

$$\mathbf{grad}\, p = \rho\, \mathbf{f} \quad . \tag{9.2}$$

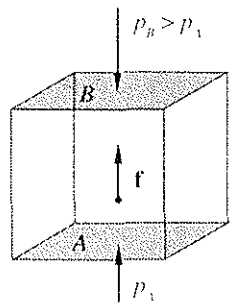


Fig. 9.2

Se in un fluido in quiete agisce una forza di volume la pressione nel fluido non può essere costante: essa deve variare in accordo con (9.2) per consentire l'equilibrio statico. La forza di volume tende a spostare l'elemento di fluido determinando una reazione del fluido che si manifesta con una variazione della pressione: questa aumenta lungo il verso positivo della direzione della forza così che la risultante delle forze di pressione è opposta alla forza di volume (figura 9.2).

La pressione è costante nel fluido solo se $\rho\, \mathbf{f} = 0$. Ciò si verifica se non agiscono forze di volume oppure quando il valore della densità è così basso da poter considerare trascurabile il prodotto $\rho\, \mathbf{f}$. Quest'ultimo è il caso che si presenta per i gas, almeno se ci limitiamo a piccoli volumi. In volumi molto grandi invece le variazioni di pressione nel gas, somme di tanti piccoli contributi, possono essere notevoli: si pensi all'atmosfera terrestre.

È interessante confrontare l'esistenza della pressione all'interno di un fluido in quiete con la situazione in un filo teso. In ogni punto del filo teso agisce la tensione T, che può essere evidenziata per esempio tagliando il filo e inserendo una molla che si allunga (paragrafo 2.14). Analogamente, in ogni punto di un fluido agisce la pressione p, misurabile col barometro descritto nel paragrafo 9.1. In entrambi i casi esiste all'interno dei corpi una distribuzione di sforzi interni (tridimensionali nel fluido, unidimensionali nel filo), che rappresenta la reazione del sistema all'applicazione di forze esterne.

Per esempio un liquido contenuto in un recipiente e sottoposto alla forza peso (forza di volume) e alla forza di pressione atmosferica (forza di superficie) viene compresso contro le pareti e la reazione di queste, che è una forza di superficie, si manifesta nel liquido con una ben determinata pressione, variabile all'interno del liquido come calcoleremo nel paragrafo 9.3. Allo stesso modo un gas compresso dentro un cilindro con pistone mobile da forze di superficie sviluppa una reazione alla compressione che è data dalla sua pressione. I due esempi sono mostrati in figura 9.3, in cui sono disegnate le forze applicate al fluido.

Se la forza di volume agente sul fluido è conservativa, da (2.20) ricaviamo, dividendo per la massa,

$$\mathbf{f} = -\,\mathbf{grad}\, E_{p\,m}$$

dove $E_{p\,m}$ rappresenta *l'energia potenziale per unità di massa*. In condizioni di

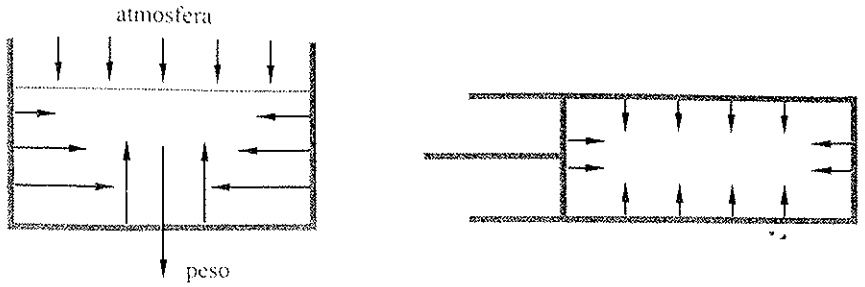


Fig. 9.3

equilibrio statico vale la (9.2) e quindi

$$\mathbf{grad}\, p = \rho\, \mathbf{f} = -\rho\, \mathbf{grad}\, E_{p,m} \quad . \tag{9.3}$$

Il gradiente della pressione ha la stessa direzione e verso opposto del gradiente dell'energia potenziale (per unità di massa).

Le superficie equipotenziali coincidono con le superficie isobariche: in ogni punto di una tale superficie la pressione ha lo stesso valore.

Consideriamo ora due superficie equipotenziali S_1 e S_2, prossime tra di loro: passando da S_1 a S_2 si hanno le variazioni $d\,p$ e $d\,E_{p,m}$ per la pressione e l'energia potenziale, variazioni indipendenti dal punto di partenza su S_1 e di arrivo su S_2. Tenendo conto della definizione di gradiente (appendice *C*), si ha

$$|\,\mathbf{grad}\, p\,| = \left|\frac{dp}{dn}\right| \quad , \quad |\,\mathbf{grad}\, E_{p,m}\,| = \left|\frac{dE_{p,m}}{dn}\right| \quad ,$$

indicando con $d\,n$ uno spostamento ortogonale alla superficie. Da (9.3) si ottiene

$$|\,d\,p\,| = \rho\,|\,d\,E_{p,m}\,| \quad .$$

Poiché le variazioni di pressione e di energia potenziale sono le stesse qualsiasi punto di partenza si scelga, la densità ρ del fluido deve essere costante lungo la superficie S: *una superficie equipotenziale è isobarica e su di essa* ρ = *costante*. Pertanto in un fluido sottoposto a forze conservative le eventuali variazioni di densità seguono geometricamente quelle di pressione e di energia potenziale.

9.3 EQUILIBRIO IN PRESENZA DELLA FORZA PESO.

In questo paragrafo applichiamo i risultati generali del paragrafo 9.2 al caso della forza peso, che è una forza di volume conservativa.

Come asse verticale prendiamo l'asse z, orientato verso l'alto; la forza peso è parallela e discorde a questo asse e abbiamo $f_x = f_y = 0$, $f_z = -g$. Con riferimento a (9.2), la pressione varia solo lungo l'asse z ed è costante in un piano normale all'asse z, che è dunque una superficie isobarica; verifichiamo subito che questa è anche una superficie equipotenziale, in quanto $E_{p,m} = g\,z$.

Dalla (9.3) , essendo

$$(\,\mathbf{grad}\, p\,)_z = \frac{dp}{dz} \quad \text{e} \quad (\,\mathbf{grad}\, E_{p,m}\,) = \frac{dE_{p,m}}{dz} = g \quad .$$

si ottiene

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow \int_1^2 dp = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g \, dz \quad ;$$

se la densità è costante,

$$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1) ;$$

questa è la legge con cui varia la pressione in un fluido in equilibrio sotto l'azione della forza di gravità, se appunto ρ = costante in tutto il fluido.

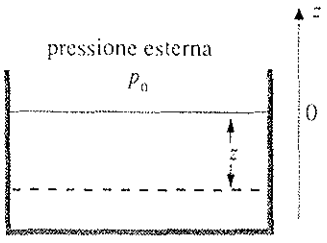


Fig. 9.4

Consideriamo in particolare un liquido in un contenitore (figura 9.4) e sia p_0 la pressione sulla superficie limite del liquido, dove $z_2 = 0$ (e $p_2 = p_0$). Alla profondità z ($z_1 = -z$) in base alla legge di variazione della pressione

$$p_2 - p_1 = p_0 - p(z) = -\rho g (z_2 - z_1) = -\rho g z$$

e quindi

Legge di Stevino

$$p(z) = p_0 + \rho g z \,. \tag{9.4}$$

Questa relazione si chiama *legge di Stevino* e mostra che *in un liquido con ρ = costante la pressione cresce linearmente con la profondità.*

In un bacino d'acqua ($\rho = 10^3$ kg/m^3) sottoposto alla pressione atmosferica ($p_0 \cong 1$ bar $= 10^5$ Pa) la pressione cresce con la profondità secondo la relazione quantitativa

$$p(z) = (10^5 + 9.8 \cdot 10^3 z) \text{ Pa} \quad ;$$

ogni 10 metri di profondità la pressione aumenta di circa 1 bar.

Sul fondo degli oceani, con $z \cong 10^4$ m, si ha una pressione dell'ordine di 10^3 bar. La valutazione non è precisa in quanto si è assunta la densità dell'acqua marina costante con la profondità; tuttavia l'errore che viene commesso è solo di qualche percento. Il fatto si spiega con l'alto valore del modulo di compressibilità dell'acqua (si vedano la relazione (8.7) e la successiva tabella 8.4): anche sotto forti pressioni il volume di una massa d'acqua cambia di molto poco. Questa proprietà è vera in generale per tutti i liquidi e permette di assumere, in prima approssimazione, che la loro densità sia costante.

La legge di Stevino (9.4) può essere ottenuta molto semplicemente calcolando il peso della colonna di liquido alta z :

$$m g = \rho V g = \rho S z g \Rightarrow p = \frac{F}{S} = \rho g z \,.$$

La pressione alla profondità z è data dalla somma della pressione esercitata dalla colonna di liquido sovrastante e di quella esterna agente sulla superficie libera del liquido. Tuttavia abbiamo preferito ricavare (9.4) a partire da (9.2) e (9.3) per mostrare come la legge di Stevino si inquadri nel contesto più generale dell'equilibrio statico di un fluido.

Abbiamo già rilevato che nel campo della gravità le superficie equipotenziali e quindi isobariche sono piani orizzontali; ricordiamo che lungo di esse la densità

deve essere costante. Pertanto *la superficie libera di un liquido in quiete dentro un contenitore è una superficie piana coincidente con una superficie orizzontale*, come disegnato nelle figure 9.3 e 9.4. Possiamo capirlo sia perché nei punti della superficie libera la pressione deve avere ovunque lo stesso valore, pari a quello della pressione esterna, oppure pensando al fatto che se fosse possibile che una superficie equipotenziale S non fosse parallela alla superficie libera del liquido, lungo S osserveremmo una discontinuità della densità nel passaggio dell'esterno all'interno del liquido. Per la stessa ragione è orizzontale anche la superficie di separazione tra due liquidi non miscibili, come acqua e olio.

La struttura della legge di variazione della pressione nel fluido è $p = p_0 + \Delta p$ con p_0 pressione esterna. Ne segue che ogni cambiamento della pressione esterna dà luogo a un'eguale variazione di p. Questa proprietà è nota come *principio di Pascal*. Se poi, come avviene in un piccolo volume di gas, Δp è molto minore di p_0, la pressione nel gas è ovunque costante e pari al valore della pressione esterna, di cui segue le eventuali variazioni.

Principio di Pascal

Nel seguito del paragrafo esamineremo alcune interessanti conseguenze delle leggi dell'equilibrio statico in un fluido sottoposto alla forza di gravità.

Vasi comunicanti

Consideriamo un sistema di recipienti i comunicazione tra loro, riempiti dello stesso liquido e aperti nello stesso ambiente. Il liquido nei vari recipienti assume lo stesso livello rispetto al suolo, ovvero le superficie libere appartengono tutte allo stesso piano equipotenziale. Questo risultato esprime *il principio dei vasi comunicanti*. Esso è facilmente ricavabile dalla legge di Stevino, osservando che, in condizioni di quiete, alla stessa profondità le pressioni devono essere identiche. Nella figura 9.5 sono rappresentate a sinistra la condizione di equilibrio e a destra una situazione di non equilibrio, in cui si osserva un flusso di liquido fino allo stabilirsi dell'equilibrio.

Principio dei vasi comunicanti

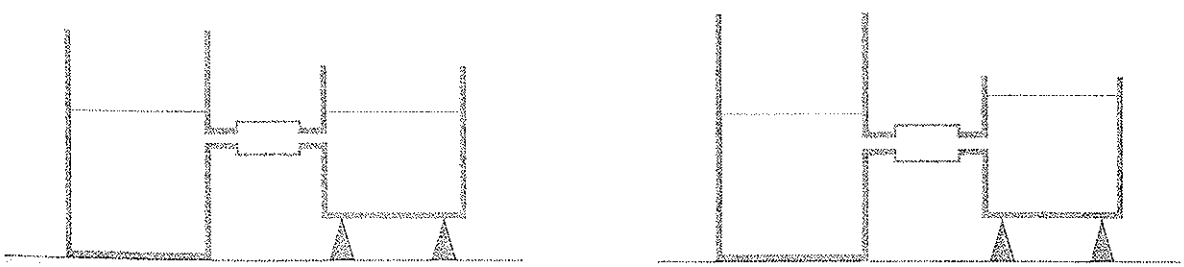


Fig. 9.5

Manometro ad U

Abbiamo un *tubo a* forma di U, riempito con un liquido. Se le pressioni p_1 e p_2 agenti sulle superficie libere sono le stesse, le superficie in base al principio dei vasi comunicanti si trovano allo stesso livello. Se però i due rami comunicano con ambienti a diverse pressioni, con $p_1 > p_2$, si produce un dislivello tra le due superficie libere dato da

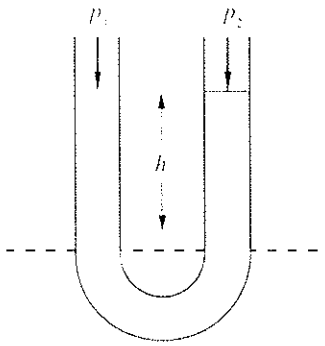


Fig. 9.6

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \ ,$$

in accordo con la legge di Stevino. Dalla misura di h si ottiene il valore della pressione in un ambiente rispetto, per esempio, a quella atmosferica.

Il tubo ad U costituisce il manometro più semplice. La sensibilità varia in ragione inversa della densità del liquido contenuto nel manometro: minore è la densità del liquido, più piccole sono le differenze di pressione che il manometro è capace di rivelare.

Se il tubo ad U contiene due liquidi diversi non miscibili di densità ρ_1 e ρ_2 e le superficie libere sono a contatto con lo stesso ambiente alla pressione p_0, esse presentano un dislivello. Indicando con p la pressione alla superficie di separazione tra i due liquidi, si ha in base a (9.4)

$$p = p_0 + \rho_1 g z_1 = p_0 + \rho_2 g z_2$$

(la linea tratteggiata in figura 9.7 è equipotenziale), e quindi

$$\rho_1 g z_1 = \rho_2 g z_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{z_2}{z_1} = 1 - \frac{h}{z_1}$$

con $h = z_1 - z_2$ dislivello tra le due superficie libere. Le altezze z_1 e z_2 delle colonne liquide sopra la superficie di separazione sono inversamente proporzionali alle densità.

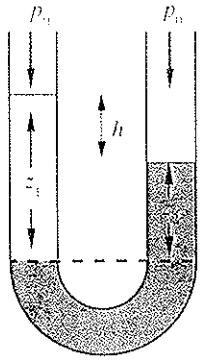


Fig. 9.7

Su questi risultati è fondato un metodo di misura della densità relativa dei liquidi rispetto a quella di un liquido campione. L'apparato si può facilmente modificare per estendere la misura a liquidi miscibili.

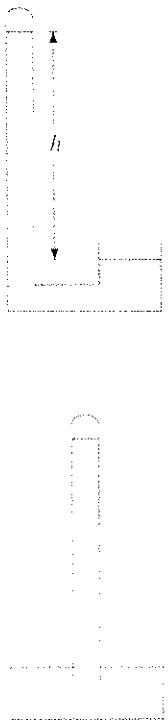


Fig. 9.8

Barometro di Torricelli

Torricelli fu il primo a sostenere che l'atmosfera esercita una pressione e a misurarne il valore con dispositivi simili a quelli della figura 9.8, detti *barometri a mercurio*. Consideriamo prima il manometro ad U con un ramo chiuso e un ramo aperto in un ambiente a pressione atmosferica. Se il riempimento con mercurio è effettuato opportunatamente, senza fare entrare aria nella parte chiusa, si osserva che il dislivello h tra le due superficie libere è di circa 76 cm. Poiché nel ramo chiuso agisce solo la pressione dei vapori di mercurio, che è $\sim 10^{-6}$ bar, il dislivello è dovuto solo alla pressione atmosferica che vale dunque $\rho g h$.

Per convenzione il valore di riferimento è quello esercitato da una colonna di mercurio alla temperatura di 0° C, con $h = 0.760$ m, $\rho = 13.595 \cdot 10^3$ kg/m^3, in un luogo dove $g = 9.80665$ m/s^2, e risulta

$$P_{atm} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \ ,$$

valore detto *normale*.

Se al posto del mercurio utilizzassimo come liquido l'acqua la colonna sarebbe alta 10.3 m.

Pressione atmosferica e sue variazioni

La *pressione atmosferica* è originata dall'attrazione gravitazionale da parte della terra sulla massa di gas che la circonda. Si raggiunge un equilibrio statico che determina una compressione contro la superficie della terra.

La pressione atmosferica diminuisce con l'altezza: basta pensare che è minore il peso della colonna d'aria sovrastante. La decrescita non è lineare con l'altezza poiché la densità dell'aria non è costante. Assumendo l'atmosfera isoterma (il che chiaramente non è), vale la legge di Boyle già citata nel paragrafo 8.5, secondo cui pV = costante ovvero p/ρ = costante: in queste condizioni la densità è proporzionale alla pressione.

Consideriamo un asse z verticale orientato verso l'alto e con origine al livello del mare, dove densità e pressione valgono ρ_0 e p_0. Alla quota z, dove la pressione vale p, poniamo $\rho = \rho_0\, p/\, p_0$ in accordo con l'ipotesi fatta e applichiamo la legge di Stevino a una variazione di quota dz:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{g\rho_0}{p_0}\, p \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0}\, dz = -\frac{dz}{a}$$

con $a = \dfrac{p_0}{g\rho_0} = \dfrac{1.013 \cdot 10^5}{9.8 \cdot 1.3} = 7.95 \cdot 10^3\, m \cong 8$ km. Integrando

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{1}{a} \int_0^z dz \quad \Rightarrow \quad \log \frac{p}{p_0} = -\frac{z}{a} \quad \Rightarrow \quad p = p_0\, e^{-z/a} \ .$$

Nell'atmosfera isoterma la pressione decresce esponenzialmente con l'altezza; il valore della costante a (si noti che anche g è stato assunto costante) è calcolato in corrispondenza a un valore della densità dell'aria a livello del mare alla temperatura di 0° C; se si usa il valore a 20° C risulta $a \cong 8.6$ km. Ad ogni modo la pressione si riduce a circa 1/3 del valore di p_0 ad una quota di $8 \div 9$ km.

Valori più corretti si hanno da medie fatte su molte misure alle varie quote. Nella figura 9.9 sono rappresentate le variazioni di pressione e temperatura della cosiddetta aria tipo.

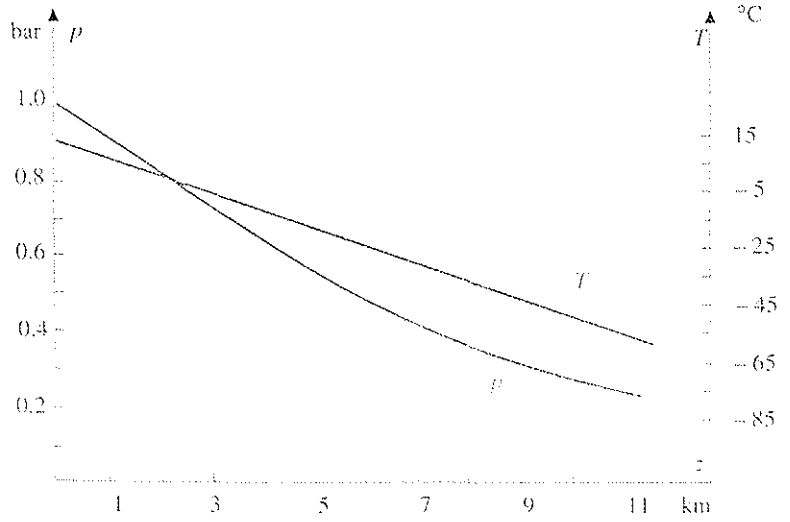


Fig. 9.9

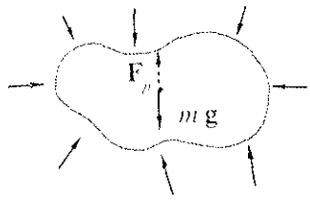


Fig. 9.10

9.4 PRINCIPIO DI ARCHIMEDE.

In un fluido in equilibrio sotto l'azione della gravità isoliamo idealmente un volume finito di fluido V_0, di forma qualsiasi. La risultante delle forze di pressione, esercitate dal resto del fluido sulla parte isolata, è eguale ed opposta alla forza peso della stessa. Infatti per la condizione di equilibrio del volume V_0 di fluido

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_p + m\,\mathbf{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_p = -m\,\mathbf{g} \ ,$$

essendo m la massa di fluido contenuta nel volume V_0, $m = \rho\, V_0$.

Se ora sostituiamo al volume V_0 di fluido un identico volume di qualsiasi altra sostanza, con massa $m' = \rho'\, V_0$, la risultante $\mathbf{F}_p$ delle forze di pressione esercitate dal fluido circostante rimane la stessa, mentre varia la forza peso del volume preso in considerazione. Pertanto non sussiste più una condizione di equilibrio e la forza risultante agente su V_0 vale $\mathbf{F}'_V + \mathbf{F}_p$, cioè

$$(m' - m)\,\mathbf{g} = (\rho' - \rho)\,V_0\,\mathbf{g} \ .$$

Se $\rho' \geq \rho$ la forza risultante ha la stessa direzione e verso di $\mathbf{g}$ e quindi il corpo, introdotto al posto del volume V_0 di fluido, scende nel fluido; se invece $\rho' < \rho$ il corpo sale.

Principio di Archimede

In ambedue i casi *il corpo riceve una spinta verso l'alto,* $\mathbf{F}_A = -\rho\, V_0\,\mathbf{g}$, *pari al peso del volume di fluido spostato.* Questo risultato esprime *il principio di Archimede.*

La spinta di Archimede $\mathbf{F}_A$, in quanto risultante delle forze esterne di pressione applicate a V_0 dal fluido circostante, si deve ritenere applicata nel centro di massa del fluido spostato. Il corpo che occupa il volume V_0 ha, in generale, il centro di massa in una posizione diversa. Si può presentare pertanto, oltre alla spinta, anche un momento risultante.

Lo sviluppo dei concetti esposti è alla base dello studio dell'equilibrio dei corpi sommersi o galleggianti, quali sottomarini, navi, palloni sonda.

ESEMPIO 9.1

Un'asta sottile, di lunghezza l, sezione S e densità costante ρ, è incernierata nel suo estremo O alla parete di un recipiente, mentre l'altro estremo è immerso in acqua. L'asta può ruotare liberamente attorno ad un asse orizzontale passante per il punto O, che non è immerso in acqua. Se all'equilibrio la parte di lunghezza d dell'asta è fuori dall'acqua, determinare la densità del materiale di cui è composta l'asta.

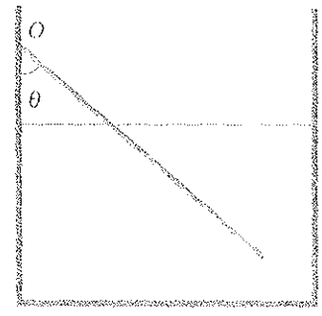


Fig. 9.11

Soluzione

In equilibrio la somma dei momenti agenti sull'asta deve essere nulla. Prendiamo il punto O come polo e indichiamo con θ l'angolo formato dall'asta con la parete. La forza peso dell'asta, $\rho\, S\, l\, g$, applicata nel centro dell'asta distante $l/2$ da O, ha il momento

$$M = \rho S l g \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta \quad .$$

La spinta di Archimede è pari alla forza peso del liquido spostato, $\rho_0 S (l - d) g$, ed è applicata nel centro della parete sommersa dell'asta, distante $d + \frac{l-d}{2} = \frac{l+d}{2}$ da O; il momento è

$$M_A = \rho_0 S (l - d) g \frac{l+d}{2} \operatorname{sen} \theta \quad .$$

Vettorialmente i due momenti hanno stessa direzione (ortogonale al disegno), verso opposto e modulo eguale. Dall'eguaglianza dei moduli si ricava

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{d^2}{l^2} \right) \quad .$$

9.5 LIQUIDO IN ROTAZIONE.

Consideriamo un liquido in un recipiente cilindrico posto in rotazione rispetto all'asse verticale z, che coincide con l'asse del cilindro; la velocità angolare ω è costante. Si osserva che dopo un certo tempo tutto il liquido ruota rigidamente insieme al recipiente e che la superficie libera non è più piana, ma concava. Vogliamo determinare la forma della superficie libera.

Ciascun elemento di liquido descrive un'orbita circolare e quindi è sottoposto a una forza radiale, diretta verso l'asse di rotazione, pari a $\rho\, dV\, \omega^2 r$, dove r è la distanza dall'asse dell'elemento considerato, di massa $dm = \rho\, dV$.

Per ricondurci a una situazione di equilibrio statico, che sappiamo trattare, ci poniamo in un sistema di riferimento ruotante con il liquido attorno all'asse z. Tale sistema non è inerziale e dobbiamo quindi considerare anche la forza apparente centrifuga, radiale e diretta verso l'esterno.

In questo sistema un qualsiasi elemento di liquido è in equilibrio statico sotto l'azione delle forze di volume, $dm\,\mathbf{g}$ e $dm\,\omega^2 r\,\mathbf{u}_r$, e delle forze di pressione dovute agli elementi di liquido circostanti; $\mathbf{u}_r$ rappresenta il versore della direzione radiale, orientata verso l'esterno. Osserviamo che

$$dm\,\omega^2 r\,\mathbf{u}_r = dm\,\omega^2 (x\,\mathbf{u}_x + y\,\mathbf{u}_y) \quad ,$$

dove x e y sono le coordinate dell'elemento di liquido in un piano ortogonale a z. L'energia potenziale per unità di massa delle forze di volume, entrambe conservative, è data da

$$E_{p,m} = g z - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = g z - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \tag{9.5}$$

e infatti si verifica subito che $-\mathbf{grad}\, E_{p,m}$ è eguale alla forza per unità di massa agente sull'elemento di liquido, $\mathbf{g} + \omega^2 r\,\mathbf{u}_r$.

La superficie libera del liquido è una superficie equipotenziale e la sua equazione è quindi determinata dalla condizione

$$g z - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{costante} \quad .$$

Per determinare il valore della costante osserviamo che sull'asse ($r = 0$ ovvero $x = y = 0$) l'altezza del liquido rispetto al fondo del recipiente è $z = h$; la costante

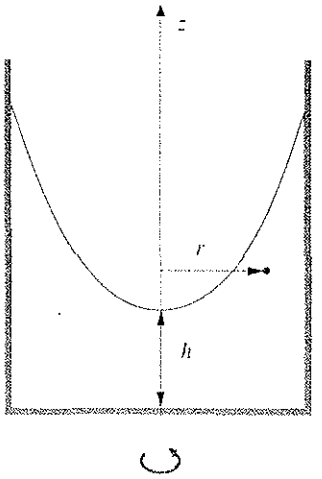


Fig. 9.12

vale pertanto $g\,h = E_{p,m}(0, 0, h)$ e in definitiva

$$z = h + \frac{\omega^2}{2g}\, r^2 = h + \frac{\omega^2}{2g}\,(x^2 + y^2) \tag{9.5}$$

è l'equazione della superficie libera, che risulta essere un paraboloide di rotazione.

Il valore di h, altezza del vertice del paraboloide rispetto al fondo, è facilmente calcolabile. Il liquido in quiete ($\omega = 0$) occupa il volume $\pi R^2 d$ con R raggio del cilindro. In rotazione il volume dell'intercapedine cilindrica alta z e compresa tra i raggi r e $r + dr$ è dato da

$$dV = 2\pi r\, dr\, z(r) = 2\pi r \left(h + \frac{\omega^2}{2g}\, r^2\right) dr$$

e il volume totale sotto il parabolide è

$$V = \int_0^R 2\pi h r\, dr + \int_0^R \frac{\pi\omega^2}{g}\, r^3\, dr = \pi R^2 \left(h + \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right) .$$

La massa nel processo non cambia; se la densità resta costante, il volume appena calcolato deve essere eguale a $\pi R^2 d$ e si trova

$$h = d - \frac{\omega^2 R^2}{4g} .$$

L'altezza h dipende da ω e la sua misura può essere utilizzata come *un tachimetro* per la velocità angolare. Il massimo valore ω_M misurabile si ha per $h = 0$: $\omega_M = 4\,g\,d/R^2$.

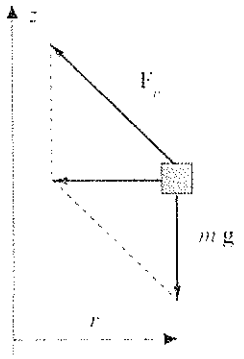


Fig. 9.13

Studiamo ora il moto in un sistema di riferimento inerziale: il liquido rispetto a tale sistema non è più in quiete e non possiamo usare (9.3).

La forza agente sull'elemento $dm = \rho\, dV$ di liquido in rotazione è la risultante della forza peso (forza di volume) e delle forze di superficie e deve essere centripeta, cioè valere $-\rho\, dV\, \omega^2 r\, \mathbf{u}_r$, come abbiamo già rilevato all'inizio del paragrafo. Lungo la direzione verticale le forze agenti sono in equilibrio e quindi

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad . \tag{9.6}$$

come sappiamo da (9.2). La forza radiale, non nulla, è dovuta alle differenze di pressione:

$$\mathbf{F}_r = [\,p(r)\,dS - p(r + dr)\,dS\,]\,\mathbf{u}_r = -\frac{\partial p}{\partial r}\, dr\, dS\, \mathbf{u}_r = -\frac{\partial p}{\partial r}\, dV\, \mathbf{u}_r \quad ,$$

dove dS rappresenta la superficie dell'elemento, di volume $dV = dr\, dS$. Ponendo $\mathbf{F}_r$ eguale a $-\rho\, dV\, \omega^2 r\, \mathbf{u}_r$ si ottiene

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\, \omega^2 r \quad . \tag{9.7}$$

La pressione dunque cresce radialmente nel liquido in rotazione.

La funzione $p\ (r, z)$, le cui derivate parziali soddisfano (9.6) e (9.7), è

$$p = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + k \quad ,$$

dove k rappresenta la pressione sul fondo del recipiente e sull'asse di rotazione, cioè per $z = r = 0$. Se p_0 è la pressione esterna agente sulla superficie libera, $k = p\ (0, 0) = p_0 + \rho g h$. Quindi lungo la superficie libera, che è isobarica alla pressione p_0, deve essere

$$p_0 = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + p_0 + \rho g h \quad \Rightarrow \quad z = h + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

che è la (9.5) già ricavata.

L'origine della forza centripeta necessaria alla rotazione del liquido è nella variazione radiale della pressione. Se nel liquido è sospeso un corpuscolo con densità $\rho' \neq \rho$ l'azione della pressione, esercitata dal liquido circostante, è sempre la stessa, però la forza centripeta $\rho V \omega^2 r$ può essere troppo grande o troppo piccola per mantenere il corpuscolo, di massa $\rho' V$, sull'orbita circolare di raggio r. Pertanto il corpuscolo si sposterà verso l'asse di rotazione se $\rho' < \rho$ mentre se ne allontanerà se $\rho' > \rho$.

Su questo risultato, che è un'estensione del principio di Archimede, si basa *il metodo di separazione per centrifugazione di sostanze in sospensione in un liquido*, frequentemente usato in biologia. In appositi dispositivi, detti *ultracentrifughe*, si raggiungono valori di ω dell'ordine di 10^4 rad/s $\cong 10^5$ giri/minuto.

Centrifugazione

9.6 ATTRITO INTERNO. VISCOSITÀ. FLUIDO IDEALE.

Quando si verifica una condizione di scorrimento relativo tra due elementi di fluido compare lungo l'area di contatto una forza tangenziale di attrito, detta *forza di attrito interno*, con verso sempre contrario a quello della velocità relativa. L'elemento 1 del fluido esercita una forza sull'elemento 2 e viceversa: le due forze sono eguali e contrarie, come mostrato in figura 9.14. Se la velocità v_1 dell'elemento 1 è maggiore di quella v_2 dell'elemento 2, la forza di attrito interno è ritardante per il primo elemento e accelerante per il secondo.

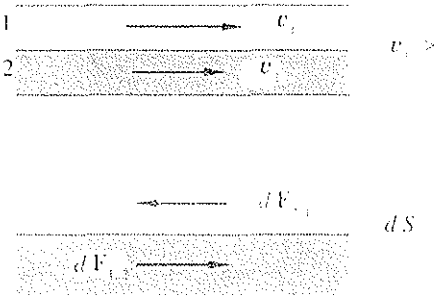


Fig. 9.14

Si trova sperimentalmente che il modulo della forza di attrito interno si può esprimere come

Forza di attrito interno

$$dF = \eta \, dS \, \frac{dv}{dn} \quad , \tag{9.8}$$

dove dS rappresenta l'area di contatto e dv/dn la variazione del modulo della velocità in direzione ortogonale a dS. Il coefficiente η è la *viscosità del fluido* e dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura. Nei liquidi η decresce all'aumentare della temperatura, nei gas cresce.

Viscosità di un fluido

L'unità di misura della viscosità è il kg/ms, però nella pratica si usa l'unità poise (dal nome del fisiologo Poiseuille) e il sottomultiplo centipoise:

$$1 \text{ poise} = 10^{-1} \text{ kg/ms} \quad , \quad 1 \text{ centipoise} = 10^{-2} \text{ poise} = 10^{-3} \text{ kg/ms}.$$

Diamo nella tabella 9.1 alcuni valori della viscosità.

Tabella 9.1 - Viscosità

Fluido	Temperatura (°C)	η (poise)
acqua	0	$1.79 \cdot 10^{-2}$
acqua	20	$1.00 \cdot 10^{-2}$
acqua	100	$0.30 \cdot 10^{-2}$
aria	20	$1.82 \cdot 10^{-4}$
glicerina	20	0.15
mercurio	20	$1.55 \cdot 10^{-3}$
olio per motori	30	2.5
pece	15	$1.3 \cdot 10^{11}$
sangue	37	0.23
vetro	700	$1.0 \cdot 10^{11}$

All'attrito interno e a quello tra liquido e pareti del contenitore si riconduce il fenomeno della variazione di forma del liquido in rotazione, discusso nel paragrafo 9.5. All'inizio della rotazione entrano in movimento gli elementi di liquido sul fondo e vicino alle pareti, cioè a contatto con una superficie in moto relativo. In particolare per gli elementi di liquido sul fondo non è inizialmente ancora realizzata la condizione di equilibrio dinamico, ossia non c'è una forza centripeta sufficiente a mantenerli in orbita circolare. Gli elementi si portano verso l'esterno ed il liquido comincia ad accumularsi verso le pareti. Successivamente il moto degli elementi più esterni trascina per attrito interno via via gli elementi più interni, che a loro volta si spostano verso l'esterno. Essendo la velocità angolare costante, alla fine le velocità relative si annullano e si raggiunge l'equilibrio dinamico con la conformazione parabolica vista.

Fluido ideale

Si chiama *fluido ideale* un fluido in cui $\eta = 0$ e ρ = costante, cioè *un fluido non viscoso e incomprimibile*: quest'ultima dizione si riferisce al fatto che se la densità è costante una massa di fluido occupa sempre lo stesso volume, anche se è in movimento. Essendo la viscosità nulla, le forze tra gli elementi fluidi, anche se in moto relativo, sono sempre ortogonali alle superficie di contatto, come avviene in un fluido in quiete.

Il fluido ideale è un caso limite, in quanto in un fluido reale è sempre $\eta \neq 0$; si noti che con un fluido ideale non si potrebbe certamente realizzare l'esperienza descritta nel paragrafo 9.5.

Osserviamo infine che in un fluido in equilibrio statico $dv/dn = 0$ e pertanto non ci sono forze tangenziali: le condizioni di equilibrio sono le stesse per un fluido viscoso e uno non viscoso ovvero l'attrito interno non modifica le condizioni di equilibrio statico. È solo in un fluido in movimento che il concetto di viscosità è significativo, come del resto dice la (9.8).

9.7 MOTO DI UN FLUIDO. REGIME STAZIONARIO. PORTATA

Consideriamo un fluido in moto, per esempio all'interno di un condotto. Tra le possibili descrizioni del moto scegliamo la seguente, detta euleriana: viene fissata l'attenzione su un determinato punto della massa fluida $P(x, y, z)$ e si considera la velocità $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ di un elemento fluido che passa nel punto P all'istante t. In generale tale grandezza è variabile nel tempo, cioè i vari elementi che successivamente passano nella posizione considerata P hanno velocità diverse. Se conosciamo in tutta la massa del fluido la funzione $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ abbiamo una rappresentazione del moto di tutti gli elementi fluidi.

Descrizione euleriana

Limitiamoci al caso in cui la velocità, pur cambiando da punto a punto, sia in ciascun punto indipendente dal tempo, $\boldsymbol{v}(x, y, z)$. Questa situazione fisica è detta di *regime stazionario*: tutti gli elementi di fluido che passano in istanti diversi in P hanno in quella posizione sempre la stessa velocità. In caso contrario si parla di *regime variabile*.

Regime stazionario

Tracciamo le linee che in ogni punto hanno direzione e verso della velocità cioè sono tangenti al vettore velocità: tali linee sono dette *linee di corrente*: in regime stazionario esse hanno una configurazione costante nel tempo e coincidono con le traiettorie degli elementi fluidi. Un esempio è mostrato in figura 9.15: se il regime è stazionario il disegno non cambia mai. Le linee di corrente si possono facilmente visualizzare immergendo nel fluido polveri colorate che vengono trasportate dalla corrente.

Linee di corrente

In regime variabile invece le linee di corrente cambiano nel tempo e la traiettoria di un elemento fluido è costituita da una successione di tratti, ciascuno appartenente a una diversa configurazione di linee di corrente.

Tutte le linee di corrente che passano attraverso una generica sezione S individuano un *tubo di flusso*, mostrato in figura 9.16. L'intero condotto, al limite, costituisce un tubo di flusso.

Tubo di flusso

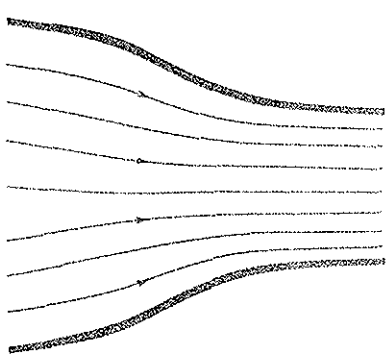


Fig. 9.15

Portata di un tubo di flusso

Consideriamo un tubo di flusso di sezione infinitesima dS, ortogonale alle linee di corrente: il prodotto $dq = v\,dS$, detto *portata del tubo di flusso*, *rappresenta tutto il volume di fluido che è passato attraverso dS in un secondo*. Tale volume, infatti, ha la base pari a dS e l'altezza v, modulo della velocità, che corrisponde allo spazio percorso da un elemento di fluido in un secondo. Come si desume dalla definizione, la portata si misura in m^3/s.

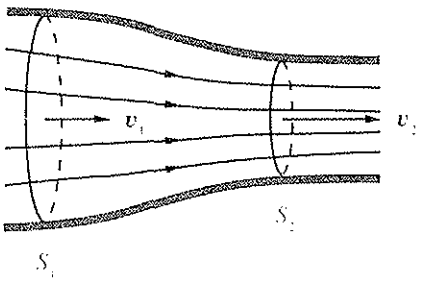


Fig. 9.16

Il tubo di flusso può cambiare di sezione (figura 9.16), ma se il fluido è incomprimibile, cioè la densità è costante, e si è in condizioni di regime stazionario, cioè la configurazione delle linee di corrente è immutabile, la portata deve essere la stessa attraverso qualsiasi sezione.

Infatti, fissate due qualsiasi sezioni del tubo di flusso e quindi il volume compreso tra queste, la massa ivi contenuta può entrare e uscire solo dalle sezioni, ma non dalle pareti se il regime è stazionario, e non può cambiare se la densità è costante: pertanto la portata attraverso le sezioni è la stessa, il fluido non può localmente né addensarsi né rarefarsi. In conclusione, *in regime stazionario se la densità è costante, è costante la portata di un tubo di flusso infinitesimo: $v\,dS =$ costante; dove la sezione aumenta la velocità diminuisce, mentre se diminuisce la sezione aumenta la velocità*, come sembra ovvio se bisogna smaltire per unità di tempo un numero costante di metri cubi.

Per un tubo di flusso di sezione finita la portata è data da

$$q = \int_S dq = \int_S v\,dS = v_m S \quad ,$$

se v_m è la *media delle velocità* nei vari punti della sezione (media spaziale e non temporale). Quindi, per un fluido incomprimibile in regime stazionario

$$v_m S = \text{costante} \tag{9.9}$$

Questa legge di proporzionalità inversa tra velocità e sezione è stata scoperta da Leonardo, osservando il moto dei liquidi. Essa è facilmente riscontrabile guardando la corrente di un fiume: la corrente appare più veloce dove il fiume si restringe.

Si trova sperimentalmente che la (9.9) è valida anche per i gas: essi sono cioè incomprimibili nel loro moto in un condotto, almeno finché le velocità non sono elevate (~100 m/s).

9.8 TEOREMA DI BERNOULLI.

Un fluido ideale, $\eta = 0$ e $\rho =$ costante, scorre in condizioni di regime stazionario dentro un condotto a sezione variabile. Un volume di fluido, compreso tra le sezioni S_1 e S_2 si sposta tra le sezioni S_1' e S_2' (figura 9.17): sia $d\mathbf{s}_1$ lo spostamento da S_1 a S_1' e $d\mathbf{s}_2$ da S_2 a S_2'. Se il fluido è incomprimibile il volume $dV_1 = S_1\, ds_1$ che attraversa la sezione S_1 nel tempo dt è eguale a quello $dV_2 = S_2\, ds_2$ che attraversa nello stesso intervallo di tempo la sezione S_2 : $dV_1 = dV_2$.

Vogliamo ricavare la relazione tra velocità e pressione del fluido nella varie sezioni del condotto. A tal fine utilizziamo il teorema dell'energia (5.18), secondo cui il lavoro delle forze agenti è eguale alla variazione di energia cinetica.

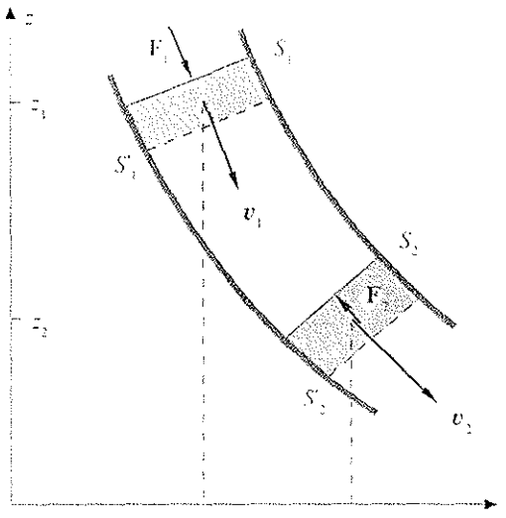


Fig. 9.17

Le forze agenti sul volume di fluido sono la forza peso e le forze di pressione, mentre non ci sono forze di attrito interno dato che $\eta = 0$. Dalla figura 9.17 osserviamo che complessivamente il movimento del volume di fluido equivale a spostare nel volume dV_2 la massa contenuta nel volume dV_1 : l'energia potenziale del fluido compreso tra S_1' e S_2 rimane invariata, anche se nel tempo gli elementi fluidi che lo compongono sono cambiati. Il lavoro della forza peso è quindi dato da

$$dW = -dE_p = -dm\, g\, (z_2 - z_1) = -\rho\, dV\, g\, (z_2 - z_1) \quad ,$$

dove z_1 e z_2 sono le quote dei due volumi eguali dV_1 e dV_2, di massa dm.

Le forze di pressione dovute alle pareti del condotto danno lavoro nullo in quanto ortogonali allo spostamento ($\eta = 0$), mentre il lavoro di quelle dovute agli elementi a monte di S_1 e a valle di S_2 è dato da

$$dW_p = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 = p_1 S_1\, ds_1 - p_2 S_2\, ds_2 =$$

$$= p_1\, dV_1 - p_2\, dV_2 = (p_1 - p_2)\, dV \quad .$$

Il calcolo della variazione di energia cinetica, seguendo il ragionamento utilizzato per l'energia potenziale (nel volume compreso tra S_1' e S_2 non c'è variazione

di energia cinetica), fornisce

$$dE_k = \frac{1}{2}\, dm\, v_2^2 - \frac{1}{2}\, dm\, v_1^2 = \frac{1}{2}\, \rho\, dV\, (v_2^2 - v_1^2) \quad .$$

Pertanto

$$dW + dW_p = -\rho\, dV\, g\, (z_2 - z_1) + (p_1 - p_2)\, dV =$$

$$= dE_k = \frac{1}{2}\, \rho\, dV\, (v_2^2 - v_1^2)$$

e separando i termini relativi a dV_1 e dV_2

$$p_1 + \frac{1}{2}\, \rho\, v_1^2 + \rho\, g\, z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\, \rho\, v_2^2 + \rho\, g\, z_2$$

ovvero

Teorema di Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\, \rho\, v^2 + \rho\, g\, z = \text{costante} \quad . \tag{9.10}$$

La relazione (9.10), valida per qualsiasi sezione S, esprime il *teorema di Bernoulli: in un fluido ideale in moto con regime stazionario la somma della pressione, della densità di energia cinetica (energia cinetica per unità di volume) e della densità di energia potenziale (energia potenziale per unità di volume) è costante lungo il condotto, ovvero lungo un qualsiasi tubo di flusso.*

Se il condotto è orizzontale $\rho\, g\, z$ è costante e quindi la (9.10) si riduce a

$$p + \frac{1}{2}\, \rho\, v^2 = \text{costante} \quad . \tag{9.11}$$

La pressione e la velocità del fluido cambiano solo se cambia la sezione: per S maggiore v è minore, mentre la pressione aumenta; per S minore v aumenta e diminuisce la pressione. Se la sezione è costante, rimangono costanti pressione e velocità: data l'assenza di attrito il moto avviene senza l'azione di una forza, almeno finché il condotto è rettilineo.

Da (9.10) se $v = 0$ si ritrova la legge di Stevino (9.4): $p + \rho\, g\, z = \text{costante}$. Il fatto sottolinea che la statica è sempre, come già osservato, un caso particolare della dinamica. Osserviamo inoltre che la pressione misurata in un punto del fluido in quiete è sempre maggiore di quella esistente nel fluido in movimento.

Un'ultima considerazione: nella rappresentazione del moto tramite le linee di corrente, esse risultano più fitte dove la velocità è maggiore, come si vede in figura 9.15. A tale proprietà qualitativa si può dare un aspetto quantitativo se si assume di misurare la velocità tramite il numero di linee di corrente per unità di sezione. In ogni caso, dall'esame dell'andamento delle linee di corrente si può avere un'idea non solo delle traiettorie, ma anche delle variazioni di velocità e quindi della pressione.

9.9 APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI BERNOULLI

Le relazioni (9.10) e (9.11) sono state ricavate per il moto in regime stazionario di un fluido ideale. In questo paragrafo vedremo alcune applicazioni, che si riferiscono a situazioni reali: i risultati, calcolati in base al teorema di Bernoulli,

sono perciò da considerare casi limite. In un fluido reale occorre spendere lavoro contro gli attriti e quindi, per esempio, a parità di differenza di pressione o di dislivello le variazioni di velocità del fluido sono minori. D'altra parte il teorema di Bernoulli resta pur sempre un utile mezzo di calcolo per fissare i limiti ideali nel comportamento di un fluido in movimento.

Tubo di Venturi

Il *tubo di Venturi* consiste in un condotto orizzontale a sezione variabile e viene utilizzato per misure di velocità e di portata, inserendolo nella conduttura in cui scorre il fluido. Applicando (9.9) e (9.11) si ha

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad ,$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad ,$$

essendo S_1 e S_2 rispettivamente la sezione della conduttura e della strozzatura. Pertanto

$$v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2} \quad .$$

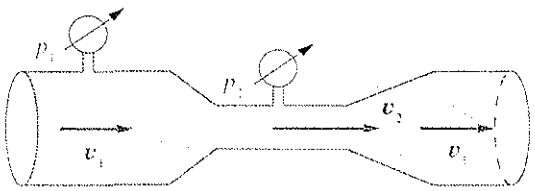


Fig. 9.18

Dalla misura della differenza di pressione nelle due sezioni, $\Delta p = p_1 - p_2$, si possono calcolare v_2 e quindi v_1 e risalire al valore della portata.

Bruciatore a gas. Aspiratore a acqua.

Nel *bruciatore a gas*, il gas combustibile passa attraverso una strozzatura nel condotto: la velocità aumenta e la pressione diminuisce, portandosi a un valore inferiore a quello della pressione atmosferica: pertanto attraverso l'apertura dall'ambiente esterno fluisce l'aria necessaria per formare la miscela combustibile. La figura 9.19 mostra una sezione del dispositivo. Tramite una regolazione dell'apertura si variano le condizioni di combustione.

Nell'*aspiratore ad acqua*, al posto del gas fluisce l'acqua e l'aria, o altro gas, proviene da un ambiente chiuso in cui si intende ridurre la pressione esistente. La depressione causata dall'aumento di velocità dell'acqua nella strozzatura del

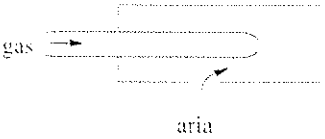


Fig. 9.19

condotto aspira l'aria che mescolandosi con l'acqua viene portata via. Alla fine del processo nell'ambiente chiuso c'è una pressione residua pari a quella del vapor d'acqua. Un principio simile è utilizzato negli erogatori di benzina ad arresto automatico. Il liquido che scorre aspira aria; quando il livello nel serbatoio del veicolo tocca la punta dell'erogatore l'aspirazione si blocca e questo fatto provoca lo scatto di una valvola che chiude l'erogatore.

Paradosso idrodinamico.

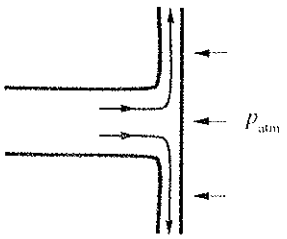


Fig. 9.20

Consideriamo un condotto in cui fluisce dell'aria; alla fine del condotto viene posto un dischetto. Si osserva che il dischetto è spinto verso il condotto e tende a chiuderlo piuttosto che essere allontanato dal getto fluido, come forse si potrebbe intuitivamente pensare (donde il nome di *paradosso*). Il risultato si spiega col teorema di Bernoulli (9.11) : se p è la pressione dell'aria che si muove con velocità v e p_{atm} è la pressione esterna dell'aria in quiete, lungo un tubo di flusso che va dall'interno del condotto all'esterno si ha

$$p + \frac{1}{2}\,\rho\, v^2 = p_{atm} \qquad \Rightarrow \qquad p < p_{atm} \quad .$$

Tubo di Pitot.

Se un ostacolo viene posto in una corrente fluida le linee di corrente si aprono, ma nel punto di ostacolo (O nella figura 9.21) il fluido è fermo. Nelle sezioni A e B, a sufficiente distanza dall'ostacolo, la pressione e la velocità del fluido sono le stesse, per cui da (9.11) abbiamo

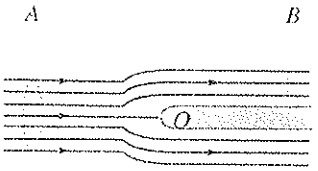


Fig. 9.21

$$p_A + \frac{1}{2}\,\rho\, v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\,\rho\, v_B^2 = p_0 \quad .$$

Pratichiamo due piccoli fori nel tubo di Pitot, in O e in B, per misurare in quelle posizioni le pressioni nel fluido: dalla loro differenza si calcola la velocità del fluido relativa al tubo.

Tale sistema viene utilizzato per la *misura della velocità degli aerei*.

Teorema di Torricelli

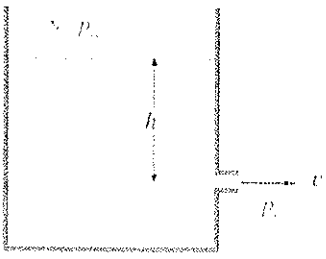


Fig. 9.22

Un recipiente, contenente un liquido di densità ρ, presenta sulla parete un piccolo foro, di sezione trascurabile rispetto alla sezione del recipiente, a distanza h dalla superficie libera (figura 9.22). La pressione nell'ambiente in cui si trova il recipiente è ovunque p_0 . Vogliamo determinare la velocità con cui il liquido esce dal foro (velocità di deflusso).

Dato che il recipiente ha sezione molto grande rispetto al foro il livello scende lentamente e il liquido può essere considerato quasi in quiete sulla superficie libera. Prendiamo un tubo di flusso che parte dalla superficie libera e termina nel foro: lungo di esso, in base al teorema di Bernoulli (9.11), si ha

$$\left(p + \frac{1}{2}\,\rho\, v^2 + \rho\, g\, z\right)_{sup} = \left(p + \frac{1}{2}\,\rho\, v^2 + \rho\, g\, z\right)_{foro} \quad .$$

Sulla superficie libera $p = p_0$, $v = 0$ e, assumendo il livello del foro come riferimento, $z = h$; all'uscita del foro $p = p_0$ e $z = 0$. Pertanto

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2 g h} \quad .$$

La velocità di efflusso non dipende né da ρ né da p_0; essa è pari a quella che avrebbe il liquido se scendesse in caduta libera da un'altezza h. Tale risultato è conseguenza del fatto che non c'è attrito interno: esso può essere interpretato anche in questo modo: sull'elemento di liquido che sta per uscire dal foro agiscono la pressione motrice $p_0 + \rho g h$ e la pressione resistente p_0, così che il valore netto è $\rho g h$, dovuto al liquido sovrastante; per azione di tale pressione l'elemento acquista la densità di energia cinetica $\frac{1}{2} \rho v^2$.

ESEMPIO 9.2

Un serbatoio è riempito con acqua e olio, che consideriamo liquidi ideali; la densità dell'olio è $\rho_0 = 900$ kg/m^3, l'altezza dello strato d'acqua è $h_1 = 1$ m, quello dello strato d'olio è $h_2 = 4$ m. Determinare la velocità con cui esce inizialmente l'acqua da un piccolo foro sul fondo del serbatoio. La pressione nell'ambiente circostante è ovunque p_0.

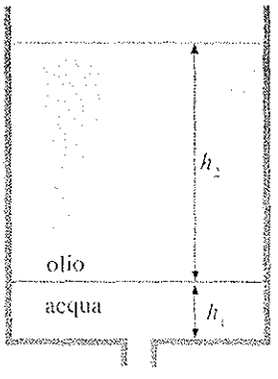


Fig. 9.23

Soluzione

Consideriamo un tubo di flusso nell'acqua, dalla superficie di separazione con l'olio al foro, e applichiamo (9.11) come abbiamo fatto nel teorema di Torricelli. Sulla superficie di separazione $p = p_0 + \rho_0 h_2 g$, $v = 0$, $z = h_1$, al foro $p = p_0$ e $z = 0$, per cui

$$p_0 + (h_1 \rho_a + h_2 \rho_0) g = p_0 + \frac{1}{2} \rho_a v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 g}{\rho_a} (h_1 \rho_a + h_2 \rho_0)} = 9.5 \text{ m/s} \quad .$$

Oppure si può eguagliare la pressione risultante sull'elemento nel foro,

$$p = \rho_a g h_1 + \rho_0 g h_2 \quad ,$$

a $\frac{1}{2} \rho_a v^2$.

Pulsazione vascolare.

Come conseguenza di una forma di *arteriosclerosi* sulle pareti delle arterie si vanno accumulando placche, col risultato che la sezione viene ridotta. Per mantenere costante la portata di sangue la velocità di questo deve aumentare (con notevole sforzo per il cuore), ma ciò comporta una diminuzione di pressione nell'arteria, che può essere schiacciata dalla pressione esterna fino a bloccare il flusso sanguigno. Con $v = 0$ la pressione risale e l'arteria si riapre. Si innesca così un processo in cui il flusso nell'arteria varia notevolmente (*pulsazione vascolare*): l'effetto può essere rivelato con uno *stetoscopio*. Nei casi più gravi l'arresto del flusso può provocare forme di *ischemia cerebrale momentanea* (mancanza di flusso sanguigno nel cervello).

9.10 EFFETTI DINAMICI. VORTICI.

Nello studio della meccanica dei fluidi abbiamo ottenuto le proprietà principali applicando le leggi generali della meccanica dei sistemi di punti, sia nel caso di equilibrio statico che di moto.

D'altra parte la natura continua dei fluidi e la loro caratteristica di non avere forma propria hanno indirizzato il nostro studio verso una visione complessiva del moto piuttosto che verso un'analisi del moto di un singolo elemento fluido. Si sono così determinate la pressione e la velocità in funzione della posizione nella massa fluida e si è rappresentato il moto tramite le linee di corrente.

Il quadro generale che segue dalla meccanica dei sistemi di punti rimane però sempre valido e pertanto anche nel moto dei fluidi dobbiamo attenderci gli effetti dinamici usuali. Vediamo alcuni esempi.

a) *Riconsiderazione della legge di Leonardo e del teorema di Bernoulli.*

Nella (9.9) si afferma che la velocità di un elemento di fluido aumenta se la sezione del tubo di flusso diminuisce: ciò vuol dire che l'elemento ha una certa accelerazione e quindi che deve agire una forza; se il condotto è orizzontale questa forza non può essere il peso. Siamo così portati a considerare le forze di pressione, dovute all'interazione con il resto del fluido, come le forze che determinano il moto. Se la sezione è costante e il condotto rettilineo, la velocità è costante in modulo, direzione e verso: infatti la pressione è anch'essa costante e non ci sono forze risultanti; è verificato il principio d'inerzia.

Già con queste semplici considerazioni vediamo, come appena detto, che il modo di ragionare sviluppato per i sistemi discreti di punti continua ad essere valido anche nello studio del moto dei fluidi, tenendo conto delle loro caratteristiche.

b) *Corrente fluida in un condotto curvo.*

Per realizzare il moto curvilineo deve essere applicata al fluido una forza centripeta, esercitata dal condotto, che subisce a sua volta una reazione, come si osserva se il condotto è flessibile o mobile (caso tipico, il mulinello idraulico).

All'interno del fluido l'azione della forza centripeta avviene attraverso una variazione radiale della pressione, che cresce verso l'esterno, cioè verso la parete del condotto non rivolta verso la concavità della curva.

Un'applicazione notevole di questi effetti si ha nelle turbine. Una corrente fluida lambisce le pale della turbina, venendone deviata; per effetto della reazione sulle pale la turbina entra in rotazione. Si ha pertanto un trasferimento di energia dal fluido alla turbina con trasformazione di lavoro meccanico in energia elettrica.

c) *Conservazione del momento angolare. Vortici.*

Versando un liquido in un recipiente cilindrico con un foro sul fondo si riesce a imprimere alla massa fluida un moto vorticoso, nel senso che le linee di corrente sono spirali che convergono verso l'asse verticale passante per il foro, mentre la superficie libera s'incava ad imbuto verso di questo. Il fenomeno si osserva anche quando viene tolto il tappo dall'orificio di scarico di un qualsiasi recipiente pieno di liquido.

Nell'ipotesi che il liquido sia ideale ($\eta = 0$, $\rho =$ costante) le uniche forze agenti sono le forze di pressione (radiali) e la forza peso (verticale), che hanno momento nullo rispetto all'asse verticale, per cui nel moto di un elemento di liquido si conserva il momento angolare. Se v_{in} è la velocità dell'elemento dm di liquido nell'istante in cui inizia il moto di rotazione, a distanza r_{in} dall'asse, il momento angolare vale $dm\, v_{in}\, r_{in}$; quando l'elemento è a distanza r dall'asse deve avere velocità tale che $dm\, v\, r = dm\, v_{in}\, r_{in}$, per cui

$$v = \frac{v_{in} r_{in}}{r} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{\omega_{in} r_{in}^2}{r^2} \quad .$$

La velocità lineare varia in ragione inversa della distanza dall'asse, mentre quella angolare in ragione inversa del quadrato della distanza. Entrambe cioè aumentano man mano che l'elemento di liquido si avvicina all'asse.

Nella massa liquida in rotazione elementi contigui hanno velocità diverse, però se $\eta = 0$ non si originano forze di attrito interno, che determinerebbero una situazione di rotazione rigida, come discusso nel paragrafo 9.5.

Per ricavare la forma della superficie libera utilizziamo il teorema di Bernoulli applicato a un tubo di flusso infinitesimo che sta sulla superficie libera, dove $p = p_{atm}$ = costante: pertanto da (9.10)

$$p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{costante}$$

ovvero

$$\frac{v^2}{2g} + z = h \quad ,$$

conglobando nella costante h la pressione p_{atm} e il termine costante ρg. Ne segue

$$z = h - \frac{v^2}{2g} = h - \frac{v_{in}^2 \, r_{in}^2}{2 \, g} \, \frac{1}{r^2}$$

come *equazione della superficie libera del vortice* rappresentato in sezione nella figura 9.24.

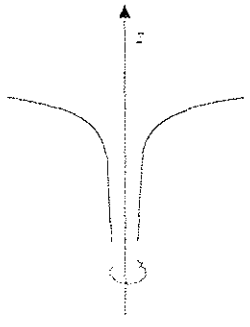


Fig. 9.24

Quando $r \to \infty$, z tende ad h che rappresenta la quota rispetto al fondo della superficie libera non in rotazione. Per $r \to 0$ $z \to -\infty$, cioè l'elemento non arriva mai sull'asse, dove la sua velocità dovrebbe essere infinita.

La formazione di vortici avviene anche nei liquidi reali, come discuteremo nel paragrafo 9.12, ma il fenomeno è complicato dalla presenza delle forze di attrito interno.

11 MOTO LAMINARE.

Trattiamo ora il moto dei *fluidi reali*, iniziando dalla situazione in cui la velocità non è elevata, secondo un criterio che preciseremo nel paragrafo 9.12.

In tali condizioni il *moto* è detto *laminare*: *il regime è stazionario, con le linee di corrente costanti nel tempo* (e che non si intersecano mai).

Il fluido a contatto con le pareti del condotto, che supponiamo cilindrico di raggio R, è fermo a causa dell'attrito con la parete. Avvicinandosi all'asse del condotto la velocità aumenta, per cui abbiamo strati cilindrici coassiali di fluido che scorrono l'uno dentro l'altro con velocità diverse (donde il nome di moto laminare). La velocità è massima sull'asse del condotto.

Considerando il condotto orizzontale, lungo l e con una differenza di pressione $p_1 - p_2$ agli estremi, si dimostra:

1) il modulo della velocità varia con il raggio r dello strato cilindrico, ovvero con

la distanza dall'asse, secondo la legge

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}\,(R^2 - r^2) \quad ; \tag{9.12}$$

la velocità massima ($r = 0$) vale

$$v_{max} = (p_1 - p_2)\,R^2/4\eta l \quad ,$$

mentre per $r = R$, alla parete del condotto, $v = v_{min} = 0$;

2) la portata del condotto è data dalla *legge di Hagen – Poiseuille*

Legge di Hagen-Poiseuille

$$q = \frac{\pi R^4}{8\eta}\,\frac{p_1 - p_2}{l} \quad , \tag{9.13}$$

che si ottiene integrando (9.12):

$$q = \int_S v(r)\,dS = \int_0^R v(r)\,2\pi r\,dr \quad .$$

Posto $q = \pi R^2 v_m$, con v_m velocità media sulla sezione, si ha

$$v_m = \frac{q}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\eta}\,\frac{p_1 - p_2}{l} \Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{8\eta}{R^2}\,v_m \quad . \tag{9.14}$$

Nel regime laminare la portata, la velocità media e le velocità dei singoli strati cilindrici sono direttamente proporzionali al gradiente di pressione $(p_1 - p_2)/l$. Per mantenere il flusso di fluido nel condotto è necessaria una differenza di pressione ovvero una forza per vincere la resistenza al moto dovuta all'attrito interno: e questo anche se il condotto è orizzontale e a sezione costante. È la stessa situazione incontrata nel moto rettilineo uniforme di un punto materiale in presenza di attrito radente.

9.12 MOTO VORTICOSO. NUMERO DI REYNOLDS.

La legge di Hagen-Poiseuille è sempre verificata se il raggio del condotto è molto piccolo (*tubi capillari*), mentre per raggi maggiori c'è un valore critico della velocità oltre il quale compaiono vortici nel fluido e si parla di moto turbolento o vorticoso.

I meccanismi che determinano la formazione dei vortici sono legati a notevoli variazioni di velocità ortogonalmente alle linee di corrente e quindi, in un fluido reale, a notevoli forze di attrito interno: ciò si manifesta per correnti fluide che scorrono l'una rispetto all'altra con notevoli differenze di velocità, come mostrato in figura 9.25a. Altre situazioni dovute a presenza di ostacoli o variazioni di forma del condotto sono rappresentate in figura 9.25b e 9.25c.

Numero di Reynolds

Per un condotto cilindrico Reynolds ha provato sperimentalmente che si ha *la transizione da regime laminare a vorticoso* quando il parametro adimensionale

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v R}{\eta} \quad , \tag{9.15}$$

detto *numero di Reynolds*, ha il valore 1200. La *velocità critica* per la transizione è quindi

$$v_c = 1200 \frac{\eta}{\rho R} \quad .$$

Per $v < v_c$ vale la (9.13), quando v raggiunge e supera v_c si ha inizialmente una notevole diminuzione della portata, a parità di differenza di pressione ai capi del condotto, e un regime di moto instabile. Aumentando la differenza di pressione si raggiunge di nuovo un flusso stabile in regime vorticoso e l'esperienza evidenza che la (9.14) è sostituita dalla

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{k}{R} \frac{\rho v_m^2}{2} \quad , \tag{9.16}$$

ove il coefficiente di proporzionalità k, detto *coefficiente di resistenza*, è costante in un ampio intervallo di $\mathcal{R}$ (da $1.2 \cdot 10^3$ a 10^5), per i normali tubi impiegati nell'uso pratico. *In regime vorticoso il gradiente di pressione necessario per mantenere una certa velocità di efflusso è una funzione quadratica della velocità, invece che lineare come nel regime laminare.*

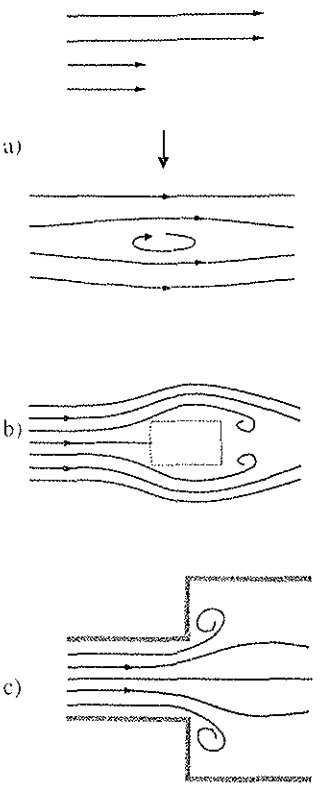


Fig. 9.25

ESEMPIO 9.3 Lo sfigmomanometro

Il passaggio da un moto laminare ad uno turbolento per un fluido in moto è alla base del funzionamento dello *sfigmomanometro*, strumento utilizzato per misurare la pressione arteriosa minima e massima.

Un manicotto di gomma viene avvolto attorno ad un braccio del paziente. Immettendo gradualmente aria nel manicotto viene compressa un'arteria radiale. Alla diminuzione della sezione corrisponde un aumento della velocità del sangue fino a che viene raggiunta la velocità critica per la transizione da moto laminare a turbolento. In tali condizioni si rivela, tramite un *fonendoscopio* posto a contatto del braccio, un rumore caratteristico. Aumentando la pressione esterna la circolazione si interrompe e il rumore scompare. Si lascia ora diminuire lentamente la pressione esercitata dal manicotto sfiatando l'aria in esso contenuta. Il valore della pressione, rilevata dalla lettura del manometro collegato, a cui riprende la circolazione e ricompare il rumore dovuto al moto vorticoso, corrisponde alla pressione massima arteriosa, mentre la pressione a cui scompare successivamente il rumore, per il passaggio dal moto vorticoso a quello laminare, si assume come pressione minima arteriosa.

9.13 MOTO IN UN FLUIDO. RESISTENZA DEL MEZZO.

Lo studio del moto di un corpo immerso in un fluido è molto importante per ragioni pratiche. Infatti tutti i moti sulla terra avvengono dentro un fluido, l'aria, o addirittura in presenza di due fluidi, aria e acqua.

L'interazione con il fluido si manifesta attraverso una forza, che si oppone al moto e si chiama *resistenza del mezzo*, il cui effetto dipende dal moto relativo. Si ha lo stesso risultato se il corpo si muove in un fluido in quiete o se il fluido scorre e il corpo è fermo. Quest'ultima situazione è realizzata nelle gallerie a vento in cui si studiano le caratteristiche aereodinamiche dei veicoli.

Paradosso di d'Alembert

Consideriamo una sfera immersa in un fluido in moto. Se il fluido è ideale, si ha completa simmetria delle linee di corrente e quindi la stessa pressione a monte e a valle della sfera (figura 9.26a). La sfera pertanto non subisce alcuna spinta e rimane ferma: tale risultato è indicato come *il paradosso di d'Alembert*. Se invece il fluido è reale si forma una scia vorticosa. Come conseguenza la pressione a valle è minore di quella a monte e quindi si manifesta una forza sulla sfera, che viene trascinata dal



a) b)

Fig. 9.26

fluido (figura 9.26b). A velocità relative basse non si formano vortici, però si perde in ogni caso la simmetria delle linee di corrente e compare una spinta sulla sfera.

I parametri che determinano la resistenza del mezzo sono la forma e le dimensioni del corpo in moto nel fluido, in particolare la sezione S, la densità e la viscosità del fluido, la velocità relativa.

L'espressione generale della *resistenza del mezzo* è dato da

Resistenza del mezzo

$$F_{res} = \frac{1}{2} c S \rho v^2 , \tag{9.17}$$

dove c è un coefficiente adimensionale che dipende dalla forma del corpo, soprattutto dalla forma della parte posteriore più che di quella anteriore. In regime vorticoso c è costante e F_{res} è proporzionale a v^2, in regime laminare c è funzione dell'inverso della velocità e F_{res} risulta lineare nella velocità: si tratta della forza di attrito viscoso studiata nel paragrafo 2.10.

In particolare per sfere con piccola velocità vale *la legge di Stokes*:

Legge di Stokes

$$F_{res} = 6 \pi \eta R v , \tag{9.18}$$

ESEMPIO 9.4

Calcolare la velocità limite di una sfera di raggio R e densità ρ che cade in un fluido di viscosità η e densità ρ_0.

Soluzione

La sfera che si muove nel fluido in regime laminare è sottoposta alla forza peso, alla spinta di Archimede e alla resistenza del mezzo, che hanno le espressioni, proiettate sull'asse z verticale

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho g , \quad -\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 g , \quad -6 \pi \eta R v .$$

Quando la sfera raggiunge la velocità limite la risultante delle tre forze è nulla (equilibrio dinamico) per cui si trova:

$$v_{lim} = \frac{2}{9} R^2 \frac{\rho - \rho_0}{\eta} g$$

Dalla misura di v_{lim} si può determinare la viscosità del fluido o il raggio della sfera.

9.14 EFFETTO MAGNUS. PORTANZA.

Vediamo ora alcuni effetti dinamici transversali rispetto alla velocità $\boldsymbol{v}$ di un corpo in moto in un fluido.

Supponiamo che la sfera considerata nel paragrafo 9.13 oltre a muoversi nel fluido reale ruoti su se stessa. Nel moto di rotazione essa trasporta per attrito una parte di fluido e il risultato è una dissimmetria nelle velocità: risulta $v_A > v_B$ e quindi $p_A < p_B$, per cui c'è una spinta sulla sfera da B verso A, come mostrato in figura 9.27 (in A le velocità del fluido e dei punti superficiali della sfera sono concordi, in B discordi).

A questo fenomeno, detto *effetto Magnus*, sono dovuti, per esempio, i vistosi effetti delle palle tagliate a tennis e a calcio (in particolare nei calci d'angolo e di punizione). Effetto Magnus

Un altro effetto, ben più importante nella pratica, è quello che si manifesta intorno alle ali degli aeroplani.

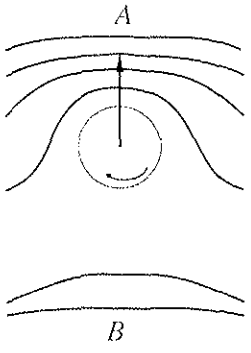


Fig. 9.27

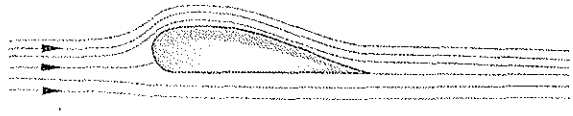


Fig. 9.28

La forma delle ali è scelta in modo tale da causare una dissimmetria nelle linee di corrente. L'aria è più veloce rispetto all'ala nella parte superiore che nella parte inferiore e quindi la pressione è minore sopra rispetto a sotto. Ne risulta una spinta verso l'alto chiamata *portanza*. È interessante notare che il fenomeno avviene anche in un fluido ideale.

Possiamo allora servirci del teorema di Bernoulli per trovare un'espressione della portanza. Siano p e v i valori di pressione e velocità dell'aria a monte dell'ala, p_1 e $v + \Delta v$ sopra l'ala, p_2 e $v - \Delta v$ sotto l'ala. Deve essere

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho (v + \Delta v)^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho (v - \Delta v)^2$$

da cui si ricava

$$p_2 - p_1 = 2\rho v \Delta v$$

e moltiplicando per la superficie alare A si ha la portanza

$$F = 2A\rho v \Delta v \qquad \text{Portanza di un'ala}$$

Anche con una lastra inclinata investita da una corrente fluida si ha un fenomeno di portanza, dovuto al formarsi di vortici sulla faccia posteriore. Tale effetto si verifica nel moto di un aquilone.

9.15 FENOMENI DI SUPERFICIE.

A livello microscopico i liquidi sono composti di molecole tra cui si esplicano forze, principalmente di origine elettrica, che dipendono fortemente dalla distanza intermolecolare r. Quando r è inferiore a un certo valore r_0, caratteristico del tipo di molecole, la forza tra due molecole è repulsiva e cresce molto rapidamente al diminuire di r. La distanza r_0 corrisponde praticamente a quella per cui le distribuzioni elettroniche delle molecole iniziano a sovrapporsi e la forza repulsiva sostanzialmente si oppone a questa sovrapposizione; essa è detta a corto raggio, perché si manifesta per piccoli valori di r.

Per $r > r_0$ la forza intermolecolare diviene attrattiva e decresce in modulo con la distanza, però con un andamento più lento di quello presentato dalla forza repulsiva.

Una rappresentazione schematica dell'energia potenziale $E_p(r)$ e della forza $F(r)$ dell'interazione intermolecolare è mostrata in figura 9.29; per r_0 si è assunto il valore $3 \cdot 10^{-10}$ m, che è tipico di molecole semplici. In ordinata non sono riportate le diverse unità di misura per $E_p(r)$ e $F(r)$ perché il disegno è solo qualitativo, però l'andamento di $F(r)$ è correttamente quello di $-dE_p/dr$.

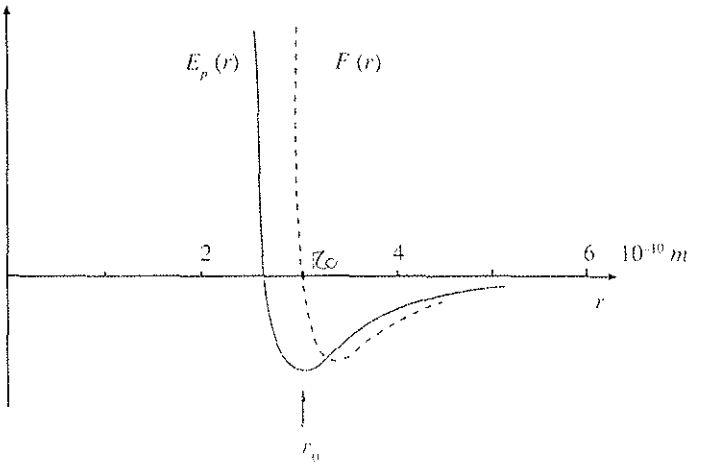
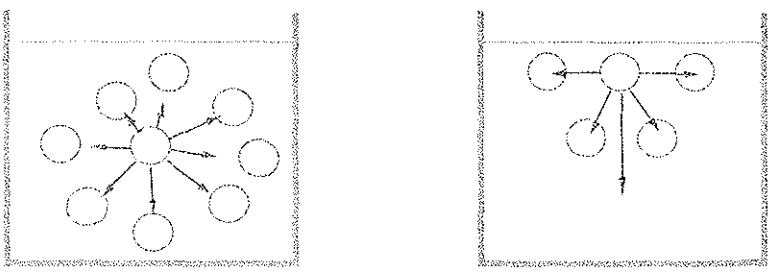


Fig. 9.29

Una molecola all'interno del liquido viene attratta da tutte le altre molecole che la circondano, in quanto nella situazione normale è $r > r_0$; si hanno però condizioni di completa simmetria e la forza risultante è in media nulla. Invece, per una molecola prossima alla superficie libera non esiste questa simmetria ed essa risente di una forza diretta verso l'interno del liquido.



$F = 0$ $F \neq 0$

Fig. 9.30

Questo risultato indica che l'aumento della superficie libera di un liquido non può avvenire spontaneamente. Per portare una molecola dall'interno del liquido alla superficie bisogna compiere un lavoro contro la forza sopra menzionata ovvero per aumentare di dS la superficie libera del liquido è necessario compiere un lavoro dW e si trova che

$$dW = \tau\, dS \quad ; \tag{9.19}$$

Tensione superficiale

τ si chiama *tensione superficiale del liquido* e dipende dal tipo di liquido, dal gas che si trova al di sopra della superficie libera, dal solido o liquido con cui il liquido è a contatto e della temperatura; in particolare τ decresce all'aumentare della temperatura.

Se bisogna compiere un lavoro per aumentare la superficie libera, sarà spontaneo il processo opposto; cioè quello legato alla diminuzione della superficie. La superficie libera del liquido tende a contrarsi, assumendo l'estensione minima possibile, compatibilmente con le forze esterne agenti e con le condizioni in cui il liquido stesso si trova.

Questa circostanza è evidenziata sperimentalmente utilizzando delle pellicole liquide che si possono ottenere estraendo da un liquido, per esempio acqua saponata, un piccolo telaio rettangolare metallico, che fa da supporto alla pellicola. Se il lato $A\,B$ del telaio è mobile (figura 9.31) si osserva, disponendo il sistema in un piano orizzontale, che il lato $A\,B$ tende a spostarsi verso il lato opposto $C\,D$ che è fisso. Ciò indica che lungo il contorno della lamina liquida agiscono delle forze tangenziali ad essa che ne determinano la progressiva contrazione. Lungo i tre lati rigidi del telaio queste forze non sono ovviamente evidenziabili. Un'altra situazione di contrazione è quella di una goccia di liquido che, in assenza di altre forze esterne, tende ad assumere la forma sferica, cioè la forma che a parità di volume ha la minima superficie.

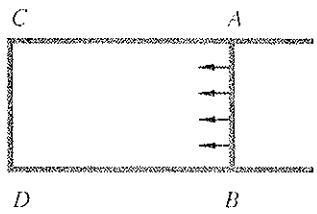


Fig. 9.31

Ritornando al concetto di tensione superficiale ammettiamo, in analogia con la tensione di un filo o la pressione di un fluido, che in ogni punto della superficie di un liquido esista una forza tangenziale di tensione. Se si separa idealmente con un taglio la superficie, lungo il taglio agiscono due forze, dovute agli elementi a destra e a sinistra del taglio; ciascuna è data da

$$dF = \tau\, ds \quad ; \tag{9.20}$$

se ds è la lunghezza del taglio.

Le due definizioni di tensione superficiale, tramite il lavoro (9.19) per aumentare la superficie libera del liquido o tramite il concetto di forza tangenziale (9.20), sono equivalenti. Infatti se si aumenta la superficie spostando ds della quantità dx (figura 9.32) si copie il lavoro

$$dW = dF\, dx = \frac{dF}{ds}\, ds\, dx = \frac{dF}{ds}\, dS$$

e quindi, secondo (9.19), $dF/ds = \tau$, che è la (9.20). In conclusione

$$\tau = \frac{dW}{dS} = \frac{dF}{ds} \quad .$$

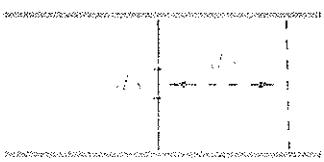


Fig. 9.32

In tabella 9.2 sono riportati i valori della tensione superficiale per vari liquidi nella situazione in cui al di sopra del liquido vi sia aria o un altro fluido. Sono anche

riportati valori di τ a diverse temperature per evidenziare la dipendenza della tensione superficiale dalla temperatura. Si osservi anche come τ diminuisca se come mezzo a contatto si sostituisce all'aria un liquido non miscibile.

L'unità di misura della tensione superficiale è il N/m (= J/m^2).

Tabella 9.2 – Tensione superficiale

Liquido	Mezzo a contatto	T (°C)	τ (N/m)
alcool etilico	aria	0	$23.5 \cdot 10^{-3}$
alcool etilico	aria	20	$22.3 \cdot 10^{-3}$
alcool etilico	aria	70	$17.3 \cdot 10^{-3}$
acqua	aria	20	$75.6 \cdot 10^{-3}$
acqua	aria	90	$62.9 \cdot 10^{-3}$
acqua	benzene	20	$35.0 \cdot 10^{-3}$
acqua	etere etilico	20	$20.7 \cdot 10^{-3}$
benzene	aria	20	$28.9 \cdot 10^{-3}$
etere etilico	aria	20	$16.8 \cdot 10^{-3}$
glicerina	aria	20	$65.0 \cdot 10^{-3}$
mercurio	aria	20	$52.0 \cdot 10^{-2}$
mercurio	acqua	20	$37.5 \cdot 10^{-2}$
mercurio	benzene	20	$35.7 \cdot 10^{-2}$
olio d'oliva	aria	20	$34.0 \cdot 10^{-3}$

Stalagmometro

Uno strumento usato per la misura di τ è lo *stalagmometro*, che si basa sulla caduta di gocce da un tubicino. La goccia in uscita dal tubicino è trattenuta dalla tensione superficiale agente lungo la linea $l = 2 \pi r$, se r è il raggio del tubicino (figura 9.33); ricordando che la tensione superficiale è una forza per unità di lunghezza, la forza totale vale $l \tau = 2 \pi r \tau$ ed è verticale. Il distacco della goccia avviene quando essa ha raggiunto una dimensione tale che il suo peso eguagli la forza dovuta alla tensione superficiale, cioè quando $mg = 2 \pi r \tau$; questa relazione consente la misura di τ.

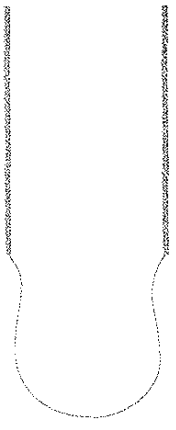


Fig. 9.33

Studiamo ora il caso di una superficie libera non piana. Le forze molecolari, che danno origine alla tensione superficiale, determinano una forza di pressione sull'elemento dS di superficie, diretta verso il centro di curvatura della superficie stessa.

Consideriamo una lamina liquida sferica di raggio R, per esempio una bolla di sapone. La tensione superficiale agente sulla lamina tende a farla contrarre; per l'equilibrio deve agire all'interno della bolla una pressione p_i del gas contenuto maggiore della pressione esterna p_0. Vogliamo calcolare $p_i - p_0$ in funzione di τ.

Per un aumento dR del raggio R della bolla il lavoro della forza di pressione è

$$dW = (p_i - p_0)\, S\, dR = (p_i - p_0)\, dV = 4 \pi (p_i - p_0) R^2 dR$$

essendo dV la variazione di volume della bolla. A questo aumento si oppone la tensione superficiale, con un lavoro

$$dW_\tau = -2 \tau dS = -2 \tau d(4 \pi R^2) = -16 \pi \tau R\, dR$$

dove il fattore 2 compare perché la bolla ha due facce. La condizione di equilibrio

corrisponde a lavoro totale nullo e da $d\,W + d\,W_\tau = 0$ si ottiene

$$p_i - p_0 = \frac{4\,\tau}{R} \quad (9.20)$$

L'eccesso di pressione interna rispetto a quella esterna, necessario per mantenere la bolla in equilibrio, è direttamente proporzionale alla tensione superficiale e inversamente al raggio della bolla.

Nel caso di una superficie sferica che delimita una massa liquida (fig. 9.34) la pressione dovuta all'azione della tensione superficiale, tenuto conto che c'è una sola superficie invece delle due della bolla, è

$$p_\tau = \frac{2\,\tau}{R} \quad . \qquad (9.21)$$

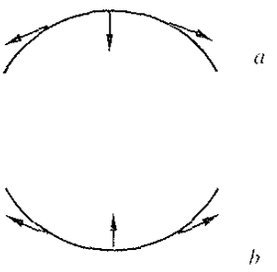


Fig. 9.34

Questo cioè è l'eccesso di pressione che c'è nella parte interna rispetto a quella esterna a causa della curvatura, positivo nel caso *a*, negativo nel caso *b*.

9.16 FORZE DI COESIONE E ADESIONE. FENOMENI DI CAPILLARITÀ

Abbiamo visto nel paragrafo 9.5 che tra le molecole di un liquido esiste un'interazione le cui proprietà in funzione della distanza sono rappresentate nella figura 9.29. Nella situazione ordinaria la distanza intermolecolare è tale che le molecole sono praticamente a contatto e quindi si capisce perché i liquidi siano in sostanza incomprimibili: se si cerca di fare avvicinare le molecole si sviluppano forze repulsive molto elevate. D'altra parte anche l'allontanamento delle molecole, cioè la separazione di parti di liquido, richiede una forza per vincere l'attrazione molecolare.

Si parla pertanto di *forze di coesione in un liquido*, forze che essendo debolmente attrattive riescono a tenere legate le molecole, ma non riescono a mantenerle in posizione fissa, come avviene invece nei solidi: un liquido perciò ha volume proprio, ma potendo le sue parti scorrere con estrema facilità le une rispetto alle altre non ha forma propria. Sulla superficie libera le forze di coesione danno luogo ai fenomeni di tensione superficiale che, per così dire, tengono il liquido in compressione anche in assenza di forze esterne.

Forze di coesione

La presenza di un mezzo a contatto con la superficie libera modifica, sempre per via di interazioni molecolari, le proprietà di tensione superficiale, poco se si tratta di un gas e in modo notevole se si tratta di un altro liquido non miscibile, come abbiamo notato commentando i dati della tabella 9.2.

Una situazione ancora diversa si ha in presenza di un ulteriore mezzo, che può essere la parete solida del contenitore. La massa di liquido dello strato superficiale in prossimità della parete è soggetta, trascurando la presenza del gas, a due forze: $\mathbf{F}_{coes}$, dovuta alle forze di coesione del liquido, e $\mathbf{F}_{ades}$, dovuta alle *forze di adesione*, cioè alle forze tra le molecole del solido e quelle del liquido. $\mathbf{F}_{coes}$ è diretta verso l'interno del liquido, $\mathbf{F}_{ades}$ verso l'interno del solido. In condizioni di equilibrio la superficie libera del liquido è ortogonale alla risultante delle forze agenti (se ci fosse una componente tangente non potrebbe esserci equilibrio): si possono allora avere i due casi rappresentati in figura 9.35, che mostra, in sezione, la zona di contatto liquido-solido.

Forze di adesione

L'*adesione predomina sulla coesione*, la superficie libera a contatto con *la parete è incurvata verso l'alto* e si dice che *il liquido bagna la parete*.

b) La *coesione predomina sull'adesione, la superficie è incurvata verso il basso, il liquido non bagna la parete.*



Fig. 9.35

Angolo di contatto

L'*angolo di contatto* α formato dalla parete con la tangente alla superficie libera nel punto di contatto, risulta acuto nel primo caso e ottuso nel secondo.

Ragioni di simmetria geometrica fanno prevedere che $\mathbf{F}_{ades}$ sia sempre ortogonale alla parete e che $\mathbf{F}_{coes}$ sia diretta lungo la bisettrice dell'angolo α; nel caso limite $\alpha = \pi/2$ che separa i liquidi che bagnano la parete da quelli che non la bagnano, la risultante è parallela alla parete, $\mathbf{F}_{coes}$ forma un angolo di 45° con la parete e si trova subito che $\mathbf{F}_{coes} = \sqrt{2}\,\mathbf{F}_{ades}$. Questa relazione chiarisce che:

il caso a) si ha per $\mathbf{F}_{coes} < \sqrt{2}\,\mathbf{F}_{ades}$,

il caso b) per $\mathbf{F}_{coes} > \sqrt{2}\,\mathbf{F}_{ades}$.

Capillarità

Un'altra classe di fenomeni legati alla tensione superficiale sono i *fenomeni di capillarità*, che si manifestano quando il liquido è in parte limitato da pareti solide molto prossime tra loro, come avviene per un liquido contenuto in un tubicino a sezione interna molto piccola, detto *tubo capillare* (raggio dell'ordine di 0.5 mm).

Immaginiamo per esempio un tubo capillare di vetro in un recipiente pieno di liquido: in contrasto col principio dei vasi comunicanti (paragrafo 9.3) si osserva che il livello della superficie libera del liquido nel capillare è diverso da quello nel resto del recipiente e precisamente è *maggiore se il liquido bagna le pareti* (come fa l'acqua), mentre è *minore se il liquido non bagna le pareti* (come fa il mercurio): la situazione è mostrata in figura 9.36.

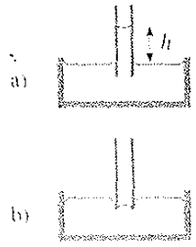


Fig. 9.36

Il fenomeno si spiega osservando che la superficie libera nel capillare è approssimativamente sferica, con la concavità verso l'alto per liquidi come l'acqua (menisco concavo, figura 9.36a) e verso il basso per liquidi come il mercurio (menisco convesso, figura 9.36b). Siamo allora nelle condizioni di validità di (9.21), cioè la pressione agente sulla superficie libera nel capillare è la pressione atmosferica p_0 più il contributo $2\,\tau/R$. Questo termine si somma a p_0 nel caso di *menisco convesso*, che è il caso della figura 9.34a: la pressione effettiva è maggiore nel capillare e il livello è più basso. Invece per il *menisco concavo* il termine dovuto alla tensione superficiale è opposto a p_0 (figura 9.34b), la pressione effettiva è minore, il livello si alza.

Se h è il dislivello dovuto al fenomeno di capillarità, ad essa corrisponde la pressione $\rho\,g\,h$ e quindi deve essere

$$\frac{2\tau}{R} = \rho g h \quad .$$

Il raggio di curvatura R del menisco è legato al raggio R' del capillare dalla relazione $R' = R \cos \alpha$ dove α è l'angolo di contatto (in figura 9.37 sono mostrati i due casi possibili). La relazione precedente diventa

$$h = \frac{2\tau \cos \alpha}{\rho g R'} \quad .$$

In particolari condizioni, in cui il liquido bagna completamente il capillare, $\alpha = 0$ e

$$h = \frac{2\tau}{\rho g R'} \quad .$$

Questa relazione è detta *legge di Jurin*; si vede come dalla misura dei dislivelli capillari si possa determinare il valore della tensione superficiale.

Con un capillare di raggio $R' = 0.5$ mm in acqua ($\tau = 75.6 \cdot 10^{-3}$ N/m) si ha un innalzamento di circa 31 mm. L'effetto è tanto maggiore quanto minore è il raggio.

L'acqua sale per capillarità attraverso corpi porosi, come la terracotta e speciali tipi di carta o la terra non arata, che inaridisce perché una volta in superficie l'acqua evapora. La circolazione della linfa nelle piante è in parte dovuta a fenomeni di capillarità.

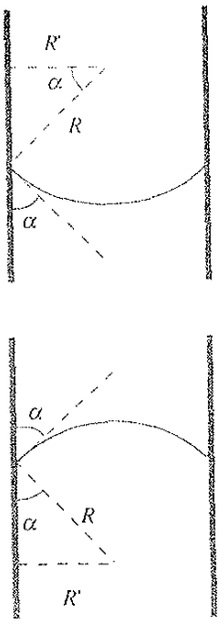


Fig. 9.37

PROBLEMI DI MECCANICA

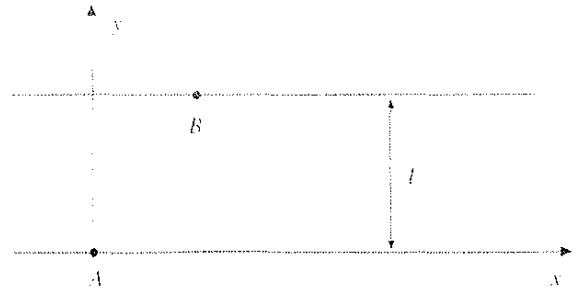
1. In un tubo a raggi catodici di un televisore gli elettroni attraversano una regione con moto rettilineo, sottoposti a una accelerazione costante. Sapendo che la regione è lunga $d = 3$ cm e che la velocità di entrata e di uscita sono rispettivamente $v_1 = 2 \cdot 10^5$ m/s e $v_2 = 8 \cdot 10^4$ m/s, determinare:
1) il valore dell'accelerazione a cui sono sottoposti gli elettroni;
2) il tempo di attraversamento della regione stessa.

2. Determinare la profondità di un pozzo sapendo che il tempo tra l'istante in cui si lascia cadere un sasso, senza velocità iniziale, e quello in cui si ode il rumore, in conseguenza dell'urto del sasso con il fondo del pozzo, è $t = 4.8$ s. Si trascuri la resistenza dell'aria e si assuma la velocità del suono pari a 340 m/s.

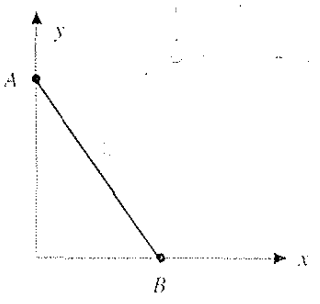
3. In un tratto speciale di un rally automobilistico un pilota deve percorrere nel tempo minimo un tratto $d = 1$ km, partendo e arrivando da fermo. Le caratteristiche dell'auto sono tali che l'accelerazione massima è $a_1 = 2.5$ m/s^2, mentre il sistema di freni permette una decelerazione massima $a_2 = -3.8$ m/s^2. Supponendo che il moto sia rettilineo, determinare il tempo ottenuto nella prova.

4. Un punto materiale si muove lungo un asse orizzontale; all'istante $t = 0$ passa nell'origine con velocità v_0 positiva. Per $t > 0$ agisce una forza tale che l'accelerazione del punto vale $a = -k v^2$. Determinare l'espressione della velocità in funzione del tempo e in funzione dello spazio.

5. Un uomo vuole attraversare a nuoto un fiume di larghezza $l = 20$ m, puntando in direzione normale alle sponde. La velocità di spostamento dell'uomo, relativa all'acqua, è costante e pari a 3.6 km/ora. Se la velocità dell'acqua del fiume varia con la distanza y dalla sponda di partenza secondo la legge $v = 5 \cdot 10^{-3} y\ (l - y)$ m/s, si determini:
1) il tempo impiegato ad attraversare il fiume;
2) il punto di arrivo B.
Si ponga l'origine nel punto di partenza A.



6. Su un piano orizzontale sono poste due guide lisce, perpendicolari tra loro, lungo le quali possono scorrere gli estremi di un'asta AB, lunga $l = 1$ m. Inizialmente l'asta è disposta lungo l'asse y. L'estremo B viene mantenuto in moto con velocità costante $v_B = 0.1$ m/s. Determinare il modulo della velocità e dell'accelerazione dell'estremo A quando B raggiunge la posizione $x_B = 0.3$ m.

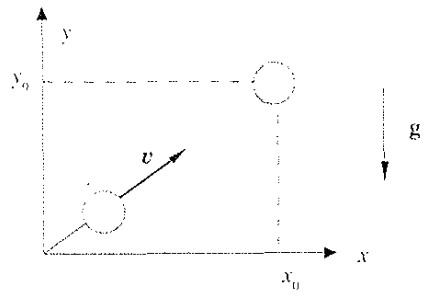


7. Considerando le lancette dei minuti e delle ore di un orologio a partire dalla posizione di mezzogiorno, si determinino le posizioni angolari in cui esse vengono a sovrapporsi.

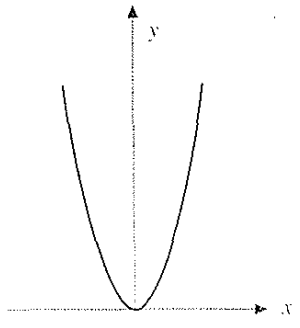
8. Un punto si muove lungo un'orbita circolare di raggio $R = 0.2$ m con velocità angolare costante $\omega_0 = 15$ rad/s. A partire dall'istante $t = 0$ fino all'istante $t_1 = 16$ s la sua accelerazione angolare vale $\alpha = -0.1\ t$ rad/s^2; per $t \geq t_1$ α resta costante al valore -1.6 rad/s^2 fino a che il punto si ferma. Calcolare:
1) il modulo dell'accelerazione a del punto nell'istante t_1;
2) in quale istante il punto si ferma.

9. Una pallina viene lanciata dall'origine degli assi cartesiani nello stesso istante in cui un'altra pallina viene lasciata cadere da un punto di coordinate $x_0 = 3$ m, $y_0 = 2$ m. La direzione di lancio della prima pallina è quella della congiungente l'origine degli

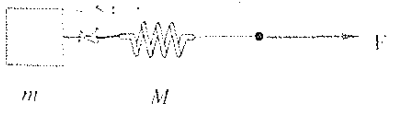
assi con il punto di coordinate x_0, y_0 mentre la sua velocità iniziale vale, in modulo, $v = 8$ m/s. Determinare le coordinate x_1, y_1 del punto di incontro.



10. Si consideri su un piano orizzontale una guida liscia di forma parabolica, rappresentata dall'equazione $y = 5x^2$, con x e y espresse in metri. Un punto P si muove con velocità in modulo costante, $v_0 = 1$ m/s, lungo la guida. Determinare le componenti dell'accelerazione quando il punto P passa per il vertice della parabola e per il punto di ascissa $x = 0.1$ m.

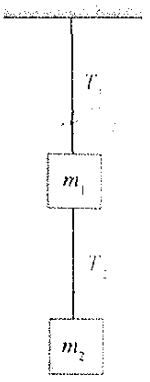


11. Un punto materiale di massa $m = 0.4$ kg si muove sotto l'azione di una forza $F = 8$ N. La molla ha massa $M = 0.1$ kg e costante elastica $k = 200$ N/m. Calcolare la deformazione x della molla.

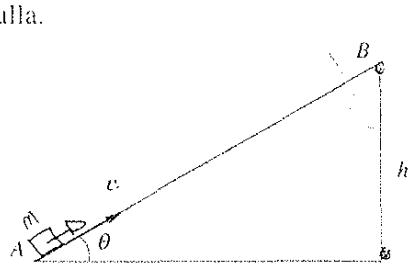


12. Ad un punto materiale di massa m che si muove con velocità costante v_0 viene applicata, all'istante $t = 0$, una forza F costante opposta alla velocità. Calcolare la relazione esistente tra spazio di arresto e tempo di arresto.

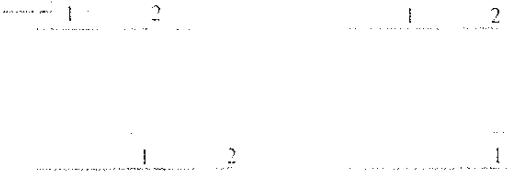
13. Due masse m_1 e m_2 sono appese come in figura. Calcolare i valori delle tensioni T_1 e T_2.
Si taglia il filo 1. Durante la caduta il filo è teso?

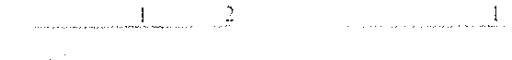


14. Un punto di massa m viene lanciato dalla posizione A con velocità iniziale $v_0 = 4.2$ m/s lungo un piano inclinato con angolo $\theta = 30°$; h vale 0.4 m, il coefficiente di attrito dinamico è $\mu = 0.2$.
Calcolare quanto tempo impiega il punto per arrivare nella posizione B e quanto dovrebbe valere μ per far sì che il punto arrivasse in B con velocità nulla.

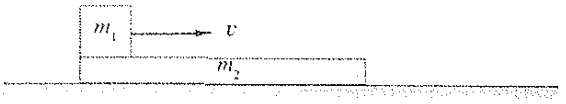


15. Due corpi di masse m_1 e m_2 sono legati tra loro da un'asta lunga d, di massa trascurabile. Il sistema viene messo in moto lungo l'asse x all'istante $t = 0$ tramite l'applicazione di una forza di valore medio F durante un tempo τ, trascurabile agli effetti del moto. I corpi scivolano lungo un piano orizzontale con coefficienti di attrito μ_1 e μ_2. Dopo aver percorso una distanza l il corpo 2 entra in una zona in cui l'attrito è nullo. Scrivere l'espressione del valore F_0 di F tale da far sì che il sistema abbia velocità nulla quando anche il corpo 1 arriva nella zona con attrito nullo. Eseguire il calcolo nel caso $m_1 = m_2 = m = 0.7$ kg, $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0.6$, $d = l = 3$ m, $\tau = 10^{-3}$ s.

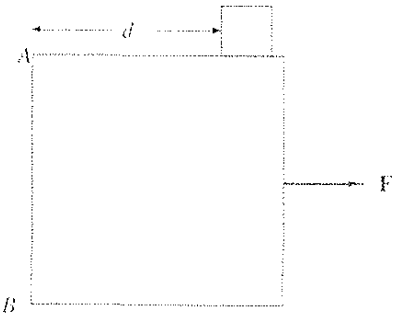




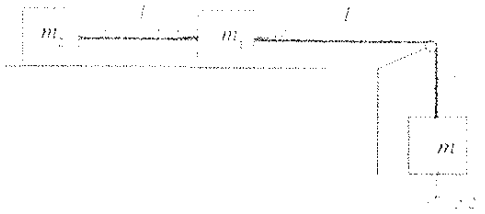
16. Su un ripiano orizzontale è appoggiata una piastra di massa m_2, ferma. Il coefficiente di attrito piastra–piano è μ_2. Sulla piastra viene posto un corpo di massa m_1 che si muove con velocità iniziale $\boldsymbol{v}$, orizzontale. Il coefficiente di attrito corpo–piastra è μ_1. Che relazione deve esistere tra m_1, m_2, μ_1, μ_2, v perché la piastra si muova?
Posto $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg, $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.2$, $v = 3$ m/s, si chiede:
1) la distanza x_1 percorsa dal corpo rispetto alla piastra prima di fermarsi;
2) la distanza x_2 percorsa dalla piastra sul ripiano prima di fermarsi;
3) quanta energia meccanica viene dissipata nel processo.



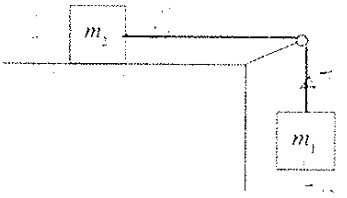
17. Sopra un piano orizzontale è poggiato un cubo di massa $M = 50$ kg che può scorrere senza attrito sul piano. Sopra il cubo è poggiato un altro cubetto di massa $m = 10$ kg a distanza $d = 50$ cm dalla faccia AB del cubo più grande. All'istante iniziale, quando tutto è fermo, al cubo è applicata una forza $F = 100$ N, orizzontale; dopo $t = 2$ s il cubetto cade. Calcolare il coefficiente di attrito tra i due cubi.



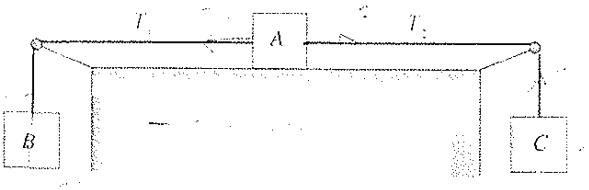
18. Nel sistema in figura tra m_1 e il tavolo c'è il coefficiente di attrito μ_1, tra m_2 e il tavolo μ_2.
Determinare che relazione deve esistere tra m, m_1, m_2 affinché il moto sia uniforme.
Se tale relazione è soddisfatta e $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 6$ kg, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.5$, calcolare i valori delle tensioni T_1 e T_2.
Ad un certo istante m si stacca: il filo tra m_1 e m_2 resta teso?



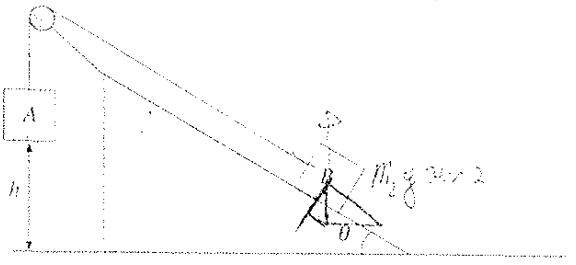
19. Due masse m_1 e m_2 sono disposte come in figura: tra m_2 e il piano c'è un coefficiente di attrito μ. Calcolare l'accelerazione delle due masse e la tensione del filo. C'è movimento in ogni caso?



20. Un corpo di massa $m_A = 2$ kg è posto su un piano orizzontale liscio. Esso è collegato tramite due fili a due corpi di massa $m_B = 4$ kg e $m_C = 1$ kg. Inizialmente il sistema è mantenuto in quiete. Si termini l'accelerazione del sistema e la tensione dei due fili.

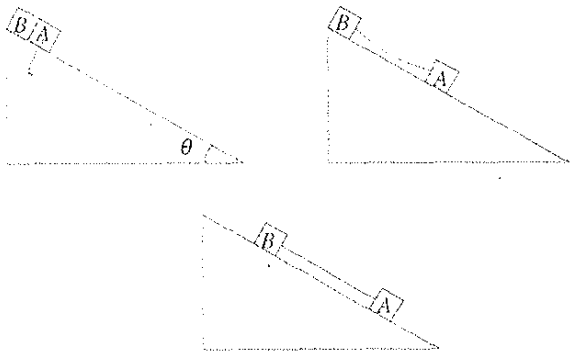


21. Due masse eguali, collegate da un filo, sono disposte come in figura. L'angolo θ vale 30°, l'altezza h vale 1 m, il coefficiente di attrito massa–piano è $\mu = 0.4$. Al tempo $t = 0$ il sistema viene lasciato libero di muoversi e si osserva che la massa sospesa scende. Calcolare la distanza totale d percorsa in salita dalla massa che si trova sul piano inclinato.

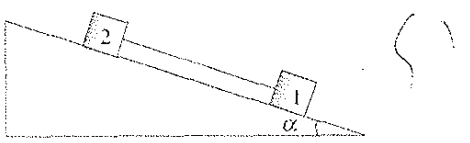


22. Due masse eguali ($m = 1$ kg) sono posate sopra un piano inclinato ($\theta = 30°$); i coefficienti di attrito con il piano sono diversi, μ_A e μ_B; le masse sono collegate da un filo lungo $d = 10$ cm. All'istante $t = 0$ A viene lasciata scivolare lungo il piano; al-

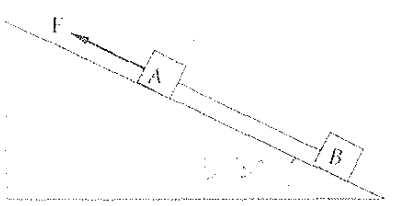
l'istante $t_1 = 0.56$ s il filo si tende e anche B inizia a scivolare. Si osserva che ora A e B si muovono con velocità costante. Calcolare la tensione del filo e i valori dei coefficienti di attrito.



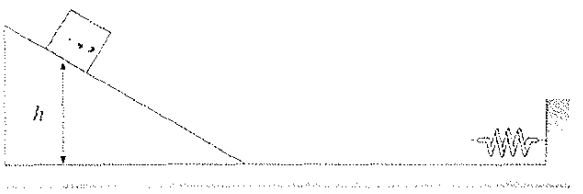
23. Due corpi di masse $m_1 = 0.48$ kg e $m_2 = 0.76$ kg, collegati da un filo, scendono lungo un piano inclinato ($\alpha = 18°$). Tra m_1 e il piano non c'è attrito mentre tra m_2 e il piano c'è attrito. Calcolare che valore deve avere il coefficiente di attrito μ affinché il moto sia uniforme.



24. Due masse $m_A = 3$ kg e $m_B = 2$ kg collegate da un filo possono scorrere su un piano inclinato liscio. Ad A applicata una forza variabile, diretta come in figura, di modulo $F = 2\,t$ N (con t espresso in secondi). Sapendo che il filo sopporta una tensione massima di 40 N, determinare l'istante di rottura del filo.



25. Un punto materiale di massa $m = 0.02$ kg scende lungo un piano inclinato liscio. Alla fine del piano inclinato scorre su un tratto orizzontale scabro ($\mu = 0.1$) andando ad urtare una molla, di massa trascurabile, fissata ad un vincolo verticale. La molla ha una lunghezza a riposo $l_0 = 10$ cm e una costante elastica $k = 2$ N/m. La distanza tra la fine del piano inclinato e il vincolo è $d = 40$ cm. Se il punto all'istante iniziale è fermo, determinare l'altezza h da cui deve scendere affinché, dopo aver urtato la molla, possa toccare la parete del vincolo.



26. Un punto materiale di massa $m = 0.34$ kg descrive, sotto l'azione di una forza costante parallela all'asse y, una parabola di equazione $y = 1.28\,x - 0.31\,x^2$ (x e y sono espresse in metri). Nel culmine P la velocità del punto vale $v = 5.29$ m/s. Calcolare il modulo della forza agente e l'energia cinetica del punto nell'origine.

27. Un punto materiale si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 40$ cm posta in un piano orizzontale. All'istante $t = 0$ il punto possiede la velocità $v_0 = 2$ m/s; si osserva che dopo aver compiuto un giro la velocità vale $v_1 = 0.3$ m/s, la diminuzione essendo dovuta a una forza di attrito costante. Calcolare l'accelerazione centripeta del punto dopo mezzo giro e il tempo che impiega il punto a fare il giro.

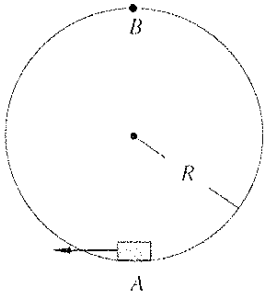
28. Un punto materiale si muove con moto circolare uniforme lungo una circonferenza di raggio $R = 0.8$ m; il periodo del moto è $T = 12.56$ s. All'istante $t = 0$, quando il punto si trova nella posizione individuata da $\theta = 0$, comincia ad agire una forza di attrito tale che la velocità angolare del punto diminuisce secondo la legge $\omega = \omega_0 - b\,\theta$. Si osserva che il punto si arresta in corrispondenza a $\theta_1 = 2$ rad. Calcolare il modulo dell'accelerazione del punto quando passa nella posizione individuata da $\theta_1 = 0.6$ rad.

29. Un pendolo, di massa $m = 0.86$ kg, descrive un'oscillazione armonica di equazione $\theta = 0.085$ sen $4.95\,t$ radianti. Calcolare:
1) la massima variazione dell'energia potenziale;
2) la differenza tra i valori massimo e minimo della tensione del filo;
3) il valore dell'accelerazione orizzontale di m quando $t = \pi/4\ \omega$.

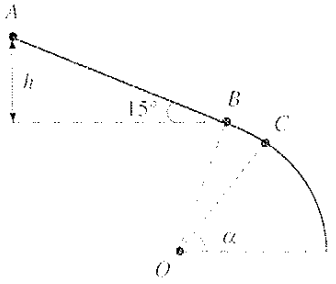
30. Un pendolo semplice, massa m e lunghezza l, oscilla in un piano verticale, con ampiezza $\theta_0 = \pi/2$. Calcolare, in funzione dell'angolo θ, la velocità di m, il modulo dell'accelerazione di m, il modulo della reazione vincolare nel punto di sospensione.

31. Un pendolo conico, $m = 2$ kg e $l = 0.5$ m, ruota con velocità angolare $\omega_1 = 5$ rad/s. Agendo opportunatamente lo si porta alla velocità angolare $\omega_2 = 8$ rad/s. Calcolare la variazione di energia del pendolo.

32. Un punto materiale può muoversi all'intero di una guida circolare liscia di raggio $R = 10$ m posta in un piano verticale. Calcolare che velocità deve avere il punto A per restare in contatto con la guida in B.



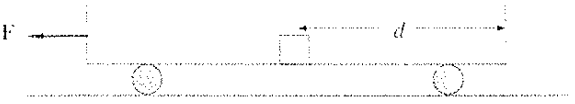
33. Un punto materiale parte con velocità nulla dalla posizione A e scende lungo un piano inclinato di $\theta = 15°$, privo di attrito. Nella posizione B il piano è raccordato a una guida circolare di centro O e raggio $R = 1$ m, anch'essa priva di attrito. Il segmento AB è tangente alla guida. Si vuole che il punto si stacchi dalla guida in corrispondenza dell'angolo $\alpha = 60°$ (punto C sulla guida). Si calcoli di quanto la quota di A deve superare la quota di B.



34. Le coordinate polari di un punto che si muove in un piano variano nel tempo secondo le leggi $r = r_0 e^{-\omega t/2\pi}$, $\theta = \omega t$, con $r_0 = 20$ cm, $\omega = 15$ rad/s. Calcolare la velocità del punto nell'istante $t = 0$ e dire se il moto avviene sotto l'azione di una forza centrale.

35. Un punto materiale P descrive, lungo l'asse x di un sistema di riferimento inerziale con origine O, un moto di equazione $x = x_1 \operatorname{sen} \omega t$. Consideriamo un secondo sistema di riferimento, con gli assi paralleli e concordi a quelli del primo, in movimento rispetto a questo in modo tale che la posizione della sua origine O' sia individuata dall'equazione $x_{O'} = x_2 \operatorname{sen}(\omega t + \pi)$, mentre $y_{O'} = z_{O'} = O$.
1) Determinare l'accelerazione del punto nel secondo sistema di riferimento.
2) Descrivere, sempre in questo sistema, il moto del punto.

36. Un corpo puntiforme di massa $m_A = 2$ kg è posto su un carrello, che può scorrere su un piano orizzontale. Inizialmente il corpo è posto a una distanza $d = 1$ m dal bordo del carrello, la cui massa è $m_B = 8$ kg. Il coefficiente di attrito tra il corpo e il carrello è $\mu_d = 0.2$. Il carrello viene messo in moto tramite l'applicazione di una forza orizzontale $F = 30$ N e il corpo inizia a scivolare verso il fondo del carrello. Si determini in quanto tempo il corpo arriva alla parete del carrello.

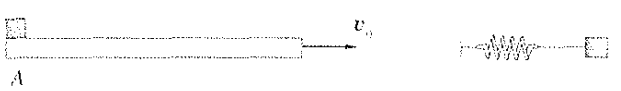


37. Una piattaforma ruota con velocità angolare costante $\omega_0 = 10$ rad/s; si consideri un sistema di riferimento solidale ad essa con origine nel centro (dove passa l'asse di rotazione) e un'altro, con la stessa origine, solidale al suolo. Un dischetto è legato tramite un filo lungo $l = 1.5$ m all'origine e ruota anch'esso con velocità angolare ω_0 ; tra dischetto e piattaforma non c'è attrito. Si osserva che la tensione del filo vale $T = 15$ N. Con un freno la velocità angolare della piattaforma viene ridotta al valore $\omega = 2$ rad/s e mantenuta poi costante a questo valore. Calcolare la velocità e l'accelerazione del dischetto viste dal sistema solidale con la piattaforma e la massa del dischetto.

38. Si consideri un disco di raggio $R = 1$ m che ruota con velocità angolare $\omega = 10$ rad/s attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Lungo un diametro del disco è realizzata una scanalatura dove può scorrere senza attrito una pallina di

massa $m = 0.1$ kg, collegata al centro O del disco da una molla di costante elastica $k = 5$ N/m e lunghezza a riposo nulla. Se inizialmente la pallina è tenuta in quiete rispetto al disco, alla distanza di 50 cm da O, determinare la sua velocità radiale quando sta per uscire dalla scanalatura.

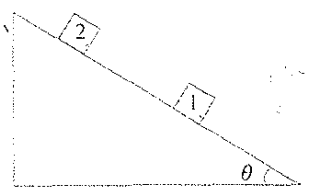
39. Una piattaforma di massa $m = 50$ kg si muove con moto rettilineo uniforme alla velocità $v_0 = 0.6$ m/s in un piano orizzontale. Su di essa è posto nell'estremità A un punto materiale di massa trascurabile fermo rispetto alla piattaforma; tra punto e piattaforma non c'è attrito. Al tempo $t = 0$ il moto della piattaforma viene frenato da una molla, inizialmente non compressa, di costante elastica $k = 200$ N/m, così che dopo un certo tempo la piattaforma si ferma, il verso del moto si inverte ed essa torna indietro. Calcolare lo spostamento del punto rispetto ad A all'istante $t_1 = 0.785$ s e la velocità relativa del punto rispetto alla piattaforma all'istante $t_2 = 1.570\ \text{s} = 2\,t_1$.



40. Si abbiano due corpi A e B di massa rispettivamente $m_A = 0.02$ kg e $m_B = 0.07$ kg. Il corpo A poggia su un piano orizzontale liscio ed è collegato tramite una molla, di costante elastica $k = 5$ N/m e lunghezza a riposo $l_0 = 10$ cm, ad un vincolo fisso C e tramite un filo inestensibile al corpo B. Supponendo che nell'istante iniziale il corpo A sia tenuto in quiete con la molla compressa di una quantità pari a $d = 2$ cm, si determini:
1) la pulsazione del moto armonico compiuto dal sistema;
2) lo spostamento massimo di A rispetto al vincolo C;
3) i valori massimo e minimo della tensione del filo.



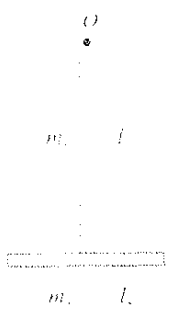
41. Lungo un piano inclinato ($\theta = 30°$) vengono fatti scendere due cubi di eguale massa $m = 2$ kg, con diverso coefficiente di attrito con il piano ($\mu_1 = 0.4$ per quello a valle, $\mu_2 = 0.2$ per quello a monte). I cubi, inizialmente fermi e distanti $d = 1$ m, vengono liberati simultaneamente all'istante $t = 0$. Calcolare:
1) dopo quanto tempo si urtano;
2) la velocità del sistema immediatamente dopo il contatto se i cubi rimangono attaccati;
3) l'accelerazione con cui scende il sistema dopo l'urto;
4) la forza F che il cubo a monte esercita su quello a valle.



42. Un corpo puntiforme si muove lungo un asse orizzontale. All'istante $t = 0$ esso passa nell'origine con velocità $v_0 = 3.317$ m/s, diretta verso le x positive. Per $t > 0$ il corpo è sottoposto a una accelerazione $a(x) = -5x - 3\ \text{m/s}^2$. Calcolare dove si ferma.
Se durante il moto, nella posizione $x = 0.4$ m, il corpo ne urta uno eguale e fermo e vi rimane attaccato, calcolare la velocità del sistema subito dopo l'urto.

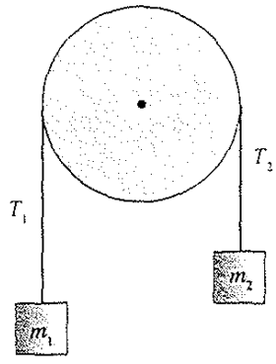
43. Una massa $M = 0.5$ kg, poggiata su un piano orizzontale liscio, è collegato tramite una molla ($k = 450$ N/m) ad un parete rigida. Essa esegue delle oscillazioni armoniche di ampiezza $A = 20$ cm. Quando si trova nel punto di massima elongazione più lontano dalla parete, M viene colpita da una massa $m = 0.1$ kg che si muove con velocità $v = 18$ m/s lungo l'asse della molla. Dopo l'urto le due masse restano unite. Calcolare la velocità del sistema delle due masse subito dopo l'urto e l'ampiezza A' delle oscillazioni dopo l'urto.

44. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo composto mostrato in figura, formato da

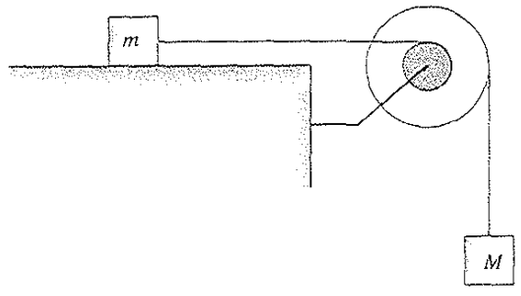


due aste di masse e lunghezze m_1 , l_1 , m_2 , l_2 ; la seconda asta è a 90° rispetto alla prima ed è fissata a questa nel centro. In particolare considerare il caso $m_1 = m_2$, $l_1 = l_2 = l$.

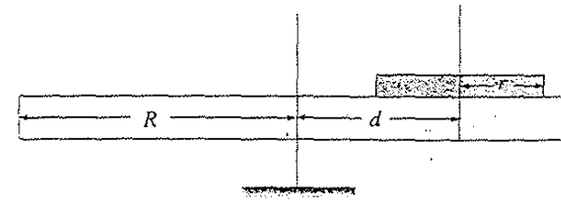
45. A una carrucola, di raggio r, massa m e momento d'inerzia I rispetto all'asse ortogonale al piano verticale in cui giace la carrucola e passante per il suo centro, sono sospese tramite un filo due masse m_1 e m_2, con $m_1 > m_2$. Calcolare l'accelerazione delle masse, le tensioni T_1 e T_2 , la reazione sull'asse della carrucola. Studiare in particolare il caso $m \cong 0$. Si suppone che il filo non slitti e che non ci sia attrito sull'asse.



46. Su un piano orizzontale è posata una massa $m = 10$ kg. Essa viene messa in movimento tramite un filo che si avvolge su una puleggia di raggio $r = 20$ cm. Questa è messa in rotazione dalla discesa, sotto l'azione del peso, di un massa $M = 4$ kg, a cui è collegata da un filo avvolto su una puleggia $R = 50$ cm, coassiale e rigidamente fissata alla precedente. Il momento d'inerzia del sistema delle due pulegge rispetto al comune asse di rotazione vale $I = 6$ kg m^2. Calcolare:
1) la velocità v di M dopo che è scesa di $h = 1$ m;
2) le tensioni dei due fili durante il movimento;
3) il valore di v se tra m e il piano ci fosse un coefficiente di attrito $\mu = 0.25$.

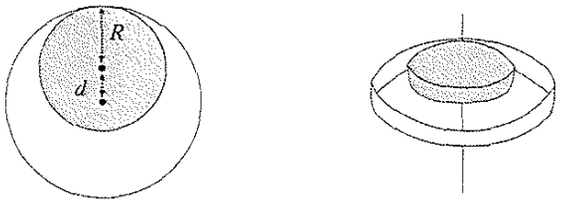


47. Un sistema di due corpi rigidi è costituito da una piattaforma circolare ($M = 40$ kg, $R = 2$ m) che può ruotare senza attrito attorno ad un'asse verticale, passante per il suo centro e fissato al suolo, e da un disco ($m = 8$ kg, $r = 0.6$ m) che può ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale passante per il suo centro e fissato alla piattaforma, a distanza $d = 1.2$ m dal centro di questa. Le direzioni degli assi di rotazione sono fisse.
Si consideri in primo luogo il seguente stato iniziale: la piattaforma è ferma, il disco ruota con velocità angolare $\omega = 14$ rad/s. Tra la piattaforma e il disco agisce una forza di attrito radente per cui dopo un certo tempo il disco non ruota più rispetto alla piattaforma. Calcolare:
1) il valore finale del momento angolare del sistema;
2) la variazione di energia cinetica del sistema.
Si consideri successivamente un diverso stato iniziale, in cui sia la piattaforma che il disco sono fermi, e si assuma che tra disco e piattaforma non ci sia ora nessun attrito. Con un motore si porta la velocità angolare della piattaforma al valore $\Omega = 6$ rad/s.
3) Calcolare il lavoro fornito dal motore.

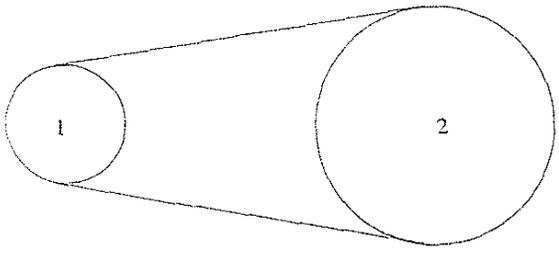


48. Un disco rigido, di massa $m = 40$ kg e raggio $R = 16$ cm, è posto in un piano orizzontale e può ruotare attorno ad un asse verticale passante a distanza $d = 9$ cm dal centro del disco. Il bordo del disco è a contatto con un anello di raggio $r = R + d$ che tramite un opportuno meccanismo non disegnato può ruotare attorno allo stesso asse in modo tale che, in caso di moto relativo tra disco e anello, si sviluppi una forza di attrito radente $F = 6$ N, tangente all'anello; la massa dell'anello è eguale a quella del disco (la forza F è l'unica forza di attrito presente nel sistema). Inizialmente disco e anello sono fermi; al tempo $t = 0$ viene applicato all'asse un momento costante $M = 2.22$ Nm così che il disco entra in rotazione; l'anello viene invece mantenuto fermo.
1) Calcolare la velocità angolare del disco al tempo $t_1 = 10$ s.

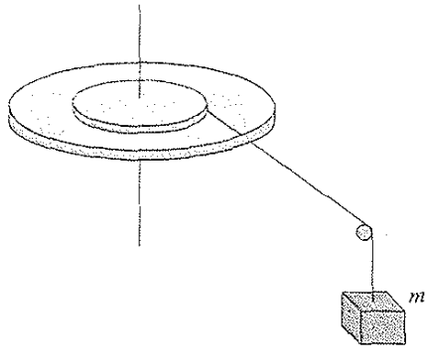
Nell'istante t_1 l'anello viene lasciato libero e inizia anch'esso a ruotare trascinato dal disco.
2) Calcolare la velocità angolare dell'anello al tempo $t_2 = 20$ s.
Nell'istante t_2 viene staccato dall'asse il motore che forniva il momento M e si osserva che al tempo t_3 disco e anello hanno la stessa velocità angolare.
Calcolare:
3) l'energia cinetica del sistema disco–anello al tempo t_3 ;
4) il lavoro complessivo W_{int} svolto dalle forze interne nell'intervallo di tempo da $t = 0$ a t_3 .



49. Due dischi rigidi ($m_1 = 5$ kg, $r_1 = 10$ cm, $m_2 = 20$ kg, $r_2 = 20$ cm) sono connessi come in figura da una cinghia indeformabile. All'asse del primo disco è connesso un motore che può fornire un momento costante $M_1 = 8$ Nm, mentre sull'asse del secondo disco agisce un momento frenante costante $M_2 = 7$ Nm. Al tempo $t = 0$ il motore comincia ad agire facendo ruotare il primo disco.
1) Calcolare la velocità angolare del secondo disco al tempo $t = 5$ s.
2) Calcolare quanto lavoro è stato fornito dal motore in questo tempo.
Si assume che la cinghia non slitti rispetto ai dischi.

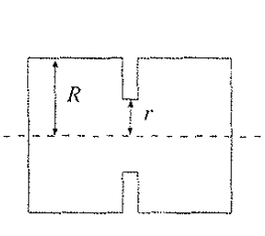


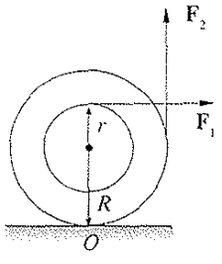
50. Due dischi di ferro, di raggi $R_1 = 0.1$ m e $R_2 = 2\,R_1$ e masse $M_1 = 2$ kg, $M_2 = 1.5\,M_1$, sono fissati solidamente uno all'altro in modo tale da risultare coassiali. Essi possono ruotare senza attrito attorno all'asse verticale passante per il centro di massa. Sul disco di raggio R_1 è avvolto un filo a cui è appesa la massa $m = 1$ kg. All'istante $t = 0$ la massa m, inizialmente in quiete, viene lasciata scendere.
1) Calcolare il tempo t_0 necessario perché essa percorra $h = 10$ m.
Sul bordo del disco di raggio R_2 è fissato un magnetino di massa $m_0 = 10^{-2}$ kg e dimensioni trascurabili; la forza magnetica che lo tiene attaccato ad disco vale 1.5 N.
2) Dire se al tempo t_0 il magnetino è ancora attaccato al disco.



51. Un disco orizzontale, di massa $m_1 = 2$ kg e raggio $R = 15$ cm, può ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso verticale passante per il suo centro. Sul disco, a distanza $d = 12$ cm dall'asse, è appoggiato un corpo di dimensioni trascurabili e massa $m_2 = 0.3$ kg, connesso all'asse di rotazione da una piccola asta rigida lunga d e di massa trascurabile. Tra il corpo e il disco c'è un coefficiente di attrito μ. Il sistema è in quiete. All'istante $t = 0$ viene applicato al disco un momento $M = 0.23$ Nm e il disco inizia a ruotare; dopo $t_0 = 1.2$ s cessa l'applicazione del momento. Calcolare:
1) la velocità angolare di regime del sistema;
2) il momento che devono sviluppare i supporti dell'asse.

52. Un cilindro di raggio $R = 10$ cm e massa $m = 5$ kg è posto sopra un piano orizzontale; il coefficiente di attrito vale $\mu = 0.3$. In corrispondenza al centro del cilindro è scavata una fessura sottilissima in modo tale da ridurre in quella zona il raggio al valore $r = 6.6$ cm; si supponga che questo fatto non alteri il momento d'inerzia del cilindro. Al cilindro

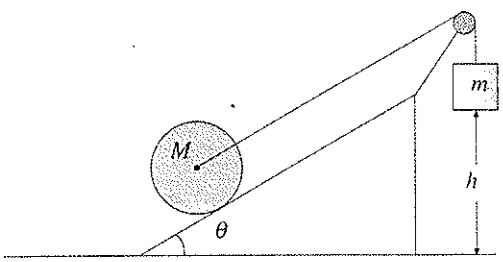




sono applicate le forze $F_1 = 9.5$ N e F_2, come mostrato in figura.
1) Calcolare quanto deve valere F_2 affinché il cilindro resti in equilibrio.
All'istante $t = 0$ F_1 cessa di agire mentre F_2 ha il valore trovato.
2) Dire se il cilindro può compiere un moto di puro rotolamento oppure no.

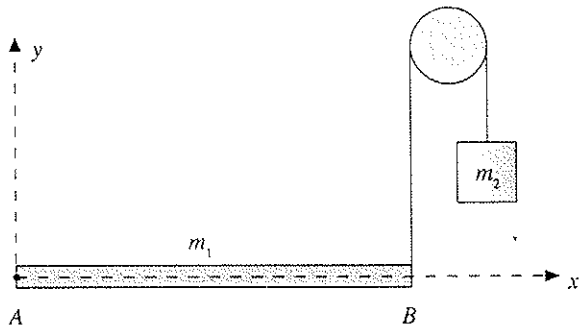
53. Un anello di acciaio ($m = 6$ kg, $r = 0.12$ m) può scendere lungo un piano inclinato di acciaio (coefficiente di attrito statico $\mu = 0.22$).
1) Calcolare quanto vale l'angolo del piano inclinato con l'orizzontale oltre cui non è più possibile un moto di puro rotolamento.
Partendo da fermo e con il centro a quota $h = 0.98$ m, l'anello scende lungo tutto il piano inclinato con moto di puro rotolamento.
2) Calcolare la velocità angolare finale dell'anello.

54. Un disco di massa $M = 8$ kg e raggio R è posto sopra una guida inclinata con angolo $\theta = 30°$; all'asse del disco è collegato un filo che sostiene la massa $m = 6$ kg. Il filo è teso con la massa m bloccata a distanza $h = 1.5$ m dal suolo. All'istante $t = 0$ si lascia libera la massa m che inizia a scendere, facendo contemporaneamente salire il disco lungo la guida. Il moto del disco è di puro rotolamento. Calcolare:
1) l'accelerazione con cui scende la massa m;
2) la velocità con cui la massa m tocca il suolo;
3) la quota massima raggiunta dal centro del disco, misurata rispetto alla quota che lo stesso centro aveva per $t = 0$.

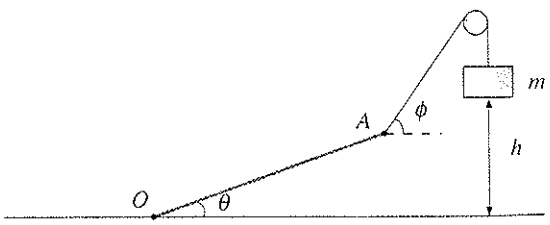


55. Un cilindro è posato nel punto di mezzo di un carrello lungo $l = 1$ m; il sistema è in quiete. A $t = 0$ il carrello entra in movimento con accelerazione costante $a = 7.5$ m/s^2. Calcolare l'accelerazione del cilindro rispetto al carrello e lo spazio percorso dal cilindro rispetto al suolo da quando esso entra in moto a quando cade del carrello. Il moto del cilindro è di puro rotolamento.

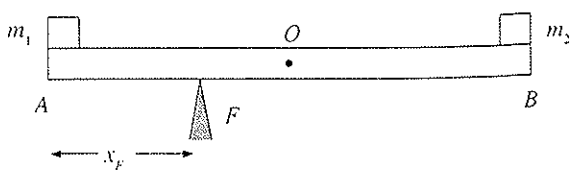
56. Un'asta rigida di massa m_1 e lunghezza $d = 0.8$ m è incernierata nell'estremo A ed è appesa nell'estremo B a un filo collegato alla massa $m_2 = 10$ kg; il sistema è in equilibrio con l'asta orizzontale.
1) Calcolare il valore della reazione vincolare in A.
Si interrompe il collegamento in B e l'asta ruota sotto l'azione della forza di gravità; nel vincolo A agisce un momento che si oppone alla rotazione, $\mathbf{M} = k\,\theta\,\mathbf{u}_z$, con $k = 50$ Nm/rad e θ angolo che l'asta forma con l'asse x.
2) Calcolare la velocità angolare dell'asta quando $\theta = \pi/2$.



57. Un'asta, lunga $l = OA = 1$ m e di massa $M = 10$ kg, è incernierata nel punto O; tramite un filo e una carrucola l'estremo A è connesso a un corpo di massa m. Il sistema è in equilibrio e i valori degli angoli sono $\theta = 30°$ e $\phi = 75°$.
1) Calcolare il valore di m e modulo, direzione e verso della reazione vincolare in O.
Ad un certo istante il filo tagliato.
2) Calcolare quanto deve valere h affinché il corpo di massa m arrivi al suolo con la stessa velocità con cui vi arriva il punto A dell'asta.

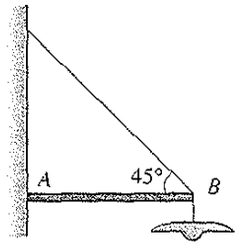


58. Un'asta di lunghezza l e massa M, su cui poggiano alle estremità due masse m_1 e m_2, è in equilibrio in un piano orizzontale, utilizzando un fulcro a di-

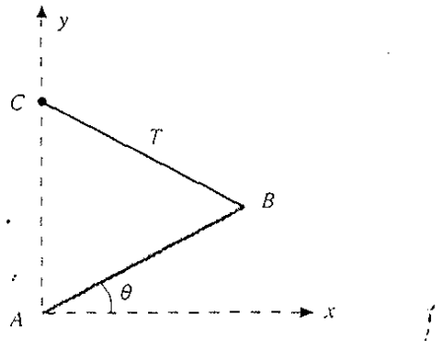


stanza x_F da un estremo. Determinare il valore di x_F, la coordinata x_{CM} del centro di massa del sistema e la reazione vincolare del fulcro.

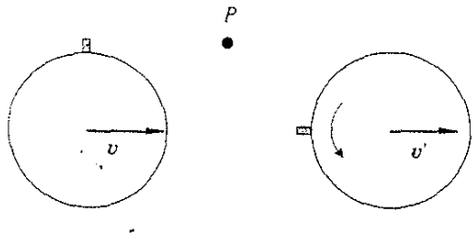
59. Una lampada di massa M è sospesa tramite un'asta AB, orizzontale, incernierata nel punto A. L'asta è sostenuta da una fune, come indicato in figura. Si determini il modulo della tensione della fune e della forza agente sull'asta. Si consideri trascurabile la massa dell'asta.



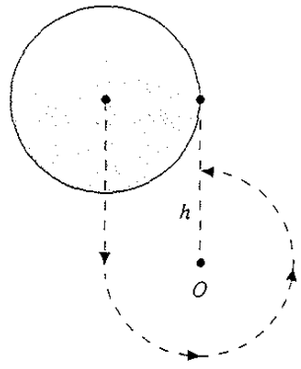
60. Un ponte è costituito da una tavola di massa M = 600 kg lunga l = 4 m. Questa tavola è incernierata sul lato A e può essere alzata agendo sul lato B con una fune tirata dal punto C, posto sulla verticale passante per A e distante l da A.
1) Calcolare il valore della tensione della fune quando il ponte è in equilibrio ad un angolo $\theta = 30°$ con l'orizzontale.
2) Calcolare in questa situazione la reazione vincolare $\mathbf{R}$ in A.



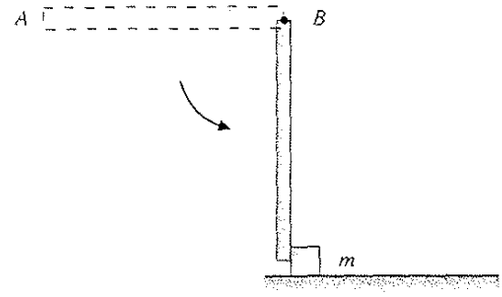
61. Un disco di massa m e raggio R scivola senza attrito su un piano orizzontale con velocità $\boldsymbol{v}$. Ad un certo istante un dentino posto sul bordo del disco urta contro un punto fisso P. Supponendo l'urto elastico calcolare la velocità $\boldsymbol{v}'$ e la velocità angolare ω dopo l'urto.



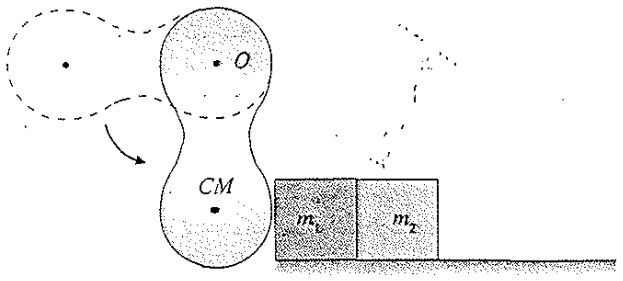
62. Un disco di raggio r = 0.4 m è mantenuto fermo in un piano verticale; all'istante $t = 0$ esso viene lasciato cadere. Quando ha percorso una distanza h il disco viene agganciato sul bordo ad un asse fisso orizzontale, ortogonale al disegno e passante per O, attorno a cui ruota senza attrito. Calcolare il valore di h necessario affinché il disco compia una rotazione di 270°, fermandosi in tale posizione.



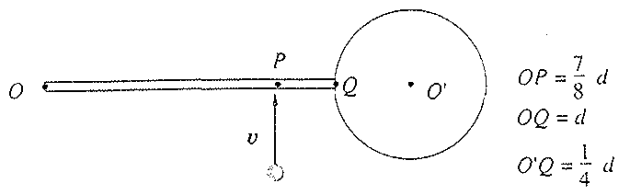
63. Un'asta AB, di lunghezza l = 1.2 m e massa M = 0.5 kg, è incernierata nel suo estremo B ad un perno fisso orizzontale e può oscillare senza attrito in un piano verticale. Nell'istante $t = 0$ l'asta, che è in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata libera da ruotare. Raggiunta la posizione verticale l'asta urta un piccolo oggetto, inizialmente fermo, di massa m = 0.25 kg, che parte con velocità v_0 orizzontale, mentre l'asta si ferma. Calcolare:
1) la velocità angolare dell'asta un istante prima dell'urto;
2) la velocità v_0;
3) l'energia cinetica dissipata nell'urto;
4) l'impulso durante l'urto.



64. Un corpo rigido, di massa $m = 10.5$ kg, può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale, di traccia O. Esso viene spostato di modo che la retta congiungente il suo centro di massa CM col punto O sia orizzontale; da questa posizione viene abbandonato con velocità angolare iniziale nulla. Quando il CM si trova sulla verticale passante per O il corpo rigido urta un sistema formato da due cubi a contatto; a seguito dell'urto il corpo rigido si ferma e il sistema di cubi entra in movimento, con moto traslatorio. Le masse dei cubi valgono $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 6$ kg, i coefficienti di attrito rispetto al piano di scorrimento sono $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.6$. Si osserva che i cubi si fermano dopo un tempo $t = 1.45$ s. Calcolare:
1) la forza che si esercita tra le superfici di contatto dei due cubi durante il moto;
2) la velocità iniziale del sistema dei due cubi;
3) la velocità angolare del corpo rigido al momento dell'urto.

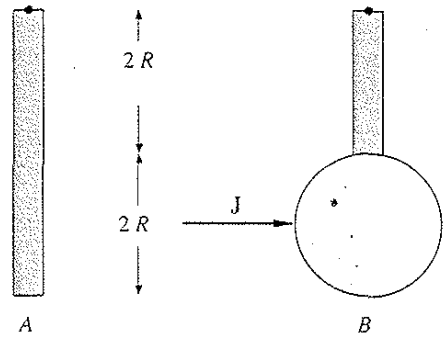


65. Un corpo rigido, formato da un'asta di massa $m = 1.5$ kg e lunghezza d e da un disco di eguale massa e raggio $R = d/4$, è posato sopra un piano orizzontale su cui può muoversi senza attrito ed è inizialmente in quiete. Un punto materiale, di massa $M = 0.4$ kg, in moto con velocità $v = 10$ m/s, urta il corpo rigido nel punto P distante $r = 7\,d/8$ dall'estremo O e vi resta attaccato. Nell'ipotesi che sul corpo non agisca alcun vincolo,
1) descrivere il moto del sistema corpo–punto dopo l'urto, precisando se si tratta di moto traslatorio, rotatorio e rototraslatorio;
2) calcolare la velocità del CM del sistema dopo l'urto.

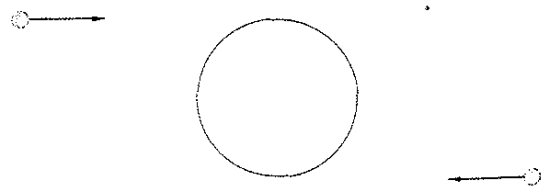


Se invece il corpo è vincolato in O, attorno a cui può ruotare, calcolare:
3) la velocità del CM del sistema dopo l'urto;
4) l'impulso subito dal perno in O durante l'urto.

66. Due pendoli A e B di eguale massa $m = 0.5$ kg sono costituiti da una sbarra e da un disco commesso rigidamente a un'asta di massa trascurabile; R vale 5 cm.
1) Calcolare il periodo del pendolo B per piccole oscillazioni.
Si imprime al disco un'impulso $\mathbf{J}$ orizzontale e passante per il centro del disco stesso, che in conseguenza ruota fino ad avere velocità nulla quando l'asta è orizzontale.
2) Calcolare il valore di $\mathbf{J}$.
3) Calcolare infine a che distanza x dall'asse di sospensione bisogna applicare un eguale impulso al pendolo A affinché si porti in posizione orizzontale, giungendovi con velocità nulla.

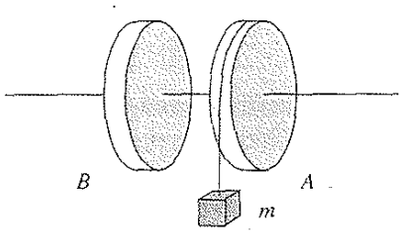


67. Un anello, di massa $m_3 = 2.5$ kg e raggio $R = 30$ cm, è inizialmente fermo in un piano orizzontale liscio. Due punti materiali, di masse $m_1 = 2$ kg e $m_2 = 0.5$ kg, si muovono con la stessa velocità $v = 4$ m/s secondo la direzione indicata in figura. Ad un certo istante entrambi toccano l'anello e vi rimangono attaccati. Calcolare:
1) la velocità del CM del sistema dopo l'urto;
2) la velocità angolare del sistema.

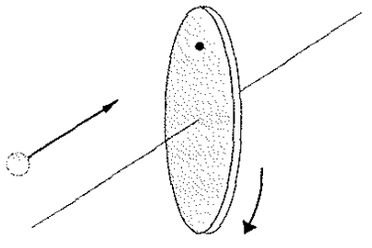


68. Due dischi identici, di massa $M = 5$ kg e raggio $R = 0.2$ m, sono liberi di ruotare indipendentemente attorno ad un asse orizzontale fissó passante per i

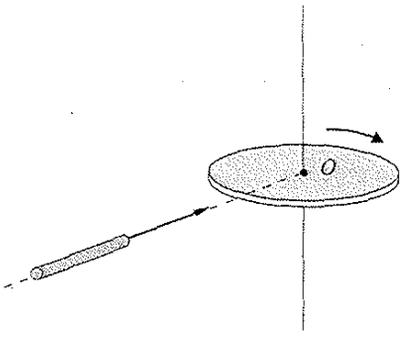
loro centri. Attorno al disco A è avvolto un filo che sostiene una massa $m = 2$ kg. Si lascia libera m e il disco A si mette in moto mentre il disco B rimane fermo. Nell'istante in cui il disco A raggiunge la velocità angolare $\omega = 15$ rad/s il disco B viene spinto contro A e vi rimane incollato. Calcolare:
1) la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto;
2) l'impulso trasmesso all'asse nell'urto.



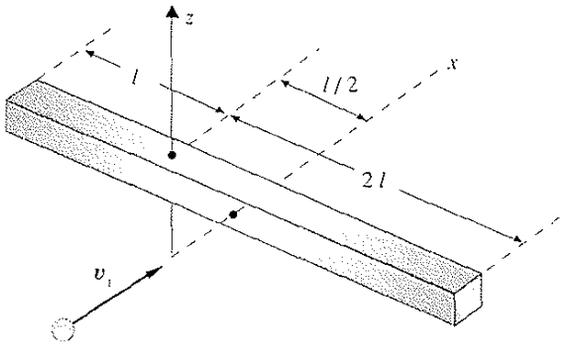
69. Un disco rigido ($M = 6$ kg, $R = 0.2$ m) è posto in un piano verticale e può ruotare attorno ad un asse fisso orizzontale che offre un momento di attrito costante $M_a = 0.6$ Nm. Il disco è fissato all'asse in modo tale da poter anche slittare lungo l'asse: a questo moto si oppone una forza di attrito radente con coefficiente $\mu = 0.1$. All'istante $t = 0$, mentre il disco sta ruotando con velocità angolare $\omega_0 = 6.283$ rad/s, un proiettile puntiforme, di massa $m = 0.5$ kg con velocità $v = 25$ m/s parallela all'asse, colpisce il disco a distanza r dal centro e vi resta attaccato. Calcolare:
1) l'istante t_1 in cui la velocità angolare del sistema è nulla;
2) l'istante t_2 in cui la velocità di traslazione del sistema è nulla.



70. Sopra un piano orizzontale liscio è posto un disco, di massa $m = 0.1$ kg e raggio $R = 10$ cm, che ruota con velocità angolare costante $\omega = 40$ rad/s attorno ad un asse verticale passante per il centro O. Una sbarretta di massa m e lunghezza R si muove sul piano con velocità costante $v = 4$ m/s lungo una linea retta passante per O. Ad un certo istante la sbarretta urta il bordo del disco e vi rimane attaccata, in direzione radiale. Se l'asse di rotazione è fisso, calcolare la velocità angolare ω' del sistema disco–sbarretta dopo l'urto. Se invece il disco è libero di muoversi, calcolare dopo l'urto la velocità del CM del sistema e la velocità angolare ω''.

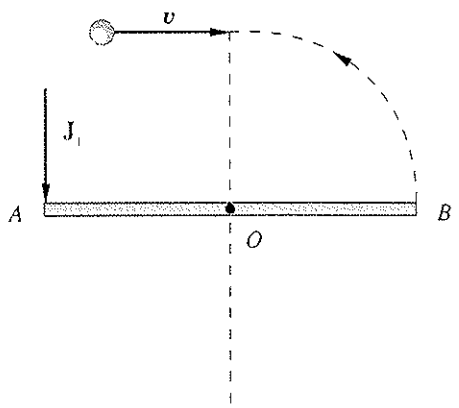


71. Un'asta rigida è incernierata ad un asse verticale attorno al quale può ruotare. Una particella, di massa $m = 0.1$ kg e velocità $v_1 = 50$ m/s ortogonale all'asta, colpisce l'asta e rimbalza nella stessa direzione secondo ciò è arrivata con velocità $v_2 = 10$ m/s. La massa dell'asta è $M = 1$ kg, le distanze sono indicate in figura, con $l = 1$ m. Il moto della particella e dell'asta avviene in un piano orizzontale.
1) Calcolare l'impulso subito dall'asse nell'urto.
Alla rotazione dell'asta si oppone un momento $-k\,\theta$, se θ è l'angolo di rotazione rispetto alla posizione di equilibrio in cui si trova l'asta all'istante dell'urto. Il periodo delle oscillazioni di torsione dell'asta vale $T = 13.14$ s.
2) Calcolare l'angolo massimo raggiunto dall'asta dopo l'urto.

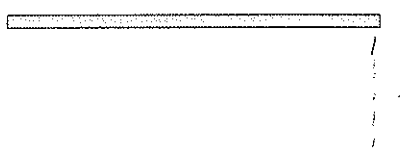


72. Un'asta $A\,B$, di massa $M = 3$ kg e lunghezza $l = 0.5$ m, può ruotare nel piano verticale ortogonale all'asse di rotazione orizzontale passante per il centro dell'asta. L'asse oppone alla rotazione un momento di attrito costante $M_a = 0.4$ Nm. Inizialmente l'asta è ferma in posizione orizzontale. Con un martello si comunica all'estremo A un impulso

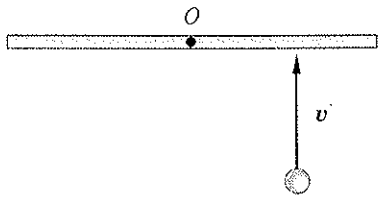
verticale verso il basso in seguito al quale l'asta si pone in rotazione con velocità angolare iniziale ω_0 = 8 rad/s. Quando l'asta raggiunge la posizione verticale viene urtata nell'estremo B da una sferetta di massa m = 0.2 kg e velocità v = 15 m/s diretta orizzontalmente; la sferetta rimane conficcata nell'asta. Calcolare:
1) il modulo J_1 dell'impulso comunicato dal martello;
2) la velocità angolare dell'asta subito prima dell'urto con la sferetta;
3) la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto;
4) il modulo J_2 dell'impulso esplicato dall'asse dell'asta.



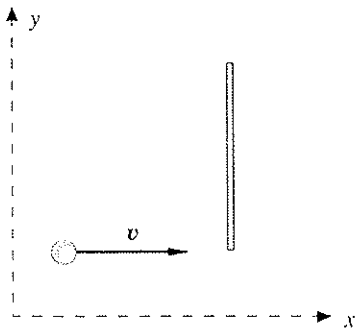
73. Una sbarra rettilinea si trova in quiete sopra un piano orizzontale liscio; la sua lunghezza è l = 1 m, la massa è m = 3 kg. Mediante un colpo di martello dato a un estremo viene comunicato alla sbarra un impulso J = 5 Ns, con direzione e verso come in figura. Calcolare:
1) la velocità del CM della sbarra;
2) la velocità angolare della sbarra;
3) l'energia cinetica della sbarra.



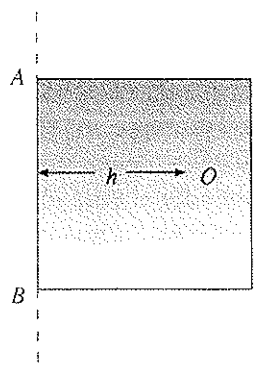
74. Un'asta lunga l = 1.2 m può ruotare, in un piano verticale, attorno al proprio centro O; la massa dell'asta vale M = 2.5 kg. Un punto materiale di massa m = 0.25 kg, lanciato verticalmente dal basso verso l'alto, colpisce l'asta a distanza R = 0.4 m da O e rimane ad essa attaccato; la velocità di m all'istante dell'urto vale v = 20 m/s. Calcolare:
1) la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto;
2) la variazione di energia cinetica del sistema nell'urto;
3) la velocità angolare del sistema quando ha compiuto una rotazione di 90°.



75. Una sbarra rigida di sezione trascurabile, lunga l = 1 m e di massa M = 12 kg, è imperniata nel centro ed è libera di ruotare in un piano orizzontale. Contro un suo estremo viene lanciato un oggetto di dimensioni trascurabili e di massa m = 1 kg, con velocità $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{u}_x$ m/s; la sbarra è orientata secondo l'asse y. Dopo l'urto l'oggetto rimbalza con velocità $v' = -0.5\,\mathbf{u}_x$ m/s. Calcolare:
1) la velocità angolare ω della sbarra dopo l'urto;
2) le componenti dell'impulso $\mathbf{J}$ comunicato al perno.
Si supponga che, con le stesse condizioni iniziali, l'urto avvenga elasticamente.
3) Calcolare in tal caso ω' e $\mathbf{J}'$.



76. Una tavola quadrata, di massa M = 2 kg e lato d = 0.9 m, è incernierata ad un asse verticale, coincidente col lato $A\,B$, che oppone alle rotazioni un



momento di attrito costante $M_a = 29 \cdot 10^{-3}$ Nm. Ortogonalmente alla tavola viene sparato un proiettile di massa $m = 28 \cdot 10^{-3}$ kg con velocità v. Questo proiettile perfora la tavola, in un tempo trascurabile, ed esce con velocità v' orizzontale. Il foro lasciato nella tavola dista $h = 0.65$ m dall'asse $A\,B$. Si osserva che dopo $x_0 = 23$ m il proiettile è sceso di $y_0 = 0.5$ m rispetto al foro. Si osserva anche che la tavola, a causa dell'urto, entra in rotazione e si ferma dopo aver descritto l'angolo $\theta = 133.5°$. Calcolare:
1) la velocità v del proiettile;
2) il modulo dell'impulso subito dall'asse $A\,B$ nell'urto.

77. Un insetto di massa $m = 0.01$ kg si trova all'estremità di un'asta lunga 20 cm e di massa $M = 0.03$ kg, posta su un piano orizzontale liscio. L'insetto si muove verso l'altro estremo dell'asta con velocità costante, rispetto al piano, $v = 5$ cm/s. Determinare il tempo impiegato dell'insetto per raggiungere l'altra estremità dell'asta.

78. Una sbarra di alluminio a sezione rettangolare, 2 cm × 3 cm, è sottoposta a un carico di $7 \cdot 10^4$ N; un'asta di acciaio a sezione circolare, di diametro 1.2 cm, è sottoposta a un carico di $5 \cdot 10^4$ N. Si determini per quale dei due corpi si ha la maggiore deformazione specifica ε.

79. Calcolare l'energia spesa per la deformazione elastica dell'esempio 8.1 del capitolo 8.

80. Dimostrare che nel pendolo di torsione si può definire un'energia potenziale elastica che vale $E_p = \frac{1}{2}\ k\,\theta^2$.

GUIDA ALLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI. RISULTATI NUMERICI

1. Si esprima l'accelerazione in funzione della variazione di velocità e della distanza percorsa, tenendo presente che il moto è uniformemente accelerato.
R: $a = 1.07 \cdot 10^{11}$ m/s^2, $t = 7.5 \cdot 10^{-7}$ s.

2. Si scrivono i tempi impiegati dal sasso nella caduta (moto uniformemente accelerato) e dal suono che si propaga dal fondo del pozzo (moto uniforme), ponendo la loro somma eguale a t.
R: $h = 99.54$ m.

3. La velocità acquistata nell'intervallo di tempo t_1, quando l'accelerazione è a_1, viene annullata nell'intervallo di tempo $(t - t_1)$, quando l'accelerazione è $-a_2$, essendo t il tempo della prova. Si imponga poi che lo spazio percorso sia d.
R: $t = 36.4$ s.

4. Si ricavi $v(t)$ da $a = dv/dt$ e $v(x)$ da $a = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$.
R: $v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 k t}$, $v(x) = v_0 e^{-kx}$.

5. Si considerino separatamente i moti lungo x e y; il tempo di arrivo è determinato dal moto lungo y, lo spazio percorso lungo x si ottiene integrando $v_x(t)$.
R: $x_B = 6.7$ m, $t = 20$ s.

6. Si esprima y_A in funzione di x_B; derivando rispetto al tempo si ottengono v_A e poi a_A, in funzione di x_B.
R: $v_A = -3.14 \cdot 10^{-2}$ m/s, $a_A = -1.15 \cdot 10^{-2}$ m/s^2.

7. Si scrivano le velocità angolari delle lancette dei minuti e delle ore e si eguagliano i tempi di percorrenza (ciascuno pari all'angolo percorso diviso per la velocità angolare).
R: $\theta = 2\pi/11 = 0.569$ rad $= 32.6°$, 2θ, 3θ, ecc.

8. Si calcoli la velocità angolare al tempo t_1 e si determinino $a_N(t_1)$ e $a_T(t_1)$, ottenendo il modulo dell'accelerazione. Si esprima la velocità angolare per $t > t_1$ e la si annulli.
R: $a = 1.02$ m/s^2, $t = 17.4$ s a partire da $t = 0$.

9. Si scrivano separatamente i moti delle due palline lungo x e y. Dall'eguaglianza delle ascisse si ricava il tempo di incontro e dall'eguaglianza delle ordinate l'ordinata di incontro.
R: $x_i = x_0$, $y_i = 1$ m.

10. Detto α l'angolo che la velocità forma con l'asse x, si ricavi tg $\alpha = dy/dx$ e quindi $v_x(x)$ e $v_y(y)$. Da $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}$ si calcoli a_x e in modo analogo a_y.
R: $a_x(0) = 0$, $a_y(0) = 10$ m/s^2, $a_x(0.1) = -2.5$ m/s^2, $a_y(0.1) = 2.5$ m/s^2.

11. Si scrivano le equazioni del moto del punto e della molla; la forza agente sul punto è anche pari a kx.
R: $x = 0.032$ m.

12. Si utilizzino il teorema dell'impulso e il teorema dell'energia cinetica.
R: $t = 2x/v_0$.

13. Si scrivano separatamente le condizioni di equilibrio per le due masse.
R: $T_1 = (m_1 + m_2)g$, $T_2 = m_2 g$, il filo non è teso.

14. Si scriva l'espressione dell'accelerazione, tenendo conto dell'attrito, e quindi la legge oraria. Successivamente si utilizzi la relazione tra lavoro e energia cinetica.
R: $t = 0.23$ s, $\mu = 0.72$.

15. Si applichi il teorema dell'impulso per calcolare la velocità iniziale del sistema, poi si scriva la relazione tra lavoro e energia cinetica.
R: nel caso particolare $F_0 = \frac{2m}{\tau}\sqrt{3\mu g d} = 10.2 \cdot 10^3$ N.

16. Si scrivano le equazioni del moto di ciascuno dei due corpi, tenendo presente l'azione dell'attrito (forza interna al sistema). Si consideri che quando la velocità relativa del corpo di massa m_1 rispetto alla piastra è nulla, il sistema corpo–piastra si muove come un'unica massa.
R: $\mu_1 m_1 > \mu_2 (m_1 + m_2)$, $x_1 = 0.689$ m, $x_2 = 0.092$ m, $E = 9$ J.

17. Si scrivano le equazioni del moto e si consideri il moto relativo, in particolare l'accelerazione relativa $a_M - a_m$.
R: $\mu = 0.15$.

18. Si scrivano le equazioni del moto imponendo che l'accelerazione sia nulla. Quando M si stacca il moto non è più uniforme.
R: $m = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2$, $T_1 = 52.9$ N, $T_2 = 29.4$ N, dopo il distacco $T_2 = 6.7$ N.

19. Si scrivano le equazioni del moto.
R: $a = \dfrac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g$, $T = (1 + \mu) \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$, non c'è movimento se $m_1 < \mu_s m_2$ e le masse sono inizialmente in quiete.

20. Si scrivano le equazioni del moto.
R: $a = 4.2$ m/s^2, $T_1 = 22.4$ N, $T_2 = 14.0$ N.

21. Si scrivano le equazioni del moto. Si osservi che quando A tocca il suolo B continua a salire finché la sua velocità non si annulla.
R: $d = 1.09$ m.

22. Si scrivano le equazioni del moto. Da quello del moto di A si ricavi μ_A, mentre da quelle valide quando il filo è teso, posto $a = 0$, si ricavino μ_B e la tensione.
R: $\mu_A = 0.50$, $\mu_B = 0.65$, $T = 0.64$ N.

23. Si scrivano le equazioni del moto imponendo $a = 0$.
R: $\mu = 0.47$.

24. Si esprima la tensione in funzione del tempo risolvendo le equazioni del moto.
R: $t = 50$ s.

25. Si eguagli la variazione di energia potenziale alla somma del lavoro della forza di attrito e della variazione di energia potenziale elastica.
R: $h = 9.1$ cm.

26. Dall'espressione generale dell'equazione della parabola si ricava tg $\alpha = 1.28$ e $a / 2 v_0^2 \cos^2 \alpha = 0.31$ m^{-1}; inoltre $v_0 \cos \alpha = v_x = 5.29$ m/s. Di qui si calcolino v_0 e a.
R: $F = 5.9$ N, $E_k = 12.54$ J.

27. Si utilizzi l'espressione della velocità in funzione dello spazio per calcolare l'accelerazione tangente dovuta all'attrito e quindi la velocità dopo mezzo giro e l'accelerazione centripeta. Si scriva poi la velocità in funzione del tempo.
R: $a_N = 5.11$ m/s^2, $t = 2.18$ s.

28. Dal valore del periodo e dell'angolo di arresto si calcolino ω_0 e b, e quindi $a_N(\theta_1)$; per ottenere $a_T(\theta_1)$ si sfrutti la relazione $\alpha = \dfrac{d\omega}{d\theta} \dfrac{d\theta}{dt}$.
R: $a = 0.12$ m/s^2.

29. Si calcoli la massima variazione di quota della massa m. Si ricavi l'espressione della tensioni del filo in funzione dell'angolo θ e si ricordi che $a_x = T \operatorname{sen} \theta / m$.
R: $(\Delta E_p)_{max} = 12 \cdot 10^{-3}$ J, $T_{max} - T_{min} = 9.1 \cdot 10^{-2}$ N, $a_x = 0.59$ m/s^2.

30. Si utilizzi soltanto la conservazione dell'energia meccanica.
R: $v = \sqrt{2 g l \cos\theta}$, $a = g \sqrt{1 + 3 \cos^2\theta}$, $R = T = 3 m g \cos \theta$.

31. Si scrivano nelle due condizioni di moto le espressioni di cos θ_1 e cos θ_2. Si calcolino quindi le variazioni di energia cinetica e di energia potenziale rispettivamente come nell'esempio 2.4 del capitolo 2 e nel problema 29.
R: $\Delta E_{mecc} = \Delta E_k + \Delta E_p = 12.1$ J $+ 4.7$ J $= 16.8$ J.

32. Si scriva la forza centripeta in B e la si eguagli a $m a_N$; si ricordi che la condizione di distacco è $N = 0$. Nel moto da A a B si utilizzi la conservazione dell'energia meccanica.
R: $v_A = 22.16$ m/s.

33. Tramite la conservazione dell'energia meccanica si esprima la velocità in C in funzione della quota di A rispetto a B, h. La condizione di distacco è che in C $N = 0$.
R: $h = 0.33$ m.

34. Si scrivano le componenti radiale e trasversa della velocità, per $t = 0$, e il modulo del momento angolare.
R: $v = 3.04$ m/s, no perché L non è costante.

35. Si utilizzi il teorema delle accelerazioni relative per calcolare a_r, note l'accelerazione nel sistema inerziale (d^2x/dt^2) e l'accelerazione di trascinamento (d^2x_O/dt^2).
R: $a_r = -\omega^2 (x_1 + x_2) \operatorname{sen} \omega t$, nel sistema non inerziale il moto è armonico con pulsazione ω, ampiezza $x_1 + x_2$ ed è in fase con il moto nel sistema inerziale.

36. Si scrivano le equazioni del moto del corpo e del carrello e si ricavi l'accelerazione relativa.
R: $t = 1.24$ s.

37. Si utilizzino i teoremi delle velocità e delle accelerazioni relative, ottenendo $v' = (\omega_0 - \omega)\, r$, $a' = (\omega_0 - \omega)^2 r$; si osservi che il moto del dischetto non è influenzato da quello della piattaforma e che la forza centripeta è fornita dalla tensione del filo.
R: $v' = 12$ m/s, $a' = 96$ m/s^2, $m = 0.1$ kg.

38. Il lavoro per lo spostamento della pallina, $W = \int_{x_1}^{x_2} m \omega^2 x\, d\, x$, sommato a quello della forza elastica, $-\Delta E_p$, è eguale alla variazione di energia cinetica.
R: $v = 6.12$ m/s.

39. Il moto della piattaforma è armonico semplice, $x = 0.3$ sen $2t$, quello del punto è rettilineo uniforme.
R: $\Delta x = 0.17$ m, $v_r = 1.2$ m/s.

40. Si assuma l'origine a 10 cm da C (porzione di riposo dell'estremo mobile della molla); l'equazione del moto del sistema delle due masse, soggette alla forza peso $m_B\, g$ e alla forza elastica della molla, ha come soluzione $x = \frac{m_B\, g}{k} + A$ sen $(\omega t + \phi)$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_A + m_B}}$; si calcolino A e ϕ dalle condizioni iniziali e quindi lo spostamento massimo di A. Per ottenere la tensione del filo si studi il moto del corpo B.
R: $\omega = 7.45$ rad/s, $(\Delta x_A)_{max} = 0.396$ m, $T_{max} = 1.30$ N, $T_{min} = 0.08$ N.

41. Si scrivano le equazioni del moto e le leggi orarie dei due cubi per calcolare l'istante dell'urto. Durante l'urto si applichi la conservazione della quantità di moto del sistema e dopo l'urto il teorema del moto del centro di massa. Infine si scriva l'equazione del moto del cubo a valle.
R: $t = 1.09$ s, $v = 2.57$ m/s, $a = 2.35$ m/s^2, $F = 1.7$ N.

42. Si calcoli $v\,(x)$ e la si eguagli a zero. Durante l'urto si applichi la conservazione della quantità di moto del sistema.
R: $x = 1$ m, $v = 1.4$ m/s.

43. Dalla conservazione della quantità di moto del sistema durante l'urto si ottiene la velocità del centro di massa subito dopo l'urto; della conservazione dell'energia meccanica del sistema dopo l'urto si ricava la massima elongazione.
R: $v_{CM} = 3$ m/s, $A' = 22.8$ cm.

44. Si determini la posizione del centro di massa rispetto al punto O e il momento d'inerzia del sistema, tramite il teorema di Huygens – Steiner, rispetto all'asse orizzontale passante per O. Si utilizzi quindi la relazione che fornisce il periodo di un pendolo composto.
R: $T = 2\,\pi \sqrt{\frac{17\, l}{18\, g}}$ nel caso particolare.

45. Si scrivano le equazioni del moto delle due masse e della carrucola.
R: $a = \frac{m_1 - m_2}{M}\, g$, $T_1 = m_1\, g \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{M}\right)$, $T_2 = m_2\, g \left(1 + \frac{m_1 - m_2}{M}\right)$, avendo posto $M = m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}$; $R = T_1 + T_2 + m\, g$.

46. Si scrivano le equazioni del moto delle due masse e del sistema delle pulegge e si risolvano nell'accelerazione angolare e nelle tensioni. Per rispondere alla terza domanda si introduca la forza di attrito.
R: $v = 1.63$ m/s, $T_m = 5.3$ N, $T_M = 37.9$ N, $v' = 1.41$ m/s.

47. Poiché agiscono solo forze interne si conserva il momento angolare, pari all'inizio a $\frac{1}{2}\, m r^2\, \omega$ e alla fine a $\left(\frac{1}{2}\, M R^2 + \frac{1}{2}\, m r^2 + m d^2\right)\omega'$; di qui si calcola ω' e quindi la variazione di energia cinetica. Per il calcolo del lavoro si scriva la variazione di energia cinetica del sistema, considerando che il disco descrive un moto traslatorio secondo un'orbita circolare e non ruota attorno al suo asse.
R: $L = 20.16$ kg m^2/s, $\Delta E_k = -134.7$ J, $W = 1647.4$ J.

48. Si scriva l'equazione del moto del disco, dovuto all'azione del momento M e di quello della forza di attrito, pari a $r\, F$. Il moto dell'anello è dovuto al momento della forza di attrito. Per la terza domanda si applichi la conservazione del momento angolare per calcolare la velocità angolare finale. Per la quarta domanda si utilizzi il teorema dell'energia,

$W = W_{mot} + W_{int} = M\,\theta + W_{int} = \Delta E_k$.
R: $\omega_1 = 8.61$ rad/s, $\omega_2 = 6$ rad/s, $E_k = 129.5$ J, $W_{int} = -252.8$ J.

49. Si scrivano le equazioni del moto dei due dischi, osservando che le accelerazioni tangenziali e la velocità periferiche sono eguali ($\alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2$, $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$). Il lavoro è $W_{mot} = \int_0^\theta M\,d\,\theta$.
R: $\omega_2 = 90$ rad/s, $W_{mot} = 3600$ J.

50. Si scrivano le equazioni del moto della massa m e del sistema dei due dischi, risolvendo esplicitamente nell'accelerazione angolare ovvero nell'accelerazione di m (αR_1). Per la seconda domanda si osservi che la forza-magnetica deve fornire la forza centripeta necessaria per mantenere il magnetino in moto circolare.
R: $t_0 = 4.03$ s, si verifica che $m_0\,\omega^2(t_0)\,R_2 > 1.5$ N quindi il magnetino si stacca (al tempo $t = 2.2$ s).

51. Si calcoli $L(t_0)$ da $\int_0^{t_0} M\,dt$ e, per $t > t_0$, si applichi la conservazione del momento angolare. I supporti dell'asse devono bilanciare il momento della forza peso $m_2\,g$.
R: $\omega = 10.3$ rad/s, $M_s = 0.35$ Nm.

52. Si applichino le condizioni di equilibrio statico $M = 0$ (rispetto al punto O) e $R = 0$, che forniscono F_2 e anche la reazione normale N. Si scrivono poi le equazioni del moto del centro di massa e del moto di rotazione del cilindro attorno ad un asse orizzontale passante per il centro di massa, nell'ipotesi di puro rotolamento, calcolando la forza di attrito necessaria, da confrontare con μN.
R: $F_2 = 15.8$ N, $|f_{attr}| = 10.5$ N $> \mu N = 10$ N e quindi non può esserci puro rotolamento.

53. Si scrivano le equazioni del moto del centro di massa e di rotazione dell'anello attorno ad un asse orizzontale passante per il centro di massa. Si ricavi la forza di attrito statico necessaria per avere moto di puro rotolamento e si imponga $|f| < \mu N$. Nel moto di discesa si utilizzi la conservazione dell'energia.
R: tg $\theta \le 2\,\mu$, $\theta \le 23.75°$, $\omega = 24.2$ rad/s.

54. Si scrivano le equazioni del moto della massa m, del centro di massa del disco e di rotazione del disco rispetto ad un asse orizzontale passante per il centro di massa. Quando m tocca il suolo il disco continua a salire e si applichi la conservazione dell'energia.
R: $a = 1.09$ m/s^2, $v = 1.81$ m/s, $\Delta z = 1$ m.

55. Per il moto del cilindro rispetto al suolo $F_{attr} = m\,a_{cil}$, nel moto di puro rotolamento rispetto al carrello $F_{attr}\,r = \frac{1}{2} m\,r^2\,\alpha$ con $\alpha\,r = -a_{rel}$; inoltre $a_{cil} = a_{rel} + a$. Da queste si calcolano a_{cil} e a_{rel}.
R: $a_{rel} = -5$ m/s^2, s = 0.25 m.

56. Si consideri l'equilibrio dei momenti rispetto al centro di massa dell'asta e la condizione di equilibrio di m_2. Successivamente si utilizzi il teorema dell'energia con $W = \frac{1}{2}\,m_1\,g\,d - \int_0^{\pi/2} k\theta d\theta$.
R: $F_A = 98$ N, $\omega = 2.79$ rad/s.

57. Si scrivano le condizioni di equilibrio di m e dell'asta, sia per la traslazione che per la rotazione, assumendo come polo O, dove agisce la reazione vincolare **R**, di componenti R_x e R_y. Si applichi la conservazione dell'energia sia al moto dell'asta che a quello della massa m.
R: $m = \dfrac{M \cos\theta}{2 \operatorname{sen}(\phi - \theta)} = 6.12$ kg, $R_x = m\,g \cos\phi = 15.5$ N, $R_y = M\,g - m\,g \operatorname{sen}\phi = 40.1$ N, $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 43$ N formando l'angolo $\beta = 68.9°$ con l'orizzontale (**R** cioè è diretta verso l'alto e a sinistra); $h = \frac{3}{2}\,l \operatorname{sen}\theta = 0.75$ m.

58. Si impongano le condizioni di equilibrio, assumendo come polo dei momenti il fulcro, e si utilizzi la definizione di posizione del centro di massa.
R: $x_F = \dfrac{2m_2 + M}{m_1 + m_2 + M}\,\dfrac{l}{2}$, $R = (m_1 + m_2 + M)g$, $x_{CM} = x_F$.

59. Si imponga la condizione di equilibrio delle forze agenti sul sistema, tenendo conto che le componenti orizzontale e verticale della tensione della fune sono eguali.
R: $T = \sqrt{2}\,M\,g$, $F = T_y = M\,g$ (bilanciata dal vincolo in A).

60. Si scrivano le condizioni di equilibrio delle forze e dei momenti rispetto al polo A. Si osservi che il triangolo $A\,B\,C$ è equilatero.

R: $T = 2940$ N, $R_x = 2546$ N, $R_y = 4410$ N, $R = 5092$ N, tg $\alpha = R_y / R_x = \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$ rispetto all'asse x.

61. Rispetto al punto P resta costante il momento angolare; inoltre, essendo l'urto elastico, si conserva anche l'energia cinetica. Si utilizzino i teoremi di König per il calcolo di **L** e E_k dopo l'urto.
R: $v' = \frac{v}{3}$, $\omega = \frac{4v}{3R}$.

62. Durante l'urto si utilizzi la conservazione del momento angolare rispetto al punto O (l'asse della successiva rotazione passa per O ed è orizzontale). Si applichi poi la conservazione dell'energia.
R: $h = 0.6$ m.

63. Tramite la conservazione dell'energia si ottiene la velocità angolare dell'asta prima dell'urto. Durante l'urto si applichi la conservazione del momento angolare rispetto all'estremo B. L'impulso è dato dalla variazione della quantità di moto del sistema $(m v_0 - M \omega \frac{l}{2})$.
R: $\omega = 4.95$ rad/s, $v_0 = 3.96$ m/s, $\Delta E_k = -0.98$ J, $J = -0.50$ N s ed è diretto verso sinistra.

64. Si scrivano le equazioni del moto di ciascuno dei due cubi, tenendo conto della forza F che m_1 esercita su m_2 e della reazione $-F$ di m_2 su m_1. Dal valore del tempo di arresto si calcoli la velocità iniziale. Nell'urto si conservi il momento angolare rispetto al polo O e nel moto di discesa si conservi l'energia.
R: $F = 6.72$ N, $v_0 = 6.9$ m/s, $\omega = 2.13$ rad/s.

65. Si verifichi che il punto P coincide con il centro di massa del corpo rigido e quindi del sistema: dopo l'urto il moto è traslatorio rettilineo uniforme. Per il calcolo di v_{CM} si utilizzi la conservazione della quantità di moto durante l'urto. Se il corpo è vincolato si conservi nell'urto il momento angolare rispetto al polo O. L'impulso subito dal perno è eguale ed opposto alla variazione di quantità di moto del sistema.
R: $v_{CM} = 1.18$ m/s, se è vincolato $v_{CM} = 0.95$ m/s, $J = -0.80$ N s (parallelo e discorde a $\boldsymbol{v}$).

66. Si utilizzi la formula che dà il periodo di un pendolo composto, applicando il teorema di Huygens–Steiner per il calcolo del momento d'inerzia. Si applichi successivamente il teorema del momento dell'impulso e, durante il moto, la conservazione dell'energia. Per il pendolo A si segua la stessa procedura.
R: $T = 0.8$ s, $J = 0.88$ N s, $x = 9.2$ cm.

67. Si applichino le leggi di conservazione della quantità di moto e del momento angolare rispetto al centro di massa del sistema, la cui posizione deve essere determinata.
R: $v_{CM} = 1.2$ m/s, $\omega = 6$ rad/s.

68. Si applichi la conservazione del momento angolare assiale durante l'urto. L'impulso trasmesso all'asse nell'urto è pari in modulo alla variazione di quantità di moto del sistema, che coincide con quella della massa m.
R: $\omega' = 9.64$ rad/s, $|J| = 2.14$ N s (diretto verso il basso).

69. Si conservi il momento angolare assiale, ricavando la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto, e la quantità di moto, ricavando la velocità di traslazione del sistema subito dopo l'urto. Si scrivano dopo l'urto le leggi con cui variano $\omega(t)$ e $v(t)$.
R: $t_1 = 1.257$ s, $t_2 = 1.962$ s.

70. Nel primo caso, asse di rotazione fisso, si utilizzi la conservazione del momento angolare rispetto al polo O (il momento d'inerzia varia da $\frac{1}{2} m R^2$ a $\frac{17}{6} m R^2$). Nel secondo caso si conserva anche la quantità di moto: il centro di massa, che dista $\frac{3}{4} R$ da O, continua a muoversi lungo la direzione di $\boldsymbol{v}$ e il sistema ruota attorno ad un asse passante per il centro di massa, rispetto a cui si conserva il momento angolare (questa volta dopo l'urto il momento d'inerzia vale $\frac{41}{24} m R^2$).
R: $\omega' = 7.06$ rad/s, $v_{CM} = 2$ m/s, $\omega'' = 11.7$ rad/s.

71. L'impulso subito dall'asse è eguale ed opposto alla variazione di quantità di moto del sistema. Nell'urto si conservi il momento angolare rispetto al punto di intersezione tra l'asse z e l'asta. Dopo l'urto si utilizzi il teorema dell'energia e l'informazione sul periodo per calcolare il momento d'inerzia.
R: $|J| = 4.5$ N s, parallelo e concorde all'asse x, $\theta_0 = 6.28$ rad.

72. Il valore di J_1 si ottiene tramite il teorema del momento dell'impulso. Si applichi il teorema dell'energia con $W_{att} = -M_a \frac{\pi}{2}$. Durante l'urto si conservi il momento angolare rispetto al polo O. L'impulso esplicato dall'asse è eguale alla variazione di quantità di moto del sistema.
R: $J_1 = 2$ N s, $\omega_1 = 6.63$ rad/s, $\omega_2 = 4.47$ rad/s, $J_2 = 2.78$ N s.

73. Si applichino i teoremi dell'impulso e del momento dell'impulso.
R: $v_{CM} = 1.67$ m/s, $\omega = 10$ rad/s, $E_k = 16.7$ J.

74. Si utilizzi la conservazione del momento angolare rispetto al polo O e, dopo l'urto, la conservazione dell'energia.
R: $\omega = 5.88$ rad/s, $\Delta E_k = -44.12$ J, $\omega' = 5.37$ rad/s

75. Si conservi il momento angolare rispetto al centro dell'asta e si applichi il teorema dell'impulso lungo x e lungo y. Se l'urto è elastico oltre al momento angolare si conserva l'energia cinetica.
R: $\omega = 1.25$ rad/s, $J_x = 2.5$ N s, $J_y = 0$, $\omega' = 1.6$ rad/s, $J'_x = 3.2$ N s, $J'_y = 0$ (l'oggetto rimbalza con velocità $\boldsymbol{v}'' = -1.2\ \mathbf{u}_x$ m/s).

76. Dal moto parabolico del proiettile si ricavi v', dal moto della tavola si ricavi ω subito dopo l'urto e dalla conservazione del momento angolare nell'urto si ottenga v. L'impulso subito dall'asse è eguale ed opposto alla variazione di quantità di moto del sistema.
R: $v = 86.8$ m/s, J = 0.036 N m.

77. Si applichi la conservazione della quantità di moto e si calcoli la velocità relativa dell'insetto rispetto all'asta.
R: $t = 3$ s.

78. Si applichi la relazione tra carico e deformazione specifica, utilizzando i valori tabulati del modulo di Young.
R: sbarra $\varepsilon = 1.7 \cdot 10^{-3}$ m, asta $\varepsilon = 2.1 \cdot 10^{-3}$ m.

79. Il lavoro è dato da $\int \sigma\, d\varepsilon$.
R: $\Delta E = 1.65 \cdot 10^5$ J/m^3.

80. Si scriva il lavoro del momento elastico $-k\theta$.
R: $W_{el} = \frac{1}{2} k \theta_{in}^2 - \frac{1}{2} k \theta_{fin}^2 = -\Delta E_p$ con $E_p = \frac{1}{2} k \theta^2$.

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

10

10.1 SISTEMI E STATI TERMODINAMICI

Nella prima parte del corso di Fisica, dedicata alla meccanica, abbiamo posto l'attenzione sul moto dei punti o delle parti che costituiscono un determinato sistema. Tra le varie proprietà abbiamo visto che il lavoro compiuto dalle forze agenti è eguale alla variazione dell'energia cinetica delle parti componenti il sistema (paragrafo 5.10). In presenza di forze conservative si è visto inoltre che il lavoro si può esprimere come variazione dell'energia potenziale e che l'energia meccanica del sistema, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, resta costante durante il moto ovvero si conserva, risultato noto come *principio di conservazione dell'energia meccanica*. Se agiscono anche forze dissipative, come le forze di attrito, l'energia meccanica non si conserva, ma diminuisce; nel nostro studio della meccanica non è stato necessario approfondire le ragioni e le conseguenze della non conservazione dell'energia del sistema. D'altra parte, nei fenomeni meccanici macroscopici, la situazione di non conservazione dell'energia meccanica è praticamente sempre verificata.

Uno degli argomenti principali della *termodinamica* è proprio l'esame del bilancio energetico complessivo di un processo fisico, estendendo l'indagine a scambi di energia che non sono meccanici nel senso macroscopico finora discusso. Prima di arrivare alla formulazione di una legge di conservazione più generale è però necessario premettere un'esposizione sui sistemi e sui fenomeni di cui si occupa la termodinamica e introdurre le grandezze *temperatura* e *calore*.

Un sistema termodinamico è spesso assimilabile, da un punto di vista meccanico, ad un sistema continuo, considerato che microscopicamente è costituito da un numero di elementi dell'ordine del *numero di Avogadro*, $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$. Però non è lo studio del moto che ci interessa, né quello globale né quello dei singoli punti, che del resto sarebbe impossibile, dato il numero elevato sia di punti che di interazioni. In effetti i sistemi termodinamici che studieremo saranno tutti praticamente in quiete. Cercheremo invece di descrivere le *trasformazioni* che il sistema può subire e gli scambi energetici che ne risultano con l'ambiente circostante, individuando le grandezze più appropriate a tale descrizione. Storicamente l'origine della termodinamica classica è appunto legata al problema della produzione di lavoro con mezzi termici.

Chiamiamo *sistema termodinamico una porzione del mondo che può essere costituita da una o più parti*, per esempio un volume di gas, un liquido in equilibrio

Sistema termodinamico

con il suo vapore, un insieme di blocchi di solidi diversi; tale sistema è oggetto delle nostre osservazioni per quanto riguarda le proprietà fisiche macroscopiche che lo caratterizzano e le loro eventuali variazioni.

Ambiente

Per ambiente circostante, o semplicemente *ambiente*, intendiamo quell'insieme che può essere costituito da una sola parte (per esempio l'aria o un altro fluido in cui è immerso il sistema) o da più parti (per esempio diversi corpi solidi a contatto con il sistema), con cui il sistema può interagire: l'ambiente pertanto contribuisce in generale a determinare le caratteristiche fisiche macroscopiche del sistema e la loro evoluzione.

Universo

L'insieme sistema più ambiente si chiama *universo termodinamico*, in senso locale.

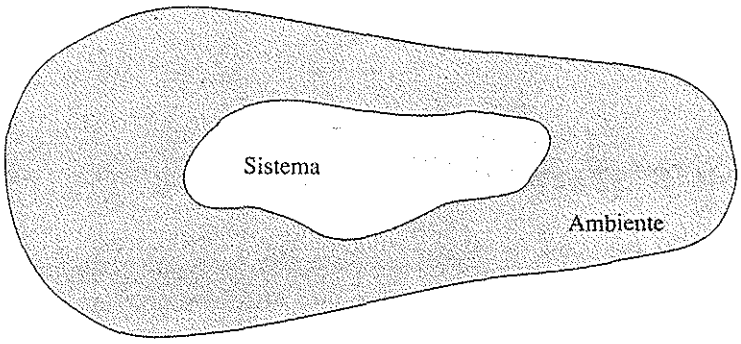


Fig. 10.1

Sistema aperto

Se tra il sistema e l'ambiente avvengono scambi di energia e di materia il sistema è detto *aperto*. Ad esempio, se il sistema è costituito da un liquido in ebollizione e l'ambiente dal recipiente che contiene il liquido, dall'atmosfera esterna compreso il vapore e dalla sorgente di calore, nel processo di ebollizione si ha trasformazione di liquido in vapore e quindi passaggio di materia dal sistema all'ambiente; inoltre vi è certamente passaggio di energia dall'ambiente al sistema tramite la sorgente di calore.

Sistema chiuso

Il *sistema* si dice *chiuso se sono esclusi scambi di materia, ma si hanno solamente scambi di energia*. Ritornando all'esempio precedente, il liquido è contenuto in un recipiente chiuso, a contatto con la sorgente di calore; il vapore prodotto rimane all'interno del sistema.

Sistema isolato

Infine il *sistema* è detto *isolato se non avvengono scambi di energia e di materia con un altro sistema esterno, cioè con l'ambiente. L'universo termodinamico* formato da un sistema e dal suo ambiente è da considerarsi come *un sistema isolato*.

Nella nostra trattazione ci occuperemo esclusivamente di sistemi chiusi, che possono scambiare solo energia.

Variabili termodinamiche

Un sistema termodinamico viene descritto tramite un numero ridotto di grandezze fisiche direttamente misurabili, dette *coordinate* o *variabili termodinamiche*, come *volume, pressione, temperatura* (che definiremo tra breve), massa, concentrazione, densità, ecc.

Alcune variabili termodinamiche, chiamate *variabili estensive*, sono additive, come *massa* e *volume*; altre invece chiamate *variabili intensive*, dipendono in generale dalla posizione del punto nel sistema, e non sono additive.

Il numero minimo di coordinate termodinamiche necessario per descrivere completamente un sistema termodinamico non è fissato a priori, ma dipende dalle

caratteristiche chimico-fisiche dei vari sistemi che vengono studiati. Lo stato di un gas ideale, ad esempio, è descrivibile tramite tre grandezze, pressione, volume e temperatura, legate tra loro dall'*equazione di stato*, per cui due sole sono variabili indipendenti mentre la terza è determinata dal valore che assumono le prime due. Le proprietà di un sistema vengono sempre espresse in funzione dei valori delle sue coordinate termodinamiche.

Osserviamo che la definizione di *stato termodinamico* è concettualmente diversa da quella di stato meccanico, per il quale in linea di principio si presuppone la conoscenza di posizione e velocità di ciascuno degli n punti che costituiscono il sistema. In questi termini un sistema termodinamico non è definibile, visto il grande valore di n. In effetti, se è noto lo stato termodinamico, non è noto in generale quello meccanico, anzi a un dato stato termodinamico possono corrispondere moltissimi stati meccanici diversi.

Consideriamo ad esempio un blocco costituito da un solido cristallino in quiete ad una certa temperatura: gli ioni che lo costituiscono sono distribuiti ordinatamente nello spazio, ai vertici di un reticolo, e oscillano intorno alle posizioni di equilibrio. Istante per istante la configurazione microscopica è diversa e lo stato meccanico dei componenti è in continua evoluzione. Il sistema però è in quiete, $\boldsymbol{v}_{CM} = 0$, la temperatura è costante, lo stato termodinamico non cambia. Non possiamo dunque determinare lo stato dinamico dei singoli elementi, ma siamo in grado di caratterizzare lo stato termodinamico del sistema complessivo.

La descrizione termodinamica di un sistema e dei suoi scambi energetici, tramite le grandezze che ne danno il comportamento in relazione ai problemi che vogliamo studiare, porta a conclusioni di grande generalità, applicabili a sistemi molto diversi tra loro. Tale descrizione però non può fornire informazioni sulle caratteristiche microscopiche del sistema, che vanno studiate in modo concettualmente diverso.

10.2 EQUILIBRIO TERMODINAMICO. PRINCIPIO DELL'EQUILIBRIO TERMICO

Lo *stato termodinamico* di un sistema è detto *di equilibrio* quando le variabili termodinamiche che lo descrivono sono costanti nel tempo. In un sistema termodinamico all'equilibrio le variabili termodinamiche sono dette *variabili di stato*.

L'equilibrio termodinamico è il risultato di tre diversi tipi di equilibrio, che devono essere realizzati contemporaneamente:

a) *equilibrio meccanico*, inteso come equilibrio di forze e momenti, secondo quanto studiato in meccanica;
b) *equilibrio chimico*: non avvengono reazioni chimiche o trasferimenti di un componente del sistema entro il sistema stesso;
c) *equilibrio termico*: la temperatura è la stessa ovunque.

Nella trattazione successiva considereremo il sistema sempre in equilibrio chimico.

Se uno stato è di equilibrio, le condizioni di equilibrio devono essere soddisfatte all'interno del sistema o di ciascuna delle sue parti, nell'interazione tra le parti del sistema e in quella tra sistema e ambiente. Quando c'è equilibrio con l'ambiente, vuol dire che esiste equilibrio tra le forze macroscopiche, qualunque sia la loro natura, agenti dall'esterno sul sistema e quelle sviluppate dal sistema; inoltre la temperatura del sistema, se questo non è isolato termicamente, è eguale alla temperatura dell'ambiente.

Ad esempio, per una massa d'acqua dentro un recipiente aperto l'equilibrio

termodinamico interno e con l'ambiente significa che la temperatura deve essere eguale in ogni punto della massa d'acqua ed eguale a quella dell'aria esterna e che la pressione nella massa d'acqua è quella prevista dalle leggi dell'equilibrio idrostatico, data una certa pressione esterna. Per una massa di gas chiusa dentro un recipiente si ha equilibrio termodinamico con l'ambiente esterno quando temperatura e pressione esterne sono eguali alla temperatura e alla pressione del gas (che è la stessa ovunque nel gas, vista la piccola densità che permette di trascurare gli effetti della forza di gravità se i volumi non sono troppo grandi, come detto nel paragrafo 9.2).

In uno *stato di equilibrio* esiste, in generale, una precisa relazione tra le coordinate termodinamiche che si esprime sotto forma di *equazione di stato*. Se, per esempio, le coordinate termodinamiche sono pressione p, volume V e temperatura T, come avviene per una quantità di sostanza omogenea e pura, l'equazione di stato si scrive, in forma implicita, $f(p, V, T) = 0$ o in una qualsiasi delle tre forme esplicite $p = p(V, T)$, $V = V(p, T)$, $T = T(p, V)$.

Equazione di stato

Dati due diversi stati di equilibrio termodinamico di un certo sistema, l'eventuale evoluzione del sistema dal primo al secondo stato, spontanea o per effetto dell'interazione con l'ambiente, si chiama *trasformazione termodinamica del sistema*. Considereremo sempre come stati iniziali e finali di una certa trasformazione stati di equilibrio. Invece gli stati intermedi attraverso cui passa il sistema durante l'evoluzione possono essere di equilibrio o di non equilibrio; in questo secondo caso non è detto che si possano determinare tutte le coordinate termodinamiche del sistema. Ai fini del calcolo si considerano anche *trasformazioni infinitesime*, tra stati molto prossimi, le cui coordinate differiscono di quantità infinitesime, per esempio dp, dV o dT.

Trasformazione termodinamica

Riprenderemo lo studio delle trasformazioni termodinamiche nel paragrafo 10.6, ma sottolineamo fin d'ora che la considerazione delle trasformazioni è fondamentale: infatti è proprio durante una trasformazione che il sistema scambia energia con l'ambiente, nelle forme che studieremo, meccanica e termica.

Un'ultima osservazione: le variabili indipendenti che cambiano durante una trasformazione sono le coordinate termodinamiche, in funzione delle quali si esprimono tutte le proprietà del sistema; il tempo non compare esplicitamente, a differenza di quanto avviene in meccanica.

Vediamo ora di precisare il concetto di equilibrio termico. Si considerino due sistemi A e B, ciascuno in equilibrio termodinamico, con il sistema A alla temperatura T_A e quello B alla temperatura T_B. I sistemi si dicono in *equilibrio termico* tra loro quando hanno la stessa temperatura, $T_A = T_B$: la *temperatura è* pertanto *l'indice dell'equilibrio termico tra due sistemi.*

Equilibrio termico

E' verificato sperimentalmente il seguente *principio dell'equilibrio termico*: due sistemi che siano ciascuno in equilibrio termico con un terzo sistema sono in equilibrio termico tra loro. Se il sistema A è in equilibrio termico con il sistema C ($T_A = T_C$) e se anche il sistema B è in equilibrio termico con C ($T_B = T_C$), allora A è in equilibrio termico con B ($T_A = T_B$).

Un metodo possibile per portare due sistemi all'equilibrio termico è quello di tenerli a contatto, tramite una parete. Se viene raggiunto l'equilibrio termico si parla di *parete diatermica*, mentre se non si raggiunge mai l'equilibrio termico, e pertanto le due temperature sono indipendenti, la *parete* è detta *adiabatica*. Nella realtà la situazione adiabatica è un caso limite, che può essere realizzato per tempi brevi, ma non in assoluto.

Due sistemi separati da una parete diatermica si dicono anche in *contatto termico* tra loro e inevitabilmente raggiungono l'equilibrio termico. Il contatto termico

Contatto termico

si può realizzare anche direttamente, senza alcuna parete, come avviene per due corpi solidi a contatto, per un corpo solido immerso in un fluido o per due fluidi non miscibili a contatto; la parete diatermica si rende necessaria quando bisogna contenere il sistema, come avviene nel caso di un gas.

Un sistema è detto adiabatico se è circondato da pareti adiabatiche e quindi non può essere messo in contatto termico con un altro sistema o con l'ambiente. Una parete è sempre necessaria per impedire o ritardare l'equilibrio termico.

Sistema adiabatico

Notiamo infine che l'esistenza di equilibrio termico tra due sistemi non presuppone affatto che essi siano anche in equilibrio meccanico, così come l'equilibrio meccanico non comporta anche quello termico: i due tipi di equilibrio sono indipendenti tra loro.

10.3 DEFINIZIONE DI TEMPERATURA. TERMOMETRI

Vediamo ora come si può procedere a una *definizione operativa di temperatura*. Per poterla effettuare devono essere realizzate due condizioni.

Innanzitutto deve esistere una grandezza X che caratterizza un fenomeno fisico e che varia con la temperatura. X si chiama *caratteristica termometrica* e la temperatura è una funzione di X; $\theta(X)$, detta *funzione termometrica*. Il dispositivo in cui avviene il fenomeno e che fornisce il valore della caratteristica termometrica è indicato come *termometro*.

Nella tabella 10.1 sono riportati alcuni tipi di termometro.

Tabella 10.1 - Termometri

Termometro	Fenomeno	Caratteristica termometrica
a liquido	dilatazione termica di un liquido	lunghezza della colonna di liquido
a resistenza	variazione della resistenza elettrica di un conduttore metallico o di un semiconduttore con la temperatura	resistenza elettrica
a gas a volume costante	variazione della pressione con la temperatura	pressione
a termocoppia	forza elettromotrice che compare in un circuito formato da due fili diversi, con una giunzione a una temperatura di riferimento e l'altra a diversa temperatura	forza elettromotrice

In secondo luogo deve esistere un sistema, in uno stato di equilibrio, definibile con precisione e riproducibile con facilità, cui viene attribuito un valore arbitrario di temperatura, detto *punto fisso*.

Il punto fisso campione, come deciso nel 1954 dalla Conferenza dei Pesi e Misure, è il *punto triplo dell'acqua*, ovvero quel particolare stato in cui ghiaccio, acqua e vapor d'acqua saturo sono in equilibrio. Al punto triplo dell'acqua è stata assegnata arbitrariamente la temperatura di 273.16 K, dove il simbolo K indica l'unità di misura prescelta, il kelvin.

Punto triplo dell'acqua

Per arrivare a esprimere numericamente la temperatura stabiliamo in via preliminare che la forma della funzione $\theta(X)$ sia $\theta(X) = \alpha X$, con α costante. E' la scelta

più semplice, giustificata però dal fatto che è valida per il termometro assoluto (par. 12.4). Il sistema, di cui vogliamo misurare la temperatura, viene messo a contatto termico con un termometro che, all'equilibrio termico, fornisce il valore X. Tale termometro al punto triplo dell'acqua dà il valore X_{pt} e per definizione abbiamo

$$\theta(X_{pt}) = a\, X_{pt} = 273.16$$

da cui $a = 273.16/X_{pt}$, valore valido per quel termometro. Ne segue che la temperatura T del sistema, espressa dal valore della funzione $\theta(X) = a\, X$, si scrive

$$T = 273.16 \frac{X}{X_{pt}} \quad \text{K} \quad . \tag{10.1}$$

La (10.1) è la formula fondamentale per ogni termometro e fornisce la temperatura empirica di quel termometro.

Rivediamo in breve la procedura seguita: si tara il termometro mettendolo in contatto termico con una cella al punto triplo dell'acqua; per misurare una qualsiasi temperatura diversa da 273.16 K si mette il termometro in contatto termico con il sistema a quella temperatura, si determina X e si calcola T dalla (10.1). Nella pratica il risultato della misura viene fornito direttamente in kelvin.

Si usa il termine *temperatura empirica* in quanto, sperimentalmente, si constata che termometri di tipo diverso, o anche due diversi termometri dello stesso tipo, danno sempre letture diverse quando sono in equilibrio termico con lo stesso stato di un certo sistema, pur dando per costruzione tutti la stessa temperatura al punto triplo dell'acqua. Vedremo nel capitolo 12 come si supera questo problema con l'introduzione della *temperatura termodinamica assoluta.*

In tabella 10.2 sono riportate le temperature, misurate con un termometro a idrogeno a volume costante e uno a resistenza di platino, di diversi sistemi in equilibrio.

Tabella 10.2 - Temperature misurate con due termometri diversi

	temperatura di ebollizione			temperatura di fusione	temperatura di sublimazione	punto triplo
	N_2	O_2	H_2O	Sn	CO_2	H_2O
termometro a idrogeno a volume costante	73	86	374	510	193	273 K
termometro a resistenza di platino	55	70	380	516	185	273 K

Ovviamente, se si vuole verificare se due sistemi sono alla stessa temperatura si deve metterli uno alla volta in contatto termico con lo stesso termometro.

Scale termometriche

Scala Celsius

La *scala* che viene più comunemente usata nelle normali misure di temperatura è quella *Celsius*, in cui la temperatura del punto triplo dell'acqua vale 0.01 gradi

Celsius (simbolo °C). Pertanto lo zero della scala Celsius è a 273.15 K e corrisponde alla temperatura di fusione del ghiaccio a pressione atmosferica. Il valore di una differenza di temperatura è assunto lo stesso in gradi Celsius o in kelvin e pertanto la formula di conversione dal valore in kelvin T (K) al valore in gradi Celsius t (°C) è semplicemente

$$t\,(°C) = T\,(K) - 273.15 \quad .$$

Nei paesi anglosassoni vengono utilizzate altre due scale di temperatura, la *scala Rankine* t (°R) e la *scala Fahrenheit* t (°F), che sono così definite rispetto alla temperatura espressa in kelvin:

$$t\,(°R) = \frac{9}{5} T\,(K) \quad , \qquad \text{Scala Rankine}$$

$$t\,(°F) = \frac{9}{5} T\,(K) - 459.67 \quad . \qquad \text{Scala Fahrenheit}$$

Il legame tra scala Fahrenheit e scala Celsius è pertanto:

$$t\,(°F) = \frac{9}{5} t\,(°C) + 32 \quad , \quad t\,(°C) = \frac{5}{9} [\, t\,(°F) - 32 \,]$$

Nella scala Fahrenheit il punto di fusione del ghiaccio (0 °C) corrisponde a 32°F e il punto di ebollizione dell'acqua (100 °C) a 212 °F; la temperatura ambiente di 20 °C vale 68 °F.

10.4 SISTEMI ADIABATICI. ESPERIMENTI DI JOULE. CALORE

Verso la metà del 1800 Joule condusse una serie di esperimenti fondamentali sugli effetti termici del lavoro meccanico.

Schematicamente, le varie esperienze eseguite da Joule su un sistema termodinamico costituito da una certa quantità d'acqua avevano lo scopo di realizzare un aumento della temperatura del sistema con procedimenti diversi.

Viene messo in rotazione un mulinello nell'acqua spendendo il lavoro W_1, fornito dalla variazione di energia potenziale di due masse che scendono sotto l'azione della forza di gravità. Con varie palette fisse immerse nell'acqua si impedisce che essa entri in rotazione. L'acqua, agitata dal mulinello, viene riscaldata per effetto dell'attrito.

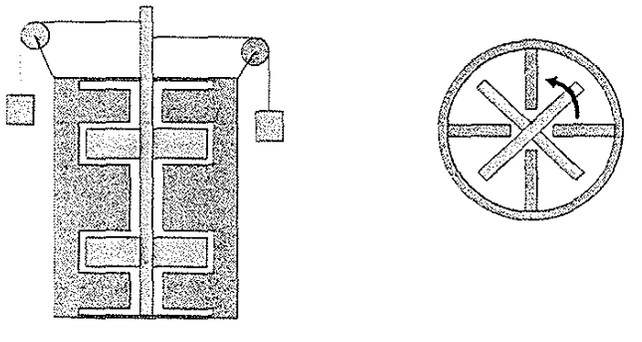


Fig. 10.2

b) Viene immerso nell'acqua un conduttore di resistenza R, percorso da corrente. W_2 è il lavoro speso per fare circolare la corrente.
c) Viene compressa una certa quantità di gas, contenuta in un recipiente con pareti diatermiche, immerso nell'acqua. Il processo di compressione del gas richiede un lavoro W_3.
d) Vengono strofinati tra loro due blocchi di metallo immersi nell'acqua. Il lavoro speso contro le forze di attrito è W_4.

Nelle varie esperienze l'insieme costituito dall'acqua e dal dispositivo meccanico o elettrico è racchiuso entro pareti adiabatiche.

Il risultato fondamentale osservato da Joule è che il lavoro speso, a parità di massa d'acqua, W_1 o W_2 o W_3 o W_4, è sempre proporzionale alla variazione di temperatura dell'acqua con la stessa costante di proporzionalità. Il sistema termodinamico massa d'acqua passa da uno stato iniziale di equilibrio, caratterizzato dal valore T_{in} della temperatura, ad uno stato finale di equilibrio con temperatura T_{fin} tramite quattro diversi processi, ma il lavoro meccanico è sempre lo stesso.

Questo risultato, l'indipendenza del lavoro dal tipo di trasformazione che congiunge due stati termodinamici, purché il sistema sia adiabatico, è confermato da altri esperimenti e può essere assunto come legge generale.

Sulla base delle considerazioni fatte per l'energia potenziale nel caso delle forze conservative (indipendenza del lavoro dal percorso che collega due posizioni) scriviamo la seguente relazione:

$$W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin} \quad , \tag{10.2}$$

dove U è una funzione che dipende solo dallo stato del sistema, cioè dalle sue coordinate termodinamiche.

Se il sistema fornisce lavoro all'esterno, W è assunto positivo e pertanto l'energia U diminuisce; se invece si compie lavoro dall'esterno sul sistema W è assunto negativo e l'energia U aumenta. Riprenderemo nel prossimo paragrafo la convenzione sui segni degli scambi di energia.

La relazione (10.2) fornisce una definizione operativa dell'energia U. Dato un valore arbitrario U_A all'energia dello stato A, preso come riferimento, il valore U_B nello stato B è determinato dal lavoro adiabatico scambiato, secondo la (10.2). L'energia U pertanto è definita a meno di una costante additiva, come nel caso dell'energia potenziale; però la presenza di questa costante è irrilevante, in quanto dal punto di vista fisico è importante solo la variazione dell'energia U.

L'aumento di temperatura di una massa d'acqua si può d'altra parte ottenere facilmente, come è esperienza comune, avvicinando l'acqua ad un corpo più caldo, cioè a temperatura superiore. Immaginiamo questa volta di avere il corpo caldo e l'acqua dentro un contenitore adiabatico: si realizza uno scambio di calore tra il corpo e l'acqua, senza nessuna azione meccanica macroscopica (masse che scendono, corpi strofinati, ecc.).

Se possiamo ottenere lo stesso cambiamento di stato termodinamico dell'acqua, segnalato dalla stessa variazione di temperatura, tramite scambio di calore o di lavoro meccanico, possiamo postulare l'equivalenza degli effetti delle due procedure e scrivere, anche nel caso di scambio di calore con lavoro nullo, una relazione analoga a (10.2):

$$Q = \Delta U \quad , \tag{10.3}$$

assumendo positivo il calore ceduto al sistema dall'esterno. Pertanto

$$Q = -W \quad , \tag{10.4}$$

Equivalenza tra calore e lavoro

dove, per chiarezza, ripetiamo che *Q rappresenta il calore scambiato, senza lavoro esterno, per far variare di Δ T la temperatura della massa d'acqua e W il lavoro che deve essere speso, in condizioni adiabatiche, per ottenere la stessa variazione di temperatura.* Il segno negativo dipende dalla convenzione adottata per i segni degli scambi di energia.

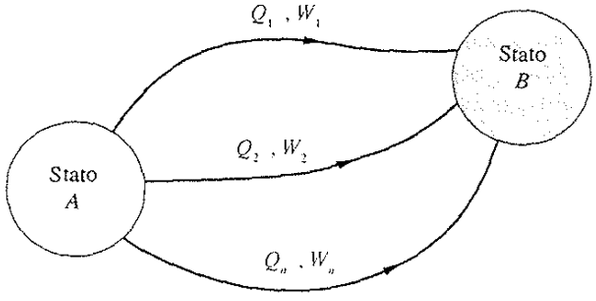
La (10.4) si chiama *equivalenza tra calore e lavoro*; essa indica anche come si possa eseguire una misura del calore scambiato. Il calore viene in questo modo espresso in joule.

L'equivalenza calore-lavoro venne formulata per la prima volta nel 1842 da Mayer.

In conclusione possiamo affermare che esiste un meccanismo di scambio di energia che non comporta movimenti macroscopici, al quale diamo il nome di *scambio di calore.*

10.5 PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA. ENERGIA INTERNA

Nel paragrafo precedente abbiamo trattato il caso di un processo con scambio di lavoro in condizioni adiabatiche. Ora consideriamo una situazione più generale: si abbia un sistema che oltre allo scambio di lavoro meccanico con l'ambiente possa avere anche scambio di calore, cioè trasmissione di energia non accompagnata da fenomeni meccanici macroscopici. Sperimentalmente si trova sempre verificato questo risultato: se il sistema compie una trasformazione dallo stato *A* allo stato *B*, scambiando calore e lavoro con l'ambiente, *Q* e *W* dipendono dalla trasformazione



$$Q_1 - W_1 = Q_2 - W_2 = \ldots = Q_n - W_n = U_B - U_A$$

Fig. 10.3

che congiunge i due stati termodinamici, mentre invece la differenza $Q - W$ risulta indipendente dalla trasformazione. Si può pertanto scrivere, posto $\Delta U = U_B - U_A$,

$$Q - W = \Delta U \quad , \quad Q = \Delta U + W \quad . \tag{10.5}$$

Primo principio della termodinamica

La (10.5) esprime il *primo principio della termodinamica*, che viene assunto come postulato basato sull'esperienza; vediamo che essa contiene come casi particolari le situazioni che ci avevano portato a scrivere (10.2).

Discutiamo il significato della (10.5), che può essere articolato in vari punti.

1) Esiste una funzione delle coordinate termodinamiche del sistema o, come si dice, *una funzione di stato*, chiamata *energia interna*, le cui variazioni danno gli scambi energetici del sistema con l'ambiente che lo circonda durante una trasformazione. Dati due stati A e B è fissata ΔU: in una particolare trasformazione dallo stato A a quello B può essere preponderante lo scambio di calore, mentre in un'altra trasformazione, sempre tra tali stati, quello di lavoro, però in ambedue le diverse trasformazioni lo scambio totale $Q - W$ è lo stesso. Si noti che se gli stati A e B sono scelti a caso, non esiste in generale una trasformazione $A\,B$ in cui sia $Q = 0$ o un'altra in cui sia $W = 0$. Inoltre, se U resta costante durante una trasformazione, e quindi $\Delta U = 0$, può essere che sia verificata la situazione $Q = 0$ e $W = 0$ oppure $Q \neq 0$ e $W \neq 0$, ma ad ogni modo si ha $Q - W = 0$, ossia $Q = W$.

2) Quando, durante una trasformazione, si fornisce energia a un sistema, sia tramite un lavoro meccanico che con uno scambio di calore, questa resta immagazzinata sotto forma di energia interna e può essere successivamente riutilizzata. Secondo il primo principio non ci sono limiti concettuali per questi processi, purché sia rispettata la (10.5). Vedremo però che esiste un limite per la riutilizzazione dell'energia termica quando studieremo *il secondo principio della termodinamica.*

Possiamo dire che la (10.5) costituisce l'espressione del bilancio energetico di una trasformazione termodinamica; si tratta di un bilancio più completo di quello che è possibile fare in meccanica, in quanto si tiene conto anche degli scambi di calore.

3) Il termine *energia interna* indica che non si tratta dell'energia cinetica del sistema nel suo complesso, $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$, o dell'energia potenziale, per esempio $M g z_{CM}$, bensì di energia *legata a proprietà interne del sistema*, come moto molecolare o forze intermolecolari, che non dipendono dallo stato complessivo di moto, ma piuttosto dalla temperatura del sistema, dalla pressione a cui è sottoposto o dal volume che occupa. E' importante osservare che l'espressione esplicita dell'energia interna in funzione delle coordinate termodinamiche che individuano lo stato di un sistema dipende dal sistema stesso.

4) Il primo principio mette in evidenza l'esistenza di un meccanismo di scambio di energia, che non è esprimibile come lavoro meccanico macroscopico: a questo diamo il nome di *calore* e, come vedremo, esso è ancora riconducibile a fenomeni meccanici, ma a livello microscopico. *La* (10.5) *fornisce la definizione più generale di calore, sia concettualmente che dal punto di vista del calcolo.* Discuteremo in seguito le varie modalità macroscopiche che danno luogo a scambi di calore. Per ora anticipiamo che il fenomeno avviene tra due sistemi solo se sono in contatto termico ed esiste tra di essi una differenza di temperatura (finita o infinitesima).

A proposito di calore e lavoro è necessario prestare attenzione alla terminologia, per evitare espressioni concettualmente errate: il calore e il lavoro sono forme di scambio di energia e quindi si deve sempre parlare di calore o lavoro scambiati tra sistemi e mai di calore o lavoro posseduti da un sistema. Ciò che un sistema possiede è una certa quantità di energia che può variare in una trasformazione, appunto a seguito di scambi di calore e lavoro. Anche espressioni come sviluppo di calore in un corpo, ad esempio a seguito del passaggio di una corrente elettrica in un conduttore o di una compressione rapida in un gas, sono errate.

Trasformazione ciclica

5) Se un sistema termodinamico esegue una qualsiasi trasformazione che lo riporti allo stato iniziale, ovvero una *trasformazione ciclica* o chiusa, si ha per definizione

$$\Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = W \quad ; \tag{10.6}$$

il calore scambiato è eguale al lavoro scambiato. Se nella trasformazione ciclica il sistema complessivamente assorbe calore, $Q > 0$, esso fornisce lavoro, $W > 0$, e costituisce una *macchina termica*. Se invece il sistema cede calore, $Q < 0$, esso deve assorbire lavoro, $W < 0$. Si noti che Q e W rappresentano la somma algebrica dei calori e dei lavori scambiati nelle singole trasformazioni che, considerate in successione, formano la trasformazione ciclica completa.

6) Per eseguire calcoli specifici è assai utile considerare trasformazioni termodinamiche nelle quali le variabili di stato cambiano di quantità infinitesime. In una tale trasformazione infinitesima il primo principio ha la forma:

$$dQ = dU + dW \tag{10.7}$$

Integrando per una trasformazione finita si ha

$$\Delta U = \int_A^B dU = U_B - U_A$$

indipendente dalla trasformazione, mentre invece, come sappiamo,

$$Q_{AB} = \int_A^B dQ$$

dipende da come si è svolta effettivamente la trasformazione e non può essere espresso come $f(B) - f(A)$; analoghe considerazioni valgono per il lavoro. Questi fatti si esprimono dicendo che, nella (10.7), *la variazione infinitesima di energia interna è un differenziale esatto*, mentre dQ e dW, cioè *le quantità infinitesime di calore e lavoro scambiati, non sono differenziali esatti*. Anche se usiamo lo stesso simbolo questa sostanziale differenza va sempre ricordata.

7) L'unità di misura di energia interna, calore e lavoro è ovviamente la stessa ed è il joule.

Convenzione sui segni di calore e lavoro

Riportiamo nella tabella 10.3 la convenzione sui segni di Q e W, adottata sulla base della principale applicazione che storicamente è stata fatta dei fenomeni termici, cioè la trasformazione di calore in lavoro nelle macchine termiche. Con tale convenzione i flussi di calore e di lavoro hanno segno opposto e il primo principio viene scritto nella forma (10.5).

Tabella 10.3 - Convenzione sui segni di Q e W

Flusso di energia	Segno
calore che entra in un sistema dall'esterno	positivo
lavoro che è compiuto da un sistema sull'esterno	positivo
calore che esce da un sistema verso l'esterno	negativo
lavoro che è compiuto dall'esterno sul sistema	negativo

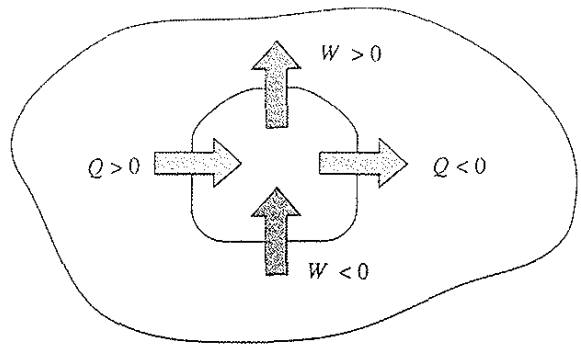


Fig. 10.4

Se invece i segni dei flussi di calore e di lavoro fossero scelti eguali, il primo principio si dovrebbe scrivere nella forma $Q + W = \Delta U$.

Naturalmente quello che importa in una trasformazione è capire qual è il flusso energetico, cioè se il calore è assorbito o ceduto dal sistema, se il lavoro è prodotto o subito, in modo da poter correttamente pervenire al bilancio energetico. I segni sono solo convenzionali, però scelta una certa convenzione questa va mantenuta in tutti i ragionamenti.

Si faccia attenzione al fatto che noi stiamo considerando i *flussi di energia dal sistema*. Se il sistema assorbe calore, e diciamo che Q è positivo, questo calore è ceduto al sistema dall'ambiente e pertanto per l'ambiente è negativo e come tale dobbiamo trattarlo se ragioniamo sull'ambiente: se Q è il calore scambiato dal sistema, $-Q$ è quello scambiato dall'ambiente. Un discorso analogo va fatto per il lavoro.

10.6 TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE. LAVORO E CALORE

Nel paragrafo 10.2 abbiamo definito una trasformazione come un passaggio del sistema attraverso diversi stati, ovvero come un processo in cui cambiano le coordinate termodinamiche, qualcuna o tutte, del sistema.

La (10.5) fissa il bilancio energetico di tale processo e infatti, oltre a definire una trasformazione, siamo interessati a calcolare quanto valgono ΔU, Q e W.

La quantità ΔU può essere calcolata direttamente se è nota l'espressione esplicita di U, altrimenti l'unico modo possibile è servirsi di (10.5), $\Delta U = Q - W$, conoscendo quindi il calore e il lavoro scambiati. Si osservi però che ΔU non deve necessariamente essere calcolata lungo la data trasformazione, bensì lungo una qualsiasi altra che abbia gli stessi stati iniziale e finale e per la quale risulti più facile determinare Q e W: infatti l'energia interna è funzione di stato e quindi ΔU non dipende dalla trasformazione.

Anche Q e W possono essere calcolati direttamente solo in casi specifici in cui si abbiano le loro espressioni analitiche, utilizzando la data trasformazione e non una qualsiasi altra con gli stessi estremi, poiché in generale i valori del calore e del lavoro scambiati cambiano con la trasformazione. Se non conosciamo le espressioni analitiche dobbiamo ricorrere al primo principio:

$$Q = \Delta U + W \quad , \quad W = Q - \Delta U \quad .$$

L'espressione del primo principio viene dunque usata in definitiva come equa-

zione ad una incognita e deve essere collegata a relazioni che permettono il calcolo delle altre due quantità.

Se conosciamo le espressioni di ΔU, Q e W in funzione delle coordinate termodinamiche, (10.5) diventa un'equazione che lega le coordinate termodinamiche durante la trasformazione, ovvero diventa l'equazione della trasformazione.

Trasformazioni adiabatiche

Si chiama *trasformazione adiabatica* una qualsiasi trasformazione in cui $Q = 0$, in cui cioè il *sistema non scambia calore con l'esterno*, ossia è isolato termicamente dall'esterno. Sistema adiabatico è un sistema che compie solo trasformazioni adiabatiche e per il quale quindi il primo principio si scrive $W = -\Delta U$, come abbiamo già visto. Gli scambi energetici con l'ambiente possono avvenire solo sotto forma di lavoro meccanico.

Sperimentalmente questa situazione si realizza chiudendo il sistema in un contenitore con pareti adiabatiche. Poiché, come discusso precedentemente, due sistemi separati da una parete adiabatica non raggiungono l'equilibrio termico, che invece viene realizzato se la parete è diatermica, concludiamo:

a) una trasformazione che porta all'equilibrio termico avviene con scambio di calore;
b) una parete diatermica permette il passaggio di calore da un sistema all'altro, è quindi una parete conduttrice di calore;
c) una parete adiabatica non permette il passaggio di calore, è quindi isolante rispetto allo scambio di calore.

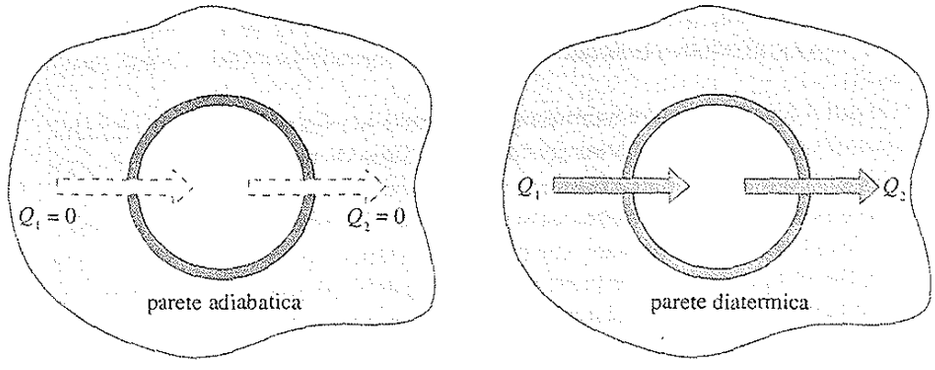


Fig. 10.5

Queste precisazioni completano l'esame del ruolo della pareti tra due sistemi dal punto di vista degli scambi di calore.

Nella pratica l'adiabaticità perfetta non esiste; tutte le sostanze con cui si realizzano pareti adiabatiche permettono un certo scambio di calore. Si ammette che possa essere adiabatica una trasformazione che avviene rapidamente, così che non ci sia tempo per scambi di calore apprezzabili.

Trasformazioni reversibili e irreversibili

Tornando a considerare una trasformazione qualsiasi, gli *stati intermedi* attraverso cui passa il sistema *possono essere di equilibrio e di non equilibrio*. Chiariamo tali situazioni con alcuni esempi.

1) Due corpi solidi a temperature diverse, T_1 e T_2 , sono contenuti in un unico contenitore adiabatico. I due corpi vengono posti in contatto termico; tra di essi c'è uno scambio di calore e alla fine essi raggiungono uno stato di equilibrio termico ad una temperatura intermedia tra T_1 e T_2 . Durante il processo c'è sempre una *differenza di temperatura finita* tra i due corpi e quindi, durante la trasformazione, non c'è mai equilibrio termico: gli stati intermedi sono di non equilibrio, anche se vi è sempre equilibrio meccanico e chimico.

2) Un contenitore adiabatico è diviso in due parti: in una c'è un gas a bassa pressione mentre nell'altra siamo in condizioni di vuoto. Viene aperto un forellino nella parete divisoria e il gas si espande fino a riempire completamente tutto il contenitore. Sperimentalmente si osserva che in questo processo c'è sempre equilibrio termico, però non c'è equilibrio meccanico: in ogni istante c'è una *differenza finita di pressione* tra le due parti e solo alla fine del processo la pressione è la stessa ovunque. Gli stati intermedi sono di non equilibrio.

3) Un corpo con velocità iniziale v viene frenato dall'attrito con il piano su cui si muove fino a fermarsi. L'energia cinetica diminuisce e contemporaneamente si osserva un aumento di temperatura delle superfici a contatto, del corpo e del piano. Assumiamo che questo processo duri un tempo breve, così da essere sostanzialmente adiabatico. Successivamente i corpi riscaldatisi cedono calore all'ambiente e alla fine tutto è ritornato alla temperatura ambiente. Nella prima fase del processo non c'è equilibrio meccanico; $W = -\Delta U$ e poiché $W = \Delta E_k$ è negativo, U cresce. Nella seconda fase non c'è equilibrio termico; $\Delta U = Q$, Q è ceduto all'ambiente, U decresce. Tutti gli stati intermedi sono di non equilibrio. Complessivamente sparisce l'energia cinetica, ma viene ceduto calore all'ambiente in quantità eguale. Vediamo così come viene realizzato il bilancio energetico nei processi meccanici dissipativi.

4) Un gas è contenuto in un recipiente, immerso a sua volta in una vasca d'acqua a temperatura costante T. Le pareti del recipiente sono diatermiche per cui il gas è in equilibrio termico alla temperatura T. Muovendo una parete del contenitore si lascia espandere il gas lentamente, così che ci sia sempre in pratica l'equilibrio termico con l'acqua. L'espansione viene effettuata applicando alla parete mobile una forza che in ogni istante è appena inferiore a quella di pressione esercitata dal gas, in modo che sia realizzato anche l'equilibrio meccanico. Tale situazione può essere sperimentalmente ottenuta se la parete mobile è orizzontale e su di essa sono posati N piccoli pesetti di massa m, tali che il loro peso $N\,m\,g$ controbilanci la forza di pressione del gas; togliendo lentamente e successivamente i pesetti si compie il processo descritto. Ci si approssima sempre meglio alla condizione di equilibrio meccanico quanto più piccoli e numerosi sono i pesetti. Oppure si può equilibrare la pressione del gas con la pressione (regolabile) di un altro gas che agisce sulla parte esterna della parete mobile.

A differenza dei casi 1), 2), 3) tutti gli stati intermedi si possono considerare di equilibrio: la pressione e la temperatura del gas sono in ogni istante conosciute e sono eguali ai valori caratteristici dell'ambiente esterno. Se invece l'espansione del gas fosse rapida, non sarebbe possibile realizzare le condizioni di equilibrio in ogni istante.

Dagli esempi discussi e da molti altri simili possiamo trarre alcune conclusioni:

per effettuare una trasformazione che passi attraverso stati di equilibrio bisogna procedere con variazioni molto piccole delle coordinate termodinamiche, in modo che queste siano in pratica definite in ogni istante. Ciò si può realizzare discostandosi molto poco da uno stato di equilibrio, per permettere che la trasformazione avvenga, e attendendo il ristabilirsi dell'equilibrio nelle nuove condizioni prima di procedere a un'ulteriore variazione infinitesima di stato. Ne consegue che la trasformazione deve svolgersi lentamente.

Osserviamo però che la lentezza della trasformazione, se è in pratica una condizione necessaria, non è certamente sufficiente. Nei casi 1), 2), 3) visti precedentemente, per quanto lento sia il processo gli stati intermedi sono sempre di non equilibrio.

Oltre all'esame delle condizioni di equilibrio o non equilibrio si deve verificare durante la trasformazione l'eventuale presenza di *forze dissipative*, come attriti che si oppongono allo spostamento di parti meccaniche durante lo scambio di lavoro, attriti viscosi, ecc.

In definitiva, possiamo classificare le trasformazioni secondo il seguente schema:

a) *una trasformazione è detta reversibile se essa avviene attraverso stati di equilibrio e in assenza di qualsiasi forza dissipativa;* — Trasformazione reversibile

b) *una trasformazione è detta irreversibile qualora* non si svolga secondo le modalità precedenti, ossia *passi attraverso stati di non equilibrio o avvenga in presenza di forze dissipative oppure si verifichino, durante il suo svolgimento, entrambe queste situazioni.* — Trasformazione irreversibile

Le trasformazioni reversibili sono casi limite, utilissime concettualmente per i calcoli, ma difficilmente realizzabili.

Una trasformazione reversibile può essere arrestata in qualunque stato intermedio e, variando di poco le condizioni esterne, si può invertire il verso della trasformazione, ripercorrendo gli stessi stati già attraversati. In tal caso cambia il segno degli scambi di energia e della variazione di energia interna.

Infatti, consideriamo la trasformazione reversibile $A\,B$, cioè dallo stato iniziale A a quello finale B, durante la quale l'energia interna varia della quantità $\Delta U = U(B) - U(A)$ e vengono scambiate le quantità di lavoro e calore W e Q. Percorrendo la trasformazione in senso inverso la variazione di energia interna è $-\Delta U = U(A) - U(B)$, come è ovvio trattandosi di una funzione di stato. Poiché la trasformazione è reversibile le coordinate termodinamiche sono note durante il processo e in ogni stato sono legate da una precisa relazione matematica, l'equazione di stato; da ciò deriva, come vedremo in esempi successivi, che il lavoro si può esprimere con un integrale che contiene le coordinate e le loro variazioni; se si cambia il segno delle variazioni cambia il segno dell'integrale e W diventa $-W$, cioè $W_{AB} = -W_{BA}$. Allora, dall'espressione (10.5) del primo principio si ricava che nella trasformazione reversibile percorsa in senso inverso cambia anche il segno del calore, Q diventa $-Q$, cioè $Q_{AB} = -Q_{BA}$.

Quando avremo discusso il secondo principio della termodinamica saremo in grado di comprendere meglio, dal punto di vista concettuale, il significato di reversibilità e irreversibilità.

10.7 CALORIMETRIA

Il primo principio della termodinamica introduce e definisce la grandezza fisica calore, mettendo in evidenza che, in generale, lo scambio di calore comporta per un

sistema una variazione di energia interna e uno scambio di lavoro secondo (10.5); questa relazione offre anche un possibile modo per calcolare esplicitamente il calore in una generica trasformazione, come discusso nel paragrafo 10.6.

Esistono però processi particolari, e molto comuni, in cui è possibile ricavare un'espressione analitica del calore scambiato direttamente in funzione della variazione delle coordinate termodinamiche nella trasformazione.

Consideriamo l'esempio 1) del paragrafo 10.6 in cui due corpi a diversa temperatura venivano messi in contatto termico all'interno di un contenitore adiabatico. Se T_e è il valore della temperatura di equilibrio raggiunta da entrambi i corpi, il corpo più caldo passa dalla temperatura T_1 a T_e con $T_e < T_1$, mentre quello più freddo passa da T_2 a T_e, con $T_e > T_2$. Nel processo non viene scambiato lavoro né con l'ambiente né tra i due corpi, se ammettiamo che le variazioni di volume dei due corpi siano trascurabili; inoltre i due corpi non scambiano calore con l'ambiente. Pertanto Q e W sono nulli e l'energia interna totale del sistema, costituito dai due corpi, resta costante.

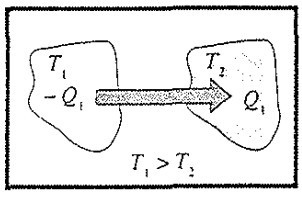


Fig. 10.6

Tuttavia lo stato termodinamico del primo corpo cambia e di conseguenza cambia la sua energia interna della quantità ΔU_1; analogamente l'energia interna del secondo corpo cambia di ΔU_2. Dovendo essere $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$, abbiamo $\Delta U_1 = -\Delta U_2$, le variazioni di energia interna dei due corpi sono eguali in modulo ed opposte. Inoltre, l'applicazione di (10.5) a ciascun corpo separatamente dà $\Delta U_1 = Q_1$ e $\Delta U_2 = Q_2$: il calore scambiato dal primo corpo è eguale ed opposto a quello scambiato dal secondo, $Q_1 = -Q_2$. D'altra parte gli esperimenti di Joule fanno ritenere che l'energia interna cresca con la temperatura, per cui $\Delta U_1 < 0$ e $\Delta U_2 > 0$: in conclusione possiamo affermare che il calore ceduto dal primo corpo, il corpo più caldo, è eguale in modulo a quello assorbito dal secondo corpo, più freddo.

In linea di principio, il calore scambiato in queste condizioni può essere misurato secondo la seguente metodologia:

a) si cede Q_1 ad una massa d'acqua, ponendo il corpo a contatto termico con l'acqua per il tempo necessario alla variazione $T_e - T_1$ di temperatura del corpo; in corrispondenza anche l'acqua subisce una variazione di temperatura ΔT, con ΔT non necessariamente eguale a $T_e - T_1$ (in modulo);
b) si misura, per esempio con uno dei dispositivi di Joule, il lavoro W_2 necessario per produrre la stessa variazione ΔT nella stessa massa d'acqua;
c) si pone $|Q_1| = W_2$.

Nel realizzare queste misure si trova che esiste proporzionalità tra il calore Q scambiato da un corpo, la massa del corpo stesso e la variazione della sua temperatura:

$$Q = m\,c\,(T_{fin} - T_{in}) \quad , \tag{10.8}$$

dove c è una grandezza caratteristica della sostanza di cui è costituito il corpo, in generale funzione a sua volta della temperatura, chiamata *calore specifico*. Osserviamo che il calore è una grandezza estensiva, mentre il calore specifico è una grandezza intensiva.

Calore specifico

Da (10.8) si deduce che *il calore specifico rappresenta il calore che occorre scambiare con l'unità di massa di una data sostanza, alla temperatura T, per farne variare la temperatura di* 1 K *(ovvero di* 1 °C).

Capacità termica

Il prodotto $C = m\,c$, detto *capacità termica* del corpo, *rappresenta a sua volta il calore necessario per far variare di* 1 K *la temperatura del corpo.*

La relazione (10.8) può essere scritta in termini infinitesimi:

$$dQ = m\,c\,dT \quad , \tag{10.9}$$

essendo dQ il calore infinitesimo scambiato dalla massa m alla temperatura T e dT la corrispondente variazione infinitesima di temperatura. Da (10.9) segue per il calore specifico

$$c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT} \quad . \tag{10.10}$$

Ritornando ai due corpi in contatto termico, l'eguaglianza $Q_1 = -Q_2$ diviene in base a (10.8)

$$m_1 c_1 (T_e - T_1) = -m_2 c_2 (T_e - T_2)$$

da cui, noti i calori specifici e misurate le masse e le temperature iniziali, si può calcolare la temperatura finale di equilibrio T_e.

Il risultato trovato si può generalizzare: quando un corpo solido o liquido presenta una variazione di temperatura da T_1 a T_2 a seguito del contatto termico con un altro corpo, ammettiamo che abbia scambiato il calore

$$Q = m\,c\,(T_2 - T_1) \quad , \tag{10.11}$$

essendo m la sua massa e c il suo calore specifico. Il calore risulta assorbito se $T_2 > T_1$, ceduto se $T_2 < T_1$. Qualora nell'intervallo di temperatura da T_1 a T_2 non si possa assumere che il calore specifico sia praticamente costante bisogna invece scrivere

$$Q = \int dQ = m \int_{T_1}^{T_2} c\,(T)\,dT \quad . \tag{10.12}$$

Risultati analoghi possono essere stabiliti per i gas, anche se la situazione è più complessa, come vedremo nel capitolo 11.

Ritornando alla definizione (10.10) di calore specifico, in molte situazioni si preferisce fare riferimento al calore scambiato da un certo numero di moli di una sostanza e pertanto si definisce anche il *calore specifico molare*

$$c = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT} \quad , \tag{10.13}$$

Calore specifico molare

dove n è il numero di moli. In tal caso (10.9), (10.11) e (10.12) diventano rispettivamente

$$dQ = n\,c\,dT \tag{10.14}$$

$$Q = n\,c\,(T_2 - T_1) \tag{10.15}$$

$$Q = n \int_{T_1}^{T_2} c\,(T)\,dT \tag{10.16}$$

Ricordiamo (si veda l'appendice B) che una *mole* di sostanza è la quantità di materia di quella data sostanza che contiene $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ entità elementari (atomi o molecole), essendo N_A il numero di Avogadro. Una mole non corrisponde quindi sempre alla stessa massa, bensì a un numero di grammi eguale alla massa molecolare della sostanza stessa (si veda il paragrafo 11.1).

Unità di misura

calore specifico	J/kg K
calore specifico molare	J/mole K
capacità termica	J/K

In particolare per fare aumentare di 1 K un chilogrammo d'acqua da 287.66 a 288.66 K, cioè da 14.5 a 15.5 °C, si trova che occorre cedere 4186.6 J e questo appunto è il valore del calore specifico dell'acqua a quella temperatura, espresso in J/kg K.

E' infine necessaria una precisazione riguardo alle definizioni (10.10), o (10.13), di calore specifico. Quando la trasformazione avviene in assenza di lavoro scambiato con l'ambiente $dW = 0$ e $dQ = dU$, per cui si può scrivere

$$c = \frac{1}{m}\frac{dU}{dT} \quad , \quad c = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} \quad . \tag{10.17}$$

Gli scambi di calore che abbiamo descritto in questo paragrafo avvenivano in tali condizioni e il riferimento alla variazione di energia interna rende la definizione precisa. Se però è compiuto lavoro esterno il calore scambiato dipende dalla trasformazione e quindi sono possibili casi in cui per una stessa sostanza si possano definire diversi calori specifici e anche può avvenire che la definizione stessa di calore specifico perda significato. A parte il caso di una trasformazione adiabatica, in cui non c'è calore scambiato, in una trasformazione in cui c'è scambio di calore anche se la temperatura è costante (paragrafo 10.8) la nostra definizione potrebbe dare un calore specifico infinito o indefinito. Come vedremo meglio in seguito, una definizione del tipo (10.10) conserva significato solo quando il calore scambiato può essere espresso come variazione di una funzione di stato.

Misura dei calori specifici

Un metodo particolare per misurare il calore specifico di una sostanza solida si realizza con lo strumento chiamato *calorimetro di Regnault* (figura 10.7). Consideriamo un recipiente pieno di liquido, con immerso un termometro e un agitatore: il tutto è chiuso dentro un contenitore a pareti adiabatiche. Sia $C_1 = m\,c$ la capacità

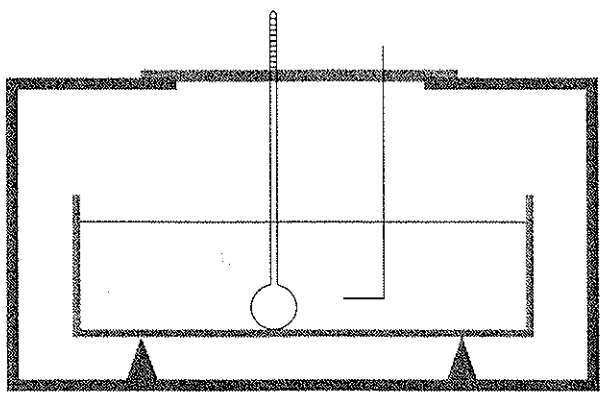


Fig. 10.7

termica del liquido, C_2 quella del restante materiale (termometro, agitatore, recipiente) nel contenitore adiabatico e T_2 la temperatura iniziale.

Si prende un corpo di massa M, calore specifico incognito c_x, alla temperatura $T_1 > T_2$ e lo si immerge nel liquido. In breve tempo si raggiunge l'equilibrio termico alla temperatura T_e. Durante il processo si deve avere l'avvertenza di agitare il liquido per rendere uniforme la temperatura più rapidamente.

Il bilancio dei calori scambiati, presi in modulo, è dato da

$$M\, c_x\, (T_1 - T_e) = (C_1 + C_2)\, (T_e - T_2) \quad .$$

Il primo termine rappresenta il calore ceduto dal corpo mentre quello a secondo membro il calore assorbito dal calorimetro. Nota M e tarato il calorimetro (determinazione di C_1 e C_2), dalla misura delle temperature iniziale e finale si risale a c_x.

La principale difficoltà della misura sta nell'imperfetto isolamento termico, per cui si nota che la temperatura finale T_e non resta costante, ma diminuisce lentamente. Ciò indica che il sistema cede calore all'esterno. Il calorimetro di Regnault fornisce la misura dei calori specifici con una precisione non superiore all'1%.

Un'osservazione importante: nella misura della temperatura del liquido, come di qualsiasi altra sostanza, la capacità termica del termometro deve essere sufficientemente piccola di modo che durante il contatto termico, necessario per la misura, lo scambio di calore tra corpo e termometro sia piccolo e non venga perciò troppo alterata la temperatura da misurare.

In tabella 10.4 riportiamo alcuni valori di calori specifici.

Tabella 10.4 - Calori specifici

Sostanza	Temperatura		Calore specifico	
acqua	288 K	15 °C	4186.8	J/kg K
alcool etilico	293	20	2240.0	
alluminio	293	20	896.0	
argento	298	25	234.0	
ferro	293	20	448.0	
ghiaccio	273	0	2051.5	
mattone	293	20	837.0	
oro	298	25	129.0	
piombo	14	− 259	29.3	
piombo	173	− 100	117.2	
piombo	293	20	129.8	
rame	298	25	387.0	
silicio	298	25	703.0	
vetro per finestre	293	20	628.0	

Come si vede dalla tabella 10.4 il calore specifico del piombo varia notevolmente in un ampio intervallo di temperatura; d'altra parte, per intervalli di temperatura non troppo grandi e a temperature non troppo basse, la variabilità è limitata.

ESEMPIO 10.1

Un pezzo di materiale solido di massa $m_s = 0.1$ kg viene riscaldato a 300 °C e poi immerso in un contenitore, a pareti adiabatiche, contenente 2 litri d'acqua inizialmente a 20°C. Se la temperatura finale del sistema è di 21.3°C, si determini il calore specifico del solido, assumendo i calori specifici indipendenti dalla temperatura.

Soluzione
Utilizziamo l'eguaglianza tra i moduli dei calori scambiati:

$$m_a c_a (21.3 - 20) = m_s c_s (300 - 21.3) \quad ,$$

con $m_a = 2$ kg , $c_a = 4186.8$ J/kg K , $m_s = 0.1$ kg ; risulta

$$c_s = 390.6 \text{ J/kg K} \quad ,$$

per cui il solido è presumibilmente rame. Il calore ceduto dal solido all'acqua è dato da

$$Q = m_s c_s (300 - 21.3) = 10886 \text{ J} \quad .$$

ESEMPIO 10.2

Due corpi solidi, fatti della stessa sostanza, di masse $m_1 = 0.3$ kg e $m_2 = 0.8$ kg, vengono messi in contatto termico in un ambiente adiabatico. Le temperature iniziali dei due corpi sono $T_1 = 800$ K e $T_2 = 200$ K. Si determini la temperatura di equilibrio.

Soluzione
Essendo i corpi della stessa sostanza non è necessario conoscere il calore specifico. Pertanto

$$m_1 (T_1 - T_e) = m_2 (T_e - T_2) \Rightarrow T_e = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 363.6 \text{ K.}$$

Calori specifici dei solidi

Nella figura 10.8 è riportato l'andamento tipico del calore specifico molare delle sostanze solide in funzione della temperatura, misurata in unità di T_D, *la temperatura di Debye*. La temperatura di Debye è un parametro caratteristico del tipo di solido e il suo valore dà un'indicazione della *coesione del materiale*. Si noti che per $T / T_D > 1$ il calore specifico molare tende a un valore costante, eguale per tutte le sostanze solide, pari a circa 25 J/mole K (legge di Dulong-Petit).

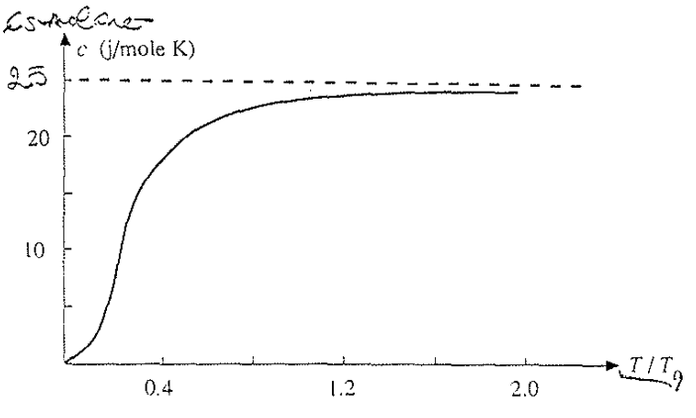


Fig. 10.8

In tabella 10.5 sono riportati i valori della temperatura di Debye per alcuni solidi.

Tabella 10.5 - Temperatura di Debye

Sostanza	T_D (K)	Sostanza	T_D (K)
alluminio	398	rame	315
argento	215	piombo	80
diamante	1860	sale NaCl	280
ferro	420	zinco	250
nickel	370		

Per valori bassi di T_D il calore specifico può essere assunto costante anche alla temperatura ambiente.

10.8 PROCESSI ISOTERMI. CAMBIAMENTI DI FASE

Durante la trasformazione descritta nell'esempio 4) del paragrafo 10.6 il gas resta sempre in equilibrio termico con l'acqua, la cui temperatura si mantiene costante. Vedremo nel capitolo 11 che l'energia interna di un gas ideale è funzione solo della temperatura e quindi, nella situazione in esame, $\Delta U = 0$ e, secondo (10.5), $Q = W$. Si è realizzato così un flusso di calore dall'acqua al gas in condizioni isoterme e il calore assorbito non comporta un aumento di temperatura del gas, bensì la produzione di lavoro, compiuto dal gas che si espande. E' questo un caso in cui non si può applicare (10.8) e il calore scambiato si calcola tramite (10.5).

Una classe importante di processi isotermi è costituita dai *cambiamenti di fase*, ovvero dai passaggi di una sostanza da una fase all'altra, per esempio dalla fase solida alla fase liquida o dalla fase liquida a quella di vapore. La terminologia dei vari cambiamenti di fase è riassunta nella tabella 10.6.

Cambiamenti di fase

Tabella 10.6 - Cambiamenti di fase

Cambiamento di fase	Terminologia
solido ⇒ liquido	fusione
liquido ⇒ solido	solidificazione
liquido ⇒ vapore	evaporazione
vapore ⇒ liquido	condensazione
solido ⇒ vapore	sublimazione
vapore ⇒ solido	sublimazione

Alcuni cambiamenti di fase, come fusione e solidificazione, che avvengono a una determinata temperatura, costante durante il processo, costituiscono un punto di riferimento (punto fisso) per le scale termometriche, purché siano ben precisate le condizioni esterne, soprattutto la pressione. L'evaporazione di un liquido ha luogo invece a qualsiasi temperatura; essa assume un carattere particolare solo quando la pressione massima del vapore eguaglia la pressione esterna: si ha in tal caso l'*ebollizione* che avviene a una ben determinata temperatura, dipendente dalla

pressione esterna.

Nella definizione della scala Celsius si era utilizzato il punto fisso fornito dal ghiaccio fondente a pressione atmosferica, posto eguale a 0°C, e quello corrispondente all'ebollizione dell'acqua a pressione atmosferica, posto eguale a 100°C.

Calore latente

I cambiamenti di fase sono accompagnati da scambi di calore e si osserva che, per unità di massa, si tratta di quantità ben definite, dette *calori latenti* λ. Pertanto il calore richiesto per il cambiamento di fase della massa m di una sostanza pura è dato da

$$Q = m\,\lambda \quad . \tag{10.18}$$

Il calore Q deve essere ceduto alla sostanza per fare avvenire, ad esempio, la fusione o sottratto alla sostanza per produrre la solidificazione.

In tabella 10.7 riportiamo i valori dei calori latenti di alcune sostanze per diversi tipi di cambiamento di fase a pressione atmosferica. L'unità di misura è J/Kg.

Tabella 10.7 - Calori latenti

Sostanza	Cambiamento di fase	Temperatura (K)	Calore latente (J/kg)
acqua	fusione	273	$3.3 \cdot 10^5$
acqua	ebollizione	373	$22.6 \cdot 10^5$
alcool etilico	fusione	159	$10.4 \cdot 10^4$
alcool etilico	ebollizione	351	$85.4 \cdot 10^4$
alluminio	fusione	933	$9.0 \cdot 10^4$
alluminio	ebollizione	2723	$11.4 \cdot 10^6$
anidride carbonica	sublimazione	213	$3.7 \cdot 10^5$
azoto	fusione	63.3	$25.5 \cdot 10^3$
elio	fusione	3.5	$5.2 \cdot 10^3$
elio	ebollizione	4.2	$20.9 \cdot 10^3$
ferro	fusione	1803	$2.1 \cdot 10^5$
oro	fusione	1336	$64.5 \cdot 10^3$
ossigeno	fusione	54.4	$13.8 \cdot 10^3$
piombo	fusione	600	$24.5 \cdot 10^3$
piombo	ebollizione	2023	$87.1 \cdot 10^4$
platino	fusione	2046	$1.1 \cdot 10^5$
rame	fusione	1356	$13.4 \cdot 10^4$
rame	ebollizione	1460	$506.5 \cdot 10^4$
stagno	fusione	505	$6.0 \cdot 10^4$
zolfo	fusione	392	$38.1 \cdot 10^3$

Nel caso dell'evaporazione il calore latente non ha un valore fisso, ma è una funzione decrescente della temperatura e si annulla alla temperatura critica (paragrafo 11.9).

Una caratteristica molto importante dei cambiamenti di fase è di essere, in opportune condizioni, trasformazioni praticamente reversibili.

ESEMPIO 10.3

Un pezzetto di ghiaccio, di massa $m_1 = 30$ g e alla temperatura $T_1 = 258$ K (– 15°C), viene immerso in $m_2 = 50$ g d'acqua alla temperatura $T_2 = 333$ K (60°C). Se il sistema è contenuto in un recipiente a pareti adiabatiche si determini la temperatura di equilibrio T_e.

Soluzione

Per portare il ghiaccio dalla temperatura T_1 al punto di fusione, $T_0 = 273$ K (0°C), l'acqua deve cedere il calore $Q_1 = m\, c_g\, (T_0 - T_1)$, dove c_g è il calore specifico del ghiaccio; per fondere il ghiaccio occorre il calore $Q_2 = m_1 \lambda$, essendo λ il calore latente di fusione. L'acqua può cedere al massimo, portandosi da T_2 a T_0, il calore $Q_3 = m_2\, c\, (T_2 - T_0)$. Considerando, come abbiamo fatto, i valori assoluti, se $Q_3 > Q_1 + Q_2$ tutto il ghiaccio fonde e la temperatura di equilibrio T_e è maggiore di T_0; altrimenti il sistema raggiunge l'equilibrio a T_0, con solo una parte del ghiaccio fusa, e potrebbe anche verificarsi il caso che l'acqua solidifichi tutta o in parte. Calcoliamo i calori utilizzando i dati delle tabelle 10.4 e 10.7:

$$Q_1 = 0.03 \cdot 2051.5 \cdot 15 = 923 \text{ J} \quad ,$$

$$Q_2 = 0.03 \cdot 3.3 \cdot 10^5 = 9900 \text{ J} \quad ,$$

$$Q_3 = 0.05 \cdot 4186.8 \cdot 60 = 12560 \text{ J} \quad .$$

Si verifica pertanto che Q_3 è maggiore di $Q_1 + Q_2$. La temperatura di equilibrio T_e si ottiene dalla relazione

$$m_1\, c_g\, (T_0 - T_1) + m_1\, \lambda + m_1\, c\, (T_e - T_0) = - m_2\, c\, (T_e - T_2)$$

e risulta $T_e = 279.8$ K = 6.6°C.

Sorgenti di calore

Abbiamo visto in qualche esempio come lo scambio di calore avvenga talvolta con sistemi a temperatura costante. Nello studio delle macchine termiche troveremo che esse scambiano calore con un certo numero di corpi a temperatura costante.

Definiamo come *sorgente di calore* o *serbatoio un corpo con capacità termica* praticamente *infinita* e quindi con la proprietà di poter scambiare calore restando a temperatura costante.

Una grande massa d'acqua o d'aria può essere considerata una sorgente di calore. Invece un corpo con massa non elevata può essere considerata una sorgente solo per un tempo limitato ed è necessario fornire o sottrarre energia per mantenerlo a temperatura costante. Esempi pratici sono i forni o gli ambienti frigoriferi. La simbologia usata per le sorgenti di calore è mostrato in figura 10.9.

Nel caso a) il calore scambiato è positivo per il sistema e negativo per la sorgente a temperatura T; nel caso b) Q è negativo per il sistema e positivo per la sorgente.

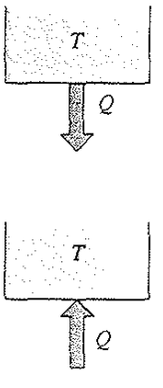


Fig. 10.9

Quando un sistema è a contatto con una sorgente se la differenza di temperatura tra sistema e sorgente è infinitesima c'è l'equilibrio termico durante lo scambio. Se invece la differenza di temperatura è finita non può esserci equilibrio termico: questo può essere raggiunto solo se si mantiene il contatto termico abbastanza a lungo, fino a che il sistema raggiunge la temperatura T della sorgente. Nel primo caso lo scambio di calore avviene in modo reversibile, nel secondo il processo è irreversibile.

10.9 TRASMISSIONE DEL CALORE

Il primo principio della termodinamica riguarda gli scambi energetici che avvengono durante una trasformazione termodinamica.

Lo scambio di lavoro concerne il lavoro meccanico macroscopico legato allo

spostamento di qualche oggetto, ad esempio la parete mobile di un recipiente pieno di gas.

Lo scambio di calore presuppone invece un meccanismo microscopico, cui accenneremo in seguito, e avviene quando due corpi sono a contatto, direttamente o attraverso altri corpi.

Lo scambio e anche il trasporto di calore entro un sistema possono avvenire tramite tre meccanismi distinti, che nel loro complesso sono indicati come *trasmissione del calore*: *conduzione*, *convezione* e *irraggiamento termici*. I tre meccanismi operano sempre in presenza di una differenza di temperatura tra sistema e ambiente o all'interno dello stesso sistema.

Conduzione di calore

Consideriamo un corpo esteso in cui la temperatura non sia uniforme e tracciamo le superficie isoterme, cioè il luogo dei punti in cui la funzione $T(x, y, z)$ assume un valore costante, per esempio T_1 sulla superficie isoterma S_1, T_2 su S_2, ecc.

La legge fenomenologica che regola la conduzione del calore è la *legge di Fourier*, formulata nel 1815. Se dS è un elemento di una superficie isoterma, dT/dn il modulo del gradiente di temperatura, ortogonale a dS e diretto nel verso delle temperature crescenti, il calore che passa attraverso dS nel tempo dt è dato da

Legge di Fourier

$$dQ = -k \frac{dT}{dn} dS\, dt \quad ; \tag{10.19}$$

Conducibilità termica

la grandezza k, detta *conducibilità* o *conduttività termica*, è tipica del materiale ed è in generale funzione della temperatura (le unità di misura sono J/ms K).

Il segno negativo in (10.19) indica che il flusso di calore avviene nel senso in cui la temperatura diminuisce, cioè nel verso opposto al gradiente di temperatura, dalla regione a temperatura maggiore a quella a temperatura minore.

L'esistenza di un gradiente di temperatura in un corpo, ovvero la mancanza di equilibrio termico, indica che c'è una trasmissione di calore attraverso il corpo, regolata dalla legge di Fourier.

La conducibilità termica varia da sostanza a sostanza anche di diversi ordini di grandezza, come appare nella tabella 10.8 dove sono riportate anche le temperature a cui si riferisce il valore di k.

I metalli sono buoni conduttori termici, i gas e i dielettrici, eccetto il diamante, sono invece cattivi conduttori termici; i liquidi sono in una situazione intermedia.

La conducibilità termica ha una diversa dipendenza dalla temperatura per le varie sostanze. Nei gas semplici k cresce debolmente con la temperatura, in proporzione alla radice quadrata della stessa. Anche nei liquidi e nei dielettrici non vi è una notevole variazione con la temperatura. Nei metalli puri la conducibilità presenta sempre un massimo a bassa temperatura, che è due o tre ordini di grandezza maggiore del valore a temperatura ambiente. Il rame, per esempio, ha un massimo nella conducibilità termica a circa 20 K, con un valore di $2 \cdot 10^4$ J/ ms K da confrontare con $3.9 \cdot 10^2$ J/ms K a temperatura ambiente; a 2 K il valore è di $4 \cdot 10^3$ J/ms K.

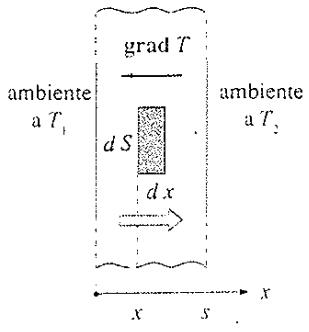


Fig. 10.10

Come vedremo nel corso di Fisica II, esiste un legame tra *conduttività termica* e *conduttività elettrica*.

Per illustrare l'uso di (10.19) consideriamo un problema particolare, quello della parete piana indefinita, posta tra due ambienti alle temperature costanti T_1 e T_2, con $T_1 > T_2$. Lo spessore della parete è s (vedi figura 10.10), k la conduttività termica,

Tabella 10.8 - Conducibilità termica

	T (K)	k (J/m s K)		T (K)	k (J/m s K)
Metalli			**Liquidi**		
alluminio	273	201.0	acqua	300	0.59
argento	273	418.7	alcool etilico	300	0.18
ferro	273	50.2	glicerina	290	2.7
oro	300	310.0	mercurio	300	7.9
piombo	300	35.0			
rame	273	387.4	**Dielettrici**		
stagno	300	61.0	amianto	293	$8.0 \cdot 10^{-2}$
			cemento	293	$8.0 \cdot 10^{-1}$
Gas			diamante puro	300	$2.0 \cdot 10^{3}$
anidride carbonica	273	0.13	ghiaccio	273	2.1
aria	293	0.23	gomma	293	$2.0 \cdot 10^{-1}$
azoto	293	0.023	lana di roccia	300	$4.2 \cdot 10^{-2}$
elio	293	0.14	legno di larice	293	$3.7 \cdot 10^{-1}$
idrogeno	293	0.17	mattone	293	$6.3 \cdot 10^{-1}$
ossigeno	293	0.024	polistirolo espanso	300	$4.0 \cdot 10^{-2}$
			sughero	300	$4.0 \cdot 10^{-2}$
			vetro	293	$8.4 \cdot 10^{-1}$

assunta costante. L'elemento di parete indicato in figura ha superficie $d\,S$ (ortogonale all'asse x), spessore $d\,x$, volume $d\,S\,d\,x$ e contiene la massa $d\,m = \rho\,d\,V = \rho\,d\,S\,d\,x$; ρ è la densità costante del materiale.

Attraverso l'elemento di superficie $d\,S$ (con coordinata x) viene ceduto a $d\,m$ il calore $d\,Q_1$, mentre $d\,m$ cede $d\,Q_2$ attraverso un elemento di superficie $d\,S$ (con coordinata $x + d\,x$):

$$d\,Q_1 = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x d\,S\,d\,t \quad ,$$

$$d\,Q_2 = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} d\,S\,d\,t = -k\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_x d\,x\right] d\,S\,d\,t \quad ;$$

nel passaggio dal primo al secondo membro di $d\,Q_2$ abbiamo utilizzato lo sviluppo in serie di Taylor di $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$ arrestandoci al primo termine.

Complessivamente l'elemento di massa $d\,m$ riceve da sinistra il calore $d\,Q_1$ e cede a destra il calore $d\,Q_2$, per cui assorbe

$$d\,Q_1 - d\,Q_2 = k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,d\,S\,d\,x\,d\,t$$

e si ha in corrispondenza un aumento di temperatura, secondo (10.9):

$$k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,d\,S\,d\,x\,d\,t = d\,m\,c\,d\,T = \rho\,d\,S\,d\,x\,c\,d\,T \quad ,$$

essendo c il calore specifico del materiale. Pertanto

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho \frac{c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad . \tag{10.20}$$

L'equazione (10.20) regola la variazione di temperatura in funzione del tempo e della posizione all'interno della parete, con le condizioni al contorno $T = T_1$ per $x = 0$ e $T = T_2$ per $x = s$ in qualsiasi istante.

A regime, quando la temperatura in ciascun punto ha raggiunto un valore stazionario, costante nel tempo, si ha

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad .$$

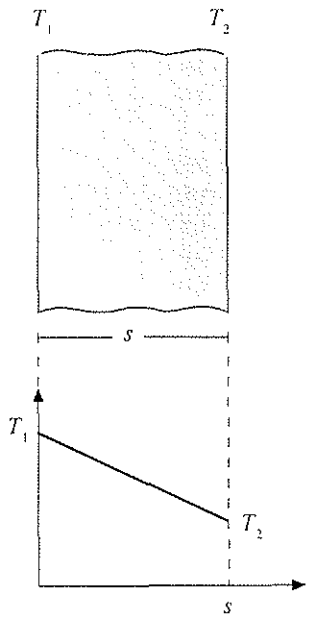


Fig. 10.11

Di conseguenza in *regime stazionario* la soluzione di (10.20) deve avere la forma $T = a\,x + b$, cioè la temperatura deve essere una funzione lineare di x. Imponendo per $x = 0$ $T_1 = b$ e per $x = s$ $T_2 = a\,s + b$ si ottiene

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{s} x \quad \Rightarrow \quad |\,\mathbf{grad}\, T\,| = \frac{T_1 - T_2}{s} \quad .$$

La temperatura decresce nella parete dal valore T_1 al valore T_2, con gradiente costante ovvero linearmente.

Attraverso una superficie finita S nel tempo t passa dall'ambiente posto a sinistra della parete a quello a destra il calore

$$Q = k \frac{T_1 - T_2}{s} S\,t \quad .$$

Ad esempio attraverso 1 m^2 di una parete di mattoni, spessa 10 cm e sottoposta a una differenza di temperatura $\Delta T = 20°C$, passa in un'ora il calore $Q = 4.2 \cdot 10^6$ J.

Assumendo T_2 come temperatura dell'ambiente esterno e T_1 come temperatura di una stanza si può avere, in base al calcolo precedente, un'idea del calore che deve essere fornito da un impianto di riscaldamento per mantenere una data temperatura interna. Un calcolo realistico dovrà tener conto anche della diversa conducibilità termica e delle diverse caratteristiche delle varie aperture nella stanza, tipo porte e finestre.

Convezione del calore

La conduzione termica è importante nei solidi metallici; essa avviene anche nei fluidi, però le conducibilità termiche sono piuttosto piccole, come è evidente dai dati in tabella 10.8. Inoltre la conduzione nei fluidi è difficile da osservare perché in essi si manifesta un altro fenomeno di trasmissione del calore, la *convezione*, che descriviamo qualitativamente.

Se si riscalda una massa fluida, quella parte più vicina alla sorgente di calore assume una temperatura maggiore e diminuisce di densità, dilatandosi. Viene alterato l'equilibrio statico nel fluido, poiché gli elementi di fluido più caldi risentono, dalle parti di fluido circostante più fredde, una spinta di Archimede maggiore

del loro peso. Si originano correnti ascensionali (dette di convezione), che permettono ad elementi con temperatura minore di avvicinarsi a loro volta alla sorgente di calore. La trasmissione di calore avviene con spostamenti di materia, tramite correnti convettive.

La *convezione* è responsabile del movimento delle masse d'aria nell'atmosfera o delle correnti marine, con effetti sulle condizioni climatiche e metereologiche.

Irraggiamento

Un corpo a temperatura T emette energia sotto forma di onde elettromagnetiche, che si propagano nello spazio circostante, anche se vuoto. Il *potere emissivo del corpo* ε, che ha il significato di energia emessa per unità di tempo e per unità di superficie, è dato dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$\varepsilon = \sigma e T^4 \qquad (10.21)$$

Legge di Stefan-Boltzmann

ove σ è una costante universale, pari a $5.67 \cdot 10^{-8}$ J/m^2 s K^4, ed e una grandezza, detta *emissività*, che può variare tra 0 e 1, dipendendo dalle proprietà della superficie. Se $e = 1$ la superficie è detta *superficie nera* e presenta, a parità di temperatura, il massimo potere emissivo.

Contemporaneamente il corpo assorbe una parte dell'energia elettromagnetica emessa da altri corpi e che lo colpisce; in particolare una superficie nera assorbe tutta l'energia che incide su di essa.

Tramite questi fenomeni la temperatura di un corpo aumenta o diminuisce a seconda del bilancio tra energia irradiata ed assorbita; se il bilancio è in parità la temperatura resta costante, il corpo è in equilibrio con l'ambiente circostante. Naturalmente l'equilibrio può essere mantenuto anche fornendo o sottraendo energia con altri mezzi, per compensare l'irraggiamento.

E' attraverso il meccanismo dell'irraggiamento che il sole trasmette energia alla superficie terrestre, nella misura di $1.53 \cdot 10^3$ J/m^2 s.

Malgrado gli effetti termici descritti siano equivalenti a quelli dovuti a scambi di calore, in realtà è improprio parlare di trasmissione del calore per irraggiamento, se per calore intendiamo un particolare modo di trasmissione di energia legato a fenomeni meccanici microscopici, ma non all'emissione e all'assorbimento di onde elettromagnetiche.

Parete adiabatica. Vaso Dewar

Vediamo in base ai vari effetti studiati come è possibile realizzare una parete adiabatica. Se lo scopo è quello di limitare lo scambio di calore in presenza di piccole differenze di temperatura è sufficiente una opportuna combinazione di materiali isolanti, cioè materiali a bassa conducibilità termica; questa tecnica è usata, per esempio, nelle pareti dei comuni frigoriferi.

Se invece si vuole ridurre al massimo lo scambio di calore, come è necessario per conservare a lungo in un contenitore un liquido criogenico (ad esempio azoto a 70 K o idrogeno a 20 K) oppure per studiare i fenomeni chimico-fisici che avvengono a bassissime temperature, bisogna innanzitutto impedire conduzione e convezione. Si utilizza allo scopo un contenitore detto *vaso Dewar* dal nome del suo inventore, costituito da due pareti isolanti, per esempio di vetro, internamente argentate, tra le quali è fatto il vuoto: in questo modo si minimizza la trasmissione

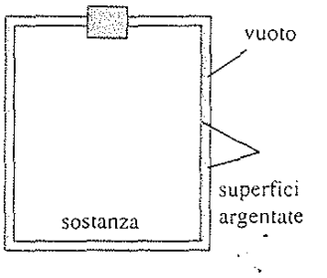


Fig. 10.12

di calore per conduzione e convenzione nell'intercapedine. Resta la possibilità di trasmissione di energia per irraggiamento, anche se piccola a basse temperature, secondo (10.21): per questa ragione l'interno dell'intercapedine è argentato, cioè per ridurre il potere emissivo specifico (che è nullo per un parete perfettamente riflettente).

Passaggio di calore da un solido a un fluido

La trasmissione di calore da un solido ad un fluido è molto comune nella pratica; avviene per esempio nel riscaldamento di un locale tramite i termosifoni. Consideriamo un solido alla temperatura T, con una superficie pari a S, mentre il fluido si trova, nei punti non prossimi al solido, alla temperatura $T_0 < T$. Il fenomeno è

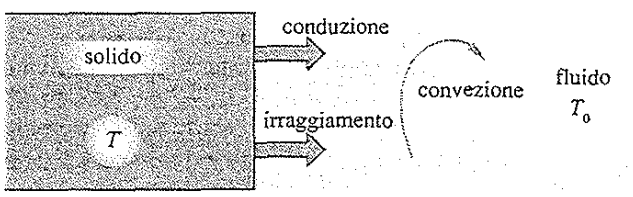


Fig. 10.13

complesso perché avvengono sia convezione che conduzione e irraggiamento. Tuttavia, in prima approssimazione, se $\Delta T = T - T_0$ non è molto grande, il fenomeno può essere descritto con una legge molto semplice, scoperta da Newton: il modulo del calore scambiato nel tempo t, ceduto dal solido e assorbito dal fluido, è dato da

Legge di Newton

$$Q = h\,(T - T_0)\,S\,t \quad . \tag{10.22}$$

La costante h è detta conducibilità termica esterna; per un filo caldo (perché percorso da corrente elettrica) immerso in aria $h = 10$ J/m^2 s K.

10.10 DILATAZIONE TERMICA DI SOLIDI E LIQUIDI

Il volume di un corpo, a pressione costante, aumenta al crescere della temperatura. Il fenomeno prende il nome di *dilatazione termica*.

Tale effetto riveste particolare importanza nella pratica: di esso bisogna tener conto nella costruzione di binari ferroviari, di ponti e di edifici, per evitare che la dilatazione, se non compensata, porti a deformazioni o a rotture. Molti termometri pratici funzionano basandosi sulla dilatazione termica di una colonna di liquido e numerosi servomeccanismi di controllo della temperatura sfruttano le variazioni di dimensioni di opportuni sensori.

Per variazioni ΔT abbastanza piccole di temperatura la variazione Δl della lunghezza l di una delle dimensioni del corpo risulta proporzionale a ΔT, se la pressione è costante:

$$\Delta l = \lambda\, l\, \Delta T \quad \text{ovvero} \quad l + \Delta l = l\,(1 + \lambda\, \Delta T) \quad ;$$

λ, *coefficiente di dilatazione lineare*, è caratteristico del materiale di cui è composto il corpo ed è in generale funzione della temperatura. Dalla relazione precedente abbiamo

$$\lambda = \frac{1}{l}\,\frac{\Delta l}{\Delta T} \qquad (10.23)$$

Coefficiente di dilatazione lineare

e si vede che λ esprime la variazione relativa di lunghezza per variazione unitaria di temperatura; l'unità di misura è K^{-1} . A rigore (10.23) dà il coefficiente di dilatazione medio nell'intervallo ΔT.

Nella determinazione della variazione del volume di un corpo al variare della temperatura dobbiamo distinguere tra *corpi isotropi* per i quali λ assume lo stesso valore in tutte le direzioni, e pertanto non viene modificata la forma nella dilatazione, e *corpi anisotropi*, come i solidi cristallini, per i quali λ varia al variare della direzione.

Consideriamo un corpo isotropo a forma di parallelepipedo, di dimensioni l_1 , l_2, l_3 e quindi volume $V = l_1\, l_2\, l_3$, alla temperatura T. Il volume alla temperatura $T + \Delta T$ è dato da

$$V + \Delta V = l_1\,(1 + \lambda\,\Delta T)\, l_2\,(1 + \lambda\,\Delta T)\, l_3\,(1 + \lambda\,\Delta T)$$

$$= V\,(1 + \lambda\,\Delta T)^3 \approx V\,(1 + 3\,\lambda\,\Delta T) \quad .$$

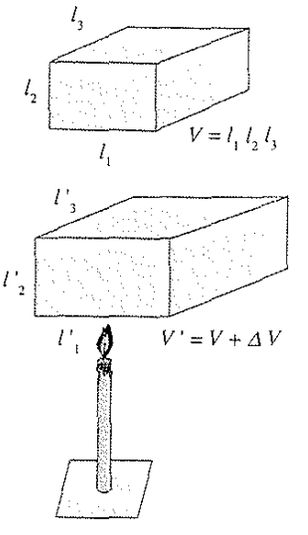


Fig. 10.14

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che i termini contenenti λ^2 e λ^3 si possono trascurare rispetto al termine lineare perché i valori tipici di λ sono sempre inferiori a $10^{-3}\ K^{-1}$. Ne segue

$$\Delta V = V\,3\,\lambda\,\Delta T = V\,\alpha\,\Delta T \quad ,$$

introducendo il *coefficiente di dilatazione cubica*

$$\alpha = \frac{1}{V}\,\frac{\Delta V}{\Delta T} \qquad (10.24)$$

Coefficiente di dilatazione cubica

che, pertanto, nei corpi isotropi, vale $3\,\lambda$; il risultato è indipendente dalla forma del corpo. La relazione di linearità tra variazione relativa di volume e variazione di temperatura vale anche per i liquidi, sempre in intervalli limitati di temperatura.

In modo analogo si trova che il *coefficiente di dilatazione superficiale* di una lastra piana isotropa è $2\,\lambda$.

Nella tabella 10.9 riportiamo i coefficienti di dilatazione lineare per alcuni solidi isotropi e di dilatazione cubica per alcuni liquidi, alla temperatura ambiente di 20°C.

All'aumentare del volume la densità del corpo che si dilata diminuisce. A questo comportamento generale fa eccezione l'acqua che, nell'intervallo di temperatura da 0°C a 4°C ha un coefficiente di dilatazione cubica negativo: pertanto all'aumentare della temperatura il volume diminuisce e la densità aumenta, raggiungendo il valore massimo a 4°C; per temperature superiori il comportamento è normale, con $\alpha > 0$.

L'andamento del coefficiente di dilatazione cubica dell'acqua tra 0°C e 20°C è rappresentato in figura 10.15.

Quando la temperatura di una grande massa d'acqua, come per esempio in un lago, diminuisce a causa del raffreddarsi dell'aria, l'acqua dello strato superficiale

Tabella 10.9 - Coefficienti di dilatazione

Dilatazione lineare			
materiale	$\lambda\,(K^{-1})$	materiale	$\lambda\,(K^{-1})$
acciaio	$1.1 \cdot 10^{-5}$	ottone	$1.9 \cdot 10^{-5}$
alluminio	$2.4 \cdot 10^{-5}$	piombo	$2.9 \cdot 10^{-5}$
cemento	$1.2 \cdot 10^{-5}$	rame	$1.7 \cdot 10^{-5}$
ferro	$9.1 \cdot 10^{-6}$	vetro per finestre	$9.0 \cdot 10^{-6}$
invar (lega Fe-Ni)	$7.0 \cdot 10^{-7}$	vetro pyrex	$3.2 \cdot 10^{-6}$
Dilatazione cubica			
materiale	$\alpha\,(K^{-1})$	materiale	$\alpha\,(K^{-1})$
acqua	$1.8 \cdot 10^{-4}$	cloroformio	$14.0 \cdot 10^{-4}$
alcool etilico	$10.4 \cdot 10^{-4}$	glicerina	$5.3 \cdot 10^{-4}$
benzina	$9.6 \cdot 10^{-4}$	mercurio	$1.8 \cdot 10^{-4}$

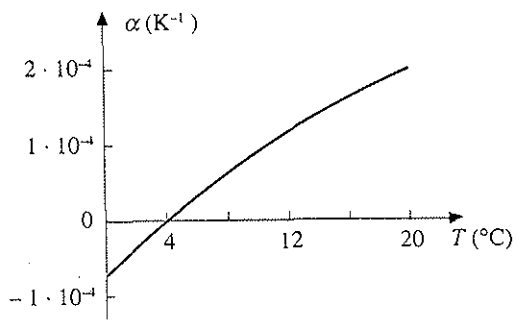


Fig. 10.15

freddo, che ha densità maggiore rispetto all'acqua più profonda essendo a temperatura minore, scende verso il fondo spingendo in superficie l'acqua sottostante, che a sua volta si raffredda. Queste correnti convettive cessano a 4°C perché la densità dell'acqua ora diminuisce al diminuire della temperatura: l'acqua più fredda resta in superficie e inizia a solidificare quando viene raggiunta la temperatura di 0°C. Il ghiaccio che si forma resta anch'esso in superficie perché la sua densità è minore di quella dell'acqua, mentre in profondità la temperatura dell'acqua si mantiene intorno a 4°C, permettendo ai pesci e alle altre forme di vita subacquea di sopravvivere.

10.11 CONCLUSIONI RIASSUNTIVE

Rivediamo le principali nozioni introdotte in questo capitolo.

a) *Primo principio della termodinamica*: è l'equazione fondamentale del bilancio energetico, cui bisogna fare riferimento in ogni problema termodinamico.
b) *Calore*: rappresenta un meccanismo di scambio energetico, che si può spiegare solo su base microscopica.
c) *Temperatura*: è l'indice dell'equilibrio termico tra sistemi. Se due sistemi non

sono in equilibrio termico e vengono posti a contatto termico, vi è uno scambio di calore tra di essi, fino a che si raggiunge l'equilibrio termico. La temperatura, come vedremo, è legata all'energia cinetica del moto molecolare.

Nel capitolo 11 studieremo in particolare l'applicazione del primo principio alle trasformazioni di un sistema gassoso e calcoleremo gli scambi energetici in diversi casi, considerando l'applicazione pratica dei risultati ottenuti, cioè la trasformazione di calore in lavoro, come si realizza nelle macchine termiche.

Nota sulle unità di misura

Finora abbiamo usato per il calore e il lavoro la stessa unità di misura, il joule. Storicamente, per il calore era stata introdotta un'altra unità di misura, la *caloria*, pari alla *quantità di calore che bisogna cedere a un chilogrammo d'acqua per far passare la sua temperatura da* 14.5 *a* 15.5°C. Con questa definizione *si assume eguale a* 1 *il calore specifico dell'acqua a* 15°C.

In termini della caloria le unità di misura per le varie grandezze sono:

calore	Cal ,	calore specifico	Cal/kg K ,
capacità termica	Cal/kg ,	conducibilità termica	Cal/m s K .

La caloria è un'unità maggiore del joule e il rapporto vale 4186.8:

$$1 \text{ caloria} = 4186.8 \text{ joule} \quad .$$

Tale valore è quello moderno, cioè più preciso, del rapporto costante trovato da Joule tra il calore e il lavoro che producevano lo stesso aumento di temperatura in una data massa d'acqua.

Noi continueremo ad usare, di norma, la stessa unità (joule) per lavoro e calore, però sottolineamo che nella termotecnica la caloria è l'unità di uso più comune.

Ricordiamo inoltre che la caloria sopra definita veniva indicata anche con il termine grande caloria o *chilocaloria* (kcal), mentre per caloria o *piccola caloria* si intendeva la quantità di calore che bisogna cedere ad un grammo d'acqua per far passare la sua temperatura da 14.5 a 15.5°C, pari a 4.1868 J.

Caloria, chilocaloria

11 GAS IDEALI E REALI

11.1 LEGGI DEI GAS. EQUAZIONE DI STATO DEI GAS IDEALI

Ricordiamo quanto abbiamo visto nei capitoli 8 e 9; un gas è un fluido con le seguenti caratteristiche:

a) non ha forma né volume proprio, occupa pertanto tutto il volume a disposizione, per esempio quello del recipiente che lo contiene;

b) è comprimibile facilmente, con conseguenti variazioni notevoli di volume, densità e pressione.

Considerata una certa quantità di gas, le *variabili termodinamiche* più appropriate per descrivere lo stato termodinamico del gas e le eventuali trasformazioni sono la *pressione p*, il *volume V* e la *temperatura T*.

Nel capitolo 9, studiando le proprietà statiche e dinamiche dei fluidi, abbiamo discusso il comportamento del fluido ideale, incomprimibile e privo di viscosità, e sottolineato che, nel moto in un condotto, un gas si avvicina molto alla condizione di moto di un fluido ideale. In questo capitolo invece non ci occupiamo della dinamica di un gas: consideriamo il gas racchiuso dentro un contenitore di volume V, con un valore della pressione eguale in tutti i punti, se V non è molto grande.

Quando il volume del contenitore cambia, come può avvenire se una parte dello stesso è mobile, si realizza uno scambio di lavoro con l'ambiente esterno; inoltre, a seconda del tipo di pareti del contenitore, diatermiche o adiabatiche, è possibile o viene impedito lo scambio di calore con l'ambiente. Il gas può dunque compiere trasformazioni in cui scambia soltanto lavoro o calore con l'ambiente, oppure entrambi; in ogni caso il bilancio energetico è regolato dal primo principio della termodinamica.

Ci occuperemo più avanti degli aspetti energetici delle trasformazioni di un sistema gassoso; adesso stabiliamo alcune semplici relazioni tra le coordinate termodinamiche di un gas, che sono tanto meglio verificate quanto più un gas si avvicina a condizioni di pressione sufficientemente bassa e di temperatura alta rispetto a quella per cui si avrebbe condensazione (alla data pressione). Si parla in tal caso di *comportamento ideale*, con un significato diverso del termine ideale, già usato nel moto di un fluido. Vedremo più chiaramente nel paragrafo 11.10 le condizioni fisiche che individuano un gas ideale.

Legge isoterma di Boyle

Si abbia un gas in equilibrio termodinamico ad una certa pressione entro un dato

volume e a temperatura T: se si fanno variare i valori della pressione e del volume, mantenendo costante la temperatura, si trova che in tutti i possibili stati di equilibrio isotermi vale la relazione

$$p\,V = \text{costante} \quad ; \qquad (11.1)$$

Legge di Boyle

a temperatura costante la pressione è inversamente proporzionale al volume.

Una *trasformazione isoterma* tra due stati di equilibrio di un gas si può realizzare, ad esempio, se il contenitore, a pareti diatermiche, è mantenuto in contatto termico con una sorgente di calore alla temperatura T e la parete mobile si muove a seguito di una differenza infinitesima di pressione tra gas e ambiente esterno. Si hanno condizioni di equilibrio meccanico e termico e possiamo assumere che durante la trasformazione la temperatura sia costante e la pressione del gas sempre eguale a quella esterna.

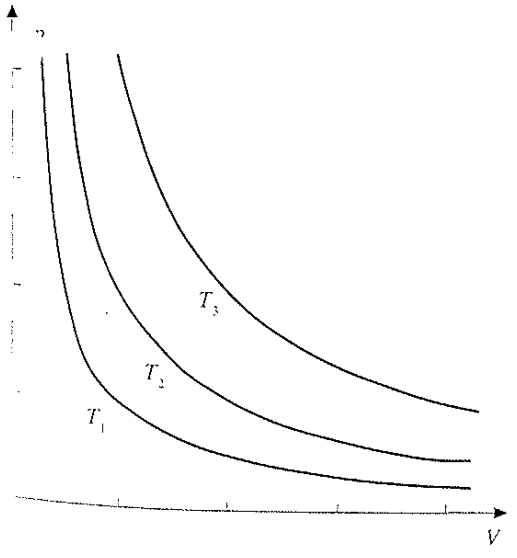
Comunque il gas passi da uno stato di equilibrio a pressione p_1 e volume V_1 ad un altro con pressione p_2 e volume V_2, ma con la stessa temperatura, sia cioè compiendo la trasformazione sopra descritta oppure una qualsiasi altra in cui la temperatura vari (crescendo e diminuendo o viceversa), la *legge di Boyle* (11.1) stabilisce che si ha sempre

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad .$$

In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano, con il volume sull'asse delle ascisse e la pressione sull'asse delle ordinate, il luogo dei punti che rappresentano gli stati di equilibrio di un gas a una data temperatura è costituito da un ramo di iperbole: infatti la (11.1) è l'equazione di una iperbole equilatera nelle coordinate p,V. Per ogni temperatura si ha una diversa iperbole e le curve così ottenute si chiamano le *isoterme del gas ideale*. Nella figura 11.1 sono mostrate alcune isoterme; poiché la costante di (11.1) è proporzionale alla temperatura, come vedremo tra breve, si ha $T_3 > T_2 > T_1$.

Isoterme del gas ideale

Il piano (p, V) utilizzato per la rappresentazione degli stati di equilibrio del gas viene detto *piano di Clapeyron.*



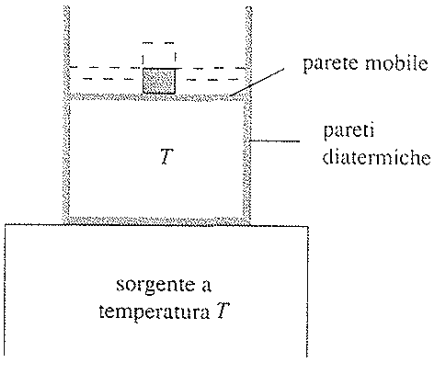


Fig. 11.1

Legge isobara di Volta-Gay Lussac

Se la pressione di un gas durante una trasformazione resta costante, si parla di *trasformazione isobara*; si verifica che in condizioni isobare il volume varia linearmente con la temperatura:

$$V = V_0 (1 + \alpha t) \quad . \tag{11.2}$$

Nella (11.2) la temperatura è espressa in gradi Celsius, V_0 è il volume occupato dal gas per $t = 0$ e α è una costante che varia poco al variare del tipo di gas, detta *coefficiente di dilatazione termica*; in effetti da (11.2) si può ricavare una relazione analoga a (10.24).

Per provare la validità della *legge isobara di Volta-Gay Lussac* (11.2) si può mettere il gas in equilibrio termico con diverse sorgenti di calore, mantenendo sempre l'equilibrio meccanico con l'ambiente (pressione interna eguale alla pressione esterna costante) e ogni volta misurare il volume del contenitore, che ha una parete mobile come nel caso precedente.

La trasformazione isobara, nel piano (p, V) già considerato, è rappresentata da un segmento di retta parallelo all'asse dei volumi (figura 11.2).

Legge isocora di Volta-Gay Lussac

Se invece si mantiene costante il volume di un gas la pressione risulta funzione lineare della temperatura:

$$p = p_0 (1 + \beta t) \quad . \tag{11.3}$$

Anche ora la temperatura è espressa in gradi Celsius; p_0 è la pressione del gas per $t = 0$ e β una costante, praticamente indipendente dal tipo di gas.

Una trasformazione a volume costante si dice *isocora*; nel piano (p, V) essa è rappresentata da un segmento di retta parallelo all'asse delle pressioni (figura 11.2).

La verifica della *legge isocora di Volta-Gay Lussac* (11.3) si può eseguire utilizzando il solito contenitore, mantenendo bloccata la parete mobile e misurando la pressione in diversi stati di equilibrio, con il gas in contatto termico con diverse sorgenti di calore.

Ricordiamo quanto detto all'inizio e cioè che il comportamento dei diversi gas è in accordo con le leggi (11.1), (11.2), (11.3) quanto più ci si avvicina alle condizioni di gas ideale (bassa pressione e alta temperatura). Così facendo si osserva anche che le costanti α e β assumono lo stesso valore per tutti i gas:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273.15} \, ^\circ\mathrm{C}^{-1} \quad .$$

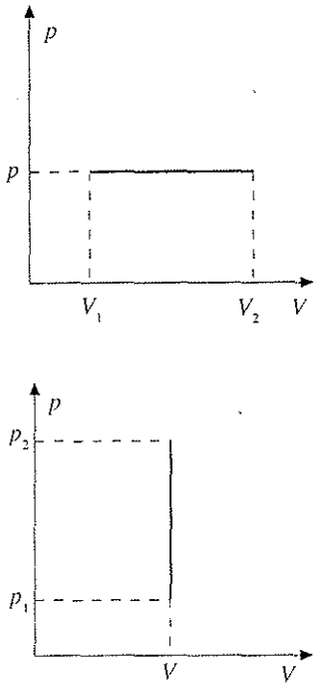


Fig. 11.2

Le due leggi (11.2) e (11.3) si possono pertanto scrivere

$$V = V_0 \, \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = V_0 \, \alpha T \quad , \tag{11.4}$$

$$p = p_0 \, \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = p_0 \, \alpha T \quad , \tag{11.5}$$

dove con $T = \frac{1}{\alpha} + t = 273.15 + t$ è indicata la temperatura misurata in kelvin (vedi paragrafo 10.3). Abbiamo così ritrovato la relazione tra i valori della temperatura espressi in gradi Celsius e in kelvin, dandone una giustificazione.

Legge di Avogadro

La quarta legge dei gas è la *legge di Avogadro*, di carattere completamente diverso dalle precedenti leggi elementari, in quanto direttamente collegata alla struttura microscopica di un gas. Essa stabilisce che *volumi eguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di molecole.*

Avogadro dedusse la legge che porta il suo nome osservando che quando due gas, alla stessa temperatura e pressione, si combinano in una reazione chimica dando luogo a un composto ($2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$, $H_2 + Cl_2 \rightarrow 2HCl$, $S_2 + 2O_2 \rightarrow 2SO_2$), i valori dei volumi delle quantità di gas che partecipano alla reazione stanno in rapporti semplici tra loro (2:1, 1:1, 1:2 negli esempi visti) e questi rapporti sono immutabili.

Notiamo che anche la legge di Avogadro si riferisce a gas che abbiano un comportamento ideale e quindi obbediscano alle leggi precedentemente enunciate. Per esempio due volumi di gas, eguali a una data temperatura e pressione, restano eguali ad un'altra temperatura se i due gas si comportano esattamente alla stessa maniera al variare della temperatura; ovvero eguali numeri di molecole di due gas diversi occupano sempre lo stesso volume, nelle stesse condizioni di pressione e temperatura, solo se i gas sono ideali.

Detta M la massa totale del gas e m la massa di ciascuna delle molecole che lo compongono, il numero di molecole è $N = M / m$. La massa m è il prodotto della massa molecolare A per l'unità di massa atomica m_u, cioè

$$m = A\, m_u = A \cdot 1.6604 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \quad \Rightarrow \quad N = 6.0221 \cdot 10^{26}\, \frac{M}{A} \ .$$

Considerando una massa M numericamente eguale ad A, ovvero A chilogrammi di gas, quantità che si chiama *chilomole*, risulta

Chilomole

$$N = N_A = \frac{1}{m_u} = 6.0221 \cdot 10^{26} \qquad \text{molecole/chilomole} \ ,$$

Numero di Avogadro

numero detto *di Avogadro*. Se invece si considera una massa M eguale ad A grammi di gas, quantità che si chiama *mole*, il numero di Avogadro vale

$$N_A = 6.0221 \cdot 10^{23} \qquad \text{molecole/mole} \ .$$

Dalla legge di Avogadro discende la definizione della *settima unità fondamentale*, quella della *quantità di materia* (vedi appendice B). Si chiama *mole una quantità di materia che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi contenuti in* 0.012 kg *dell'isotopo* ^{12}C *del carbonio*, ovvero $N_A = 6.0221 \cdot 10^{23}$ entità elementari. Una chilomole corrisponde a 10^3 moli e contiene $6.0221 \cdot 10^{26}$ entità elementari.

Mole

E' importante sottolineare che con la mole non viene introdotta una diversa unità di massa. Infatti una mole di idrogeno gassoso ($A = 2$) corrisponde ad una massa di $2 \cdot 10^{-3}$ kg, una di ossigeno gassoso ($A = 32$) a $32 \cdot 10^{-3}$ kg, una di acqua ($A = 18$) a

$18 \cdot 10^{-3}$ kg: quindi ad una quantità di materia data da un certo numero di moli corrispondono masse diverse a seconda della sostanza considerata, però queste masse contengono tutte lo stesso numero di molecole.

Come conseguenza della legge di Avogadro *una mole di qualsiasi gas, a una data temperatura e pressione, occupa sempre lo stesso volume*. Si trova che se la pressione è quella atmosferica ($p_0 = 101325$ Pa) e la temperatura è $T_0 = 273.15$ K = 0 °C, tale volume vale

Volume molare

$$V_m = 0.022414 \text{ m}^3 = 22.414 \text{ litri} \quad .$$

V_m viene indicato col nome di *volume molare*. Pertanto n moli occupano un volume pari a $n V_m$ e in particolare una chilomole occupa 22.414 m³, nelle dette condizioni di pressione e temperatura.

Equazione di stato del gas ideale

Se consideriamo n moli di un gas alla pressione atmosferica p_0 e alla temperatura $T_0 = 273.15$ K, esse occupano, come abbiamo appena detto, il volume $V_0 = n V_m$. Mantenendo costante il volume e portando la temperatura al valore T, la pressione in base alla (11.5) assume il valore

$$p_T = p_0 \alpha T \quad .$$

Moltiplicando per V_0 si ha

$$p_T V_0 = p_0 V_0 \alpha T = p_0 V_T \quad ,$$

dove la seconda eguaglianza è in accordo con (11.4). V_0 e p_T sono le coordinate termodinamiche in un particolare stato di equilibrio alla temperatura T, come lo sono p_0 e V_T per un altro stato, sempre alla temperatura T. In base alla (11.1)

$$p_T V_0 = p_0 V_T = p V \quad ,$$

essendo p e V le coordinate in un generico stato di equilibrio, purché a temperatura T. Otteniamo dunque

$$p V = p_0 V_0 \alpha T = n p_0 V_m \alpha T \quad .$$

Il prodotto $p_0 V_m \alpha$ è una costante universale, che ha lo stesso valore per tutti i gas, e quindi

Equazione di stato del gas ideale

$$pV = n R T \tag{11.6}$$

con

Costante del gas ideale

$$R = p_0 V_m \alpha = 1.01325 \cdot 10^5 \cdot 0.022414 \cdot \frac{1}{273.15}$$

$$= 8.314 \text{ J/mole K} = 8314 \text{ J/chilomole K} \quad .$$

Definiamo, sulla base delle tre leggi elementari e della legge di Avogadro, come

gas ideale un sistema le cui coordinate termodinamiche in uno stato di equilibrio obbediscono alla (11.6), detta *equazione di stato di un gas ideale*. Pertanto in un gas ideale il prodotto della pressione per il volume è proporzionale al numero di moli e alla temperatura attraverso la costante universale R, detta *costante dei gas ideali*. Osserviamo che nella relazione tra p, V e T espressa da (11.6) la quantità significativa è il numero di moli, cioè il numero di molecole del gas, e non la sua massa.

Gas ideale

La (11.6) mostra che *in un gas ideale in equilibrio sono indipendenti solo due variabili*, in quanto la terza si ricava appunto tramite l'equazione di stato. Vediamo allora che, per un dato numero di moli, un punto nel piano (p, V) rappresenta completamente uno stato di equilibrio del gas, potendosi ricavare subito la temperatura da (11.6).

L'equazione di stato contiene (11.1), (11.4), (11.5): infatti basta mantenere costante T, p o V in (11.6) e si ottengono le tre leggi isoterma, isobara o isocora. Anche la legge di Avogadro è contenuta in (11.6), se R è una costante universale.

E' possibile scrivere l'equazione di stato in forme diverse da (11.6). Ricordando che $n = N / N_A$, con N numero di molecole del gas, abbiamo

$$p\,V = \frac{N}{N_A}\,R\,T = N\,k_B\,T \quad ; \tag{11.7}$$

la costante universale

$$k_B = \frac{R}{N_A} = \frac{8.314}{6.0221 \cdot 10^{23}} = 1.3807 \cdot 10^{-23}\ \text{J/K} \tag{11.8}$$

Costante di Boltzmann

è detta *costante di Boltzmann*.

Se al posto del volume si utilizza la densità $\rho = M / V$ e al posto della massa M del gas si mette An, con A massa molecolare, la (11.6) diventa

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{A} \quad . \tag{11.9}$$

Ricordiamo ancora una volta che l'equazione di stato dei gas ideali esprime un comportamento limite, al quale si avvicinano i gas reali quanto più lontana è la loro temperatura da $T = 0$ e quanto più bassa è la loro pressione ovvero la loro densità, cioè quanto più sono caldi e rarefatti. In queste condizioni le differenze di comportamento dei diversi gas praticamente scompaiono e tutti seguono approssimativamente (11.6).

11.2. TERMOMETRO A GAS IDEALE A VOLUME COSTANTE

La variabilità della pressione di un gas con la temperatura, a volume costante, viene sfruttata per costruire un termometro, in cui la pressione è la caratteristica termometrica. La struttura concettuale del termometro a gas è mostrata in figura 11.3.

Il gas è contenuto in un bulbo metallico che può essere messo in contatto termico con una cella al punto triplo dell'acqua e col sistema di cui si vuole misurare la temperatura. Il volume del gas è delimitato dalla superficie libera del mercurio che riempie il manometro (paragrafo 9.3) e il serbatoio. In ciascuna

misura si mantiene costante il volume del gas facendo in modo che il mercurio sia sempre al livello indicato dall'indice A; ciò si ottiene alzando o abbassando il serbatoio mobile S.

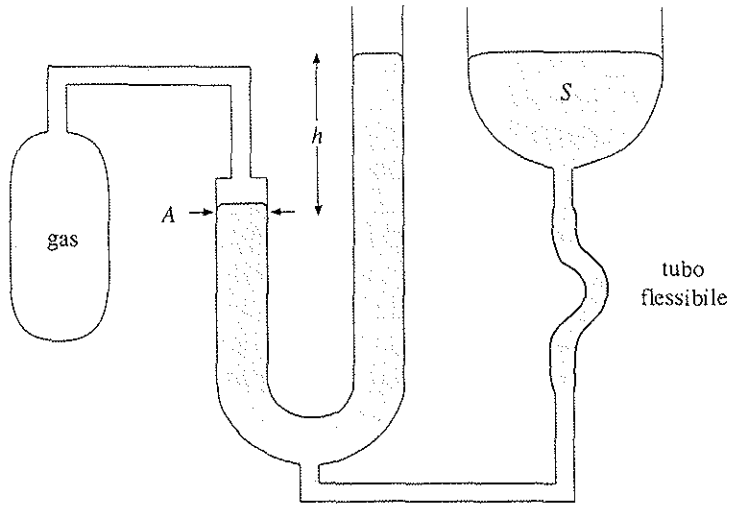


Fig. 11.3

La pressione del gas è misurata dal dislivello h tra le superficie libere del mercurio ed è quindi riferita alla pressione esterna. Se il ramo più lungo del manometro fosse chiuso, come avviene nei termometri più utilizzati, la pressione esterna sarebbe quella dei vapori di mercurio, praticamente nulla. La temperatura T si ricava utilizzando la relazione (10.1):

$$T = 273.16 \frac{p}{p_{pt}} \quad , \tag{11.10}$$

in cui p e p_{pt} rappresentano le pressioni del gas alla temperatura T e alla temperatura del punto triplo.

Il procedimento di misura è in realtà più complesso:

1) posta nel bulbo una quantità di gas pari a n_1 moli, si determinano i valori p e p_{pt} e si calcola tramite (11.10) la temperatura, che indichiamo con T_1 ;
2) si riduce a $n_2 < n_1$ il numero di moli del gas, si determinano p e p_{pt} che hanno valori minori dei precedenti poiché, a V costante e ad una data temperatura, la pressione diminuisce se il numero di moli decresce, si ricalcola la temperatura ottenendo il valore T_2 ;
3) si ripete il procedimento, diminuendo ancora il numero di moli del gas e quindi ottenendo valori minori per le pressioni.

Nella figura 11.4 sono riportati i valori della temperatura, calcolata tramite (11.10), in funzione della pressione del gas: si osserva che il valore della temperatura varia linearmente con la pressione, e in modo diverso a seconda del gas utilizzato, però il limite per $p \to 0$ è lo stesso per tutti i gas.

La temperatura fornita dal termometro a gas è data pertanto da

$$T = \lim_{p \to 0} 273.16 \frac{p}{p_{pt}} \quad .$$

Il passaggio al limite equivale a tendere alla condizione di gas ideale (gas rarefatto) e quindi il risultato deve essere indipendente dal particolare gas usato, come si trova sperimentalmente. Si viene così a superare una delle difficoltà nella misura della temperatura, evidenziate nel paragrafo 10.3.

La misura della temperatura con un termometro a gas presenta, come si comprende dal procedimento descritto, notevoli difficoltà. Viene seguita questa metodologia solo per determinare alcuni punti fissi, da utilizzarsi come riferimento per calibrare termometri di uso più semplice.

Osserviamo inoltre che con questo tipo di termometro non si può scendere a temperature inferiori a qualche kelvin, poiché qualsiasi gas a quelle temperature passa alla fase liquida o solida.

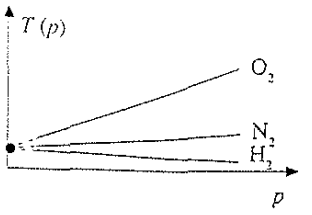


Fig. 11.4

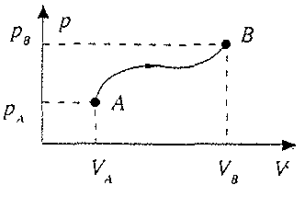
11.3 TRASFORMAZIONI DI UN GAS. LAVORO

Consideriamo due stati di equilibrio A e B di un sistema formato da n moli di gas ...ale. Noti i valori della pressione e del volume, dall'equazione di stato (11.6) si ricavano i valori della temperatura:

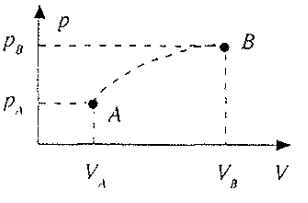
$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} \quad , \quad T_B = \frac{p_B V_B}{nR} \quad .$$

Una trasformazione che porti il gas dallo stato A allo stato B può svolgersi attraverso stati di equilibrio termodinamico ed è rappresentabile nel piano (p, V) di Clapeyron da una curva continua (figura 11.5a). Se invece la trasformazione ha luogo attraverso stati di non equilibrio si usa una rappresentazione simbolica a tratto per indicare che si ignorano i valori delle coordinate durante il processo (figura 11.5b).

La trasformazione attraverso stati di non equilibrio può realizzarsi in conseguenza di un processo di espansione o compressione rapida, per cui non sussiste né equilibrio meccanico né termico, o per effetto di una espansione o compressione ...enta con una differenza di pressione finita così che, pur potendoci essere equilibrio ...ermico, non c'è equilibrio meccanico, oppure a seguito di contatto termico con ...fferenza finita di temperatura (possibile equilibrio meccanico, ma non equilibrio ...rmico).



a)



b)

Fig. 11.5

Quando un gas si espande o viene compresso avviene uno scambio di lavoro che in termini infinitesimi si può scrivere in generale $dW = p\,dV$, come si è visto nel paragrafo 9.8 per un fluido sottoposto a forze di pressione. In una trasformazione finita dallo stato A allo stato B si avrebbe

$$W = \int_A^B p(V)\,dV \quad , \tag{11.11}$$

però bisogna fare attenzione perché questa espressione esplicita del lavoro è valida ...ostanzialmente in due sole situazioni:

a) *la trasformazione è reversibile* e pertanto si può calcolare l'integrale, dato che la pressione è determinata in ogni stato intermedio, $p = p_{gas} = p_{amb}$;

b) *è nota la pressione esterna* che, per esempio, è costante, caso tipico di quando il processo avviene sotto la pressione atmosferica; in questa situazione, anche se la trasformazione non è reversibile, il lavoro è calcolabile ed è dato da

$$W = p_{amb}(V_B - V_A) \quad .$$

In tutti gli altri casi in cui la pressione non è nota non si può applicare la (11.11).

Ad ogni modo, *se la trasformazione è isocora* (V = costante, $\Delta V = 0$), *il lavoro è sempre nullo; se il gas si espande* il volume finale V_B è maggiore del volume iniziale V_A e *il gas compie un lavoro sull'ambiente* che secondo la convenzione adottata è *positivo*; *se il gas viene compresso*, $V_B < V_A$ e *il gas subisce un lavoro (negativo), compiuto dall'ambiente.*

Il lavoro, se si può utilizzare (11.11), ha un semplice significato geometrico nel piano di Clapeyron. Nel caso di una trasformazione che passa attraverso stati di equilibrio ed è quindi rappresentabile con una curva continua, la curva $p = p(V)$ nel piano (p, V), *il lavoro*, in accordo con il significato geometrico dell'operazione di integrazione, *è pari all'area compresa tra la curva e l'asse dei volumi* (figura 11.6a). Nelle figure 11.6b e 11.6c sono mostrati i casi dell'espansione ($W > 0$) e della compressione ($W < 0$), entrambe reversibili. Infine nella figura 11.6d è rappresentata una *trasformazione ciclica reversibile* e *il lavoro è dato dall'area racchiusa dal ciclo*: esso è positivo se il ciclo è percorso in senso orario, negativo in caso contrario.

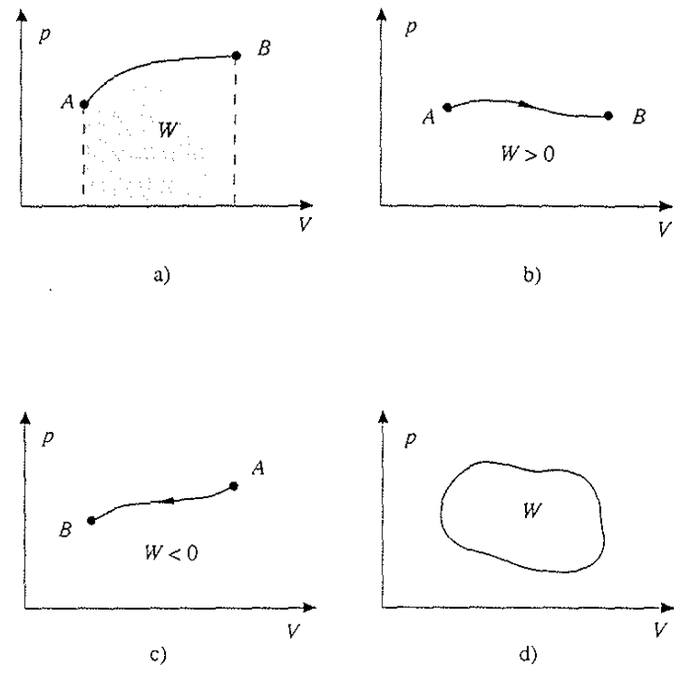


Fig. 11.6

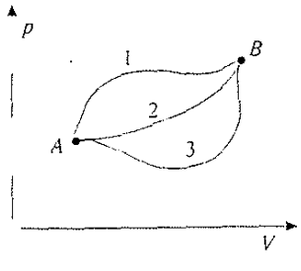


Fig. 11.7

Dalle considerazioni appena esposte si capisce l'importanza della rappresentazione di una trasformazione nel piano (p, V) rispetto alle possibili alternative (p, T) e (V, T), almeno per quel che riguarda il lavoro. Ad esempio, dall'osservazione delle trasformazioni reversibili disegnate in figura 11.6, si verifica che, a parità di stato iniziale e finale, il lavoro dipende dalla trasformazione, $W_1 \neq W_2 \neq W_3$. Si noti però che tale conclusione è valida anche per le trasformazioni non reversibili, che non possono essere rappresentate nel piano (p, V).

ESEMPIO 11.1

Si calcoli il lavoro per le varie trasformazioni reversibili rappresentate in figura 11.8, che collegano gli stati di equilibrio termodinamico $A\ (p_A, V_A)$ e $B\ (p_B, V_B)$.

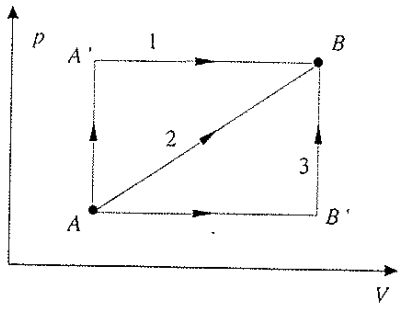


Fig. 11.8

Soluzione
Lungo la prima trasformazione $A\,A'\,B$

$$W_1 = W_{AA'} + W_{A'B} = W_{A'B} = p_B\,(V_B - V_A)\quad .$$

Nella trasformazione 2, lungo il segmento congiungente A con B,

$$W_2 = W_{AB} = \frac{1}{2}\,(p_A + p_B)\,(V_B - V_A)$$

in quanto l'area sotto la curva è un trapezio. Infine lungo $A\,B'B$

$$W_3 = W_{AB'} + W_{B'B} = W_{AB'} = p_A\,(V_B - V_A)\quad .$$

Risulta pertanto $W_1 > W_2 > W_3$.

ESEMPIO 11.2

Si determini il lavoro per le varie trasformazioni cicliche reversibili rappresentate in figura 11.9.

Soluzione
Il lavoro nel ciclo a) è dato da

$$W_a = \frac{1}{2}\,(p_B - p_A)\,[(V_D - V_A) + (V_C - V_B)]\quad .$$

Nel secondo caso il lavoro, calcolato sempre dall'area racchiusa dal ciclo, è

$$W_b = -\frac{1}{2}\,(V_B - V_A)\,(p_C - p_A)\quad .$$

Il segno negativo è dovuto al fatto che il ciclo viene percorso in senso antiorario. Fisicamente, in questo ciclo il gas subisce un lavoro. Per il ciclo c) il lavoro è dato da

$$W_c = (V_C - V_A)\,(p_C - p_A)\quad .$$

Infine nel ciclo d), percorso in senso antiorario, il gas subisce complessivamente il lavoro

$$W_d = -\frac{\pi}{4}\,(p_B - p_A)\,(V_D - V_C).$$

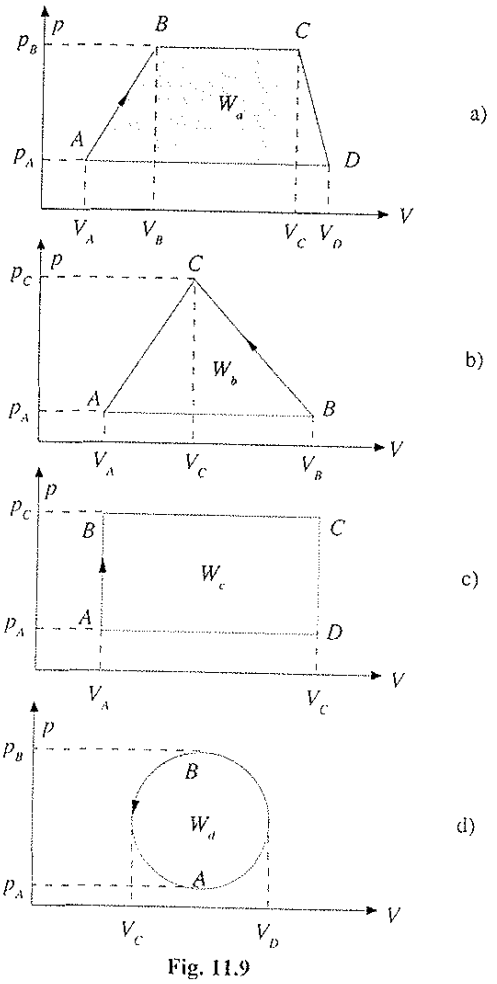


Fig. 11.9

Concludiamo l'argomento lavoro riprendendo l'osservazione fatta alla fine del paragrafo 10.6 e verificandola nel caso di un sistema gassoso. Se un gas compie una trasformazione reversibile dallo stato A allo stato B, quando questa viene percorsa in senso opposto, da B ad A, il lavoro cambia soltanto di segno, come è evidente da (11.11): $W_{BA} = - W_{AB}$. Per definizione la proprietà è valida in ogni caso per la variazione di energia interna e dal primo principio segue che $Q_{BA} = - Q_{AB}$. Niente di simile si può invece affermare se la trasformazione è irreversibile.

11.4 CALORE. CALORI SPECIFICI

In una trasformazione generica un gas scambia anche calore con l'ambiente e per il calcolo bisogna ricorrere al primo principio. Però è possibile nelle trasformazioni non isoterme (e ovviamente non adiabatiche) arrivare a un'espressione come (10.11), con l'avvertenza che non ci si riferisce alla massa, ma al numero di moli, e che bisogna specificare il tipo di processo.

Precisamente, per una trasformazione infinitesima isocora si ha $d Q = n c_V d T$, mentre per una isobara $d Q = n c_p d T$; le quantità

Calori specifici molari

$$c_V = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V \quad , \quad c_p = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p \tag{11.12}$$

si chiamano, rispettivamente, *calore specifico molare a volume costante e a pressione costante* e si misurano in J/mole K.

Se c_V e c_p possono essere ritenuti costanti, il calore scambiato per una variazione ΔT di temperatura ($\Delta T = T_B - T_A$) si scrive nei due casi

$$Q_V = n c_V \Delta T \quad , \quad Q_p = n c_p \Delta T \quad . \tag{11.13}$$

Altrimenti

$$Q_V = n \int_{T_A}^{T_B} c_V \, dT \quad , \quad Q_p = n \int_{T_A}^{T_B} c_p \, dT \quad . \tag{11.14}$$

Nel prossimo paragrafo vedremo che l'energia interna di un gas ideale è funzione solo della temperatura e cresce con la stessa. Sfruttando tale risultato dimostriamo che in un gas ideale deve essere $c_p > c_V$.

Consideriamo infatti due trasformazioni, una isocora e una isobara, durante le quali si abbia la stessa variazione positiva di temperatura ΔT . Dal primo principio $Q = \Delta U + W$ applicato alla trasformazione isocora $A B$ della figura 11.10 risulta

$$Q_V = n c_V \Delta T = \Delta U$$

in quanto $W = 0$. Nella trasformazione isobara AC $W = p \Delta V$, positivo perché il volume cresce con la temperatura, e quindi

$$Q_p = n c_p \Delta T = \Delta U + p \Delta V \quad .$$

Dato che la variazione di temperatura è la stessa nelle due trasformazioni e che l'energia interna è funzione solo della temperatura, la variazione ΔU è la stessa nei due casi e quindi $Q_p > Q_V$ da cui segue $c_p > c_V$: *il calore che bisogna cedere a una*

mole di gas ideale per fare aumentare la sua temperatura di 1K *è maggiore a pressione costante che a volume costante, perché a pressione costante il gas compie anche del lavoro.*

Tale risultato resta vero anche se c_p e c_V sono funzioni della temperatura, come si può dimostrare utilizzando le relazioni valide per le trasformazioni infinitesime:

$$dQ = dU + dW \quad , \quad dQ_V = n\,c_V\,dT = dU \quad ,$$

$$dQ_p = n\,c_p\,dT = dU + p\,dV > dQ_V \quad .$$

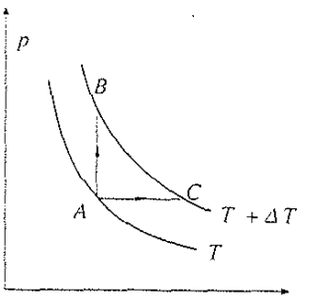


Fig. 11.10

11.5 ENERGIA INTERNA DEL GAS IDEALE

La dipendenza dell'energia interna di un gas ideale dalle coordinate termodinamiche è stata ricavata analizzando il risultato dell'*esperienza sull'espansione libera, eseguita da Joule.*

Una possibile realizzazione dell'esperienza è quella indicata nel secondo esempio sulle trasformazioni del paragrafo 10.6, un'altra è la seguente.

In un contenitore con pareti rigide e diatermiche, diviso in due parti eguali separate da un rubinetto, si trova un gas nella parte sinistra, mentre nella parte destra è stata realizzata una condizione di vuoto. Il contenitore è immerso in un calorimetro e la temperatura di equilibrio è T. Si apre il rubinetto e si lascia espandere il gas in tutto il volume a disposizione. L'espansione è chiamata libera perché non ci sono forze esterne che agiscono sul gas. Sperimentalmente si osserva che, comunque si operi, aprendo lentamente o rapidamente il rubinetto, con gas inizialmente ad alta o bassa pressione, la temperatura del liquido calorimetrico alla fine del processo è sempre pari a T, temperatura iniziale di equilibrio.

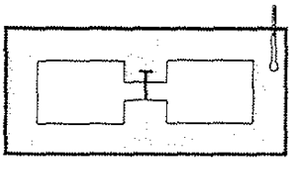


Fig. 11.11

Il gas quindi non scambia calore con il calorimetro, $Q = 0$. Esso inoltre non cambia lavoro con l'esterno (le pareti del contenitore sono rigide) e pertanto $W = 0$. Dal primo principio segue $\Delta U = Q - W = 0$: *nell'espansione libera l'energia interna di un gas ideale non varia.* Possiamo allora giungere alla seguente conclusione: poiché nel processo la temperatura del gas non cambia, mentre variano pressione e volume (in accordo con (11.1) perché la trasformazione è isoterma, cioè $p_{in}\,V_{in} = p_{fin}\,V_{fin}$), l'energia interna deve essere funzione soltanto della temperatura.

Il risultato viene assunto vero rigorosamente solo per un gas ideale. Si veda in proposito il paragrafo 11.8.

Per determinare l'espressione esplicita della funzione $U(T)$ consideriamo due generici stati di equilibrio A e B: $\Delta U = U_B - U_A$ deve essere la stessa qualsiasi trasformazione si scelga, essendo U una funzione di stato. Se scegliamo in particolare una trasformazione $A\,C$ isocora e una $C\,B$ isoterma (figura 11.12), si ha

$$\Delta U = U_B - U_A = U_B - U_C + U_C - U_A = U_C - U_A$$

in quanto $U_B = U_C$ essendo gli stati B e C alla stessa temperatura ed U funzione solo della temperatura. Applichiamo ora il primo principio alla trasformazione isocora: dato che $W = 0$, $\Delta U = Q$, dove Q è il calore scambiato in condizioni isocore, dato da (11.13) o (11.14). Pertanto

$$\Delta U = U_B - U_A = n\,c_V\,(T_B - T_A) = n\,c_V\,\Delta T \quad , \qquad (11.15)$$

$$\Delta U = U_B - U_A = n \int_{T_A}^{T_B} c_V\,dT \quad ,$$

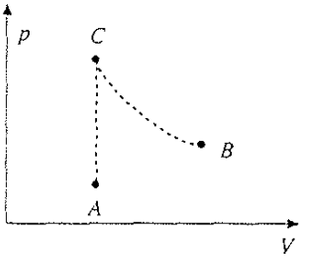


Fig. 11.12

a seconda che il calore specifico a volume costante sia indipendente dalla temperatura oppure no. Per trasformazioni infinitesime

$$d U = n c_V d T \tag{11.16}$$

da cui si ricava

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{d U}{d T} \quad . \tag{11.17}$$

Poiché l'energia interna è funzione soltanto della temperatura, anche il calore specifico a volume costante di un gas ideale dipende solo dalla temperatura, potendo essere, in particolare, costante.

Possiamo adesso scrivere in maniera esplicita il primo principio (10.5) per quel che riguarda le trasformazioni di gas ideali:

$$\begin{aligned} & d Q = n c_V \, d T + d W \quad \Rightarrow \quad Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_V \, d T + W \quad , \\ & Q = n c_V \, \Delta T + W \quad \text{se} \quad c_V = \text{costante} \, . \end{aligned} \tag{11.18}$$

Se la trasformazione è reversibile le (11.18) diventano

$$\begin{aligned} & d Q = n c_V \, d T + p \, d V \quad \Rightarrow \quad Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_V \, d T + \int_{V_A}^{V_B} p \, d V \quad , \\ & Q = n c_V \, \Delta T + \int_{V_A}^{V_B} p \, d V \quad \text{se} \quad c_V = \text{costante} \, . \end{aligned} \tag{11.19}$$

Relazione di Mayer

Alla fine del paragrafo 11.4 abbiamo dimostrato che in un gas ideale il calore specifico a pressione costante è maggiore di quello a volume costante; adesso possiamo rendere quantitativa l'affermazione. In una trasformazione isobara infinitesima $d Q = n c_p d T$ e $d W = p d V$ per cui, da (11.18),

$$n c_p d T = n c_V \, d T + p \, d V \quad .$$

Differenziando l'equazione di stato dei gas ideali $p V = n R T$ si ha

$$p \, d V + V \, d p = n R \, d T \quad ;$$

in una trasformazione isobara $d p = 0$ e quindi $p \, d V = n R \, d T$. Pertanto

$$n c_p d T = n c_V \, d T + n R \, d T$$

e in conclusione si ottiene la *relazione di Mayer*

Relazione di Mayer

$$c_p - c_V = R \quad . \tag{11.20}$$

Di conseguenza in un gas ideale anche c_p è funzione soltanto della temperatura

potendo in particolare essere costante.

Da (11.20) si ricava un significato energetico per la costante dei gas ideali R : essa rappresenta il lavoro che a pressione costante compie una mole (o una chilomole) di gas ideale in corrispondenza ad un aumento di temperatura di 1 K.

Il *rapporto tra i calori specifici*

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

Rapporto γ

, risulta in un gas ideale sempre maggiore di 1 ed è funzione soltanto della temperatura o, in particolare, costante.

Sperimentalmente si trovano per i calori specifici dei gas ideali questi risultati:

a) i gas ideali *monoatomici* (gas rari come elio, neon, argon, vapori metallici di sodio, mercurio) hanno c_V costante e pari a $\frac{3}{2} R$:

$$c_V = \frac{3}{2} R = 12.47 \text{ J/mole K} \quad ;$$

dalla (11.20)

$$c_p = \frac{5}{2} R = 20.79 \text{ J/mole K} \quad ,$$

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1.667 \quad ;$$

b) alcuni gas ideali *biatomici* (azoto, ossigeno) hanno c_V costante e pari a $\frac{5}{2} R$:

$$c_V = \frac{5}{2} R = 20.79 \text{ J/mole K} \quad ,$$

$$c_p = \frac{7}{2} R = 29.10 \text{ J/mole K} \quad ,$$

$$\gamma = \frac{7}{5} = 1.4 \quad ;$$

c) altri gas ideali *biatomici* (fluoro, cloro, bromo) e i gas ideali poliatomici (anidride carbonica CO_2 , metano CH_4) hanno i calori specifici variabili con la temperatura secondo leggi che dipendono dal particolare gas considerato.

Nel paragrafo 11.10 giustificheremo le semplici espressioni trovate sperimentalmente per c_V ($\frac{3}{2} R$ o $\frac{5}{2} R$ per gas monoatomici o biatomici in condizioni di idealità).

I casi a) e b) suddetti sono quelli a cui ci limiteremo nel seguito della trattazione, salvo situazioni specificamente indicate. Pertanto utilizzeremo le relazioni

$$\Delta U = n c_V \Delta T \qquad \text{per qualsiasi trasformazione} \qquad (11.15)$$

$$Q = n c_V \Delta T \qquad \text{se } V = \text{costante}$$

$$Q = n c_p \Delta T \qquad \text{se } p = \text{costante} \qquad (11.13)$$

Ricordiamo che accanto a queste valgono sempre per un gas ideale le seguenti proprietà:

equazione di stato $p\,V = n\,R\,T$ in uno stato di equilibrio (11.6)

relazione di Mayer $c_p - c_V = R$. (11.20)

Nota sulle unità di misura

Riprendiamo l'argomento già esposto alla fine del capitolo 10. Noi utilizziamo l'unità joule per lavoro, calore ed energia interna. Pertanto

$$R = 8.314 \text{ J/mole K} = 8314 \text{ J/chilomole K} \quad .$$

Se però viene utilizzata la caloria, di cui ricordiamo il rapporto con il joule,

$$1 \text{ Cal} = 4186.8 \text{ J} \quad ,$$

allora il valore di R da usare è

$$R = 1.986 \cdot 10^{-3} \text{ Cal/mole K} = 1986 \text{ Cal/chilomole K} \, .$$

In tal caso

$$\frac{3}{2} R = 2.979 \cdot 10^{-3} \text{ Cal / mole K} \quad ,$$

$$\frac{5}{2} R = 4.965 \cdot 10^{-3} \text{ Cal / mole K} \quad ,$$

$$\frac{7}{2} R = 6.951 \cdot 10^{-3} \text{ Cal / mole K} \quad .$$

Si trova talvolta utilizzata anche l'unità litri · atmosfere, che è un'unità di lavoro:

$$1 \text{ l} \cdot \text{atm} = 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cong 101.3 \text{ J} \cong 24.2 \cdot 10^{-3} \text{ Cal} \quad .$$

In queste unità

$$R = 0.082 \text{ l} \cdot \text{atm/mole K} \quad .$$

L'unità l · atm, seguendo la sorte dell'atmosfera, è ufficialmente abbandonata.

11.6 STUDIO DI ALCUNE TRASFORMAZIONI

Studiamo ora alcune trasformazioni termodinamiche molto comuni, eseguite da gas ideali; l'idealità del gas sarà sottintesa, ma risulterà evidente dalle relazioni che verranno usate. Particolare attenzione verrà prestata al fatto che le trasformazioni siano reversibili o irreversibili.

Trasformazioni adiabatiche

Il gas è racchiuso dentro un contenitore con pareti adiabatiche e quindi può scambiare solo lavoro, per esempio in conseguenza del fatto che una parete è mobile. Dal primo principio (11.18) si ha

$$W_{AB} = -\Delta U = -n\,c_V\,(T_B - T_A)$$

se la trasformazione avviene tra i due stati di equilibrio A iniziale e B finale.

Se si ha un'*espansione adiabatica il lavoro* W_{AB} *è positivo* e quindi ΔU *è nega-*

tiva e T_B *è minore di* T_A : *il gas si raffredda*; se invece si ha una *compressione adiabatica*, $W_{AB} < 0$, $\Delta U > 0$, $T_B > T_A$, *il gas si riscalda*. Queste variazioni di temperatura sono comunemente sperimentate nelle variazioni rapide di volume di un gas.

Non è possibile ricavare altre relazioni tra le coordinate termodinamiche di due stati collegati da una trasformazione adiabatica generica salvo alcune limitazioni, derivanti dal secondo principio della termodinamica, che vedremo nel capitolo 12.

Se invece la trasformazione è *adiabatica reversibile*, l'espressione infinitesima del primo principio diviene

$$d U + d W = n c_V d T + p d V = 0$$

in quanto possiamo esprimere il lavoro in funzione delle coordinate termodinamiche, appunto perché la trasformazione è reversibile. Per questa stessa ragione si può utilizzare l'equazione di stato in qualsiasi stato intermedio per esprimere la pressione come $p = n R T / V$ e si ottiene

$$n c_V \, d T + \frac{n R T}{V} d V = 0 \quad .$$

Separiamo le variabili (appendice A) e utilizziamo la relazione di Mayer (11.20):

$$\frac{c_p - c_V}{c_V} \frac{d V}{V} = -\frac{d T}{T} \quad \Rightarrow \quad (\gamma - 1) \frac{d V}{V} = -\frac{d T}{T} \quad .$$

Questa equazione differenziale rappresenta la condizione a cui obbediscono le coordinate degli stati di un gas ideale collegati da una trasformazione adiabatica reversibile. Integrando dallo stato A allo stato B e supponendo γ costante

$$(\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \frac{T_A}{T_B} \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma - 1} = \ln \frac{T_A}{T_B} \quad .$$

L'eguaglianza tra i logaritmi comporta l'eguaglianza tra gli argomenti, per cui

$$T_A V_A^{\gamma - 1} = T_B V_B^{\gamma - 1} \quad ,$$

espressione che dà la relazione tra le coordinate termodinamiche del gas durante una trasformazione adiabatica reversibile.

Tramite l'equazione di stato si può trasformare la relazione tra T e V in una tra p e V o tra p e T e in conclusione si hanno tre espressioni equivalenti:

$$T V^{\gamma - 1} = \text{costante} \quad , \quad p V^{\gamma} = \text{costante} \quad , \quad T p^{\frac{1 - \gamma}{\gamma}} = \text{costante} \quad . \qquad (11.21)$$

Equazione di una trasformazione adiabatica reversibile del gas ideale

Il procedimento che ha portato dal primo principio alle (11.21) è un esempio del fatto citato nel paragrafo 10.6, e cioè che quando si possono esprimere i termini di (10.5) in funzione delle coordinate termodinamiche si ottiene una relazione tra queste che rappresenta l'equazione della trasformazione; le (11.21) si chiamano infatti le *equazioni di una trasformazione adiabatica reversibile di un gas ideale*.

In particolare utilizziamo l'equazione $p V^{\gamma} =$ costante per rappresentare la trasformazione nel piano di Clapeyron. Rispetto alla curva isoterma $p V =$ costante

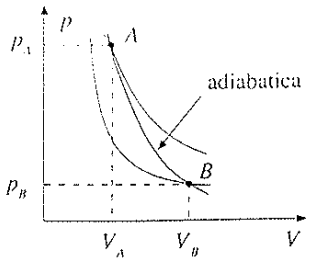


Fig. 11.13

(vedi figura 11.1) passante per esempio per il punto rappresentativo dello stato A, la curva adiabatica ha un andamento simile però con pendenza maggiore perché γ è sempre maggiore di 1: si conferma che $T_B < T_A$.

Una trasformazione adiabatica reversibile costituisce un caso limite, in quanto per essere reversibile dovrebbe svolgersi molto lentamente, ma ciò introduce difficoltà per mantenere l'adiabaticità. Le trasformazioni reali sono irreversibili, in particolare possiamo considerare adiabatica irreversibile una trasformazione che comporta una variazione rapida di volume, così che non ci sia tempo per scambi di calore. L'espansione libera di Joule è un altro caso di trasformazione adiabatica irreversibile.

Un esempio di trasformazione adiabatica si ha nell'atmosfera, quando una massa d'aria calda si sposta rapidamente dal suolo verso l'alto (corrente convettiva ascensionale). Diminuendo la pressione con l'altezza, il volume della massa d'aria aumenta: il processo è approssimabile a una trasformazione adiabatica e ne segue un abbassamento della temperatura della massa d'aria. Se questa contiene vapor d'acqua, si ha condensazione a seguito del raffreddamento e formazione di nuvole, come si osserva in giornate serene, ma umide.

ESEMPIO 11.3 Misura del rapporto γ con l'esperienza di Rückhardt

In un recipiente a forma di bottiglia con il collo stretto, mostrato in sezione nella figura 11.14, è contenuto un gas che trattiamo come ideale. Sia S la sezione del collo della bottiglia e V il volume del gas. La bottiglia è tappata da una sfera di acciaio di massa m, in equilibrio sul gas in quanto la forza dovuta alla pressione atmosferica p_0 e il peso della sfera sono bilanciate dalla forza esercitata dalla pressione p del gas: in modulo

$$p\,S = p_0\,S + m\,g \quad ,$$

relazione che è possibile soddisfare scegliendo opportunamente i parametri in gioco.

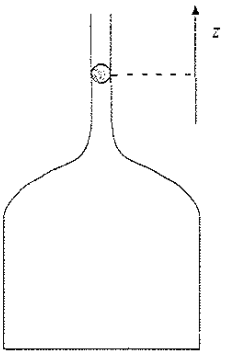


Fig. 11.14

Se la sfera viene abbassata rapidamente di una quantità z il gas è compresso adiabaticamente e la sua pressione aumenta, le forze non sono più equilibrate e la risultante tende a portare la sfera verso l'alto; se la sfera viene sollevata rapidamente, il gas si espande, la sua pressione diminuisce e la risultante delle forze riporta la sfera verso il basso.

Per calcolare la variazione di pressione del gas, differenziamo la $p\,V^\gamma$ = costante:

$$d\,p\,V^\gamma + p\,\gamma V^{\gamma-1}\,d\,V = 0 \quad \Rightarrow \quad d\,p = -\gamma p\,\frac{d\,V}{V} \; .$$

La variazione di volume è $\Delta\,V = z\,S$ e quindi

$$\Delta\,p = -\frac{\gamma\,p\,S}{V}\,z \quad .$$

A questa variazione di pressione del gas corrisponde la forza non equilibrata

$$F = S\,\Delta\,p = -\frac{\gamma\,p\,S^2}{V}\,z = -k\,z \quad ,$$

positiva se z è negativo e viceversa, come detto sopra. Si tratta di una forza di tipo elastico, assumendo $\Delta\,V << V$, e pertanto il moto della sfera è armonico con periodo

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m\,V}{\gamma\,p\,S^2}} \quad .$$

Dalla misura del periodo si calcola γ e l'errore è di qualche percento. Poiché la tenuta della sfera non è perfetta, si provvede con un piccolo flusso di gas a mantenere costante la quantità di gas nella bottiglia.

ESEMPIO 11.4 Atmosfera adiabatica

Nel paragrafo 9.3 è stato calcolato l'andamento della pressione atmosferica con l'altezza nell'ipotesi che la temperatura sia costante. In realtà la temperatura decresce con l'altezza e il fenomeno può essere ricondotto all'espansione adiabatica dell'aria calda che sale. La diminuzione di pressione con l'altezza è

$$dp = -\rho g\, dh = -\frac{Ag}{RT}\, p\, dh \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{Ag}{RT}\, dh \quad ,$$

avendo trattato l'aria come gas ideale che obbedisce all'equazione di stato nella forma (11.9). Un'altra relazione tra p e T è data dalla terza delle (11.21), da cui ricaviamo

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\, \frac{dT}{T}$$

Eguagliando le due espressioni trovate si ottiene

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\, \frac{Ag}{R} \cong -9.7 \text{ K/Km} \quad ,$$

avendo utilizzato per γ il valore 1.4 tipico dell'azoto e dell'ossigeno ideali e per A il valore della massa molecolare dell'aria (28.88). La diminuzione trovata è leggermente superiore a quella osservata, d'altra parte l'aria non è un gas ideale e la trasformazione non è reversibile.

Il lavoro scambiato dal gas durante una trasformazione adiabatica, reversibile o irreversibile, è sempre dato, in base al primo principio, da

$$W_{AB} = -\Delta U = n\, c_V\, (T_A - T_B)$$

se c_V è costante. Utilizzando l'equazione di stato negli stati di equilibrio iniziale e finale e la relazione di Mayer si ha

$$W_{AB} = n\, c_V \left(\frac{p_A V_A}{nR} - \frac{p_B V_B}{nR} \right) = \frac{1}{\gamma - 1}\, (p_A V_A - p_B V_B) \quad . \qquad (11.22)$$

ESEMPIO 11.5

Due moli di gas ideale monoatomico si espandono in modo adiabatico reversibile fino ad occupare un volume triplo di quello iniziale. Se la temperatura iniziale è T_A = 100 K, determinare il lavoro compiuto dal gas durante l'espansione.

Soluzione
Calcoliamo innanzitutto la temperatura finale T_B con la prima delle (11.21):

$$T_A V_A^{\gamma - 1} = T_B (3\, V_A)^{\gamma - 1} \quad \Rightarrow \quad T_B = T_A \left(\frac{1}{3} \right)^{2/3}$$

essendo $\gamma = 5/3$. Risulta $T_B = 192.3$ K e quindi

$$W = n\, c_V\, (T_A - T_B) = n\, \frac{3}{2}\, R\, (T_A - T_B) = 5180 \text{ J} \quad .$$

ESEMPIO 11.6

Una mole di gas ideale biatomico viene compressa in modo adiabatico non reversibile e le temperature iniziale e finale sono T_A = 200 K, T_B = 500 K.
Si determini il lavoro eseguito sul gas.

Soluzione
Possiamo sempre utilizzare per il lavoro l'espressione

$$W_{AB} = -\Delta U = n\, c_V\, (T_A - T_B)$$

che nel caso proposto, essendo $c_V = \frac{5}{2}\, R$, dà – 6236 J.

Però non possiamo utilizzare le (11.21) perché la trasformazione non è reversibile: anche se conoscessimo il volume o la pressione iniziali, non potremmo determinare i corrispondenti valori finali.

Trasformazioni isoterme

Nel caso di una trasformazione isoterma si considera il gas racchiuso in un recipiente che è in contatto termico con una sorgente di calore alla temperatura T. Durante la trasformazione la temperatura del gas resta costante al valore T e abbiamo

$$\Delta U = 0 \quad , \quad Q = W \quad , \quad p_A V_A = p_B V_B \quad .$$

Se la trasformazione è una espansione isoterma $W_{AB} > 0$ e quindi $Q_{AB} > 0$: il gas compie lavoro e assorbe calore. Se invece la trasformazione è una compressione isoterma $W_{AB} < 0$ e $Q_{AB} < 0$: il gas subisce lavoro e cede calore.

Qualora la trasformazione sia isoterma reversibile, da (11.11) e (11.6) si ha

$$W_{AB} = \int_A^B p\, dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} \qquad (11.23)$$

e questa è anche l'espressione esplicita del calore scambiato.

Si noti che è sempre $Q \neq 0$: una trasformazione isoterma reversibile comporta sempre uno scambio di calore, a meno che non sia $T = 0$,.condizione che, come vedremo, non è mai raggiungibile.

Una particolare trasformazione isoterma irreversibile è l'espansione libera di Joule. Tale trasformazione è insieme adiabatica e isoterma: ciò è possibile solo perché la trasformazione è irreversibile, per una reversibile i due fatti sono ben distinti ed è impossibile che una trasformazione isoterma sia anche adiabatica.

ESEMPIO 11.7

Un contenitore a pareti metalliche contiene 5 moli di gas ideale alla pressione $p_A = 2 \cdot 10^6$ Pa e alla temperatura dell'ambiente $T = 300$ K. Al contenitore è collegato un capillare attraverso cui il gas può fluire lentamente in un secondo contenitore con pistone mobile privo di attrito, sul quale agisce la pressione esterna $p_0 = 10^5$ Pa. Determinare il lavoro fatto dal gas nella trasformazione che porta il gas alla pressione p_0 .

Soluzione

La trasformazione è isoterma, in quanto il gas fluisce lentamente mantenendosi in equilibrio termico con l'ambiente, ma irreversibile dato che il gas non si trova in equilibrio meccanico a causa della differenza finita di pressione $p_A - p_0$. Nel passare dallo stato iniziale allo stato finale il gas esegue contro la pressione esterna il lavoro

$$W = p_0 (V_{fin} - V_{in}) = p_0 \left(\frac{nRT}{p_0} - \frac{nRT}{p_A} \right) = nRT \left(1 - \frac{p_0}{p_A} \right)$$

$$= 1.18 \cdot 10^4 \text{ J} \quad .$$

Se si fosse erroneamente utilizzata nel calcolo del lavoro la (11.23), valida solo per trasformazioni reversibili, si sarebbe ottenuto

$$W = nRT \ln \frac{V_{fin}}{V_{in}} = nRT \ln \frac{p_A}{p_0} = 3.74 \cdot 10^4 \text{ J} \quad .$$

La lentezza della trasformazione non comporta necessariamente che la stessa sia reversibile.

Trasformazioni isocore

Il gas è contenuto in un recipiente diatermico di volume fisso: V = costante e $W = 0$; il gas può scambiare solo calore e questo è eguale, per il primo principio,

alla variazione di energia interna:

$$Q = \Delta U = n\, c_V\, (T_B - T_A) \quad \text{se} \quad c_V = \text{costante} \quad .$$

Essendo il volume costante, dall'equazione di stato (11.6) o da (11.5) si ha

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B} \quad .$$

Se si cede calore al gas, la sua pressione e la sua temperatura aumentano, mentre se si assorbe calore dal gas pressione e temperatura diminuiscono. Nella pratica ciò viene effettuato mettendo il gas, a temperatura T_A, in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_B: la trasformazione è irreversibile in quanto non c'è equilibrio termico tra sistema e ambiente, alla fine il gas assume la temperatura T_B.

Una trasformazione *isocora reversibile* si realizza invece mettendo il gas, a temperatura T_A, in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura $T_1 = T_A + dT$, poi con una sorgente a temperatura $T_2 = T_1 + dT$, e così via, utilizzando in teoria una serie infinita di sorgenti.

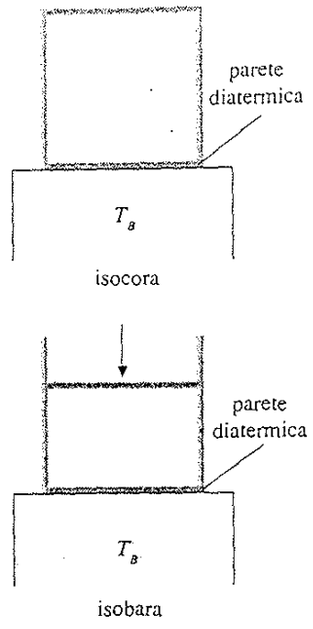


Fig. 11.15

Trasformazioni isobare. Entalpia

Il gas è contenuto ora in un recipiente diatermico con una parete mobile su cui agisce una pressione esterna costante p. Dall'equazione di stato o da (11.4) abbiamo che in una trasformazione isobara

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B} \quad .$$

Il gas può scambiare sia calore che lavoro, dati da

$$Q = n\, c_p\, (T_B - T_A) \quad ,$$

$$W = p\, (V_B - V_A) = p \left(\frac{nRT_B}{p} - \frac{nRT_A}{p} \right) = n\, R\, (T_B - T_A) \quad ,$$

deve essere sempre $Q - W = \Delta U = n\, c_V\, (T_B - T_A)$.

Se si cede calore al gas, il suo volume e la sua temperatura aumentano e il gas compie lavoro; se si assorbe calore dal gas, volume e temperatura diminuiscono, il gas subisce lavoro.

Una trasformazione isobara si compie mettendo il gas, a temperatura T_A, in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_B; non essendoci equilibrio termico la trasformazione è irreversibile. Invece, per avere una trasformazione reversibile bisogna disporre di una serie infinita di sorgenti, come descritto per le trasformazioni isocore.

Si definisce *entalpia* la funzione

$$H = U + p\, V \quad , \qquad (11.24) \qquad \text{Entalpia}$$

che risulta una *funzione di stato* in quanto sia U che $p\,V$ sono funzioni soltanto delle coordinate termodinamiche.

In un gas ideale U è funzione solo della temperatura e ciò è vero anche per il

prodotto $p\,V$, in base all'equazione di stato: si conclude che l'*entalpia del gas ideale è funzione solo della temperatura*, $H = H(T)$.

Per una qualsiasi trasformazione infinitesima

$$d\,H = d\,U + d\,(p\,V) = n\,c_V\,d\,T + n\,R\,d\,T = n\,c_p\,d\,T \quad ,$$

avendo utilizzato (11.20). Per una trasformazione finita

$$\Delta H = n \int_{T_A}^{T_B} c_p \; d\,T \qquad (11.25)$$

$$\Delta H = n\,c_p\,(T_B - T_A) \quad \text{se} \quad c_p = \text{costante}$$

e in particolare per una trasformazione isobara risulta $Q = \Delta H$.

Vediamo dunque che per una generica trasformazione di un gas ideale le due funzioni di stato energia interna ed entalpia dipendono solo dalla variazione di temperatura tra stato finale e stato iniziale, essendo in particolare proporzionali a ΔT se i calori specifici sono costanti; il calore scambiato dipende invece dalla trasformazione. Però,

se la trasformazione è isocora $\quad Q = \Delta U \quad ,$

se la trasformazione è isobara $\quad Q = \Delta H \quad .$

In entrambi i casi il calore è eguale alla variazione di una funzione di stato e questo fatto ci fornisce una formula per il calcolo di Q senza dover ricorrere al primo principio, giustificando così le (11.13) e (11.14). Le (11.12) si possono scrivere

$$c_V = \frac{1}{n}\,\frac{dU}{dT} \quad , \quad c_p = \frac{1}{n}\,\frac{dH}{dT} \quad ,$$

estendendo così al calore specifico a pressione costante l'argomento che ci ha portato alla (11.17).

Riassumiamo graficamente nella figura 11.16 gli scambi energetici nelle trasformazioni adiabatiche, isoterme, isocore e isobare; A indica lo stato iniziale, B quello finale.

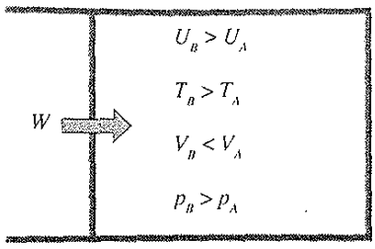
Si noti che i versi degli scambi energetici (dall'ambiente al sistema e dal sistema all'ambiente) sono univoci, cioè non dipendono ovviamente dalla convenzione adottata per i relativi segni: da questa dipende solo il fatto di chiamare positivo o negativo il calore assorbito dal sistema, ecc.

Trasformazioni generiche

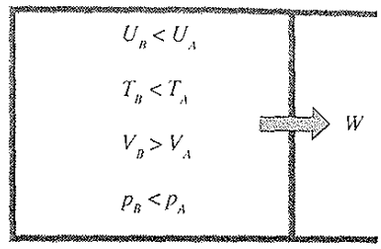
Per una trasformazione diversa da quelle che abbiamo discusso, certamente possiamo utilizzare il primo principio nella forma

$$d\,Q = d\,U + d\,W = n\,c_V\;d\,T + d\,W \quad .$$

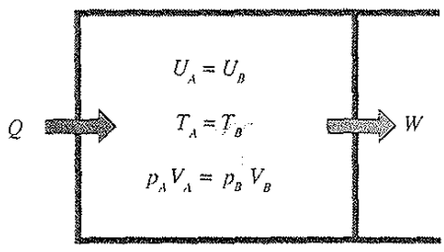
È necessario poi esaminare attentamente le condizioni termodinamiche che regolano la trasformazione, per stabilire se essa sia reversibile o irreversibile.



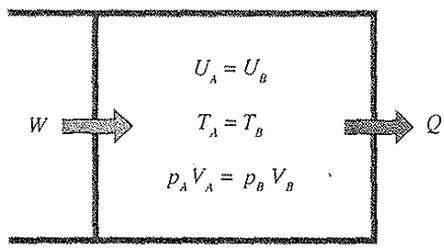
compressione
adiabatica



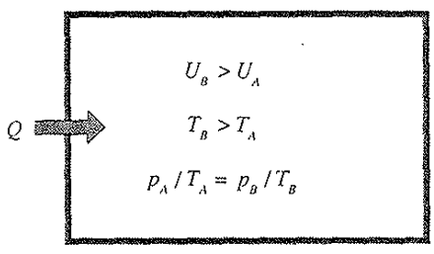
espansione
adiabatica



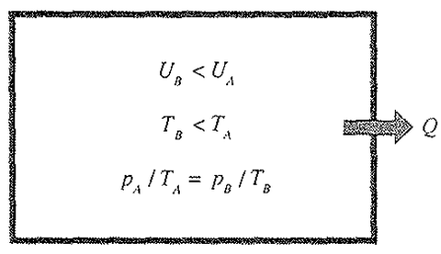
espansione
isoterma



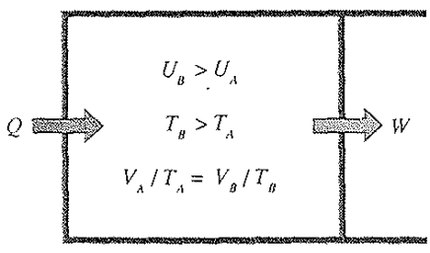
compressione
isoterma



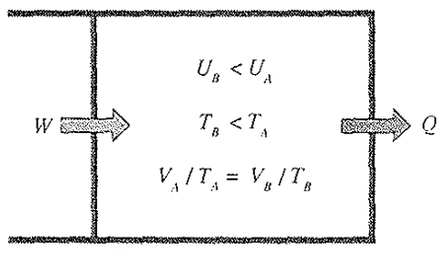
riscaldamento
isocoro



raffreddamento
isocoro



espansione
isobara



compressione
isobara

Fig. 11.16

Se è reversibile possiamo utilizzare l'equazione di stato $p\,V = n\,R\,T$ e per il lavoro l'espressione $d\,W = p\,d\,V$. Si tenga presente che per il lavoro conviene verificare se può essere calcolato direttamente per via geometrica, cioè tramite l'area sotto la curva che rappresenta la trasformazione nel piano (p, V), come visto negli esempi 11.1 e 11.2.

11.7 TRASFORMAZIONI CICLICHE

Abbiamo definito nel paragrafo 10.5 trasformazione ciclica o ciclo una trasformazione in cui lo stato finale coincide con lo stato iniziale. Il primo principio assume la forma (10.6), il calore scambiato è eguale al lavoro scambiato.

Se durante il ciclo viene *prodotto lavoro* ($W > 0$), *assorbendo calore* da un opportuno numero di sorgenti, tale *ciclo* è detto *termico*. Il dispositivo che opera è indicato come *macchina termica*. Se invece il ciclo è tale che venga *richiesto un lavoro esterno* ($W < 0$), *estraendo calore* da una o più sorgenti fredde per cederlo a sorgenti calde si parla di *ciclo frigorifero*. Il dispositivo corrispondente è detto *macchina frigorifera*.

Macchina termica

Macchina frigorifera

Se consideriamo le varie trasformazioni che compongono il ciclo e il calore e il lavoro complessivamente scambiati, possiamo scrivere

$$Q = Q_A + Q_C \quad ,$$

dove $Q_A > 0$ rappresenta la somma dei calori assorbiti e $Q_C < 0$ la somma dei calori ceduti,

$$W = W_F + W_S \quad ,$$

in cui $W_F > 0$ è la somma dei lavori compiuti e $W_S < 0$ è la somma dei lavori subiti. I calori e i lavori sono visti dal sistema che compie il ciclo e a cui sono riferiti gli aggettivi assorbito, ceduto, compiuto e subito. Per l'ambiente è esattamente il contrario.

Per un ciclo termico si definisce *rendimento* la quantità adimensionale

Rendimento di un ciclo termico

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} \tag{11.26}$$

Il rendimento è quindi *la percentuale di calore assorbito che viene trasformata in lavoro*; si noti che nell'ultimo passaggio di (11.26) si è utilizzato il fatto che Q_C è una quantità negativa.

Sperimentalmente si osserva sempre

$$0 \le \eta < 1 \quad ,$$

ovvero, da (11.26),

$$W < Q_A \quad , \quad |Q_C| < Q_A \quad , \quad Q_C \neq 0 \quad :$$

in un ciclo termico solo una frazione minore di 1 del calore assorbito viene trasformata in lavoro, il resto viene sempre ceduto.

Riprenderemo questo argomento nel capitolo 12, dove vedremo che ha carattere

generale; vedremo anche che il calore Q_C non può essere ceduto alla stessa sorgente da cui è stato assorbito Q_A e che quindi un sistema che compie un ciclo deve scambiare calore con almeno due sorgenti.

Studiamo ora alcuni cicli descritti da gas ideali.

Ciclo di Carnot

Il *ciclo di Carnot* è costituito da quattro trasformazioni reversibili, rappresentate in figura 11.17, dove sono indicati anche i versi degli scambi di calore:

1) trasformazione *A B*, *espansione isoterma reversibile*;
2) trasformazione *B C*, *espansione adiabatica reversibile*,
3) trasformazione *C D*, *compressione isoterma reversibile*.
4) trasformazione *D A*, *compressione adiabatica reversibile*.

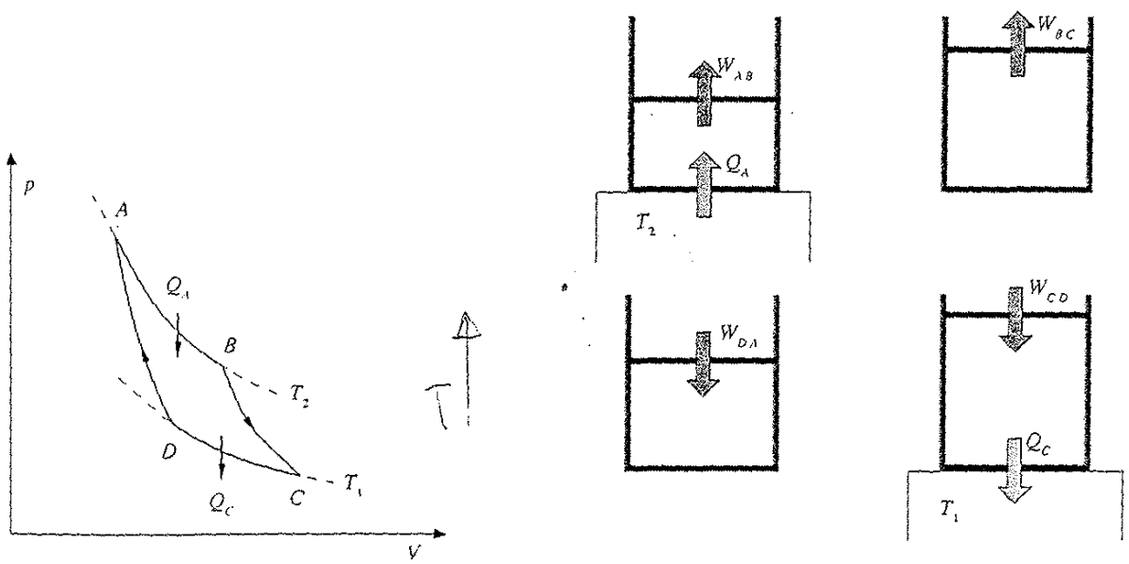


Fig. 11.17

Nello stato *A* il gas è in equilibrio a contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_2. L'espansione isoterma reversibile *A B* può essere considerata come una successione di trasformazioni infinitesime: in ciascuna a seguito di una diminuzione dp della pressione esterna (equilibrio meccanico) il gas si espande di una quantità dV raffreddandosi di dT; si ha quindi cessione di calore dQ dalla sorgente a temperatura T_2 (equilibrio termico) al gas che ritorna alla temperatura T_2. Come risultato, il gas passa reversibilmente dallo stato *A*, di coordinate termodinamiche p_A, V_A, T_2, allo stato *B* di coordinate p_B, V_B, T_2, assorbendo il calore (11.23)

$$W_{AB} = Q_A = n R T_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = \blacksquare \quad ;$$

W è il lavoro fatto dal gas nell'espansione isoterma.

Nella trasformazione *B C* il gas è isolato da qualsiasi sorgente di calore. Se-

guendo lo schema adottato per la trasformazione $A\ B$, durante ciascuna trasformazione infinitesima si ha una diminuzione $d\,p$ della pressione esterna, un'espansione $d\,V$ e un raffreddamento $d\,T$. Il gas passa quindi dallo stato $B\ (p_B, V_B, T_2)$ allo stato $C\ (p_C, V_C, T_1)$, con T_1 minore di T_2 e, secondo la prima delle (11.21)

$$T_2\, V_B^{\gamma-1} = T_1\, V_C^{\gamma-1} \quad .$$

Il lavoro fatto dal gas è $W_{BC} = -\,\Delta\, U_{BC} = n\, c_V\, (T_2 - T_1)$.

Nella trasformazione $C\ D$ il gas è a contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_1. Il processo è analogo ad $A\ B$, però ora si aumenta la pressione esterna di $d\,p$, il gas si comprime di una quantità $d\,V$ ed aumenta la sua temperatura di $d\,T$, cede $d\,Q$ alla sorgente a temperatura T_1 e ritorna alla temperatura T_1. Il calore ceduto complessivamente è

$$W_{CD} = \quad Q_C = n\,R\,T_1\,\ln\frac{V_D}{V_C} = \blacksquare$$

ed è negativo, come il lavoro, poiché $V_D < V_C$.

Infine nella trasformazione $D\ A$ il gas è di nuovo isolato termicamente, si aumenta la pressione esterna di $d\,p$, il volume del gas diminuisce di $d\,V$ e la temperatura aumenta di $d\,T$. Il gas ritorna nello stato iniziale e vale, avendo assunto γ costante, la relazione

$$T_2\, V_A^{\gamma-1} = T_1\, V_D^{\gamma-1} \quad .$$

Il lavoro subito è $W_{DA} = -\,\Delta\, U_{DA} = n\, c_V\, (T_1 - T_2) = -\,W_{BC}$.

Sommando tutti i contributi otteniamo

$$Q = Q_A + Q_C = W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = W_{AB} + W_{CD}\,;$$

questa quantità coincide con l'area racchiusa dal ciclo.

Il rendimento del ciclo è

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{n\,R\,T_1\,\ln(V_D/V_C)}{n\,R\,T_2\,\ln(V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1\,\ln(V_C/V_D)}{T_2\,\ln(V_B/V_A)} \quad .$$

Dividendo membro a membro i termini delle relazioni

$$T_2\, V_B^{\gamma-1} = T_1\, V_C^{\gamma-1} \quad , \quad T_2\, V_A^{\gamma-1} = T_1\, V_D^{\gamma-1}$$

si ottiene $\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$ ovvero $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$. Quindi

Rendimento del ciclo di Carnot

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad . \tag{11.27}$$

Si noti il fatto molto importante che nella (11.27) non compare alcuna grandezza caratteristica del gas, ma solo i valori delle temperature delle sorgenti con cui il gas scambia calore: *il rendimento del ciclo di Carnot, descritto da un gas ideale con*

calore specifico costante, dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi isotermi di calore. Vedremo più avanti, nel paragrafo 12.3, che questa proprietà è vera qualunque sia la sostanza che descrive il ciclo.

Poiché $T_1 < T_2$ verifichiamo che $\eta < 1$; inoltre da $V_B / V_A = V_C / V_D$ si ha $Q_A > |Q_C|$. Il gas complessivamente assorbe calore perché $Q_A + Q_C > 0$ e produce il lavoro $W = Q_A + Q_C$, pari alla somma algebrica di quello fatto durante l'espansione isoterma e subito durante la compressione isoterma (i lavori svolti durante le adiabatiche sono eguali ed opposti).

Ciclo di Stirling

Il *ciclo termico di Stirling* è composto da quattro trasformazioni reversibili, rappresentate nel piano (p, V) in figura 11.18:

1) trasformazione $A\,B$, *espansione isoterma reversibile a temperatura* T_2,
2) trasformazione $B\,C$, *isocora reversibile da* T_2 a $T_1 < T_2$,
3) trasformazione $C\,D$, *compressione isoterma reversibile a temperatura* T_1,
4) trasformazione $D\,A$, *isocora reversibile da* T_1 a T_2.

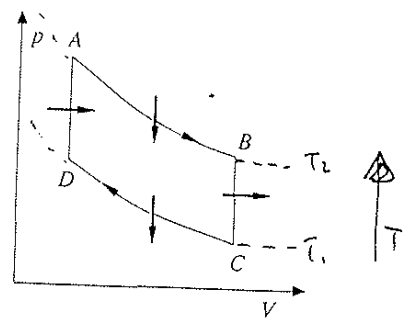


Fig. 11.18

Le trasformazioni $A\,B$ e $C\,D$ sono già state discusse nel caso del ciclo di Carnot e trascriviamo i risultati:

$$Q_A = Q_{AB} = W_{AB} = n\,R\,T_2\,\ln\frac{V_B}{V_A} > 0 \quad ,$$

$$Q_C = Q_{CD} = W_{CD} = n\,R\,T_1\,\ln\frac{V_D}{V_C} < 0 \quad .$$

Nell'isocora $B\,C$ il gas cede a una serie infinita di sorgenti a temperatura T_2, $T_2 - dT$, $T_2 - 2\,dT$, ..., $T_1 + dT$, T_1 il calore

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = n\,c_V\,(T_1 - T_2) \quad .$$

Nell'isocora $D\,A$ avviene, con le stesse modalità, il processo inverso e il gas assorbe il calore

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = n\,c_V\,(T_2 - T_1) = -Q_{BC} \quad .$$

Come sappiamo, nelle isocore non viene scambiato lavoro.

Alla fine del ciclo l'infinita serie di sorgenti con temperature tra T_1 e T_2 ha assorbito e ceduto, durante le isocore, gli stessi calori e il calore realmente scambiato tra il gas e le sorgenti è $Q_A + Q_C$, cioè quello scambiato lungo le isoterme.

Il *rendimento* del ciclo di Stirling è dato pertanto da

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{nRT_1\,\ln(V_D/V_C)}{nRT_2\,\ln(V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad ,$$

Rendimento del ciclo di Stirling

poiché $V_A = V_D$ e $V_B = V_C$. Il rendimento del ciclo di Stirling è dunque *eguale a quello del ciclo di Carnot.*

Ciclo di Otto (motore a scoppio)

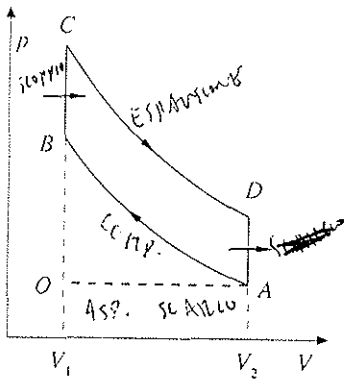


Fig. 11.19

Il *ciclo termico di Otto* schematizza il funzionamento di un motore a scoppio a quattro tempi, come quello del motore automobilistico a benzina. Nel ciclo di Otto si suppone che la miscela aria-benzina sia assimilabile a un gas ideale biatomico e che il ciclo sia reversibile.

Seguendo la figura 11.19 illustriamo le varie fasi del processo.

1) Nella trasformazione $O\ A$ la miscela benzina-aria viene aspirata nel cilindro, a pressione costante (*fase di aspirazione*).
2) Nella trasformazione adiabatica reversibile $A\ B$ la miscela nel cilindro viene compressa rapidamente dal pistone dal volume V_2 al volume V_1 (*fase di compressione*).
3) La trasformazione $B\ C$ schematizza l'incendio della miscela dovuto alla scintilla prodotta dalla candela con conseguente esplosione, che provoca una rapida crescita della temperatura e della pressione del gas; si assume che il riscaldamento sia isocoro con assorbimento di calore da una successione di sorgenti a temperatura crescente

$$Q_A = n\, c_V\, (T_C - T_B) \quad .$$

Questa è la *fase di accensione e combustione.*

4) Il gas caldo si espande rapidamente spingendo il pistone e ritornando al volume V_2 con una trasformazione adiabatica reversibile $C\ D$, durante la quale viene compiuto lavoro (*fase di espansione*).
5) La trasformazione $D\ A$, isocora reversibile con la cessione del calore

$$Q_C = n\, c_V\, (T_A - T_D) \quad ,$$

schematizza l'apertura della valvola verso il tubo di scappamento con conseguente riduzione della pressione al valore iniziale, mentre il gas cede calore all'ambiente (*fase di decompressione*).

6) Infine nella trasformazione $A\ O$ a pressione costante il gas viene espulso dal cilindro e il pistone ritorna nella posizione iniziale (*fase di scarico*).

I *quattro tempi* sono le trasformazioni $O\ A$, $A\ B$, $C\ D$, $A\ O$.

Il *rendimento* del ciclo di Otto è dato da

Rendimento del ciclo di Otto

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{n\, c_V\, (T_A - T_D)}{n\, c_V\, (T_C - T_B)} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} \quad .$$

Sperimentalmente è molto più facile misurare i volumi $V_1\ (= V_B = V_C)$ e $V_2\ (= V_A = V_D)$ e il loro rapporto $r = V_2 / V_1$ (*rapporto di compressione*). Dalle relazioni

$$T_D\, V_2^{\gamma - 1} = T_C\, V_1^{\gamma - 1} \quad , \quad T_A\, V_2^{\gamma - 1} = T_B\, V_1^{\gamma - 1}$$

sottraendo membro a membro si ottiene

$$(T_D - T_A)\, V_2^{\gamma - 1} = (T_C - T_B)\, V_1^{\gamma - 1} \quad .$$

Pertanto

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} = 1 - \frac{1}{r^{0{,}4}} \quad ,$$

avendo utilizzato $\gamma = 1.4$, valore valido per un gas biatomico.

Il rendimento aumenta all'aumentare del rapporto di compressione, che però non deve assumere valori troppo grandi se si vuole evitare il fenomeno dell'autocombustione, cioè l'esplosione anticipata dovuta al riscaldamento della miscela durante la fase di compressione. Mescolando alla benzina opportuni additivi si può ottenere $r = 10$ ovvero $\eta = 0.6$.

Il rendimento del ciclo di Otto calcolato con la formula appena ricavata va inteso come valore massimo teorico: nei motori reali si ottengono rendimenti $0.2 \div 0.3$. La differenza è dovuta a varie cause: innanzitutto il ciclo è solo un'approssimazione dei processi reali, che non possono essere così semplificati; per esempio le fasi di combustione ed espansione non sono nettamente separate, le fasi di compressione ed espansione sono state assunte adiabatiche perché molto rapide, cosicché sia trascurabile lo scambio di calore con l'esterno, ma non sono certamente reversibili (non c'è equilibrio meccanico). Inoltre sono stati trascurati gli attriti e le perdite di calore attraverso le pareti del cilindro. D'altra parte è importante avere un modello che indichi le massime prestazioni possibili.

Ciclo Diesel

Il funzionamento del *motore Diesel* è schematizzabile tramite un ciclo termico eseguito da un gas ideale biatomico (figura 11.20). La differenza con il ciclo di Otto sta essenzialmente nell'autoaccensione graduale della miscela, rappresentata dalla trasformazione isobara reversibile $B\ C$.

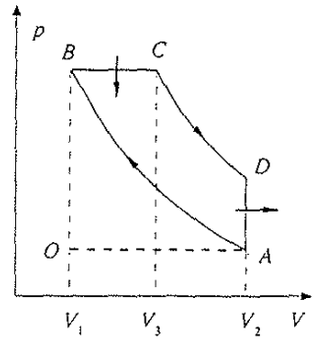


Fig. 11.20

Seguiamo, come fatto per il ciclo di Otto, le varie trasformazioni:

1) trasformazioni $O\ A$, isobara, *fase di aspirazione*;
2) trasformazione $A\ B$, adiabatica reversibile, *fase di compressione*;
3) trasformazione $B\ C$, isobara reversibile, *fase di iniezione e combustione*: il gas assorbe il calore

$$Q_A = n c_p (T_C - T_B) \quad ;$$

4) trasformazione $C\ D$, adiabatica reversibile, *fase di espansione*;
5) trasformazione $D\ A$, isocora reversibile, *fase di decompressione*: il gas cede il calore

$$Q_C = n c_V (T_A - T_D) \quad ;$$

6) trasformazione $A\ O$, isobara, *fase di scarico*.

Il rendimento è dato da

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{n c_V (T_A - T_D)}{n c_p (T_C - T_B)} = 1 - \frac{T_D - T_A}{\gamma (T_C - T_B)}$$

Utilizzando (11.21) per le due trasformazioni adiabatiche reversibili abbiamo

$$T_D V_2^{\gamma-1} = T_C V_3^{\gamma-1} \quad , \quad T_A V_2^{\gamma-1} = T_B V_1^{\gamma-1}$$

da cui ricaviamo i valori di T_D e T_A. Inoltre si ha $T_B / T_C = V_1 / V_3$ essendo la trasformazione $B\ C$ isobara. Definiamo

$$r_C = \frac{V_2}{V_1} \quad , \quad r_E = \frac{V_2}{V_3}$$

rispettivamente *rapporto di compressione* e *rapporto di espansione*. Sostituendo nell'espressione del rendimento si ottiene

Rendimento del ciclo Diesel

$$\eta = 1 - \frac{1/r_E^{\gamma} - 1/r_C^{\gamma}}{\gamma\,(1/r_E - 1/r_C)} \quad .$$

Con $r_C = 15$ e $r_E = 5$ di trova $\eta = 0.56$. Anche ora i valori di rendimento così ottenuti vanno considerati come valori massimi teorici, per ragioni analoghe a quelle discusse nel ciclo di Otto.

Il motore Diesel presenta rendimento più elevato di quello del motore a ciclo di Otto perché può funzionare con rapporto di compressione più alto e può raggiungere temperature di combustione più elevate.

ESEMPIO 11.8 Un ciclo irreversibile

0.2 moli di gas ideale biatomico compiono il ciclo *A B C D A* rappresentato in figura 11.21, dove la trasformazione *A B* è una isoterma irreversibile, mentre *B C* è una adiabatica, *C D* un'isobara e *D A* un'isocora, tutte reversibili.
I valori dei volumi sono $V_A = 5$ l, $V_B = 10$ l, $V_C = 15$ l e T_A vale 900 K. Nell'isoterma *A B* il gas assorbe il calore $Q_0 = 860$ J. Si determinino il lavoro ottenuto nel ciclo e il rendimento. Ripetere il calcolo nell'ipotesi che la trasformazione *A B* sia reversibile.

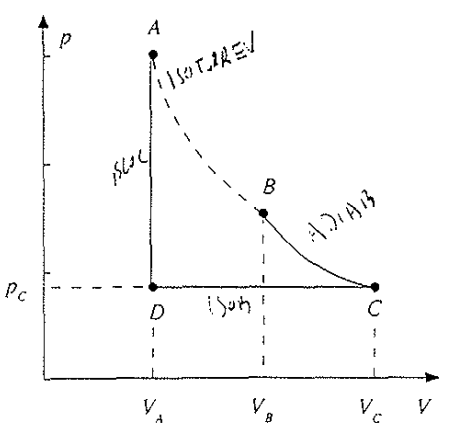


Fig. 11.21

Soluzione
Il lavoro complessivo è $W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD}$ con

$$W_{AB} = Q_0 \quad , \quad W_{BC} = -\Delta U_{BC} = n\,c_V\,(T_B - T_C) \quad ,$$

$$W_{CD} = p_C\,(V_D - V_C) \quad .$$

Il valore di T_C si ricava da

$$T_B\,V_B^{\gamma-1} = T_C\,V_C^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_C = 765.3 \text{ K} \quad (\gamma = 1.4)$$

e allora $p_C = n\,R\,T_C\,/\,V_C = 0.848 \cdot 10^5$ Pa. Posto $c_V = 5\,R/2$ si ha

$$W = 860 + 559.9 - 848.4 = 571.5 \text{ J} \quad .$$

Il calore assorbito è

$$Q_A = Q_{AB} + Q_{DA} = Q_0 + n\,c_V\,(T_A - T_D)$$

con $T_D = p_C\,V_D\,/\,n\,R = 255$ K per cui

$$Q_A = 860 + 2681.3 = 3541.3 \text{ J} \quad .$$

Il rendimento del ciclo irreversibile vale $\eta = 571.5/3541.3 = 0.161$. Se la trasformazione *A B* fosse reversibile, sarebbe

$$W_{AB} = Q_{AB} = n\,R\,T_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 1037.3 \text{ J}$$

e sostituendo questo valore al precedente (860 J) si avrebbe

$$W = 748.8 \text{ J} \quad , \quad Q_A = 3718.6 \text{ J} \quad , \quad \eta = 0.201 \quad .$$

Alcune note conclusive sui cicli termici

Negli esempi trattati di cicli termici abbiamo visto che il sistema scambia calore con varie sorgenti: dal punto di vista termico l'ambiente non è unico, ma cambia da trasformazione a trasformazione e anzi, nelle adiabatiche, non partecipa al processo. Possiamo dire, sempre da un punto di vista termico, che l'ambiente si può rappresentare con un numero, finito o infinito, di sorgenti di calore. Abbiamo anche verificato quanto detto all'inizio: il rendimento risulta sempre minore di 1 e le sorgenti sono sempre almeno due, una a temperatura T_2 che cede calore al sistema, l'altra a temperatura T_1 che assorbe calore dal sistema; il calore che il sistema assorbe è sempre maggiore, in modulo, di quello che il sistema cede, $Q_A > |Q_C|$, e si trova sempre $T_2 > T_1$.

Questi risultati sono più generali di quanto i pochi esempi visti possano far credere; infatti essi sono validi per qualsiasi ciclo termico. Vedremo nel capitolo 12 che tali fatti costituiscono un aspetto del secondo principio della termodinamica.

Cicli frigoriferi

In un *ciclo frigorifero* il sistema complessivamente assorbe lavoro e cede calore ($Q = W < 0$). Nella situazione più semplice il sistema assorbe il calore Q_0 dalla sorgente fredda, assorbe lavoro e cede il calore Q_C a una sorgente calda: risulta sempre $|Q_C| > Q_0$.

Si definisce *efficienza* o *coefficiente di prestazione* di un ciclo frigorifero il rapporto

$$\xi = \frac{Q_0}{|W|} \quad , \tag{11.28}$$

Efficienza di un ciclo frigorifero

tanto maggiore quanto minore è il modulo del lavoro speso nel ciclo, a parità di calore Q_0 assorbito.

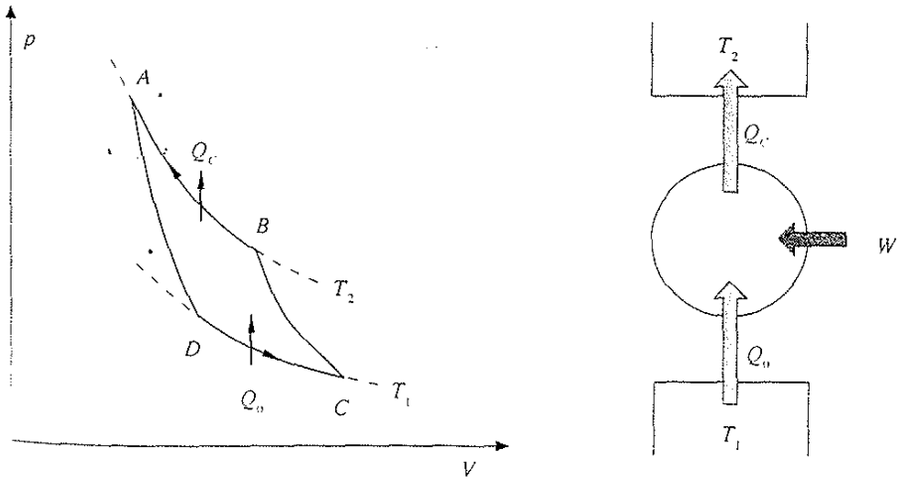


Fig. 11.22

Un ciclo di Carnot percorso in senso inverso costituisce un esempio di ciclo frigorifero reversibile. Con riferimento alla figura 11.22 e anche alla figura 11.17, il gas assorbe il calore $Q_0 = n\,R\,T_1 \ln (V_C / V_D)$ dalla sorgente alla temperatura T_1 (sorgente fredda) e cede il calore $Q_C = n\,R\,T_2 \ln (V_A / V_B)$ alla sorgente alla temperatura T_2 (sorgente calda), assorbendo il lavoro $W = Q_0 + Q_C$. L'efficienza è

$$\xi = \frac{Q_0}{|Q_C + Q_0|} = \frac{nRT_1 \ln(V_C/V_D)}{nRT_2 \ln(V_B/V_A) - nRT_1 \ln(V_C/V_D)} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \quad ,$$

ricordando che $V_B / V_A = V_C / V_D$.

Tratteremo in seguito un esempio pratico di ciclo frigorifero.

Anche per i cicli frigoriferi sono verificati alcuni fatti di carattere generale: il calore ceduto dal sistema alle sorgenti calde è sempre maggiore, in modulo, di quello assorbito, cioè sottratto alla sorgente fredda e quindi il processo avviene sempre in presenza di lavoro fornito dall'ambiente al sistema ($Q_0 + |W| = |Q_C|$). Si tratta di un altro aspetto del secondo principio.

11.8 GAS REALI. EQUAZIONE DI STATO. ENERGIA INTERNA

I *gas reali* non seguono le relazioni caratteristiche dei gas ideali riassunte alla fine del paragrafo 11.5, ma si avvicinano ad esse quanto più bassa è la pressione ed alta la temperatura. Inoltre un gas reale non mantiene sempre la fase gassosa, qualunque sia il valore delle sue coordinate termodinamiche, ma può passare alla fase liquida o solida (cambiamento di fase), come illustreremo nel paragrafo 11.9. Ci limitiamo per ora ad alcune osservazioni sull'equazione di stato e sulla dipendenza dell'energia interna dalle coordinate termodinamiche.

Equazione di stato di un gas reale

In un gas ideale in condizioni isoterme il prodotto pV ha un valore costante, che dipende dalla temperatura prescelta, ma non dalla pressione o dal volume. Tale condizione, a causa delle interazioni molecolari, non è soddisfatta dai gas reali. Le deviazioni diventano rilevanti quando, abbassando la temperatura, ci si approssima al cambiamento di fase gas-liquido oppure, alzando la pressione, si raggiunge la condizione di *gas denso*.

Nella figura 11.23 è riportata, per una mole di azoto, la quantità pV in funzione della pressione, a varie temperature (ciascuna curva è isoterma). Per un gas ideale si dovrebbero avere linee parallele all'asse delle ascisse. Tale situazione si realizza per l'azoto a 300 K e pressioni inferiori a 20 bar.

L'andamento sperimentale del prodotto pV è approssimato abbastanza bene con uno sviluppo in serie (*sviluppo del viriale*),

Sviluppo del viriale

$$\frac{pV}{nRT} = 1 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \ldots \quad .$$

I coefficienti c_i, detti *coefficienti del viriale*, sono funzioni della temperatura, decrescenti all'aumentare della stessa, e dipendono dalla natura del gas; essi vengono determinati sperimentalmente. Uno sviluppo analogo, con coefficienti diversi, si

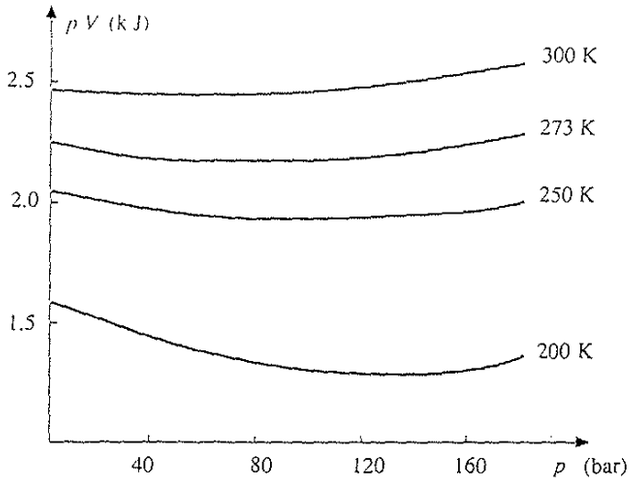


Fig. 11.23

può fare in funzione di $1/V$, cioè della densità.

Il comportamento tipico del gas ideale è il limite quando la pressione (o la densità) tende a zero.

Energia interna

Come abbiamo discusso nel paragrafo 11.5 l'energia interna di un gas ideale è funzione solo della temperatura; pertanto le sue derivate parziali rispetto al volume e alla pressione, eseguite a temperatura costante, sono nulle:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = 0 \quad .$$

L'eventuale dipendenza dalla pressione per un gas reale si può verificare eseguendo un'espansione isoterma da uno stato a pressione p e temperatura T ad un altro a pressione $p_0 < p$ ed eguale temperatura; dalla misura del lavoro e del calore scambiati nella trasformazione si risale, tramite il primo principio, alla variazione di energia interna. Si trova che:

a) la differenza $\Delta U = U(p, T) - U(p_0, T)$ è minore di zero,

b) il modulo di ΔU cresce con l'aumentare di $p - p_0$.

Pertanto si ha

$$(\partial U / \partial p)_T \neq 0$$

e tale quantità inoltre risulta funzione della temperatura, ma non della pressione.

Quantitativamente si ottiene, ad esempio per una mole di aria a 301 K, $(\partial U / \partial p)_T \cong -6$ J/bar: a temperatura costante l'energia interna è funzione lineare della pressione. Per pressioni elevate ($p > 40$ bar) il comportamento è diverso.

Solo se il gas reale è rarefatto ($p \to 0$) la sua energia tende a dipendere solo dalla temperatura.

Espansione di Joule-Thomson

Già prima dell'esecuzione dell'esperienza sopra descritta, condotta nel 1932, Joule e Thomson nella seconda metà dell'800 studiarono il comportamento dell'energia interna di un gas reale con l'esperienza dell'espansione che porta il loro nome.

Due recipienti comunicano tra loro attraverso un settò poroso e un fluido viene fatto passare dal primo al secondo per effetto di una differenza di pressione. L'esperienza viene svolta in condizioni adiabatiche ($Q = 0$) e si osserva di norma una variazione della temperatura del fluido.

Quando il fluido è un gas (reale) si trova quasi sempre che esso si raffredda nell'espansione, ma in qualche caso si trova riscaldamento e anche nessuna variazione di temperatura, a seconda del gas su cui si sperimenta. Se si ammette che U sia funzione solo della temperatura, la relazione $\Delta U = -W$ non è quasi mai soddisfatta: si hanno infatti situazioni in cui $W = 0$ e $\Delta T \neq 0$ oppure $W < 0$ e $\Delta T < 0$. Assumendo sempre valido il primo principio si conclude che *l'energia interna di un gas reale non è funzione soltanto della temperatura.*

Se l'esperienza è condotta con un liquido saturo si ha sempre raffreddamento e anche una evaporazione parziale; tecnicamente il fenomeno è sfruttato nei cicli frigoriferi, come vedremo nel prossimo paragrafo.

11.9 DIAGRAMMI $p\,V$. DIAGRAMMI $p\,T$. FORMULA DI CLAPEYRON

Il diagramma $p\,V$ di una sostanza omogenea e pura è mostrato in figura 11.24. In ascissa è riportato il volume per unità di massa, cioè il *volume specifico* $v = V/m$,

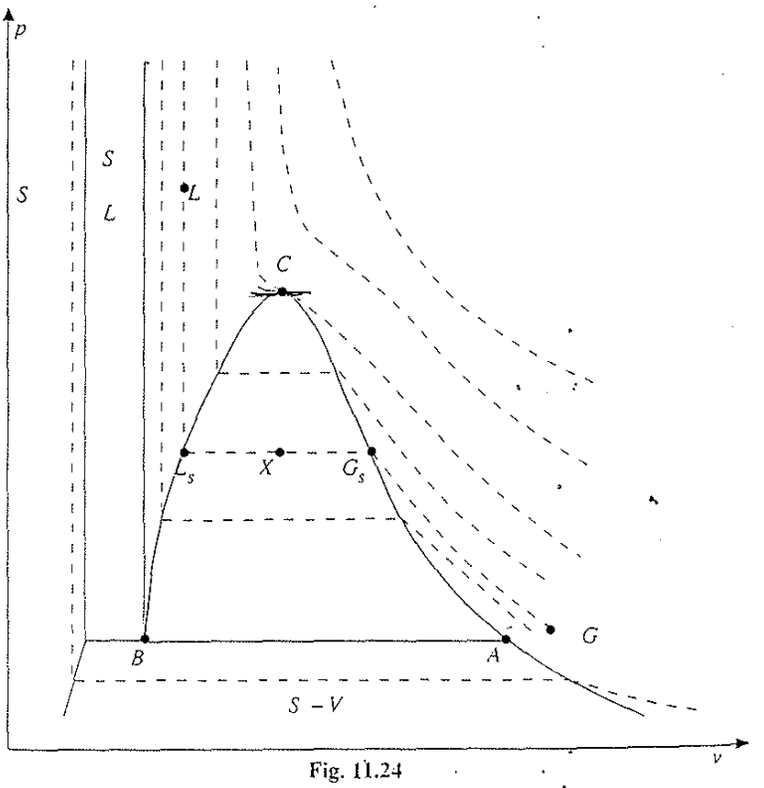


Fig. 11.24

in ordinata la pressione: ogni punto rappresenta uno stato di equilibrio.

Le linee tratteggiate indicano trasformazioni isoterme e in alcuni casi lungo di esse si verificano cambiamenti di fase della sostanza che, in condizioni di equilibrio, avvengono a pressione costante.

Seguiamo una di queste trasformazioni isoterme partendo dallo stato G, chiamato così per indicare che la sostanza è nella fase gassosa (più esattamente di *vapore*). Riducendo il volume e mantenendo costante la temperatura si arriva nello stato G_S, dove *il vapore è saturo*. A questo punto comincia la condensazione del vapore e riducendo ancora il volume la sostanza raggiunge lo stato L_S, di *liquido saturo*. Vapore saturo — Liquido saturo

Nel tratto rettilineo $G_S L_S$, isobaro e isotermo, che rappresenta appunto *il cambiamento di fase da vapore a liquido*, il volume specifico diminuisce dal valore v_G, tipico dello stato G_S, al valore v_L, tipico dello stato L_S perché cambia il rapporto della quantità di sostanza nelle due fasi: la massa di liquido aumenta e quella di vapore diminuisce. In uno stato intermedio di equilibrio, corrispondente al volume specifico v_X, si ha $v_X = \dfrac{V_X}{m_L + m_G} = \dfrac{V_L + V_G}{m_L + m_G} = \dfrac{v_L m_L + v_G m_G}{m_L + m_G}$ avendo indicato con m_L la massa del liquido e m_G la massa di vapore presenti in equilibrio nello stato X. Risulta

$$\frac{m_G}{m_L} = \frac{v_X - v_L}{v_X - v_G} = \frac{\overline{XL_S}}{\overline{XG_S}} \quad ,$$

cioè il rapporto tra le masse di vapore e di liquido è pari all'inverso del rapporto delle distanze di X dai punti G_S e L_S, rappresentativi dell'inizio e della fine del processo di condensazione.

Riducendo ancora il volume al di sotto di v_L l'isoterma diventa praticamente verticale, cioè a una variazione piccola di volume corrisponde una notevolissima variazione di pressione, segno dell'incomprimibilità dei liquidi. Lo stato L è uno stato di liquido compresso.

La pressione costante che caratterizza il cambiamento di fase a una data temperatura si chiama *tensione di vapore saturo* (o *tensione di vapore del liquido*); essa dipende dalla temperatura secondo la relazione

$$\ln p = \ln A - \frac{B}{T} \qquad \text{ovvero} \qquad p = A\, e^{-B/T} \quad , \tag{11.29}$$

Tensione di vapore saturo

dove A e B sono due parametri debolmente variabili con la temperatura.

Altre due isoterme con temperature diverse, ma caratteristiche simili, sono disegnate in figura 11.24, un po' sopra e un po' sotto all'isoterma descritta. Si nota che al crescere della temperatura il tratto orizzontale corrispondente alla condensazione diventa sempre più corto, fino a che si raggiunge un'isoterma particolare, in cui il tratto $G_S L_S$ è ridotto a un punto, il punto C. L'isoterma passante per C, e che in C ha un flesso a tangente orizzontale, si chiama *isoterma critica* e il punto C si chiama *punto critico*: le coordinate termodinamiche dello stato C si indicano col nome di *temperatura critica* T_c, *pressione critica* p_c, *volume critico* (specifico) v_c. Punto critico

Il punto critico è il punto di massima pressione e temperatura in cui si ha equilibrio tra liquido e vapore. La temperatura T_c è la massima temperatura alla quale possiamo avere la fase liquida. Nella zona a destra dell'isoterma critica esistono solo stati di gas permanente: qualunque sia la pressione la sostanza resta sempre nella fase gassosa (si può cioè sempre liquefare un gas diminuendo la temperatura, ma non aumentando la pressione). Per $T > T_c$ le isoterme approssi-

mano quelle di un gas ideale, tanto meglio quanto maggiore è la temperatura e minore la pressione.

Lungo l'isoterma critica, al di sopra del punto C, non c'è distinzione tra liquido e gas: con una piccola variazione delle coordinate termodinamiche si passa da una fase all'altra con continuità; lungo tale ramo dell'isoterma critica è nullo il calore latente di evaporazione. È interessante notare che con una trasformazione (non isoterma) si può passare dallo stato G allo stato L restando al di fuori della zona di condensazione, cioè si può passare dalla fase gassosa alla fase liquida senza condensazione.

Densità critica

Nella tabella 11.1 sono riportati i valori critici per alcune sostanze, sostituendo al volume critico il suo inverso, la *densità critica*.

Tabella 11.1 - Punti critici

Sostanza	T_c (K)	p_c (Pa)	ρ_c (kg/m^3)
acqua	647.3	$220.9 \cdot 10^5$	317
alcool etilico	516.3	$64.3 \cdot 10^5$	276
anidride carbonica	304.2	$73.9 \cdot 10^5$	468
argon	151.0	$48.6 \cdot 10^5$	537
azoto	126.2	$33.9 \cdot 10^5$	311
elio	5.3	$2.3 \cdot 10^5$	69
idrogeno	33.3	$13.3 \cdot 10^5$	31
ossigeno	154.8	$50.8 \cdot 10^5$	430

La zona di condensazione è limitata dalla curva $C\,A$, detta *curva di saturazione del vapore*, dalla curva $C\,B$, detta *curva di saturazione del liquido*, e inferiormente dalla linea isoterma $A\,B$, detta *linea tripla*: lungo di essa coesistono tutte e tre le fasi della sostanza, fase gassosa, fase liquida e fase solida. I valori di pressione e temperatura che caratterizzano la linea tripla si chiamano *pressione tripla* p_t e *temperatura tripla* T_t: invece il volume specifico varia lungo la linea tripla, a causa della graduale trasformazione di una fase nell'altra. La coppia di valori p_t, T_t individua il cosiddetto *punto triplo della sostanza*.

Punto triplo

Al di sotto della linea tripla si trovano stati di equilibrio solido-vapore ed è indicata un'isoterma lungo cui avviene la sublimazione, cioè il cambiamento di fase vapore-solido. Anche in questo caso è valida una relazione simile a (11.29) per la tensione di vapore del solido.

Nella figura 11.24, sono anche individuate le zone in cui la sostanza è solida (S) e quelle in cui c'è equilibrio solido-liquido (S - L).

La tabella 11.2 riporta alcuni valori di pressione tripla e temperatura tripla.

Tabella 11.2 - Punti tripli

Sostanza	p_t (Pa)	T_t (K)
acqua	$6.11 \cdot 10^2$	273.16
anidride carbonica	$5.17 \cdot 10^5$	216.55
argon	$6.82 \cdot 10^4$	83.80
azoto	$1.25 \cdot 10^4$	63.18
elio	$5.04 \cdot 10^3$	2.17
idrogeno	$7.04 \cdot 10^3$	13.84
ossigeno	$1.52 \cdot 10^2$	54.36

Un'altra proprietà interessante che si riferisce al diagramma della figura 11.24 è la seguente: definendo le tre variabili

$$\pi = p / p_c \quad , \quad \phi = v / v_c \quad , \quad \tau = T / T_c \quad ,$$

Legge degli stati corrispondenti

ovvero utilizzando pressione, volume e temperatura del punto critico come unità di misura per pressione, volume e temperatura della sostanza data, il diagramma $p\ V$ diventa un diagramma $\pi\ \phi$. Si trova che dopo tale trasformazione tutte le sostanze hanno praticamente lo stesso diagramma: il risultato è noto come *legge degli stati corrispondenti*.

Equazione di Van der Waals

Un'equazione di stato semiempirica, che permette di descrivere in modo accettabile il comportamento di un gas reale in prossimità delle transizioni gas-liquido, è stata introdotta nel 1873 da Van der Waals.

Con riferimento a n moli di gas l'*equazione di Van der Waals* si scrive

$$\left(p + a\,\frac{n^2}{V^2}\right)(V - n\,b) = nRT \qquad (11.30)$$

Equazione di Van der Waals

dove a e b sono dei coefficienti caratteristici del gas in esame. Vedremo nel paragrafo 11.11 come si possa arrivare alla struttura della (11.30).

Un confronto tra le isoterme misurate sperimentalmente in un intervallo di valori di p e v in vicinanza del punto critico e l'andamento previsto sulla base della (11.30) indica un accordo ottimo per $T > T_c$ fino a pressioni prossima a quella critica e accettabile anche a pressioni superiori. Per $T \leq T_c$ l'accordo è ancora buono, escludendo naturalmente la regione dove si ha coesistenza di liquido e vapore. Un'isoterma di Van der Waals in questa regione è mostrata in figura 11.25: in particolari condizioni gli stati di equilibrio lungo i tratti $A\ B$ e $C\ D$ possono essere realizzati, ma non quelli lungo $B\ C$.

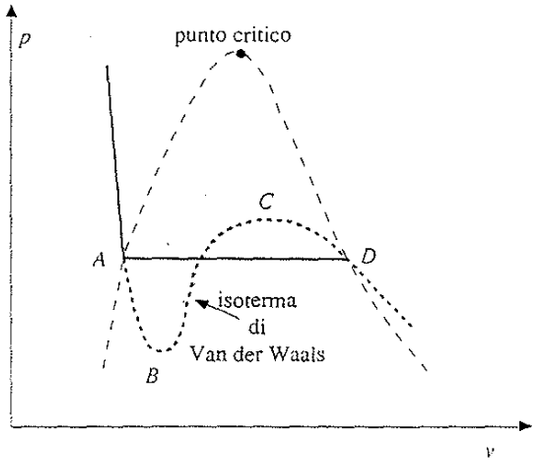


Fig. 11.25

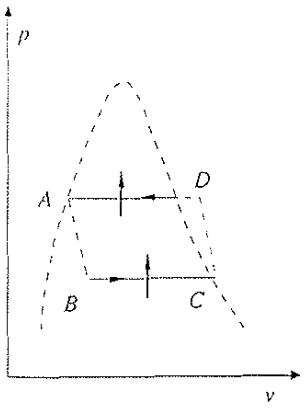


Fig. 11.26

Cicli frigoriferi reali

Un ciclo frigorifero che utilizza come sostanza un fluido reale è disegnato in figura 11.26: nel diagramma $p\ V$ la linea tratteggiata delimita la zona in cui si ha l'equilibrio liquido-vapore.

Descriviamo le varie trasformazioni indicate.

1) Nello stato A la massa di fluido è nella fase liquida (liquido saturo) alla temperatura T_2 ; la trasformazione irreversibile da A a B è un'espansione di Joule-Thomson (paragrafo 11.8), in cui il fluido si raffredda da T_2 a T_1 ; in B coesistono fase liquida e fase di vapore;
2) da B a C il fluido segue l'isoterma alla temperatura T_1 evaporando durante il processo finché nello stato C esso è nella fase di vapore (saturo); in questa trasformazione il fluido assorbe il calore Q_0 dalla sorgente fredda a temperatura T_1 con cui è in contatto termico;
3) dallo stato C il fluido è compresso adiabaticamente fino allo stato D, che ha la stessa pressione di A, ma temperatura superiore, restando sempre nella fase di vapore;
4) infine da D ad A la trasformazione è isobara, a contatto termico con la sorgente calda a temperatura T_2 : inizialmente la temperatura del vapore diminuisce fino a T_2 , poi la trasformazione diventa anche isoterma e il vapore condensa, cedendo calore alla sorgente.

Gli scambi di calore avvengono durante i cambiamenti di fase ed è conveniente usare come sostanza che descrive il ciclo una sostanza, con temperatura critica abbastanza alta, che, nelle applicazioni normali, con temperature vicine a 0°C, passi facilmente dalla fase di vapore a quella liquida; comunemente utilizzati sono i gas tipo freon (formula chimica $C F_3 Br$ o simile).

Il motore di un frigorifero commerciale comprende come parti essenziali un compressore (per la trasformazione $C\ D$), un condensatore ($D\ A$), una valvola per l'espansione di Joule-Thomson ($A\ B$) e un evaporatore ($B\ C$); il calore è sottratto all'ambiente interno e ceduto all'ambiente esterno con consumo di energia elettrica.

Diagrammi $p\ T$

Un'altra rappresentazione significativa delle proprietà di una sostanza omogenea pura, specialmente per quel che riguarda i cambiamenti di fase, è il diagramma $p\ T$ di figura 11.27. Gli stati di equilibrio in cui coesistono due fasi (solido-vapore,

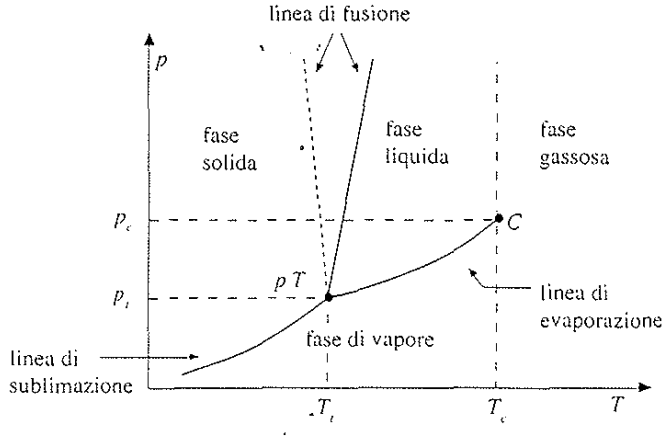


Fig. 11.27

solido-liquido, liquido-vapore) stanno su tre curve che si incontrano nel *punto triplo*. Il punto C rappresenta il *punto critico*, nella zona $T > T_c$ abbiamo solo fase gassosa.

La linea che separa la fase solida dalla fase liquida, *linea di fusione*, ha pendenza positiva: ciò vuol dire che aumentando la pressione aumenta la temperatura di fusione. Fa eccezione a questo comportamento l'acqua in cui all'aumentare della pressione la temperatura di fusione diminuisce; in tal caso la linea di fusione ha pendenza negativa (linea punteggiata).

Le altre linee di separazione, *linea di sublimazione* e *linea di evaporazione*, hanno sempre pendenza positiva; l'espressione analitica è del tipo (11.29).

Dal diagramma si vede che, a pressione costante e aumentando la temperatura (trasformazione isobara, parallela all'asse T), si possono avere tre tipi di comportamento: se $p < p_t$ si ha passaggio diretto dalla fase solida alla fase di vapore, se $p_t < p < p_c$ si hanno due cambiamenti di fase, solido-liquido e liquido-vapore, se $p > p_c$ si ha la fusione, ma il passaggio da liquido a gas avviene senza evaporazione.

Si capisce così perché una sostanza con elevata pressione tripla, come l'anidride carbonica ($p_t \cong 5$ bar dalla tabella 11.2), posta in un ambiente alla pressione ordinaria sublimi.

Sempre dal diagramma $p\,T$ si vede che, a temperatura costante e aumentando la pressione (trasformazione isoterma, parallela all'asse p), è possibile passare dalla fase di vapore alla fase liquida e solida solo se $T < T_c$, mentre per $T > T_c$ la sostanza resta sempre gassosa, qualunque sia la pressione.

Una rappresentazione completa evidentemente deve essere tridimensionale, in coordinate p, V, T: i diagrammi $p\,V$ e $p\,T$ sono proiezioni sui piani (p, V) e (p, T) ortogonali tra loro. Le stesse proprietà si possono vedere in entrambi, però assumono un aspetto diverso. Per esempio, gli stati di equilibrio con tre fasi, che nel diagramma $p\,V$ stanno su una linea, nel diagramma $p\,T$ sono rappresentati da un punto, che è l'intersezione della linea tripla con il piano (p, T).

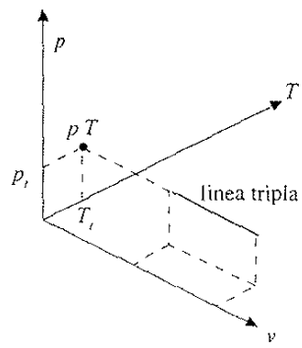


Fig. 11.28

Formula di Clapeyron

Consideriamo nel diagramma $p\,V$ della figura 11.24 due isoterme reali molto prossime, alle temperature T e $T + d\,T$, nella zona di equilibrio liquido-vapore e costruiamo il ciclo infinitesimo, riportato in figura 11.29: i tratti orizzontali finiti

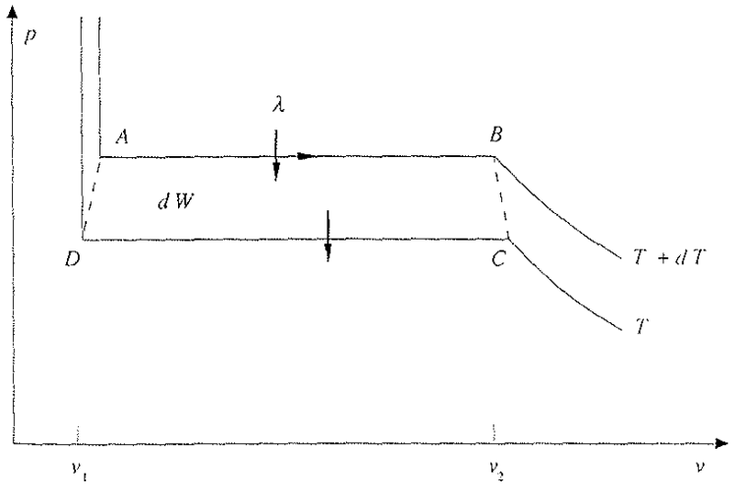


Fig. 11.29

$A\,B$ e $C\,D$ sono due isoterme, i tratti verticali infinitesimi comportano uno scambio di calore infinitesimo e quindi trascurabile rispetto a quello delle isoterme: per questa ragione le trasformazioni $B\,C$ e $D\,A$ si possono considerare adiabatiche.

Il ciclo $A\,B\,C\,D$ è allora un ciclo di Carnot, descritto da una sostanza che non è un gas ideale. L'area del ciclo rappresenta il lavoro e, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è pari all'area di un rettangolo di base $v_2 - v_1$ e altezza $d\,p$, $d\,W = d\,p\,(v_2 - v_1)$. Il calore viene assorbito nella trasformazione $A\,B$ e, per unità di massa, è dato dal calore latente di evaporazione λ. Il rendimento è dato da

$$\eta = \frac{d\,W}{\lambda} = d\,p\,\frac{v_2 - v_1}{\lambda} \quad .$$

Nel capitolo 12 dimostreremo che il rendimento del ciclo di Carnot non dipende dalla sostanza che descrive il ciclo; da (11.27)

$$\eta = 1 - \frac{T}{T + dT} \cong \frac{dT}{T} \quad .$$

Eguagliando le due espressioni del rendimento otteniamo la *formula di Clapeyron*, che scriviamo nelle due forme equivalenti

Formula di Clapeyron

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T\,(v_2 - v_1)}{\lambda} \quad , \quad \frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T\,(v_2 - v_1)} \quad . \tag{11.31}$$

La validità della (11.31) si estende agli altri cambiamenti di fase: in generale, per una certa sostanza che cambia di fase alla temperatura T, essa permette di calcolare di quanto cambia il valore di T al variare della pressione.

Nel diagramma $p\,T$ della figura 11.24 l'equazione (11.31) descrive la pendenza $d\,p\,/\,d\,T$ delle linee di separazione tra le varie fasi. Nell'evaporazione e nella sublimazione il volume specifico del gas è sempre maggiore di quello della fase condensata (liquido o solido), quindi $v_2 > v_1$ e $d\,p\,/\,d\,T > 0$: *le linee di evaporazione e sublimazione hanno pendenze positive*. Nella fusione per molte sostanze $v_{liq} > v_{sol}$ e $d\,p\,/\,d\,T > 0$; se invece $v_{liq} < v_{sol}$, come avviene nell'acqua che nel processo di solidificazione si espande, la linea di fusione ha pendenza negativa.

Mostriamo due esempi di applicazione della formula di Clapeyron. A pressione atmosferica l'acqua bolle a $T = 373.15$ K; inserendo i valori appropriati per λ, v_1, v_2 si trova $d\,T\,/\,d\,p = 28$ K/bar, in accordo col valore sperimentale. Passando alla fusione del ghiaccio, che a pressione atmosferica avviene a $T = 273.15$ K, si trova $d\,T\,/\,d\,p = -7.3 \cdot 10^{-3}$ K/bar: per abbassare di un kelvin la temperatura di fusione bisogna aumentare la pressione di circa 140 bar.

Integriamo ora la (11.31) per il cambiamento di fase liquido-vapore, in condizioni non prossime al punto critico, assumendo che il vapore si comporti come un gas ideale, che v_{liq} sia molto minore di v_{vap} e che λ sia indipendente dalla temperatura, tutte ipotesi abbastanza verificate. Dato che $v_1 = v_{liq} = 0$ e che, in accordo con (11.9), $v_2 = v_{vap} = 1/\rho_{vap} = R\,T\,/\,A\,p$, si ha

$$\frac{d\,p}{p} = \frac{\lambda\,A}{R}\,\frac{d\,T}{T^2} \quad \Rightarrow \quad \ln p = -\frac{\lambda\,A}{R\,T} + \text{costante} \quad ;$$

si trova l'andamento della tensione di vapore del liquido con la temperatura descritto dalla (11.29).

11.10 TEORIA CINETICA DEI GAS

Per spiegare il comportamento del gas ideale venne proposto, già verso il 1750, il seguente *modello cinetico*, che enunciamo in termini moderni:

1) *un gas è costituito da molecole eguali, in moto continuo e disordinato*;
2) *gli urti tra molecole e tra molecole e pareti del contenitore sono elastici*;
3) *non ci sono forze intermolecolari, se non durante gli urti*: gli urti sono dovuti cioè a forze repulsive a corto raggio di azione, mentre si assumono trascurabili le forze attrattive agenti tra le molecole;
4) *le dimensioni delle molecole sono molto piccole rispetto alle distanze medie tra di esse*.

Modello cinetico del gas ideale

Sulla base della prima ipotesi (*caos molecolare*), in ogni istante, considerata una qualsiasi direzione orientata **u**, ci sono tante molecole che hanno velocità concorde a **u** quante hanno velocità discorde a **u**; la velocità media $\boldsymbol{v}_m$ è quindi nulla. Infatti, macroscopicamente, un gas chiuso in un recipiente è in quiete, $\mathbf{P} = M\boldsymbol{v}_{CM} = 0$. Inoltre il numero di molecole per unità di volume deve essere lo stesso in ogni parte del recipiente occupato dal gas (densità costante).

La seconda ipotesi implica che negli urti tra molecole si conservano quantità di moto ed energia, mentre nell'urto di una molecola contro una parete si conserva solo l'energia (forze esterne impulsive).

Dalla terza ipotesi deriva che l'energia potenziale interna è nulla e quindi la sola forma di energia è quella cinetica.

Infine, la quarta ipotesi indica che il volume totale occupato dalle molecole è trascurabile rispetto a quello del recipiente.

Sulla base del modello cinetico è stata sviluppata, soprattutto nel 1800, la teoria cinetica dei gas, che permette di arrivare a previsioni sul comportamento dei gas, le possono essere verificate sperimentalmente.

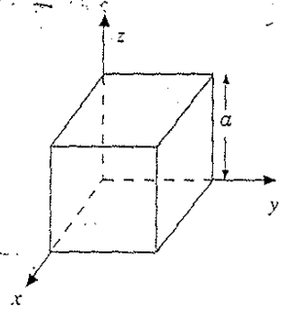
Calcolo della pressione

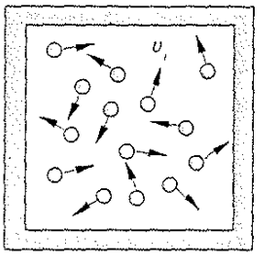
Si consideri un contenitore cubico di lato a riempito con un gas che si comporta come prescritto dal modello cinetico. La velocità di una molecola è data da $\boldsymbol{v} = v_x\mathbf{u}_x + v_y\mathbf{u}_y + v_z\mathbf{u}_z$: la componente $v_x\mathbf{u}_x$ è ortogonale alla parete $y\,z$, la componente $v_y\mathbf{u}_y$ alla parete $x\,z$, la componente $v_z\mathbf{u}_z$ alla parete $x\,y$.

Nell'urto elastico contro la parete $y\,z$ cambia solo la componente $v_x\mathbf{u}_x$ che diventa $-v_x\mathbf{u}_x$ mentre le altre rimangono invariate, data l'assenza di forze di attrito (paragrafo 5.13, caso d). La variazione di quantità di moto nell'urto della molecola con la parete $y\,z$ è pari a $-2m\,v_x\mathbf{u}_x$; se m è la massa della molecola, e quindi l'impulso comunicato alla parete è $2m\,v_x\mathbf{u}_x$.

L'urto successivo contro la parete $y\,z$ considerata avviene dopo un tempo $t = 2a/v_x$, necessario per attraversare nei due sensi il cubo lungo la direzione x. In realtà non è la stessa molecola che compie l'urto successivo perché nel tragitto $2a$ essa può subire un urto contro un'altra molecola e venire deviata. Tuttavia, a causa del moto completamente disordinato (prima ipotesi), per una molecola che perde la componente v_x ce n'è un'altra che, a seguito di un urto, acquista tale componente v_x.

Pertanto il numero di urti al secondo sulla parete $y\,z$ è dato da $1/t = v_x/2a$ e l'impulso comunicato in un secondo, pari alla componente x della forza media esercitata sulla parete da una molecola (paragrafo 2.3), vale in modulo





$v_m = \Sigma_i v_i = 0$

Fig. 11.30

$$F_i = 2\,m\,v_{x,i}\,\frac{v_{x,i}}{2a} = \frac{m\,v_{x,i}^2}{a}$$

La forza risultante sulla parete è

$$R_x = \frac{m}{a}\,\Sigma_i\, v_{x,i}^2$$

dove la somma è estesa a tutte le molecole; la pressione sulla parete $y\,z$ di area $S = a^2$, dovuta agli urti molecolari, risulta essere quindi

$$p = \frac{R_x}{S} = \frac{m}{a^3}\,\Sigma_i v_{x,i}^2 = \frac{N\,m}{V}\,\frac{1}{N}\,\Sigma_i v_{x,i}^2 \quad ;$$

N è il numero totale di molecole nel cubo di volume $V = a^3$.

Si chiama *velocità media quadratica* la quantità $\bar{v}$, definita come radice quadrata di

Velocità media quadratica

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 = \frac{1}{N}\,\Sigma_i\,(v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2) \quad .$$

Se il moto è completamente disordinato non c'è alcuna direzione preferita per le molecole e pertanto i valori medi quadratici $\bar{v}_x^2$, $\bar{v}_y^2$, $\bar{v}_z^2$ sono eguali tra loro:

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{\bar{v}^2}{3} \quad .$$

In conclusione

$$p = \frac{N\,m}{V}\,\frac{\bar{v}^2}{3} \quad \Rightarrow \quad p\,V = \frac{1}{3}\,N\,m\,\bar{v}^2 \quad .$$

Il ragionamento è identico per quanto riguarda gli urti sulle altre pareti e si estende a contenitori di forma qualunque. Il risultato è generale, nel senso che non dipende da come sono distribuite le velocità delle singole molecole in un gas alla temperatura T, finché tutte le direzioni del moto sono equivalenti.

Definendo come *energia cinetica media di traslazione* delle molecole $\bar{E}_k = \frac{1}{2}\,m\,\bar{v}^2$, si ha

$$p\,V = \frac{2}{3}\,N\,\bar{E}_k \quad : \qquad (11.32)$$

il prodotto pressione per volume è proporzionale all'energia cinetica media delle molecole $N\,\bar{E}_k$, che nel gas ideale coincide con l'energia totale.

La (11.32) è il risultato di una trattazione teorica; d'altra parte per un gas ideale vale l'equazione di stato (11.6) $p\,V = n\,R\,T$, che è basata su dati sperimentali.

Eguagliando si trova

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2}\,\frac{n}{N}\,R\,T = \frac{3}{2}\,\frac{R}{N_A}\,T \quad ,$$

dato che $n N_A = N$. Ricordando la definizione (11.8) otteniamo

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2} k_B T \quad : \tag{11.33}$$

l'energia cinetica media di una molecola di un gas ideale è proporzionale alla temperatura del gas.

Se il modello cinetico è corretto, cosa che ancora non sappiamo confermare non avendo finora fatto delle previsioni verificabili sperimentalmente, abbiamo trovato il *significato microscopico della grandezza temperatura*: *essa è proporzionale all'energia cinetica media delle molecole.* Alta temperatura vuol dire quindi grande velocità media quadratica del moto molecolare, bassa temperatura che invece le molecole sono mediamente lente.

Per calcolare i valori delle velocità medie quadratiche previsti dal modello cinetico per un gas a temperatura T basta eguagliare (11.33) a $\frac{1}{2} m \overline{v^2}$:

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 RT}{A}} \quad , \tag{11.34}$$

avendo moltiplicato, per passare dal secondo al terzo membro, numeratore e denominatore per N_A, numero di Avogadro; ricordiamo che A è la massa molecolare del gas. I risultati per alcuni gas a 300 K sono riportati in tabella 11.3 (con A espresso in kg, R = 8314 J/chilomole K).

Tabella 11.3 - Velocità medie quadratiche

gas	A (kg)	$\overline{v}$ (m/s)
idrogeno	2	1934
elio	4	1368
vapor d'acqua	18	645
azoto	28	517
ossigeno	32	484

Equipartizione dell'energia

Lo sviluppo successivo della teoria cinetica dei gas porta alla previsione che la relazione (11.33) è di carattere generale, in questo senso: *ad ogni termine quadratico dell'energia classica di una molecola di un corpo corrisponde, all'equilibrio termodinamico, un'energia media pari a* $\frac{1}{2} k_B T$, essendo T la temperatura del sistema. Questo risultato può essere anche espresso affermando che ad ogni componente indipendente del moto compete la stessa energia media ossia *per ogni grado di libertà c'è il contributo* $\frac{1}{2} k_B T$; esso è noto come *principio dell'equipartizione dell'energia.*

Pertanto per un sistema con l gradi di libertà

$$\overline{E} = \frac{l}{2} k_B T \tag{11.35}$$

Equipartizione dell'energia

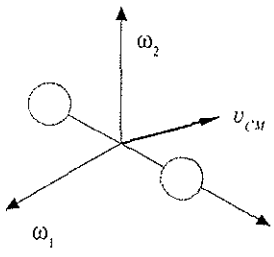
Le molecole di un gas ideale monoatomico presentano *tre gradi di libertà* e la loro energia, esclusivamente cinetica, ha tre termini quadratici:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 \quad .$$

Per esse il principio dell'equipartizione dell'energia prevede

$$\overline{E_k} = \overline{E_x} + \overline{E_y} + \overline{E_z} = \frac{3}{2} k_B T$$

che è la (11.33). Si noti che $\overline{E_x}$ non indica una componente dell'energia, che è una grandezza scalare, ma l'energia associata al moto lungo la direzione x.



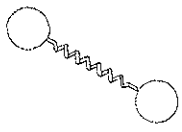


Fig. 11.31

Una molecola di un gas ideale biatomico può essere visualizzata come due punti (i due atomi) vincolati a restare a una data distanza tra loro e ha *cinque gradi di libertà* (si riveda il paragrafo 6.1). Tre sono legati al moto del centro di massa e ad essi compete l'energia $\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$, due sono legati alla rotazione della molecola rispetto ad un asse passante per il centro di massa e ortogonale all'asse della molecola; la velocità angolare ha due componenti e l'energia di rotazione è $\frac{1}{2} I \omega_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2$. Quindi da (11.35) $\overline{E_k} = \frac{5}{2} k_B T$. Ad alta temperatura entra in gioco un termine ulteriore dovuto al moto di vibrazione dei due atomi lungo l'asse della molecola.

Se consideriamo un *cristallo* formato da atomi distribuiti con regolarità nello spazio, che oscillano attorno alle loro posizioni di equilibrio interagendo con gli atomi circostanti tramite forze di tipo elastico, l'energia di ogni atomo è esprimibile come

$$U = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2 \quad ,$$

dove k_x, k_y, k_z indicano le costanti elastiche caratteristiche del cristallo, associate alle tre componenti di oscillazione. Pertanto per l'atomo nel cristallo l'energia è data da tre termini quadratici legati all'energia cinetica e tre legati all'energia potenziale, corrispondenti a *sei gradi di libertà*. L'energia media, che coincide con l'energia interna, è quindi data da $U = 3 k_B T$ per atomo.

Le energie cinetiche medie calcolate per le molecole monoatomiche e biatomiche sono l'unica forma di energia interna di un gas e allora, per una mole di gas, deve sussistere l'eguaglianza

$$\Delta U = c_V \Delta T = \Delta \overline{E_k} = \frac{l}{2} N_A k_B \Delta T = \frac{l}{2} R \Delta T$$

da cui si ricava per il calore specifico molare a volume costante

$$c_V = \frac{l}{2} R \quad .$$

Pertanto:

molecole monoatomiche $\quad l = 3 \quad$ $c_V = \frac{3}{2} R$,

molecole biatomiche $\quad l = 5 \quad$ $c_V = \frac{5}{2} R$,

previsioni che sappiamo verificate sperimentalmente (paragrafo 11.5). Il fatto che non tutti i gas a molecola biatomica abbiano c_V pari a $5R/2$ suggerisce che per essi il contributo vibrazionale sia importante anche a temperatura ambiente.

Per una mole di solido ($l = 6$)

$$U = 3 N_A k_B T = 3 R T \quad , \quad c_V = 3 R \quad ;$$

in effetti il calore specifico molare a volume costante tende, ad alte temperature e per tutti i solidi, al valore $3 R$ (paragrafo 10.7, figura 10.5). La previsione dell'equipartizione dell'energia, dovuta a Maxwell e Boltzmann, venne anche confermata dalle osservazioni di Perrin sul *moto browniano*, moto disordinato di particelle macroscopiche in una sospensione colloidale. L'interpretazione del fenomeno è che le particelle siano urtate dalle molecole e che quindi esse riflettano con il loro moto il moto molecolare.

Osserviamo che

$$\frac{1}{2} k_B T = 2.07 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 1.29 \cdot 10^{-2} \text{ eV} \quad \text{con } T = 300 \text{ K} \quad ;$$

l'*elettronvolt* (eV) è l'unità di energia usata in fisica atomica:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad . \qquad \text{Elettronvolt}$$

Alla temperatura della superficie del sole ($T \cong 6000$ K) $\frac{1}{2} k_B T \cong 0.26$ eV; in un plasma, utilizzato per ricerche di fusione termonucleare controllata, $\frac{1}{2} k_B T \cong 10^3$ eV, corrispondente a $T \cong 2.3 \cdot 10^7$ K.

12

Distribuzione delle velocità

Finora abbiamo parlato di energia cinetica media, però è possibile calcolare come sono distribuite le velocità delle singole molecole in un gas alla temperatura T. Tale calcolo è dovuto a Maxwell.

Consideriamo un gas formato da N_0 molecole e dN rappresenti il numero di molecole con il modulo della velocità compreso tra v e $v + dv$. Il calcolo di Maxwell porta alla relazione

$$dN = 4 \pi N_0 \left(\frac{m}{2 \pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-m v^2 / 2 k_B T} dv = F(v)\, dv \quad ; \qquad (11.36) \qquad \text{Funzione di Maxwell}$$

$F(v) = dN / dv$ si chiama *funzione di distribuzione di Maxwell delle velocità*.

La *velocità più probabile* v_p corrisponde al massimo della funzione $F(v)$ e si ottiene annullando la derivata di $F(v)$ rispetto a v:

$$v_p = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}} \quad . \qquad \text{Velocità più probabile}$$

Introduciamo la variabile $x = v / v_p$ che esprime la velocità delle molecole in unità v_p (quindi $dv = v_p\, dx$) e riscriviamo (11.36):

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{F(v)}{N_0}\, dv = y(x)\, dx$$

avendo indicato con

Densità di probabilità

$$y(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} \qquad (11.37)$$

la percentuale di molecole con velocità tale da essere compresa tra v/v_p e $(v + dv)/v_p$.

La funzione $y(x)$, che ha il significato di una *densità di probabilità*, è mostrata in figura 11.32. L'area colorata sotto la curva vale

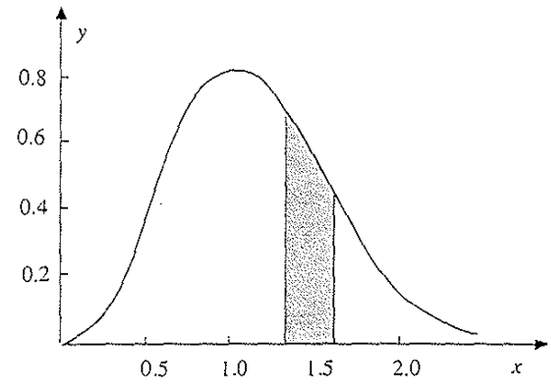


Fig. 11.32

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x)\, dx$$

ed è la percentuale di molecole con x compreso tra x_1 e x_2; l'area complessiva sotto la curva vale 1.

Per $x = 0$ $(v = 0)$ $y(x)$ è nulla, è massima per $x = 1$ $(v = v_p)$ e tende asintoticamente a zero per $x >> 1$ $(v >> v_p)$: anche se poco probabili, velocità molto elevate sono possibili.

Dall'espressione di $F(v)$ o di $y(x)$ si può calcolare il valore della *velocità media* (cioè la media dei moduli delle velocità),

Velocità media

$$v_m = \frac{1}{N_0} \int v\, F(v)\, dv = v_p \int x\, y(x)\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, v_p = 1.128\, v_p \quad ,$$

e della *velocità media quadratica*

$$\bar{v} = \left[\frac{1}{N_0} \int v^2 F(v)\, dv \right]^{1/2} = v_p \left[\int x^2 y(x)\, dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, v_p$$

$$= 1.225\, v_p = \sqrt{\frac{3\, k_B\, T}{m}} \quad .$$

Velocità media quadratica

La velocità media è maggiore di v_p a causa dell'asimmetria della funzione di distribuzione rispetto al massimo, cioè a causa della coda di $F(v)$ verso alti valori di velocità; per la stessa ragione $\bar{v}$ è maggiore di v_m.

Dalla tabella 11.3 possiamo dedurre i valori di v_p: per l'idrogeno a 300 K troviamo v_p = 1579 m/s. Poiché la velocità di fuga dalla terra è circa 10^4 m/s (paragrafo 7.4, esempio 7.2), le molecole di idrogeno nell'atmosfera che abbiamo $v >> v_p$ possono sfuggire all'attrazione terrestre; una stima basata su un calcolo meno qualitativo dà una perdita di circa 600 Kg di idrogeno all'anno.

La distribuzione maxwelliana delle velocità è stata verificata sperimentalmente tramite i raggi molecolari e il selettore di velocità.

L'apparato sperimentale è mostrato in figura 11.33; il sistema è racchiuso in una scatola in cui viene mantenuto un vuoto spinto.

La *sorgente S* dei raggi è costituita da un contenitore con un foro molto piccolo, in cui si trova un gas in equilibrio alla temperatura T. Dal foro escono molecole in varie direzioni, ma con una serie di fenditure C, larghe pochi decimi di millimetro, si sceglie in pratica la direzione di volo delle molecole: si parla di *fascio di molecole* o di *raggi molecolari*.

Raggi molecolari

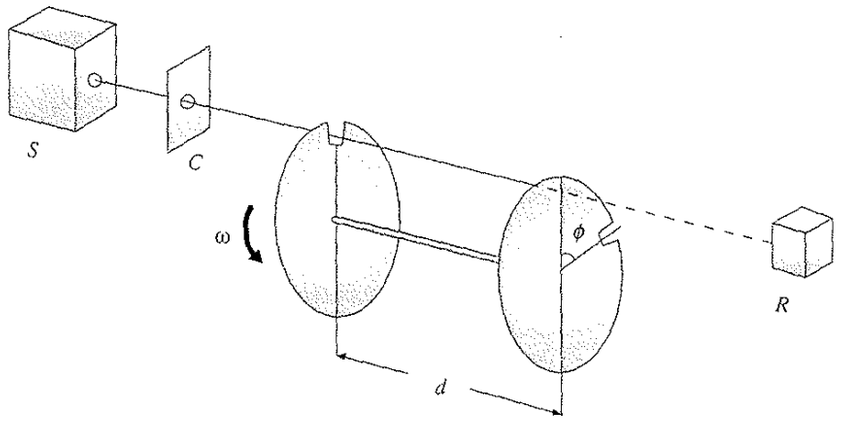


Fig. 11.33

Sul cammino del fascio si pone un *selettore di velocità*, costituito da due dischi ruotanti con la stessa velocità angolare ω rispetto all'asse disegnato in figura e posti a distanza d uno dall'altro. Su ciascun disco è praticata una fenditura e tra le fenditure c'è l'angolo ϕ.

Selettore di velocità

Le molecole che attraversano il selettore entrano in un *rivelatore R*, costituito per esempio da un filo caldo di platino; colpendo il filo esse vengono ionizzate e danno luogo a una corrente che viene misurata. Questa corrente è proporzionale al numero di molecole che colpiscono il filo.

Supponiamo che una molecola nella sorgente, ad un certo istante, abbia posizione e velocità tali da poter uscire dal foro nella parete della sorgente e passare attraverso il collimatore: essa può raggiungere il rivelatore se riesce a passare anche attraverso le fenditure dei dischi. Superata la prima fenditura la molecola supera pure la seconda solo se la sua velocità è tale che il tempo t impiegato a percorrere la

distanza d tra i dischi è eguale a quello impiegato dai dischi per ruotare dell'angolo ϕ:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{\phi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega\, d}{\phi} \quad .$$

Il selettore trasmette solo le molecole la cui velocità è in un intorno di questo valore; variando ω si selezionano diverse velocità. Misurando col rivelatore il numero di molecole che arrivano su di esso in funzione di ω si verifica che la distribuzione delle velocità è in accordo con quella prevista da Maxwell.

Cammino libero medio. Viscosità

Se pensiamo alle molecole come sfere rigide di diametro d, un urto tra di esse è possibile quando i loro centri si trovano al massimo a distanza d dalla traiettoria di una rispetto all'altra (figura 11.34).

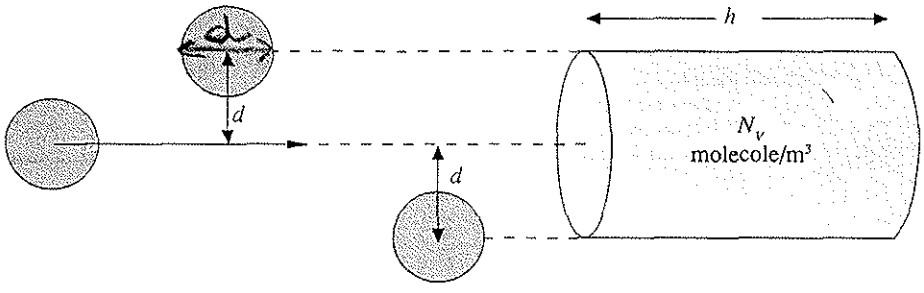


Fig. 11.34

Da questo punto di vista possiamo dire che in un percorso lungo h una molecola spazza il volume $h\,\pi\,d^2$. Se ci sono N_V molecole per unità di volume, si hanno $N_V\,h\,\pi\,d^2$ urti nel percorso h, ovvero $N_V\,\pi\,d^2$ urti per unità di lunghezza. La distanza media tra gli urti, detta *cammino libero medio* è

$$\lambda = \frac{1}{N_V\,\pi\,d^2} \quad .$$

In questo calcolo non si è tenuto in considerazione il movimento delle molecole urtate. Se si introduce questo effetto, sulla base della distribuzione di Maxwell delle velocità, si ottiene

Cammino libero medio

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,N_V\,\pi\,d^2} \quad ; \qquad (11.38)$$

dall'equazione di stato nella forma (11.7), se $V = 1$ $N_V = p / k_B T$ e quindi

$$\lambda = \frac{k_B\,T}{\sqrt{2}\,p\,\pi\,d^2} \quad .$$

Il cammino libero medio risulta inversamente proporzionale al numero di molecole per unità di volume, ovvero alla pressione. Valori tipici di λ a pressione atmosferica sono dell'ordine di 10^{-7} m = 0.1 μm.

Si dimostra che la *viscosità* η del gas è legata al cammino libero medio dalla relazione

$$\eta = \frac{1}{3} N_V m \bar{v} \lambda = \frac{m \bar{v}}{3\sqrt{2}\pi d^2} \quad , \tag{Viscosità di un gas}$$

avendo utilizzato (11.38). Dato che la velocità media quadratica è proporzionale a $\sqrt{T}$, si vede che *la viscosità di un gas cresce con la temperatura, mentre è indipendente dalla pressione.* Queste previsioni sono pienamente confermate dall'esperienza.

Le formule trovate mostrano che da misure di viscosità si possono dedurre i valori dei cammini liberi medi e dei diametri molecolari; per questi ultimi l'ordine di grandezza risulta 10^{-10} m.

Abbiamo detto che le ipotesi fondamentali della teoria cinetica di un gas ideale sono l'assenza di interazioni tra le molecole del gas, se non durante gli urti, e le dimensioni delle molecole trascurabili rispetto alle distanze medie tra di esse. Se ora abbiamo una miscela di gas ideali, chimicamente inerti, contenuta in un volume V e alla temperatura T , le molecole di ciascun gas si comportano indipendentemente dalle molecole degli altri gas; come conseguenza si ha che la pressione esercitata dalla miscela gassosa sulle pareti del contenitore è data da

Miscela di gas ideali

$$p = \frac{RT}{V} \Sigma_i n_i \tag{11.39}$$

dove n_1 , n_2 , ... sono il numero di moli di ciascun componente della miscela.

Se ogni singolo gas fosse contenuto da solo nel volume V alla temperatura T, esserciterebbe la pressione

$$p_i = n_i \frac{RT}{V} \quad ,$$

detta *pressione parziale* del dato componente; da (11.39) vediamo che

$$p = \Sigma_i p_i \quad ;$$

la pressione della miscela è pari alla somma delle pressioni parziali.

La relazione (11.39), ricavata sperimentalmente da Dalton, è nota come *legge di Dalton*. Notiamo anche che

Legge di Dalton

$$p_i = n_i \frac{p}{\Sigma_i n_i} = r_i p \quad ;$$

$$r_i = \frac{n_i}{\Sigma_i n_i} \quad ;$$

r_i è detta frazione molare relativa all'i-esimo componente (e $\Sigma_i\ r_i = 1$).

11.11 CENNI DI TEORIA CINETICA DEI GAS REALI

La trattazione cinetica per i gas reali è piuttosto complessa, per cui ci limitiamo ad illustrare gli argomenti che portano all'equazione di Van der Waals (11.30).

Le ipotesi che bisogna rilasciare quando si considera un gas reale sono che le dimensioni delle molecole siano trascurabili e che non ci siano forze intermolecolari. L'energia interna non è quindi data solo dall'energia cinetica del moto molecolare, ma ha un contributo di energia potenziale dovuto all'interazione tra le molecole; inoltre il fatto che il raggio molecolare r non sia trascurabile rispetto al cammino libero medio porta a una correzione del cammino libero medio stesso che, come ipotesi plausibile, scriviamo nella forma $\lambda' = \lambda - r$.

Abbiamo visto che, in conseguenza di (11.38), la pressione p è inversamente proporzionale al cammino medio λ; allora se in un gas ideale p va come $1/\lambda$, in un gas reale diciamo che p' va come $1/\lambda'$, ovvero $p'/p = \lambda/\lambda'$, cioè $p' = p\ \lambda/(\lambda - r)$: assumiamo questa come correzione alla pressione p data da (11.32). Utilizzando anche (11.38) abbiamo

$$p' = \frac{2}{3}\ \frac{\overline{E}}{V}\ \frac{\lambda}{\lambda - r} = \frac{2}{3}\ \frac{\overline{E}}{V}\ \frac{1}{1 - 4\,\pi\sqrt{2}\ r^3\ \frac{N}{V}}\ ,$$

in cui si è posto $d = 2\,r$ e $N_V = N/V$ con N numero totale di molecole.

Questo effetto porta ad un aumento della pressione, riconducibile a una maggior frequenza di urti contro le pareti, che spieghiamo supponendo che il numero di urti al secondo contro le pareti sia proporzionale a quello tra molecole all'interno del gas e che quest'ultimo sia aumentato perché il cammino libero medio è diminuito.

Una ulteriore correzione deve essere apportata alla pressione p' per tener conto del fatto che nelle immediate vicinanze delle pareti le molecole risentono di una forza attrattiva verso l'interno del gas, dovuta alla dissimmetria della situazione (il ragionamento è analogo a quello sviluppato per la tensione superficiale, paragrafo 9.15). Tale correzione è proporzionale alla densità molecolare (N/V) e al numero di urti, a sua volta proporzionale a N/V. Pertanto la pressione effettiva è data da

$$p = p' - \alpha \left(\frac{N}{V}\right)^2$$

dove α è un coefficiente che dipende dalle forze intermolecolari.

In conclusione, ricorrendo alla formula trovata prima per p',

$$p + \alpha\left[\left(\frac{N}{V}\right)^2\right](V - 4\,\pi\sqrt{2}\ r^3\,N) = \frac{2}{3}\ \overline{E}$$

ovvero, ponendo $n = N/N_A$, $a = \alpha N_A^2$, $b = 4\,\pi\sqrt{2}\ r^3\,N_A$,

$$p + a\left(\frac{n^2}{V^2}\right)(V - n\,b) = \frac{2}{3}\ \overline{E}$$

che confrontata con (11.30) mostra l'origine dei termini correttivi di pressione e di volume. Al termine $a\ n^2/V^2$ si dà il nome di *pressione interna*, al termine b di *covolume*. Se si usa per $\overline{E}$ l'espressione, valida a rigore soltanto per un gas ideale monoatomico, $\frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T$, si ottiene l'equazione di Van der Waals (11.30).

Nella tabella 11.4 sono riportati i valori delle costanti a e b per alcuni gas.

Tabella 11.4 - Costanti di Van der Waals

gas	a (Pa m^6/moli^2)	b (m^3/mole)
anidride carbonica	0.361	$4.29 \cdot 10^{-5}$
argon	0.133	$3.22 \cdot 10^{-5}$
azoto	0.137	$3.90 \cdot 10^{-5}$
elio	0.003	$2.34 \cdot 10^{-5}$
idrogeno	0.024	$2.66 \cdot 10^{-5}$
ossigeno	0.136	$3.18 \cdot 10^{-5}$

Per un volume molare di azoto il termine correttivo a/V^2 vale 283 Pa.

A conclusione degli argomenti di teoria cinetica osserviamo che in questi paragrafi abbiamo visto una situazione molto comune in fisica. Da una parte abbiamo a disposizione un insieme di dati sperimentali che opportunamente interpretati ed estrapolati forniscono le semplici leggi del sistema gas ideale. Dall'altra abbiamo un modello teorico che risale a Bernoulli e che è stato sviluppato nell'ottocento da Joule, Clausius, Maxwell, Boltzmann e altri, il quale sulla base di ipotesi semplici e ragionevoli riguardo alla struttura interna e alle interazioni e nell'ambito della meccanica newtoniana si propone di spiegare le proprietà sperimentali del gas ideale. In questo senso il modello fornisce una descrizione delle quantità macroscopiche misurate in termini dei processi meccanici elementari che avvengono a livello atomico e molecolare e che ne costituiscono l'origine fisica.

La validità e i limiti di un modello teorico vengono fissati dal confronto con l'esperienza. Nel nostro caso risulta che esistono situazioni (gas caldo e rarefatto) in cui le semplici ipotesi del modello cinetico sono sufficienti per una descrizione soddisfacente: il gas si può correttamente immaginare come un insieme di oggetti materiali puntiformi o quasi, a seconda dei gradi di libertà, con interazioni trascurabili.

Opportune estensioni, che in sostanza cercano di descrivere classicamente gli effetti delle interazioni, permettono al modello di spiegare anche certi fenomeni non corrispondenti pienamente alle ipotesi di base, come qualche proprietà dei gas reali. Esso però non è più utilizzabile quando entrano in gioco effetti tipici della struttura atomica non spiegabili classicamente, come avviene per temperature prossime a $T = 0$ o con molecole di struttura complessa.

11.12 SIGNIFICATO CINETICO DI TEMPERATURA E CALORE

Il confronto del dato sperimentale, costituito dall'equazione di stato, con l'espressione calcolata per l'energia cinetica ha suggerito il collegamento diretto tra temperatura ed energia cinetica media del moto molecolare. Il successo del model-

lo cinetico nella spiegazione di vari fatti sperimentali porta a ritenere corretta questa interpretazione del concetto di temperatura e ad estenderla.

L'ipotesi di base è dunque che le molecole di una qualsiasi sostanza siano, compatibilmente con i vincoli a cui sono sottoposte, in moto continuo e disordinato, detto *moto di agitazione termica*. La temperatura è l'espressione dell'energia cinetica media di questo moto, sia che si tratti delle molecole di un gas, di quelle di un liquido o degli ioni che costituiscono il reticolo cristallino di un solido.

In un gas ideale l'energia cinetica è l'unica forma di energia, dato che le forze intermolecolari sono trascurabili. In un gas reale si manifesta l'interazione tra le molecole con la dipendenza dell'energia interna dalla pressione, ovvero dal numero di molecole per unità di volume e quindi dalla loro distanza.

Nei liquidi e nei solidi il legame tra le molecole e gli atomi viene evidenziato dalla presenza di calori latenti nei cambiamenti di fase solido-liquido e liquido-vapore, che hanno il significato di energia necessaria a vincere le forze intermolecolari.

All'agitazione termica si riconduce anche il meccanismo di scambio di energia che chiamiamo calore. La trasmissione di calore da un corpo caldo ad uno freddo, o all'interno di uno stesso corpo dalle zone più calde a quelle più fredde, cioè in presenza di un gradiente di temperatura, si spiega in termini di cessione di energia meccanica negli urti che avvengono tra le molecole più veloci e quelle più lente. Si comprende quindi, anche intuitivamente, la ragione per cui il calore passa spontaneamente da un corpo caldo ad uno freddo e non avviene il contrario e perché occorre sempre un mezzo materiale per la trasmissione del calore.

11.13 PROPRIETÀ ELASTICHE DEI GAS

Abbiamo descritto nel paragrafo 8.5 le proprietà elastiche di un fluido e introdotto con la (8.7) il modulo di compressibilità β, considerando anche esplicitamente un gas che segua la legge isoterma di Boyle (11.1).

Riprendiamo la definizione di modulo di compressibilità:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\beta}\, dp \quad \Rightarrow \quad \beta = -V\, \frac{dp}{dV} \quad .$$

A una variazione di volume si accompagna una variazione di densità e poiché $V\rho = m$ = costante abbiamo

$$\rho\, dV + V\, d\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad .$$

Segue che il *modulo di compressibilità* si può scrivere

$$\beta = \rho\, \frac{dp}{d\rho} \tag{11.40}$$

e questa è la definizione termodinamica di modulo di compressibilità. Il valore di β dipende da come la pressione varia con la densità, cioè dalla forma della funzione $p\,(\rho)$.

In un gas ideale, se il processo di compressione è *adiabatico*, da (11.21) e (11.39) abbiamo:

$$p V^{\gamma} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad p/\rho^{\gamma} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad p = C \rho^{\gamma}$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma C \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma C \rho^{\gamma}}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \quad ,$$

$$\beta = \gamma p \quad . \tag{11.41}$$

Modulo di compressibilità adiabatica

Se invece il processo di compressione è *isotermo*, seguendo lo stesso procedimento con $p V =$ costante, si trova

$$\beta_T = p$$

Modulo di compressibilità isoterma

che è la (8.9) del paragrafo 8.5. Il rapporto tra i moduli di compressibilità nei due processi è eguale al rapporto tra i calori specifici c_p e c_V.

Alla pressione atmosferica $p = 1.013 \cdot 10^5$ Pa e alla temperatura $T = 273.15$ K e considerando l'aria come un gas ideale biatomico ($\gamma = 1.4$) abbiamo

$$\beta = 1.418 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad , \quad \beta_T = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad .$$

Possiamo condurre un esperimento di compressione con il solito contenitore cilindrico con pistone mobile, come mostrato nella figura 11.35; accanto è riportata la figura 8.3 e in questo caso l'esperimento si può fare sia in trazione che in compressione. La variazione relativa di volume del gas è eguale alla variazione relativa dell'altezza del volume cilindrico occupato dal gas e quindi

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{1}{\beta} \Delta p \quad .$$

Per la trazione o la compressione del cilindro della figura 8.3 vale la legge di Hooke (8.2):

$$\frac{\Delta l}{l} = \pm \frac{1}{E} \frac{F}{S} \quad .$$

In un caso $\beta \sim 10^5$ Pa (a pressione atmosferica), nell'altro $E \sim 10^{11}$ Pa. A parità di sollecitazione esterna l'effetto nel gas è 10^6 volte maggiore che nel solido.

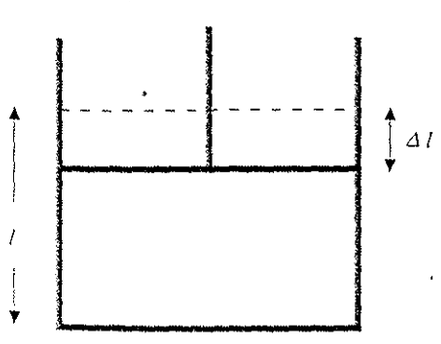


Fig. 11.35

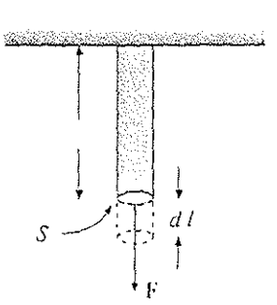


Fig. 8.3

11.14 PROPAGAZIONE DI ONDE IN UN GAS

Abbiamo constatato che un gas è un sistema con notevoli proprietà elastiche. È quindi naturale che come una perturbazione elastica si propaga in una sbarra solida (paragrafo 8.7), così si debba propagare in un gas. La velocità di propagazione nella sbarra è data da (8.11),

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ,$$

che evidenzia la dipendenza del fenomeno dalla proprietà elastica del materiale, descritta dal modulo di Young E, e dalla densità, cioè dalla massa per unità di volume, come è prevedibile trattandosi pur sempre del moto di particelle con una certa massa a cui è stata applicata la legge di Newton. Per un gas ci attendiamo

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

essendo β il modulo di compressibilità (adiabatico o isotermo).

Per verificare che anche in un gas si ha un fenomeno di propagazione regolato da un'equazione tipo (8.10), consideriamo una massa di gas contenuta in un lungo tubo a pareti rigide e indichiamo con ρ_0 e p_0 i valori di equilibrio della densità e della pressione. Con il rapido spostamento di un pistone o di una membrana elastica si comprime il volumetto di gas immediatamente adiacente alla sorgente della perturbazione, producendo una variazione locale $d\rho$ della densità e dp della pressione; la variazione di pressione determina un movimento del gas che comporta la compressione dell'elemento di gas contiguo. In tal modo le perturbazioni $d\rho$ e dp vengono trasmesse da un elemento al successivo; la descrizione matematica di questo meccanismo ci porterà all'equazione tipica della propagazione.

Detta x la direzione coincidente con l'asse del cilindro, tutte le quantità fisiche in gioco dipendono esclusivamente da x: una qualsiasi funzione, la pressione, la densità, lo spostamento delle molecole del gas, assume lo stesso valore in tutti i punti di un piano perpendicolare all'asse x, ovvero su ognuno di questi piani si ha la stessa situazione fisica per tutti i punti, identica a quella del punto di intersezione tra piano e asse x. Tale ipotesi, adottata anche allo studio della propagazione di un'onda in una sbarra solida, si chiama *ipotesi di onda piana*.

Supponiamo che le variazioni di densità e pressione siano piccole: i rispettivi valori modificati si scrivono allora

$$\rho = \rho_0 + d\rho \quad , \quad p = p_0 + dp \quad ;$$

inoltre siano piccoli gli spostamenti dalla posizione di equilibrio, indicati dalla funzione $s(x, t)$, così come la derivata di questa funzione rispetto a x, $\partial s / \partial x$.

Consideriamo una massa di gas contenuta tra due piani perpendicolari all'asse x, intersecanti l'asse nei punti di coordinate x e $x + dx$: assumendo unitaria la sezione del cilindro la massa di gas è $dm = \rho_0 dx$. A seguito della perturbazione dm subisce uno spostamento e la troviamo, in un istante t immediatamente successivo, tra

$$x + s(x,t) \quad \text{e} \quad x + dx + s(x + dx, t) \quad ,$$

così che la dimensione lineare di $d\,m$ passa da $d\,x$ a

$$d\,x + s\,(x + d\,x,\,t) - s\,(x,t) = d\,x + \frac{\partial s}{\partial x}\,d\,x \quad .$$

La situazione geometrica è quella descritta nella figura 8.18.

La stessa massa occupa pertanto un volume diverso e la sua densità è cambiata da ρ_0 a $\rho_0 + d\,\rho$. Quindi

$$d\,m = (\,\rho_0 + d\,\rho)\left(d\,x + \frac{\partial s}{\partial x}\,d\,x\right) = \left(\,\rho_0 + \rho_0\,\frac{\partial s}{\partial x} + d\,\rho + d\,\rho\;\frac{\partial s}{\partial x}\right)d\,x \quad .$$

Trascuriamo il quarto termine rispetto ai primi tre in quanto infinitesimo di ordine superiore ed eguagliamo a $d\,m = \rho_0\,d\,x$; otteniamo

$$d\,\rho = \rho - \rho_0 = -\,\rho_0\,\frac{\partial s}{\partial x} \qquad (11.42)$$

che rappresenta il collegamento tra moto del gas e variazione di densità. Il segno meno indica correttamente che se il volumetto è compresso ($\partial\,s/\partial\,x < 0$) la densità aumenta ($d\,\rho > 0$), mentre se il gas si espande la densità diminuisce.

A una variazione di densità corrisponde una variazione di pressione data da (11.40) che riscriviamo:

$$d\,p = p - p_0 = \frac{\beta}{\rho_0}\,d\,\rho$$

e utilizzando (11.42)

$$p = p_0 - \beta\;\frac{\partial s}{\partial x} \quad . \qquad (11.43)$$

La variazione di pressione causa un movimento del gas: la forza risultante che agisce su $d\,m$ (ricordiamo che la sezione è unitaria) vale

$$p\,(x,\,t) - p\,(x + d\,x,\,t) = -\frac{\partial p}{\partial x}\,d\,x = \beta\;\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\;d\,x$$

avendo introdotto (11.43); questa forza provoca l'accelerazione $\partial^2 s/\partial t^2$ secondo la legge del moto

$$\beta\;\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\;d\,x = d\,m\;\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \rho_0\,d\,x\;\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

e in conclusione

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0}\;\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad . \qquad (11.44)$$

Lo spostamento $s\,(x,\,t)$ dalla posizione di equilibrio soddisfa *l'equazione* (8.10) *delle onde piane*: lungo la colonna di gas si propaga un'onda di spostamento con velocità data da

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \tag{11.45}$$

come avevamo anticipato.

Dalla (11.43) derivando rispetto a x e rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\beta \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial s}{\partial x} = -\beta \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad ,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad .$$

In modo analogo, derivando la densità ρ data dalla (11.42), si ottiene

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad .$$

Lungo la colonna di gas si propagano anche un'onda di pressione e una perturbazione della densità del gas, tutte con la stessa velocità data da (11.45).

La rapidità con cui avviene il fenomeno induce a ritenere adiabatici i processi di compressione e di espansione del gas, per cui il modulo di compressibilità è quello adiabatico (11.41) e la velocità (11.45) ha l'espressione

Velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad . \tag{11.46}$$

Nelle cosiddette condizioni standard ($T = 273.15$ K, $p = 1.01325 \cdot 10^5$ Pa) la densità dell'aria vale $\rho = 1.29$ Kg/m^3 ; con $\gamma = 1.4$ $v = 331.61$ m/s; il valore misurato in queste condizioni è 331.45 m/s. L'ottimo accordo giustifica le ipotesi fatte di perturbazioni di piccolo valore e con un'alta velocità di propagazione, sostanzialmente adiabatiche.

Dall'equazione di stato nella forma (11.9) si ottiene infine

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R\, T}{A}} = \alpha \sqrt{T} \quad , \tag{11.47}$$

che dà *la dipendenza della velocità di propagazione in un gas ideale dalla tempe-*

ratura.

I valori della velocità di propagazione di un'onda elastica in alcuni gas (ideali) alla temperatura $T = 300$ K sono riportati nella tabella 11.5. L'unità di misura della costante α è $ms^{-1} K^{-1/2}$.

Tabella 11.5 - Velocità di propagazione di un'onda elastica nei gas a 300 K

gas	α	v (m/s)
idrogeno	76.288	1321
elio	58.857	1019
azoto	20.389	353
ossigeno	19.072	330

È attraverso il meccanismo ora descritto che avviene la propagazione del suono nei gas, in particolare nell'aria, anche se il fenomeno va trattato tridimensionalmente. Dai dati precedenti si ricava nell'aria $\alpha = 20.055\ ms^{-1} K^{-1/2}$ e quindi la velocità del suono nell'aria a 20°C è ~343 m/s.

Nel caso della voce, la perturbazione che genera il suono è prodotta da vibrazione rapide della laringe, che agisce come una lamina vibrante. La sensazione sonora ha origine sul timpano, che è anch'esso una membrana elastica e segue i processi rapidi di vibrazione dell'aria. Ci rendiamo conto che nell'onda sonora, come in qualsiasi onda elastica, c'è trasporto di energia e quantità di moto, visto che essa è capace di fare entrare in vibrazione un corpo materiale come il timpano. Il valore minimo dell'ampiezza delle oscillazioni delle molecole del gas che l'orecchio è capace di percepire è dell'ordine di 10^{-10} m, cioè delle dimensioni atomiche, a cui corrisponde una variazione di pressione di 10^{-4} Pa rispetto alla pressione atmosferica, cioè $\Delta p / p = 10^{-9}$.

Concludiamo con alcune osservazioni. Nel ricavare l'equazione delle onde abbiamo introdotto la funzione $s(x, t)$ che dà lo spostamento dalla posizione di equilibrio. Può sembrare non corretto parlare di equilibrio e di piccoli spostamenti ...esso per un sistema i cui elementi hanno una velocità media quadratica dell'ordi...e di 10^3 m/s. Siamo però giustificati a trattare in questo modo il gas perché il moto molecolare è completamente disordinato e pertanto qualsiasi volume di gas può essere considerato in equilibrio statico. La perturbazione elastica introduce una componente di moto macroscopico localmente ordinato che si sovrappone all'agitazione termica e che è rivelabile proprio perché è ordinato.

D'altra parte gli urti molecolari costituiscono *il meccanismo microscopico di interazione* che permette la trasmissione di una perturbazione elastica in un gas; la migliore conferma viene dalla sostanziale eguaglianza tra l'espressione (11.47) della velocità di propagazione e l'espressione (11.34) della velocità media quadratica.

12 SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

12.1 ENUNCIATI DEL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Il primo principio della termodinamica non pone limiti alle trasformazioni di energia da una forma all'altra, però la situazione sperimentale non appare simmetrica: mentre è sempre possibile trasformare integralmente lavoro in calore, per esempio sfruttando l'attrito, la trasformazione contraria di calore in lavoro sembra essere limitata, indipendentemente dal primo principio.

Il problema pratico della trasformazione di "calorico in forza motrice" portò Carnot, già nel 1824, a formulare i fondamenti del secondo principio della termodinamica.

Prendiamo in esame il caso di una macchina che compie un ciclo termico scambiando calore con due sorgenti. Si verifica sempre la situazione schematizzata in figura 12.1: il calore scambiato complessivamente dal sistema, che viene utilizzato per far funzionare la macchina M, con le due sorgenti di calore alle temperature T_1 e T_2 ($T_2 > T_1$) è dato dalla somma di una quantità Q_A, assorbita dalla sorgente a temperatura maggiore, e di una quantità Q_C, ceduta alla sorgente a temperatura minore. Si osserva che è sempre $Q_C < 0$, cioè non succede mai $Q_C = 0$ o $Q_C > 0$. Questo risultato comporta che ~~Q_A non~~ viene trasformato integralmente in lavoro, ma una parte Q_C viene sempre ceduta alla sorgente a temperatura inferiore. Il lavoro è $W = Q_A + Q_C$ in accordo con il primo principio ($\Delta U = 0$ in un processo ciclico), però non si ha mai $W = Q_A$, bensì $W < Q_A$.

Nel caso ci siano più sorgenti con cui la macchina M scambia calore la situazione è analoga: la somma dei calori assorbiti non si trasforma mai totalmente in

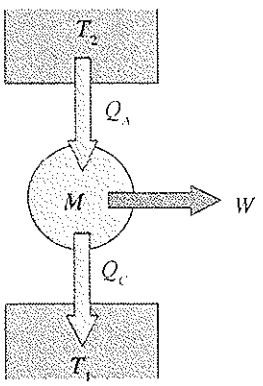


Fig. 12.1

lavoro, una parte viene sempre ceduta restando cioè sotto forma di calore scambiato. Non esistono esempi contrari: in un processo ciclico vi è una impossibilità di trasformazione integrale di calore in lavoro ovvero la trasformazione di calore in lavoro è sempre accompagnata da cessione di calore.

Se il processo non è ciclico è possibile ottenere una trasformazione integrale di calore in lavoro, però essa non è l'unico risultato finale del processo considerato, in quanto si verifica sempre una variazione dello stato termodinamico del sistema. Per esempio, in una espansione isoterma di un gas ideale, $\Delta U = 0$ perché T è costante e quindi $W = Q$, però lo stato finale del gas differisce da quello iniziale dato che il volume è aumentato e la pressione diminuita. Se volessimo riportare il gas nello stato iniziale, con una generica trasformazione, per costruire un ciclo termico, dovremmo assorbire lavoro e cedere calore, ricadendo nel caso precedente.

Accanto all'impossibilità finora discussa esiste un'altra impossibilità sperimentale. Se consideriamo due corpi a temperatura diversa e li mettiamo a contatto termico, c'è sempre una cessione di calore dal corpo caldo al corpo freddo fino a che si raggiunge l'equilibrio termico. Il calore non passa mai spontaneamente dal corpo freddo al corpo caldo. È possibile fare avvenire questo passaggio, come si realizza in una macchina frigorifera, ma deve essere eseguito un lavoro sulla sostanza che compie il ciclo.

Il *secondo principio della termodinamica* consiste nel prendere atto di queste impossibilità sperimentali, che non presentano eccezioni conosciute, e nel trasformarle in postulati, secondo i seguenti enunciati.

Secondo principio della termodinamica

Enunciato di *Kelvin-Planck*

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura uniforme.

Enunciato di *Clausius*

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore.

L'aggettivo *unico* utilizzato nei due enunciati è essenziale: abbiamo infatti già visto negli esempi dell'espansione isoterma di un gas ideale e del ciclo frigorifero che i processi proibiti dal secondo principio sono possibili, se non costituiscono l'unico risultato.

Conseguenza immediata del secondo principio, nell'enunciato di Kelvin-Planck, sono i fatti già evidenziati: in un processo ciclico per produrre effettivamente lavoro sono necessarie sempre almeno due sorgenti, cioè non può sussistere il risultato $Q_C = 0$, ma deve essere $Q_A > |Q_C|$ e quindi, secondo (11.26), $\eta < 1$.

In particolare, per un processo ciclico che si svolge utilizzando una sola sorgente, detto anche *ciclo monotermo*, non essendo possibile assorbire calore e produrre lavoro senza violare il secondo principio, devono valere le diseguaglianze

Ciclo monotermo

$$Q \leq 0 \quad , \quad W \leq 0 \quad .$$

Pertanto il sistema che compie il ciclo monotermo assorbe lavoro dall'ambiente esterno e cede calore alla sorgente, ossia trasforma integralmente lavoro in calore, senza limite alcuno, oppure non ha scambi energetici, $Q = 0$ e $W = 0$.

Se il ciclo monotermo è reversibile esso può venire percorso in senso contrario e, come sappiamo dal paragrafo 10.6, in tal caso gli scambi di calore e lavoro cambiano di segno: dovrebbero valere allora la diseguaglianze

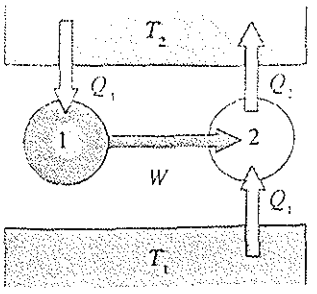


Fig. 12.2

$$Q \geq 0 \quad , \quad W \geq 0 \quad .$$

Poiché il segno di maggiore è in contrasto con il secondo principio, per un ciclo monotermo reversibile deve essere sempre, indipendentemente dal verso di percorrenza,

$$Q = 0 \quad , \quad W = 0 \quad .$$

Gli enunciati di Kelvin-Planck e di Clausius, pur se riferiti a fatti sperimentali che appaiono molto diversi, sono strettamente connessi in quanto se fosse possibile realizzare uno dei processi proibiti sarebbe possibile realizzare anche l'altro.

Supponiamo infatti che sia possibile realizzare un processo ciclico che trasformi integralmente calore in lavoro, in contrasto con l'enunciato di Kelvin-Planck. Questo fatto è rappresentato nella figura 12.2, dove la macchina termica 1 produce il lavoro W trasformando il calore Q_A assorbito dalla sorgente a temperatura T_2 : $W = Q_A$ ed è nulla la cessione di calore alla sorgente fredda. Utilizziamo il lavoro W per far funzionare una macchina frigorifera, che preleva il calore Q_1 dalla sorgente a temperatura T_1 e cede il calore Q_2 alla sorgente a temperatura $T_2 > T_1$. Questa seconda macchina non contraddice l'enunciato di Clausius dato che nel processo interviene il lavoro $W' = -W$ fatto sul sistema (il lavoro W è fatto dalla macchina 1 ed è positivo, mentre W' è subito dalla macchina 2 ed è negativo: le due quantità sono eguali in modulo, ma opposte in segno).

Il bilancio della macchina 2, sulla ~~base del primo~~ principio, è

$$Q_1 + Q_2 = W' = -W \quad .$$

La macchina complessiva, costituita dall'insieme delle due macchine, assorbe Q_1 a temperatura T_1 e scambia

$$Q_A + Q_2 = W + Q_2 = -Q_1$$

a temperatura T_2 . Se Q_1 è assorbito, $-Q_1$ è ceduto. Il lavoro complessivo della macchina è nullo in quanto non c'è scambio di lavoro con l'ambiente esterno e l'unico risultato pertanto è il passaggio spontaneo di calore dalla sorgente a temperatura inferiore a quella a temperatura superiore, violando l'enunciato di Clausius.

Supponiamo ora di poter realizzare una macchina che come unico risultato faccia passare il calore Q da una sorgente a temperatura T_1 ad un'altra a temperatura $T_2 > T_1$ e consideriamo una seconda macchina che lavori normalmente tra le due sorgenti, in accordo col secondo principio. Dimensioniamo questa seconda macchina in modo che $Q_1 = Q$, cioè in modo da cedere alla sorgente a T_1 lo stesso calore che viene assorbito dalla prima macchina.

Pertanto alla fine di un ciclo della macchina complessiva la sorgente a T_1 non scambia calore e il lavoro prodotto è dato da

$$W = Q_2 + Q_1 = Q_2 + Q$$

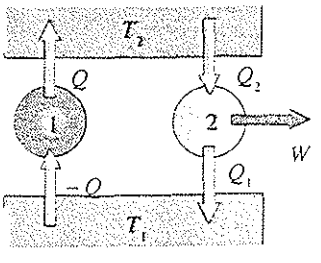


Fig. 12.3

ed è positivo, perché $Q_2 > |Q_1| = |Q|$; tale lavoro è eguale al calore complessivamente scambiato con la sorgente a T_2 e in conclusione l'unico risultato è la trasformazione integrale in lavoro del calore assorbito da una sola sorgente (a temperatura T_2), violando l'enunciato di Kelvin-Planck.

L'unione dei risultati ottenuti costituisce la cosiddetta *equivalenza tra i due enunciati del secondo principio della termodinamica* nel senso che abbiamo visto:

la negazione di uno ha come conseguenza la negazione dell'altro.

Si noti che nella dimostrazione dell'equivalenza tra gli enunciati abbiamo implicitamente ammesso che le macchine collegate tra loro per formarne una complessiva compissero lo stesso numero di cicli nell'unità di tempo, ossia che a un ciclo completo di una corrispondesse un ciclo completo dell'altra. Si introduce questa ipotesi per semplicità e noi continueremo a farlo; peraltro i risultati ottenuti non dipendono da tale ipotesi.

Avvertiamo infine che nel resto del capitolo quando useremo il termine macchina intenderemo, come in questo paragrafo, indicare un sistema che compie un ciclo termodinamico qualsiasi, termico o frigorifero, reversibile o irreversibile. Da un punto di vista solamente termico l'ambiente, per una macchina o un sistema di macchine, è costituito dall'insieme di sorgenti o di corpi con cui avvengono gli scambi di calore.

12.2 REVERSIBILITÀ E IRREVERSIBILITÀ

Nel capitolo 10 abbiamo posto l'attenzione, ai fini della reversibilità o irreversibilità di un processo, sulle caratteristiche di equilibrio degli stati termodinamici attraversati dal sistema. Estendiamo ora le nostre considerazioni all'ambiente.

Quando viene compiuta una trasformazione reversibile da uno stato A ad uno stato B, con scambio della quantità Q_{AB} e W_{AB} tra il sistema e l'ambiente, è sempre possibile ripercorrerla in senso inverso, scambiando le quantità $-Q_{AB}$ e $-W_{AB}$: alla fine sistema e ambiente sono ritornati ai rispettivi stati iniziali, dato che lo scambio totale di calore e lavoro è nullo per entrambi.

L'argomento si estende ai cicli reversibili: alla fine di un ciclo il sistema torna sempre nello stato iniziale, ma l'ambiente ha subito una modifica perché ha, per esempio, ceduto calore e assorbito lavoro. Percorrendo il ciclo in senso inverso gli scambi energetici dell'ambiente sono eguali ed opposti ed esso ritorna nello stato iniziale.

Trasformazione reversibile

In generale possiamo dire che *una trasformazione reversibile non comporta alterazioni permanenti, nel senso che è sempre possibile riportare nei rispettivi stati iniziali il sistema e l'ambiente che con esso interagisce.*

La situazione è completamente diversa per le trasformazioni irreversibili, come a discutiamo con alcuni esempi.

a) Presenza durante il processo di effetti dissipativi dovuti alle forze di attrito, come avviene nello spostamento del pistone di un cilindro contenente un gas: contro le forze di attrito viene speso un certo lavoro W che alla fine ritroviamo trasformato integralmente in calore Q ceduto all'ambiente. Questo calore Q non può essere ritrasformato integralmente in lavoro: si è verificata una modifica permanente.
b) Espansione libera di un gas (paragrafo 11.5): in essa $Q = W = 0$. Alla fine della trasformazione, se vogliamo riportare il gas nello stato iniziale possiamo utilizzare una compressione isoterma reversibile, che richiede un lavoro esterno. Il gas viene riportato nello stato iniziale, ma l'ambiente ha subito una modifica che non si può più recuperare.
c) Passaggio di calore tra due corpi a contatto termico e che presentano una differenza finita di temperatura: alla fine si raggiunge l'equilibrio termico, senza produzione di lavoro, ma per ripristinare la situazione iniziale si dovrebbe fornire lavoro dall'esterno, per esempio utilizzando una macchina frigorifera reversibile.

Trasformazione irreversibile

Da questi, e da qualsiasi altro esempio, si conclude che *quando avviene una trasformazione irreversibile non è più possibile ritornare allo stato di partenza senza modificare il resto dell'universo*. Il sistema può essere riportato allo stato iniziale attraverso altre trasformazioni, ma l'ambiente subisce una modifica irreversibile.

Nel paragrafo 12.9 commenteremo ulteriormente questa situazione.

Le considerazioni esposte sono importanti perché nella pratica tutte le trasformazioni che avvengono in natura contengono fattori di irreversibilità. La rappresentazione di un fenomeno reale con una trasformazione reversibile costituisce quindi una idealizzazione del processo che permette di eseguire calcoli altrimenti impossibili e avere stime sulle grandezze in gioco, spesso sotto forma di limiti superiori.

12.3 TEOREMA DI CARNOT

Il secondo principio è stato enunciato sulla base di due impossibilità, ma senza una esplicita espressione matematica, come è invece avvenuto per il primo principio.

Il teorema di Carnot rappresenta una prima precisazione quantitativa dell'enunciato di Kelvin-Planck, in quanto fissa la massima percentuale di calore assorbito da una macchina termica che può essere trasformata in lavoro.

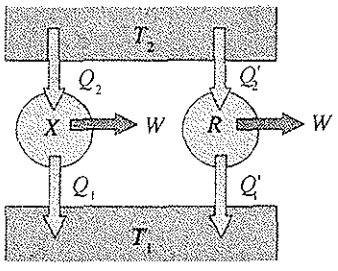


Fig. 12.4

Consideriamo due macchine che lavorano utilizzando le stesse sorgenti di calore alle temperature T_1 e $T_2 > T_1$, dimensionate in modo tale da produrre lo stesso lavoro (Figura 12.4). Indichiamo le due macchine con i simboli X e R: per la prima macchina non facciamo per ora alcuna ipotesi di reversibilità o irreversibilità, mentre assumiamo che la seconda sia reversibile.

I rendimenti delle due macchine sono, data l'ipotesi sul lavoro,

$$\eta_X = \frac{W}{Q_2} \quad , \quad \eta_R = \frac{W}{Q_2'} \; .$$

Dal primo principio abbiamo inoltre

$$Q_2 + Q_1 = W = Q_2' + Q_1' \quad . \tag{12.1}$$

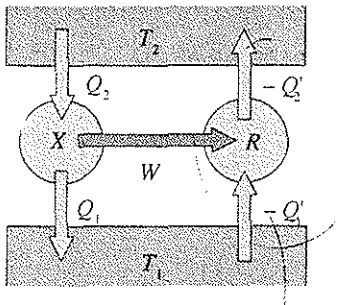


Fig. 12.5

Supponiamo che sia $\eta_X > \eta_R$ e costruiamo una macchina composta da X e R, in cui quest'ultima viene fatta funzionare come macchina frigorifera, assorbendo il lavoro $-W$ e il calore $-Q_1'$ e cedendo il calore $-Q_2'$, come indicato in figura 12.5: sfruttiamo così una proprietà caratteristica di un processo reversibile, che abbiamo più volte evidenziato.

Dall'ipotesi $\eta_X > \eta_R$ segue

$$\frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q_2'} \quad , \quad Q_2 < Q_2' \quad , \quad Q_2 - Q_2' < 0 \quad ,$$

e quindi, da (12.1),

$$Q_1 - Q_1' = Q_2' - Q_2 > 0 \quad .$$

Abbiamo complessivamente i seguenti risultati:

a) la macchina assorbe il calore $Q = Q_1 - Q_1' > 0$ dalla sorgente a temperatura T_1 ;
b) non viene scambiato lavoro con l'ambiente esterno;
c) la macchina cede il calore $-Q = Q_2 - Q_2' < 0$ alla sorgente a temperatura T_2 .

L'*unico* risultato alla fine di un ciclo è passaggio di calore dalla sorgente fredda alla sorgente calda, in contrasto con l'enunciato di Clausius. Allora è sbagliata l'ipotesi di partenza e deve essere

$$\eta_X \leq \eta_R \quad . \tag{12.2}$$

Se anche la macchina X fosse reversibile, in alternativa al ragionamento precedente potremmo supporre $\eta_R > \eta_X$, far funzionare la macchina X come macchina frigorifera (calore e lavoro scambiati cambierebbero solo di segno dato che ora X è reversibile) e troveremmo $\eta_X \geq \eta_R$. Questa diseguaglianza è compatibile con (12.2) solo se

$$\eta_X = \eta_R \quad . \tag{12.3}$$

Teorema di Carnot

In conclusione il *teorema di Carnot* afferma che *tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse sorgenti alle temperature T_1 e T_2 hanno rendimento uguale; qualsiasi altra macchina che lavori tra le stesse sorgenti non può avere rendimento maggiore. Il risultato è indipendente dal particolare sistema che compie il ciclo*, come si deduce dal fatto che le proprietà del sistema non compaiono nella dimostrazione.

Abbiamo già studiato una particolare macchina reversibile che lavora tra due sorgenti, il *ciclo di Carnot a gas ideale*, il cui rendimento è dato da (11.27):

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad .$$

a (12.3) deduciamo allora che (11.27) rappresenta il rendimento di tutte le macchine reversibili che lavorano con due sole sorgenti, alle temperature T_1 e T_2 .

Il teorema di Carnot risulta valido anche per macchine che lavorano con più sorgenti: *la macchina che funziona in modo reversibile è sempre quella il cui rendimento è il limite superiore dei rendimenti possibili*; non esiste però una formula generale come (11.27).

Ritornando al caso di due sorgenti e confrontando (11.26) con (11.27) si ha che, per qualsiasi macchina reversibile, la relazione tra calori scambiati e temperature a cui avviene lo scambio è

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad . \tag{12.4}$$

Ricordiamo che T è la temperatura misurata col termometro a gas ideale.

Fissate dunque le temperature delle sorgenti, T_1 e T_2 , con $T_2 > T_1$, per il teorema di Carnot

$$\eta_R = \eta_{\max} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad ; \tag{12.5}$$

la macchina reversibile è quella che ~~sfrutta meglio~~ l'energia fornitale sotto forma di calore. Infatti, a parità di calore assorbito Q_A , la macchina reversibile è quella che fornisce il lavoro massimo,

$$W_{max} = Q_A\,\eta_R = Q_A\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right) = T_1\left(\frac{Q_A}{T_1}-\frac{Q_A}{T_2}\right) \quad , \tag{12.6}$$

ovvero, a parità di lavoro fornito, la macchina reversibile è quella che assorbe meno calore

$$Q_{min} = \frac{W}{\eta_R} = \frac{W}{1-\frac{T_1}{T_2}} \quad . \tag{12.7}$$

Studio del rendimento massimo

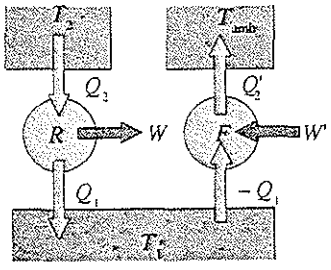


Fig. 12.6

Vediamo come bisogna scegliere in pratica le temperature delle sorgenti, sulla base di (12.5), per ottenere un valore abbastanza elevato di η_{MAX}.

Una possibilità potrebbe essere di scegliere T_2 di poco superiore alla temperatura ambiente T_{amb} e $T_1 << T_{amb}$ ($T_1 = 0$ non è possibile, come vedremo). In tal caso però bisogna sottrarre il calore, ceduto durante il funzionamento della macchina, alla sorgente a bassissima temperatura, per evitare che T_1 cresca, e cederlo per esempio all'ambiente utilizzando una macchina frigorifera (non esiste cioè una sorgente che resti spontaneamente a T_1 se $T_1 << T_{amb}$). Realizziamo allo scopo il processo rappresentato in figura 12.6. La macchina complessiva, costituita dalle macchine R e F, non scambia calore con la sorgente a T_1, assorbe Q_2 dalla sorgente a T_2 e cede Q'_2 all'ambiente alla temperatura T_{amb}. Essa produce il lavoro $W + W' < W$, in quanto W', assorbito dalla macchina F, è negativo. Il rendimento è pertanto dato da

$$\eta = \frac{W+W'}{Q_2} = \frac{Q_1+Q_2-Q'_1+Q'_2}{Q_2} = \frac{Q_2+Q'_2}{Q_2} = 1+\frac{Q'_2}{Q_2} \quad ,$$

come se si utilizzassero soltanto le due sorgenti alle temperature T_2 e T_{amb}; è quindi inutile servirsi di una sorgente molto fredda, se quello che conta è il bilancio energetico globale.

L'unica scelta praticabile è $T_2 >> T_1 \cong T_{amb}$, il che comporta l'uso di sorgenti calde, naturali o artificiali (nel qual caso occorre spendere energia per mantenerle; oppure si tratta di sorgenti momentanee, come avviene nei motori a scoppio).

La dipendenza di η_{MAX} da T_2 è rappresentata in figura 12.7, con $T_1 = 290$ K; $\eta = 0.5$ è raggiunto per $T_2 = 2T_1 = 580$ K.

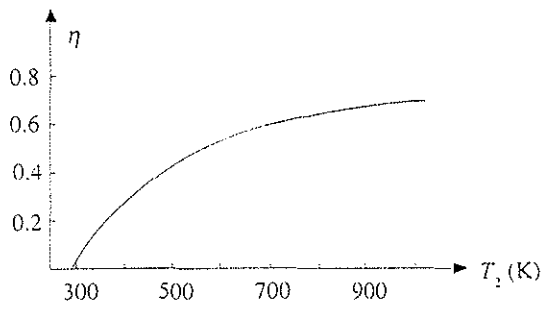


Fig. 12.7

Dato che tutte le macchine reali sono irreversibili, una qualsiasi macchina che lavori tra due sorgenti ha un rendimento piuttosto inferiore a quello dato da (12.5). La presenza di forze di attrito impedisce l'utilizzazione completa del lavoro prodotto, una parte del quale si trasforma invece in calore. Inoltre la sostanza che compie il ciclo si trova, durante l'espansione isoterma, a una temperatura T_2' inferiore a quella T_2 della sorgente, mentre nella compressione isoterma è ad una temperatura $T_1' > T_1$. In queste condizioni il rendimento effettivo approssima il valore

$$\eta' = 1 - \frac{T_1'}{T_2'} < 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta_R \quad .$$

12.4 TEMPERATURA TERMODINAMICA ASSOLUTA

Dalla dimostrazione del teorema di Carnot si deduce che il rendimento di un ciclo reversibile e quindi il rapporto tra il calore assorbito Q_2 e il calore ceduto Q_1 è funzione solo delle temperature delle sorgenti,

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(t_1, t_2) \quad ,$$

dove usiamo il simbolo t per indicare che ci riferiamo a una *temperatura empirica*, dipendente dal termometro impiegato. Inoltre nel seguito del ragionamento supponiamo che la funzione f dia il rapporto dei moduli dei calori scambiati.

Se una macchina reversibile A lavora tra le sorgenti a temperatura t_0 e t_2 scriviamo

$$\frac{Q_2}{Q_0} = f(t_0, t_2) \quad ,$$

mentre per una macchina reversibile B che utilizzi due sorgenti alle temperature t_0 e t_1 abbiamo

$$\frac{Q_1}{Q_0} = f(t_0, t_1) \quad .$$

Una macchina reversibile, composta da A e B come in figura 12.8, non scambia calore con la sorgente a temperatura t_0 e si comporta quindi come se lavorasse tra le sorgenti a t_2 e t_1 : possiamo scrivere

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(t_1, t_2) \quad .$$

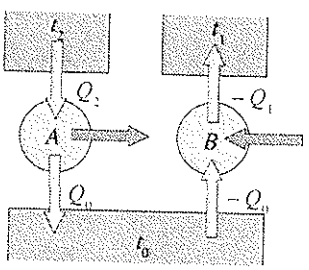


Fig. 12.8

Mettiamo insieme le espressioni precedenti:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_0}\frac{Q_0}{Q_1} \quad \Rightarrow \quad f(t_1, t_2) = \frac{f(t_0, t_2)}{f(t_0, t_1)} \quad .$$

Questa relazione non dipende dal valore di t_0, che può essere qualsiasi, e quindi la

funzione $f(t_1, t_2)$ risulta esprimibile come rapporto dei valori di una funzione g della temperatura:

Temperatura termodinamica assoluta

$$f(t_1, t_2) = \frac{g(t_2)}{g(t_1)} \quad . \tag{12.8}$$

Tale funzione $g(t)$ si chiama *temperatura termodinamica assoluta*.

Costruiamo infatti un termometro costituito da una macchina reversibile che lavora tra la temperatura da misurare e la temperatura del punto triplo dell'acqua, che è il nostro punto di riferimento, pari a 273. 16 K, assorbendo il calore Q e cedendo il calore Q_{pt}. Da (12.8)

$$\frac{Q}{Q_{pt}} = \frac{g(t)}{g(t_{pt})} = \frac{g(t)}{273.16} \quad \Rightarrow \quad g(t) = 273.16 \frac{Q}{Q_{pt}} \quad .$$

La caratteristica termometrica è il modulo del calore scambiato alla data temperatura e $g(t)$ è una temperatura assoluta in quanto, per il teorema di Carnot, il rapporto Q/Q_{pt} non dipende dalla sostanza che descrive il ciclo.

D'altra parte da (12.4) abbiamo che il rapporto tra i moduli dei calori scambiati soddisfa la relazione

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

dove T è la temperatura data dal termometro a gas ideale. Pertanto

$$\frac{g(t_2)}{g(t_1)} = \frac{T_2}{T_1} \quad .$$

Le due scale sono quindi proporzionali; poiché coincidono al punto triplo dell'acqua, esse devono essere eguali. Si deduce che *la temperatura misurata col termometro a gas ideale è la temperatura assoluta.*

Definizione dell'unità kelvin

Unità kelvin

Siamo adesso in grado di definire correttamente il kelvin, unità di misura della temperatura: *esso è pari a* $\frac{1}{273.16}$ *della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua, misurata con un termometro a ciclo di Carnot.*

Zero assoluto

In base alla definizione appena data una qualsiasi temperatura è data dalla relazione

$$T = 273.16 \frac{Q}{Q_{pt}} \quad . \tag{12.9}$$

Se Q tende a zero, anche T tende a zero secondo (12.9).

Si chiama *zero assoluto la temperatura a cui una trasformazione isoterma reversibile si svolge senza scambio di calore*; nella (12.9) Q è infatti il calore scambiato, nel ciclo di Carnot, lungo l'isoterma a temperatura T.

Definizione dello zero assoluto

A $T = 0$ una trasformazione isoterma reversibile coincide con una trasformazione adiabatica reversibile, cosa che non è possibile a nessun'altra temperatura (è invece possibile se la trasformazione è irreversibile, come si è visto nell'espansione libera di un gas ideale).

Vedremo in seguito che non è possibile raggiungere lo zero assoluto; la temperatura più bassa mai raggiunta è dell'ordine di 10^{-7} K .

12.5 TEOREMA DI CLAUSIUS

La relazione (12.4), conseguenza del teorema di Carnot per le macchine reversibili che lavorano tra due sorgenti, può essere estesa e generalizzata a macchine termiche operanti con più sorgenti di calore. Si dimostra infatti, e il risultato è noto come *teorema di Clausius*, che, data una macchina M qualsiasi la quale scambia calore con n sorgenti, sussiste la relazione

$$\sum_1^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \qquad (12.10)$$

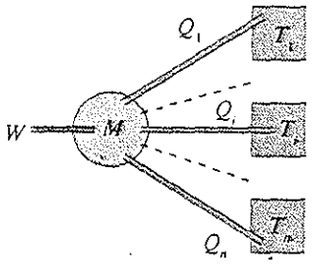


Fig. 12.9

ove $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sono i calori scambiati con le sorgenti a temperatura $T_1, T_2, \ldots, T_n$. La situazione è schematizzata nella figura 12.9, in cui non sono indicati i versi degli scambi energetici, che possono essere qualsiasi purché sia soddisfatta (12.10).

Per dimostrare (12.10), immaginiamo di aggiungere n macchine reversibili funzionanti tra le sorgenti già considerate alle temperature $T_1, T_2, \ldots, T_n$ e una sorgente a temperatura T_0 : ciascuna di queste macchine R_i scambia con la sorgente a T_i il calore $-Q_i$, opposto a quello scambiato con la stessa sorgente dalla macchina M, e con la sorgente a T_0 il calore Q_{0i}. L'insieme è mostrato in figura 12.10.

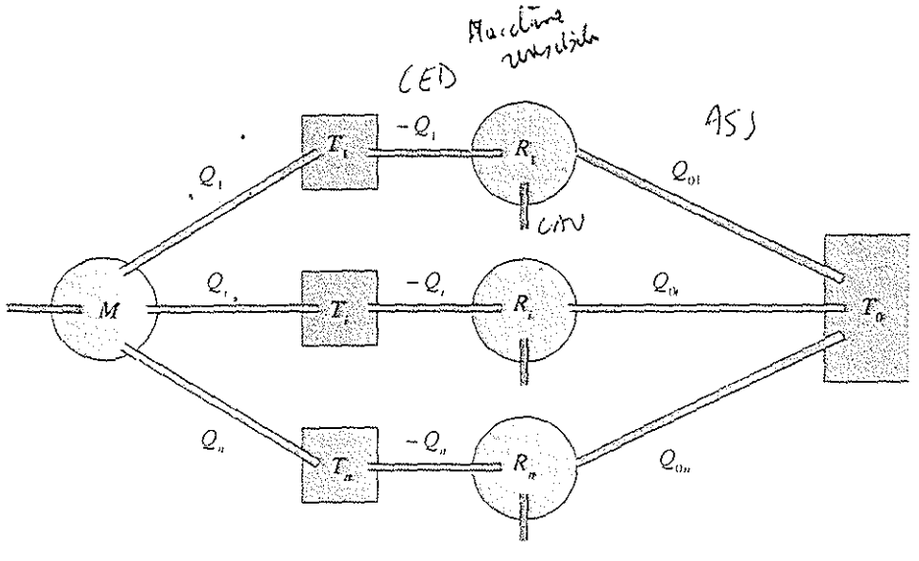


Fig. 12.10

Applichiamo (12.4) a ciascuna macchina reversibile:

$$\text{per } R_1 \qquad -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_{01}}{T_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_{01}}{T_0} = \frac{Q_1}{T_1} \quad ,$$

.....

$$\text{per } R_i \qquad -\frac{Q_i}{T_i} + \frac{Q_{0i}}{T_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_{0i}}{T_0} = \frac{Q_i}{T_i} \quad ,$$

.....

$$\text{per } R_n \qquad -\frac{Q_n}{T_n} + \frac{Q_{0n}}{T_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_{0n}}{T_0} = \frac{Q_n}{T_n} \quad ,$$

e sommando su tutte le macchine

$$\frac{1}{T_0} \Sigma_i Q_{0i} = \Sigma_i \frac{Q_i}{T_i} \quad .$$

Alla fine di un ciclo della macchina M e delle macchine reversibili $R_1, \ldots, R_n$ le sorgenti a $T_1, \ldots, T_n$ sono rimaste invariate in quanto ciascuna ha scambiato calori eguali ed opposti con le macchine. Pertanto la macchina complessiva costituita da M e dalle n macchine ausiliarie compie una trasformazione ciclica monoterma perché scambia calore solo con la sorgente a temperatura T_0. Come abbiamo visto nel paragrafo 12.1 il calore totale scambiato durante un ciclo monotermo non può essere positivo e quindi

$$\Sigma_i Q_{0i} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

poiché $T_0 > 0$. Abbiamo così dimostrato (12.10).

Se lo scambio di calore di M avviene con una serie infinita di sorgenti, detto dQ il calore scambiato con la sorgente a temperatura T, la (12.10) diventa

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad , \tag{12.11}$$

dove il simbolo $\oint$ indica che l'integrale è esteso a tutto il ciclo descritto dalla macchina M.

Le (12.10) e (12.11) esprimono il teorema di Clausius per una macchina generica. Se la macchina M è reversibile invertiamo tutti i cicli: tutti gli scambi di calore cambiano di segno e deve essere $\Sigma\,(-Q_{0i}) \leq 0$. Ne segue che le diseguaglianze di (12.10) e (12.11) vanno invertite e si ha compatibilità tra i due casi solo se

Teorema di Clausius

$$\Sigma_i \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad \text{oppure} \quad \oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad . \tag{12.12}$$

Queste relazioni esprimono il *teorema di Clausius per le macchine reversibili*; la prima in particolare appare come generalizzazione di (12.4).

Quando il processo ciclico è irreversibile, a rigore vale il segno di minore o eguale; però, sulla base delle considerazioni sui processi irreversibili sviluppate nel paragrafo 12.3, possiamo assumere che in generale si verifica la diseguaglianza e scrivere il *teorema di Clausius per le macchine irreversibili* come

$$\Sigma_i \frac{Q_i}{T_i} < 0 \quad \text{oppure} \quad \oint \frac{dQ}{T} < 0 \quad . \tag{12.13}$$

Si tenga presente che la temperatura T nelle (12.12) e (12.13) è quella della sorgente con cui avviene lo scambio di calore: essa coincide con la temperatura del sistema che compie il ciclo solo se il processo è reversibile. Inoltre i calori sono quelli visti dal sistema, positivi se il sistema li assorbe, negativi se li cede.

Osserviamo infine che mentre la somma dei calori scambiati, $\oint dQ$, è sempre diversa da zero per un ciclo che scambia lavoro, in accordo con il primo principio, quando il calore scambiato viene diviso per il valore della temperatura della sorgente con cui avviene lo scambio e si somma su tutto il ciclo, il risultato è nullo se il ciclo è reversibile e negativo negli altri casi.

12.6 LA FUNZIONE DI STATO ENTROPIA

Siano A e B due stati qualunque di un sistema termodinamico e passiamo da uno all'altro tramite due diverse trasformazioni reversibili, rappresentate dalle linee 1 e 2 della figura 12.11 in un diagramma bidimensionale; per un gas si tratterebbe, ad esempio, del piano (p, V).

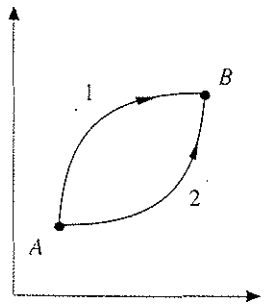


Fig. 12.11

Se percorriamo in senso inverso la trasformazione 2 (chiamandola –2), abbiamo composto un ciclo reversibile, che si svolge da A a B lungo la prima trasformazione e da B ad A lungo la seconda invertita. Da (12.12)

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T}\right)_{-2} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_2 \quad .$$

L'ultimo passaggio discende dalla proprietà delle trasformazioni reversibili secondo cui il cambio di verso nella trasformazione comporta soltanto il cambio di segno degli scambi energetici. Pertanto si ottiene

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_2 = \ldots\ldots\ldots = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_i$$

lungo qualsiasi trasformazione reversibile che colleghi gli stati termodinamici A e B.

Il valore dell'integrale $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev}$, esteso ad una qualunque trasformazione reversibile che congiunge due stati di un sistema termodinamico, è sempre lo stesso, cioè non dipende dalla particolare trasformazione reversibile scelta per eseguire il calcolo. Si può quindi porre l'integrale eguale alla variazione di una funzione che dipende solo dalle coordinate termodinamiche del sistema nei due stati di equilibrio A e B:

Definizione della funzione entropia

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} = S_B - S_A = \Delta S \quad . \tag{12.14}$$

La *funzione di stato* così introdotta è detta *entropia* (il nome significa in greco trasformazione).

La definizione (12.14) dà l'entropia a meno di una costante additiva arbitraria. Se fissiamo uno stato di riferimento O la cui entropia vale S_O , la variazione di entropia nel passaggio da O ad A è

$$S_A - S_O = \int_O^A \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} \quad \Rightarrow \quad S_A = S_O + \int_O^A \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} \quad ;$$

analogamente nel passaggio da O a B

$$S_B - S_O = \int_O^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} \quad \Rightarrow \quad S_B = S_O + \int_O^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} \quad .$$

Poiché la scelta della trasformazione reversibile è arbitraria, si ha pure

$$S_B = S_O + \int_O^A \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} + \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} = S_A + \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} \quad ,$$

che è la (12.14). Quindi l'entropia degli stati A e B è definita a meno di S_O, però la differenza di entropia è completamente definita, dato che nella differenza la costante arbitraria S_O scompare.

La (12.14) può essere scritta anche in forma infinitesima, cioè con riferimento ad una trasformazione reversibile infinitesima, che implica una variazione infinitesima delle coordinate termodinamiche:

$$dS = \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} \quad ; \tag{12.15}$$

dQ non è un differenziale esatto (si veda il paragrafo 10.5), però se tale quantità è divisa per T ed è considerata in una trasformazione reversibile, essa dà luogo al differenziale esatto dS.

L'entropia è una quantità additiva. Dati due sistemi di entropia S_1 e S_2 , l'entropia complessiva è espressa da $S = S_1 + S_2$. Questa proprietà è conseguenza del fatto che l'energia interna complessiva dei due sistemi è la somma delle energie interne come pure il lavoro complessivo è la somma dei lavori, per lo meno se i sistemi sono indipendenti, pertanto anche il calore scambiato dal sistema complessivo è la somma dei calori scambiati e il risultato si estende all'entropia (si noti che la parte del ragionamento riguardante U, Q, W è stata utilizzata nei bilanci energetici delle macchine risultanti dalla composizione di più macchine). In particolare risulta che se si aumenta la massa di un sistema, l'entropia aumenta in proporzione. L'entropia quindi ha le caratteristiche di una *grandezza estensiva.*

Supponiamo ora di avere una trasformazione irreversibile che collega lo stato A allo stato B e di voler calcolare la variazione di entropia del sistema che descrive la trasformazione. Le considerazioni finora esposte ci danno le seguenti indicazioni:

a) l'entropia degli stati iniziale e finale è certamente definibile, a partire ad esempio da un certo stato di riferimento;
b) conseguentemente è definibile la variazione $S_B - S_A$;
c) la variazione $S_B - S_A$ non dipende dal tipo di trasformazione che collega A e B,

ma solo dalle coordinate termodinamiche di A e B, in quanto l'entropia è una funzione di stato.

Pertanto per il calcolo della variazione di entropia nella trasformazione irreversibile da A a B basta scegliere una qualsiasi trasformazione reversibile che colleghi A a B ed applicare a questa (12.14): il risultato è valido in ogni caso.

In conclusione, nell'evoluzione di un sistema da uno stato A ad uno stato B l'entropia del sistema in generale cambia: la variazione non dipende dalle modalità dell'evoluzione (sia essa reversibile o irreversibile), ma solo dagli stati A e B. La (12.14) fornisce il metodo di calcolo: la scelta della trasformazione reversibile $A\,B$ da utilizzare è determinata solo da considerazioni sulla facilità del calcolo stesso.

L'unità di misura dell'entropia è il joule/kelvin, J/K.

Diagrammi $T\,S$

Osserviamo che l'entropia, essendo funzione di stato, può essere scelta come variabile indipendente (coordinata termodinamica) per descrivere, insieme ad una seconda variabile indipendente opportunamente scelta, lo stato termodinamico di un sistema (se descrivibile con due sole variabili).

Spesso viene considerata la coppia di variabili indipendenti S e T e tale scelta è giustificata dai seguenti motivi.

Nel piano (T, S) una trasformazione reversibile è rappresentata da un tratto di curva continua che fornisce il grafico della funzione $T(S)$. Il calore scambiato dal sistema che descrive la trasformazione è, secondo (12.15),

$$d Q_{rev} = T\,d S \quad \Rightarrow \quad Q_{rev} = \int_A^B T\,d S \quad , \tag{12.16}$$

con riferimento alla figura 12.12. Ne deriva che il calore scambiato nella trasformazione, assorbito se si passa da A a B ($S_B > S_A$), ceduto se invece si va da B ad A, è dato dall'area sotto la curva $A\,B$. Nel piano (T, S) il calore ha una semplice interpretazione grafica, come il lavoro nel piano (p, V), se le trasformazioni sono reversibili.

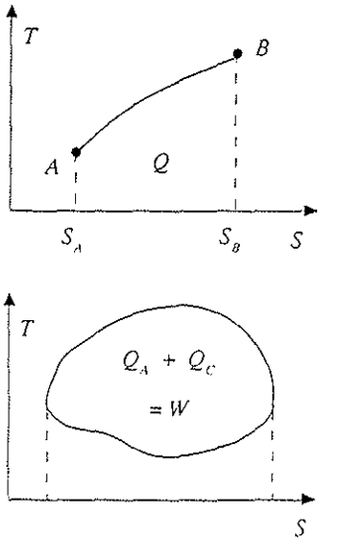


Fig. 12.12

Un ciclo reversibile nel piano (T, S) delimita un'area che è pari alla somma algebrica dei calori scambiati in totale dal sistema, $Q_A + Q_C$, positiva se il ciclo è percorso in senso orario, negativa in caso contrario. Tale area rappresenta anche, per il primo principio, il lavoro compiuto. Il rendimento di una macchina che compie un ciclo termico ha una semplice rappresentazione: esso è dato dal rapporto tra l'area racchiusa dal ciclo (W) e l'area totale sottesa dalla curva superiore (Q_A); risulta così evidente che il rendimento della macchina è inferiore all'unità.

Nel piano (T, S) una trasformazione isoterma reversibile è rappresentata da un segmento orizzontale (T = costante), una trasformazione adiabatica reversibile da un segmento verticale (S = costante): infatti in tal caso $d Q_{rev} = 0$ e, da (12.15), $d S = 0$. Una trasformazione adiabatica reversibile è dunque isoentropica, lungo di essa l'entropia del sistema non varia.

Un ciclo di Carnot ha la forma di un rettangolo e ricaviamo subito, da (12.16) visto che le temperature sono costanti o dalla figura 12.13,

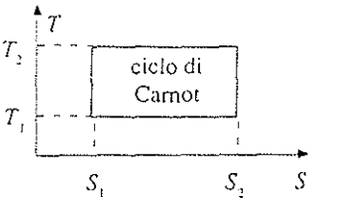


Fig. 12.13

$$Q_A = T_2 (S_2 - S_1) \quad , \quad Q_C = T_1 (S_1 - S_2) \quad ,$$

$$Q = Q_A + Q_C = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1) = W \quad ,$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad .$$

Inoltre, $S_2 - S_1 = Q_A / T_2 = - Q_C / T_1$, che è la (12.4), e

$$W = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1) = (T_2 - T_1) Q_A / T_2 \quad ,$$

che è la (12.6).

Abbiamo così trovato come si calcola la variazione di entropia in due importanti trasformazioni. In una isoterma reversibile alla temperatura T

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \quad , \qquad \textit{isoterma reversibile} \tag{12.17}$$

essendo Q il calore scambiato; in una adiabatica reversibile

$$\boxed{\Delta S = 0} \quad . \qquad \textit{adiabatica reversibile} \tag{12.18}$$

Sia (12.17) che (12.18) si ottengono direttamente da (12.14). Infine è evidente che per qualsiasi trasformazione ciclica la variazione di entropia della sostanza che descrive il ciclo è eguale a zero per definizione, essendo l'entropia funzione di stato:

$$\boxed{\Delta S = 0} \quad . \qquad \textit{trasformazione ciclica}$$

12.7 IL PRINCIPIO DI AUMENTO DELL'ENTROPIA. CALCOLI DI VARIAZIONI DI ENTROPIA

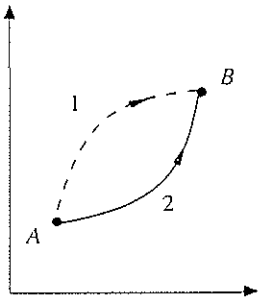


Fig. 12.14

Ritorniamo alla situazione rappresentata all'inizio del paragrafo 12.6, assumendo però che la trasformazione 1 sia irreversibile, mentre la 2 resta reversibile. Pertanto il ciclo formato dalle trasformazioni 1 e – 2 (cioè la 2 percorsa in senso inverso) è irreversibile: il teorema di Clausius (12.13) si scrive

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T}\right)_{-2} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} < 0 \quad .$$

L'ultimo integrale dà la variazione di entropia e quindi

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr} \quad . \tag{12.20}$$

È necessario soffermarsi con attenzione sul significato della (12.20) per evitare possibili equivoci. L'integrale $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ calcolato lungo una generica trasformazione $A\ B$ dipende dalla trasformazione e non ha nessun particolare significato fisico, salvo che deve obbedire a (12.20) e quindi essere sempre minore dell'integrale $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev}$, il quale invece è indipendente dalla trasformazione, purché reversibile, e definisce la variazione della funzione di stato entropia secondo

(12.14). In altre parole, se per una generica trasformazione $A\ B$ effettivamente eseguita da un sistema siamo in grado di calcolare $\int_A^B \frac{dQ}{T}$, in generale il risultato non è eguale alla variazione di entropia $S_B - S_A$, ma minore; se vogliamo calcolare $S_B - S_A$ per quella data trasformazione, dobbiamo servirci di un'altra trasformazione $A\ B$ reversibile.

In termini infinitesimi la (12.20) si scrive

$$dS = \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} > \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr} . \qquad (12.21)$$

Se il sistema che descrive la trasformazione $A\ B$ è isolato termicamente, cioè non scambia calore, si ha $dQ = 0$ e quindi da (12.20)

$$S_B - S_A \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S_B \geq S_A . \qquad (12.22)$$

Principio di aumento dell'entropia

L'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire: essa aumenta se la trasformazione è irreversibile, resta costante solo se la trasformazione è reversibile.

La (12.22) esprime il *principio di aumento dell'entropia*; la sua forma infinitesima

$$dS \geq 0 \qquad \textit{sistema isolato} \qquad (12.23)$$

Formulazione matematica del secondo principio della termodinamica

viene chiamata *formulazione matematica del secondo principio della termodinamica*. Un sistema isolato si ottiene sempre quando si considera un sistema propriamente detto ed il suo ambiente, cioè un universo termodinamico. Per l'universo termodinamico

$$\Delta S_u \geq 0 \qquad \text{con} \qquad \Delta S_u = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} .$$

Se l'universo compie una trasformazione reversibile

$$\Delta S_u = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{sist} = -\Delta S_{amb} ,$$

se invece l'universo compie una trasformazione irreversibile

$$\Delta S_u > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{sist} \neq -\Delta S_{amb} .$$

In particolare, quando la trasformazione è ciclica, sappiamo da (12.19) che $\Delta S_{sist} = 0$; allora,

se il ciclo è reversibile $\qquad \Delta S_u = \Delta S_{amb} = 0$;

se il ciclo è irreversibile $\qquad \Delta S_u = \Delta S_{amb} > 0$.

Una conclusione importante che si trae dai risultati appena esposti è che l'irreversibilità è sempre accompagnata da un aumento di entropia dell'universo. D'altra parte abbiamo già rilevato più volte che i processi naturali sono tutti sostanzialmente irreversibili. Possiamo quindi affermare che *ogni processo naturale si svolge necessariamente nel verso che determina un aumento dell'entropia complessiva del sistema e del suo ambiente*. L'evoluzione termina quando viene

raggiunto il massimo valore dell'entropia compatibile con le condizioni fisiche di sistema e ambiente: tale stato corrisponde allo stato di equilibrio stabile.

Notiamo esplicitamente che l'aumento di entropia dell'universo, in presenza di trasformazioni irreversibili, non significa che l'entropia debba aumentare in tutte le varie parti del sistema e dell'ambiente che costituiscono l'universo termodinamico. In una o più parti l'entropia può diminuire, ma ce n'è almeno un'altra in cui aumenta, in modo da soddisfare la (12.22). Analoghe considerazioni valgono nei casi in cui l'entropia dell'universo resta costante.

Nel resto del paragrafo trattiamo alcuni processi tipici, per mostrare come si calcolano le relative variazioni di entropia.

Trasformazioni adiabatiche

Un sistema che compie una trasformazione adiabatica costituisce un caso particolare di universo termodinamico, in cui il sistema è assunto essere isolato termicamente dall'ambiente: l'ambiente non scambia calore col sistema, ma soltanto lavoro; pertanto $\Delta S_{amb} = 0$ e

$$\Delta S_{sist} = \Delta S_u \geq 0 \quad .$$

Se la trasformazione è reversibile $\Delta S_{sist} = 0$, la trasformazione cioè è isoentropica. Come già detto nel paragrafo 12.6, il risultato si ottiene anche direttamente dalla definizione (12.14).

Per una trasformazione adiabatica irreversibile invece $\Delta S_{sist} > 0$, l'entropia aumenta. In effetti questa volta $dQ = 0$ non implica $dS = 0$: il calore scambiato lungo la trasformazione è nullo, però ΔS_{sist} non è calcolabile lungo questa trasformazione, bensì lungo un'altra con gli stessi estremi, ma reversibile, che non può essere adiabatica a sua volta. Questo perché due stati collegati con una adiabatica irreversibile hanno necessariamente entropia diversa e non possono quindi essere collegati anche con una adiabatica reversibile, che è isoentropica (e viceversa, due stati diversi per i quali è $\Delta S = 0$ non possono essere collegati con un'adiabatica irreversibile).

Scambi di calore con sorgenti

Consideriamo prima il caso della cessione di calore Q da una sorgente a temperatura T_2 a una sorgente a temperatura $T_1 < T_2$.

La sorgente che assorbe il calore Q ha una variazione di entropia

$$\Delta S_1 = \int_A^B \frac{dQ}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int_A^B dQ = \frac{Q}{T_1} \quad ,$$

mentre per la sorgente a T_2 che cede il calore $-Q$ si ha

$$\Delta S_2 = -\frac{Q}{T_2} \quad .$$

L'universo è costituito dalle due sorgenti e

$$\Delta S_u = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2} = Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \quad ;$$

si verifica che la variazione è positiva, dato che $T_1 < T_2$. L'entropia della sorgente fredda è aumentata, quella della sorgente calda è diminuita, però $|\Delta S_2| < \Delta S_1$. Il processo contrario è proibito perché comporterebbe una diminuzione di entropia dell'universo.

Il fenomeno descritto è irreversibile; esso si può realizzare ponendo a contatto termico le sorgenti per il tempo necessario a scambiare il calore Q. Comunque sia, per definizione il processo di scambio di calore da parte di una sorgente è isotermo; per tale ragione abbiamo utilizzato (12.17) nel calcolo ΔS_1 e ΔS_2, immaginando di compiere, per ciascuna sorgente, una trasformazione isoterma reversibile tra gli stessi stati iniziale e finale.

Un passaggio di calore tra due sorgenti avviene anche quando tra di esse lavora una macchina, secondo la figura 12.15. La variazione di entropia del sistema macchina è nulla in un ciclo; l'ambiente è costituito dalle due sorgenti e la variazione complessiva di entropia è

$$\Delta S_u = \Delta S_{amb} = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = -\left(\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}\right) \quad . \tag{12.24}$$

Il segno meno è dovuto al fatto che con Q_1 e Q_2 intendiamo i calori scambiati dal sistema, mentre ora stiamo calcolando la variazione di entropia dell'ambiente, per il quale i calori hanno segno opposto. Dal teorema di Clausius (12.10) vediamo che il termine tra parentesi è non positivo e quindi $\Delta S_u \geq 0$, come deve. Se la macchina è reversibile vale (12.12) e $\Delta S_u = 0$, altrimenti $\Delta S_u > 0$.

Il ragionamento resta valido se la macchina della figura 12.15 è frigorifera.

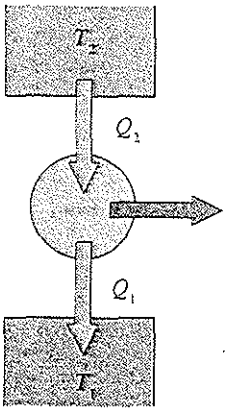


Fig. 12.15

ESEMPIO 12.1

Tra due sorgenti alle temperature $T_2 = 330$ K e $T_1 = 280$ K lavora una macchina termica: il lavoro $W = 100$ J prodotto in un ciclo viene utilizzato integralmente per fare compiere un ciclo tra le stesse temperature ad un frigorifero reversibile. In un ciclo completo delle due macchine la variazione di entropia dell'universo è $\Delta S_u = 0.28$ J/K. Calcolare il rendimento della macchina termica e i calori scambiati complessivamente con le sorgenti.

Soluzione

L'entropia dell'universo può cambiare solo durante il ciclo della prima macchina, poiché la seconda è reversibile. Chiamiamo Q_2 e Q_1 i calori scambiati dalla prima macchina e utilizziamo (12.24) e il primo principio:

$$\Delta S_u = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.28 \text{ J/K} \quad , \quad Q_1 + Q_2 = W = 100 \text{ J} \quad ,$$

da cui ricaviamo

$$Q_2 = 1177.4 \text{ J} \quad , \quad Q_1 = -1077.4 \text{ J} \quad , \quad \eta = \frac{W}{Q_2} = 0.085 \quad .$$

Invece il rendimento di una macchina reversibile che lavora tra le stesse sorgenti è

$$\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.152 = 1 + \frac{Q_{1R}}{Q_{2R}} \quad .$$

Se questa macchina produce il lavoro $W = 100$ J, pari a $Q_{1R} + Q_{2R}$, si ha

$$Q_{2R} = 657.9 \text{ J} \quad , \quad Q_{1R} = -557.9 \text{ J} \quad .$$

Cambiati di segno, questi sono gli scambi energetici del frigorifero reversibile: assorbe $-Q_{1R} = 557.9$ J a T_1, assorbe $-W = -100$ J e cede $-Q_{2R} = -657.9$ J a T_2. Facendo il bilancio complessivo:

calore assorbito a T_2 $\quad Q_2 - Q_{2R} = 1174.4 - 657.9 = 519.5$ J

calore ceduto a T_1 $\quad Q_1 - Q_{1R} = -1077.4 + 557.9 = -519.5$ J .

Il risultato finale è il passaggio di 519.5 J dalla sorgente a 330 K a quella a 280 K. Se calcoliamo ΔS_u per questo processo diretto con la formula $-Q/T_2 + Q/T_1$ troviamo ovviamente 0.28 J/K.

Consideriamo infine lo scambio di calore tra un corpo di massa m, calore specifico c costante, temperatura T_1 e una sorgente a temperatura T_2, con cui il corpo viene messo a contatto termico.

Il processo è irreversibile (non c'è equilibrio termico); per il calcolo della variazione di entropia del corpo immaginiamo un processo reversibile con scambio di calore tra il corpo e infinite sorgenti a temperatura crescente $T_1 + dT, T_1 + 2\,dT, \ldots, T_2 - dT, T_2$. Con ciascuna sorgente viene scambiato il calore $dQ = m\,c\,dT$ e, da (12.14),

$$\Delta S_{sist} = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} m\,c\,\frac{dT}{T} = m\,c\,\ln\frac{T_2}{T_1} \quad . \tag{12.25}$$

Se $T_1 < T_2$ il corpo assorbe calore dalla sorgente e la sua entropia aumenta; se $T_1 > T_2$ il corpo invece cede calore alla sorgente e la sua entropia diminuisce.

Il calore scambiato dal corpo è

$$Q = m\,c\,(T_2 - T_1)$$

e quindi il calore scambiato dalla sorgente è $-Q$. La variazione di entropia della sorgente è

$$\Delta S_{amb} = -\frac{Q}{T_2} = \frac{mc\,(T_1 - T_2)}{T_2} \quad ;$$

essa è di segno opposto rispetto a ΔS_{sist} ed è diversa in modulo.

La variazione di entropia dell'universo è data da

$$\Delta S_u = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} = m\,c\,\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{mc\,(T_1 - T_2)}{T_2}$$

ed è facile verificare che essa è sempre positiva, sia per $T_2 > T_1$ che per $T_2 < T_1$. Per esempio, nel caso $T_2 > T_1$,

$$dS_{sist} = \frac{m\,c\,dT}{T} \quad , \quad dS_{amb} = -\frac{m\,c\,dT}{T_2} \quad ;$$

essendo sempre $T < T_2$ durante il processo, $dS_{sist} > |\,dS_{amb}\,|$ e la diseguaglianza si mantiene a integrazione effettuata:

$$\Delta S_{sist} = m\,c\,\ln\frac{T_2}{T_1} > \frac{m\,c\,|T_2 - T_1|}{T_2} = |\,\Delta S_{amb}\,| \quad .$$

Quando $T_1 > T_2$, cambiano i segni delle variazioni di entropia ed è sempre $T > T_2$, per cui $dS_{amb} > |\,dS_{sist}\,|$ e si ottiene di nuovo $\Delta S_u > 0$.

Con un ragionamento quasi identico si verifica, per il corpo, (12.21): infatti

$$\left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} = m\,c\,\frac{dT}{T} \quad ,$$

mentre nel processo reale irreversibile la temperatura a cui avviene lo scambio di calore è la temperatura T_2 della sorgente per cui

$$\left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{irr}} = m\,c\,\frac{dT}{T_2} \quad .$$

Quando $T_2 > T_1$, $d\,T$ è positivo, T è minore di T_2, $d\,T/T$ è maggiore di $d\,T/T_2$; quando $T_2 < T_1$, $d\,T$ è negativo, T è maggiore di T_2 e di nuovo $d\,T/T$ è maggiore di $d\,T/T_2$ (in modulo è minore, ma si tratta di numeri negativi).

Scambi di calore tra due corpi

Un corpo di massa m_1, calore specifico costante c_1 e temperatura T_1, viene messo a contatto, in un ambiente isolato termicamente, con un altro corpo di massa m_2, calore specifico c_2 e temperatura $T_2 > T_1$. Avviene uno scambio di calore irreversibile, considerata la differenza iniziale di temperatura tra i due corpi (irreversibilità termica), e i due corpi raggiungono l'*equilibrio termico* alla temperatura T_e data da

$$T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \quad ,$$

come si ricava eguagliando i moduli dei calori scambiati (vedi paragrafo 10.7).

Per le variazioni di entropia dei due corpi utilizziamo (12.25):

$$\Delta S_1 = m_1\,c_1 \ln\frac{T_e}{T_1} > 0 \quad , \quad \Delta S_2 = m_2\,c_2 \ln\frac{T_e}{T_2} < 0 \quad .$$

L'intero processo è adiabatico (irreversibile) per cui $\Delta S_u = \Delta S_1 + \Delta S_2$ e si ha sempre $\Delta S_u > 0$.

ESEMPIO 12.2

Due masse d'acqua, $m_2 = 100$ kg e $m_1 = 240$ kg, si trovano alle temperature $T_2 = 90$°C e $T_1 = 10$°C. I recipienti che le contengono vengono posti in contatto termico tra loro e isolati dall'ambiente esterno. Calcolare la variazione di entropia. Ripartendo dalle stesse condizioni iniziali si fa lavorare tra le due masse una macchina termica reversibile finché viene raggiunto l'equilibrio termico. Calcolare la temperatura di equilibrio.

Soluzione

Nel primo caso $m_1\,c\,(T_e - T_1) = -\,m_2\,c\,(T_e - T_2)$ da cui risulta

$$T_e = 33.5\text{°C} = 306.7\ \text{K} \quad .$$

La variazione di entropia vale

$$\Delta S_u = \Delta S_{\text{sist}} = m_1\,c\,\ln\frac{T_e}{T_1} + m_2\,c\,\ln\frac{T_e}{T_2} = 9310\,\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

ricordando che $c = 4186.8$ J/kg K (e che le temperature devono essere espresse in kelvin).

Nel secondo caso il processo è reversibile e quindi la variazione di entropia dell'universo è nulla:

$$\Delta S_u = 0 = m_1\,c\,\ln\frac{T_e'}{T_1} + m_2\,c\,\ln\frac{T_e'}{T_2} \quad \Rightarrow$$

$$T_e' = 304.8\ \text{K} = 31.6\ \text{°C} \quad .$$

È interessante notare come sia l'espressione matematica del secondo principio a fornire l'equazione risolutiva. È anche importante rendersi conto che in questo caso la macchina non lavora tra due sorgenti, ma tra due corpi con capacità termica finita la cui temperatura varia durante il processo. Il calore assorbito dalla macchina è $Q_A = m_2\,c\,(T_2 - T_e')$, quello ceduto è $Q_C = m_1\,c\,(T_1 - T_e')$, il lavoro prodotto è $W = Q_A + Q_C$, il rendimento $\eta = W/Q_A$.

Cambiamenti di fase

I cambiamenti di fase sono processi isotermi: mettendo insieme (12.17) e (10.18), la variazione di entropia di m chilogrammi di una sostanza che cambia fase alla temperatura T è

$$\Delta S = \frac{m\lambda}{T} \quad . \tag{12.26}$$

ESEMPIO 12.3

Un blocco di ghiaccio alla temperatura $T_1 = 0°C$ viene posto a contatto, in un ambiente termicamente isolato, con un blocco di rame alla temperatura $T_2 = 100°C$; ad equilibrio raggiunto si è sciolta una quantità m_x di ghiaccio. La capacità termica del blocco di rame è $C = 6 \cdot 10^3$ J/K e il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda = 3.34 \cdot 10^5$ J/kg. Calcolare il valore di m_x e la variazione di entropia dell'universo.

Soluzione
Dal testo si deduce che la temperatura di equilibrio è T_1, in quanto non fonde tutto il ghiaccio. La massa che fonde si ricava da

$$m_x \lambda = C (T_2 - T_1) \quad \Rightarrow \quad m_x = 1.80 \text{ kg} \quad .$$

La variazione di entropia del ghiaccio che cambia fase è, da (12.26),

$$\Delta S_g = \frac{m_x \lambda}{T_1} = \frac{C (T_2 - T_1)}{T_1} = 2197 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad ,$$

mentre quella del blocco di rame si ricava da (12.25):

$$\Delta S_{Cu} = C \ln \frac{T_1}{T_2} = -1872 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad .$$

Per l'universo $\Delta S_u = \Delta S_g + \Delta S_{Cu} = 325$ J/K .

ESEMPIO 12.4

Una macchina termica lavora tra una massa d'acqua $m_2 = 10^6$ kg alla temperatura $T_2 = 10°C$ e una massa di ghiaccio $m_1 = 0.2 \cdot 10^6$ kg alla temperatura $T_1 = 0°C$. Calcolare il massimo lavoro ottenibile.

Soluzione
Il massimo lavoro si ha impiegando una macchina reversibile che assorbe calore dall'acqua e cede calore al ghiaccio facendolo fondere; nel processo la temperatura dell'acqua diminuisce e alla fine diventa T_1. Infatti il calore che il ghiaccio può assorbire dall'acqua è

$$Q = m_2 c (T_2 - T_1) = 4.19 \cdot 10^{10} \text{ J} \quad (c = 4186.8 \text{ J/kg K}),$$

inferiore al calore che sarebbe necessario per fondere tutto il ghiaccio

$$m_1 \lambda = 6.69 \cdot 10^{10} \text{ J} \quad (\lambda = 3.34 \cdot 10^5 \text{ J/kg}) \quad .$$

Essendo la macchina reversibile $\Delta S_u = 0$, ovvero, essendo $\Delta S_{sist} = 0$,

$$\Delta S_{amb} = \Delta S_a + \Delta S_g = m_2 c \ln \frac{T_1}{T_2} + \frac{Q_0}{T_1} = 0$$

essendo Q_0 il calore assorbito dal ghiaccio, che risulta pari a $4.11 \cdot 10^{10}$ J. La macchina pertanto assorbe Q, cede $-Q_0$ e compie il lavoro

$$W = Q - Q_0 = 8 \cdot 10^8 \text{ J} \quad ,$$

con rendimento $\eta = W/Q = 0.019$. Se la temperatura dell'acqua restasse costante durante il processo, il rendimento sarebbe

$$\eta = 1 - \frac{273.15}{283.15} = 0.035 \quad .$$

Riscaldamento per attrito

Riprendiamo dal paragrafo 10.6 l'esempio del corpo il cui moto viene frenato da una forza di attrito. Il lavoro dissipativo W è eguale all'opposto della variazione di energia interna del corpo e del sistema che esercita la forza di attrito, secondo (10.2): $W = U_A - U_B$ e, siccome il lavoro è negativo, l'energia interna aumenta ($U_B > U_A$) e aumenta la temperatura da T_{amb} a T. Successivamente viene ceduto calore all'ambiente, $Q = U_A - U_B = W$ e la temperatura dei corpi che hanno partecipato al fenomeno ritorna al valore iniziale T_{amb}, così come U ritorna da U_B a U_A.

In definitiva i corpi hanno subito una trasformazione ciclica: la loro entropia è aumentata durante il riscaldamento ed è calcolabile con formule tipo (12.25), immaginando una cessione di calore reversibile al posto del processo reale adiabatico irreversibile; però durante la cessione di calore all'ambiente l'entropia dei corpi diminuisce e alla fine l'unica variazione di entropia diversa da zero è quella dell'ambiente, che riceve il calore $-Q$ (si ricordi che Q è negativo, in quanto è il calore ceduto dal corpo):

$$\Delta S_{amb} = -\frac{Q}{T_{amb}} = -\frac{W}{T_{amb}} = \Delta S_u > 0 \quad .$$

Quello descritto è solo un caso particolare; è possibile mantenere costante la velocità del corpo con la fornitura di lavoro motore che bilanci il lavoro resistente (equilibrio dinamico nel moto uniforme reale) e ciò comporta una cessione continua di calore all'ambiente. Oppure si può considerare il caso dell'innalzamento stabile di temperatura di un corpo in quiete in cui si raggiunge un equilibrio energetico nel senso che il calore ceduto dal corpo all'ambiente è compensato dall'energia fornita al corpo attraverso fenomeni di attrito. In ogni situazione si verifica sempre $\Delta S_u > 0$, segnale dell'irreversibilità di questi processi.

12.8 ENTROPIA DEL GAS IDEALE

Consideriamo n moli di gas ideale che passano dallo stato A (p_A, V_A, T_A) allo stato B (p_B, V_B, T_B). Il calore scambiato nella trasformazione si esprime attraverso il primo principio (11.18):

$$dQ = n c_V dT + dW \quad .$$

Per il calcolo della variazione di entropia dobbiamo utilizzare una trasformazione $A\,B$ reversibile e questo ci permette di servirci delle relazioni

$$dW = p\,dV \quad , \quad pV = nRT \quad \Rightarrow \quad dW = nRT\,\frac{dV}{V} \quad .$$

Pertanto

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} = \int_A^B n c_V \frac{dT}{T} + \int_A^B nR\,\frac{dV}{V} \quad .$$

Integrando si ottiene la prima delle (12.27); alle successive si passa tramite l'equazione di stato e la relazione di Mayer:

$$S_B - S_A = n\,c_V \ln\frac{T_B}{T_A} + n\,R \ln\frac{V_B}{V_A} \quad ,$$

$$S_B - S_A = n\,c_V \ln\frac{p_B}{p_A} + n\,c_p \ln\frac{V_B}{V_A} \quad , \qquad (12.27)$$

$$S_B - S_A = n\,c_p \ln\frac{T_B}{T_A} - n\,R \ln\frac{p_B}{p_A} \quad .$$

Le (12.27) si possono scrivere anche in forma più compatta:

$$S_B - S_A = n\,c_V \ln\frac{T_B\,V_B^{\gamma-1}}{T_A\,V_A^{\gamma-1}} \quad ,$$

$$S_B - S_A = n\,c_V \ln\frac{p_B\,V_B^{\gamma}}{p_A\,V_A^{\gamma}} \quad , \qquad (12.28)$$

$$S_B - S_A = n\,c_p \ln\frac{T_B\,p_B^{(1-\gamma)/\gamma}}{T_A\,p_A^{(1-\gamma)/\gamma}} \quad .$$

Dati gli stati iniziale e finale la variazione di entropia di un gas ideale si può dunque scrivere utilizzando una qualsiasi delle espressioni viste, indipendentemente dalla trasformazione $A\ B$ realmente avvenuta; si vede che in generale *la variazione di entropia dipende da due coordinate termodinamiche.*

Dalle espressioni generali (12.27) ricaviamo in particolare:

trasformazione isoterma $\quad S_B - S_A = n\,R \ln\frac{V_B}{V_A} = -n\,R \ln\frac{p_B}{p_A}$,

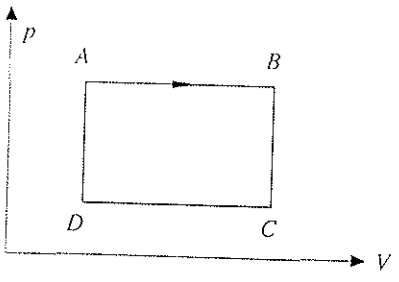
trasformazione isocora $\quad S_B - S_A = n\,c_V \ln\frac{T_B}{T_A} = n\,c_V \ln\frac{p_B}{p_A}$, $\qquad (12.29)$

trasformazione isobara $\quad S_B - S_A = n\,c_p \ln\frac{T_B}{T_A} = n\,c_p \ln\frac{V_B}{V_A}$.

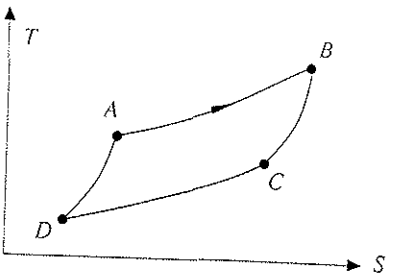
Si noti come nell'integrazione che porta alle (12.27) si sia assunto costante il calore specifico molare a volume costante (e la stessa assunzione è stata fatta nel paragrafo 12.7 per i calori specifici di corpi solidi o liquidi). Se questa ipotesi non è verificata si hanno formule particolari a seconda della dipendenza di c_V dalla temperatura, però la sostanza dei ragionamenti non cambia.

ESEMPIO 12.5

n moli di gas ideale monoatomico compiono nel piano (p, V) il ciclo rappresentato nella figura 12.16a. Nel piano (T, S) il ciclo si trasforma come indicato nella figura 12.16b. Calcolare nelle due rappresentazioni il valore del lavoro compiuto dal sistema.



a)



b)

Fig. 12.16

Soluzione
Nel piano (p, V) l'area racchiusa dal ciclo si calcola facilmente:

$$W = (p_A - p_D)(V_C - V_D) =$$

$$= n R\ (T_B - T_A) - n R\ (T_C - T_D) =$$

$$= n R\ [(T_B + T_D) - (T_A + T_C)] \quad .$$

Nel piano (T, S) il legame tra temperatura ed entropia è dato dalle (12.29), che scriviamo in forma infinitesima e poi integriamo esplicitando la temperatura:

trasformazione isobara $dS = n c_p \frac{dT}{T} \Rightarrow T = A\, e^{S/n c_p}$,

trasformazione isocora $dS = n c_V \frac{dT}{T} \Rightarrow T = B\, e^{S/n c_V}$.

Si spiega così l'aspetto delle trasformazioni e si capisce perché la pendenza è maggiore per le isocore ($c_V < c_p$).
Il lavoro complessivo è eguale al calore complessivo e quindi

$$W = \oint T\, dS = \int_A^B n c_p\, dT + \int_B^C n c_V\, dT + \int_C^D n c_p\, dT +$$
$$+ \int_D^A n c_V\, dT$$

$$= n c_p\, [(T_B - T_A) + (T_D - T_C)] + n c_V\, [(T_C - T_B) +$$
$$+ (T_A - T_D)]$$

$$= n (c_p - c_V)\, [(T_B + T_D) - (T_A + T_C)] \quad ,$$

che, in base alla relazione di Mayer, è identica all'espressione precedente.

Trasformazioni adiabatiche

Quando la trasformazione $A\ B$ è adiabatica reversibile $S_B = S_A$; eguagliando a zero le (12.28) si ritrovano le equazioni (11.21).

Nel piano (p, V) le adiabatiche reversibili formano la famiglia di curve $p\, V^\gamma =$ costante, mostrate nella figura 12.17; a ciascuna curva compete un *valore costante dell'entropia* e per questo tali curve sono chiamate anche *isoentropiche*.

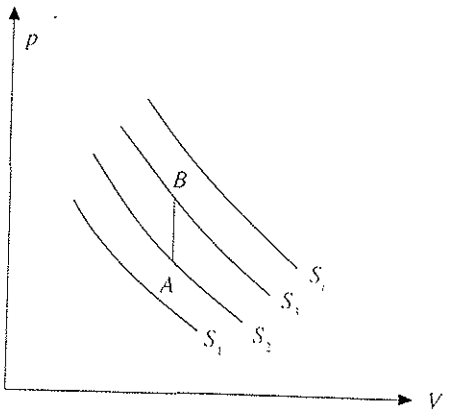


Fig. 12.17

Si verifica che $S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_f$. Infatti, per esempio, $S_3 - S_2$ si calcola congiungendo con una qualsiasi trasformazione reversibile un generico punto della curva 2 con un generico punto della curva 3 (su una curva tutti i punti corrispondono a stati con la stessa entropia). Possiamo in particolare scegliere un'isocora per la quale, in base a (12.29),

$$S_3 - S_2 = n\, c_V \ln \frac{p_B}{p_A} \quad \Rightarrow \quad S_3 > S_2 \quad \text{poiché} \quad p_B > p_A \quad .$$

Una speciale adiabatica irreversibile è l'espansione libera, che è anche isoterma: da (12.29)

$$S_B - S_A = n\, R \ln \frac{V_B}{V_A}$$

e risulta $S_B > S_A$ essendo $V_B > V_A$: ciò è in accordo col fatto che nel caso specifico $\Delta S_{\text{sist}} = \Delta S_u$.

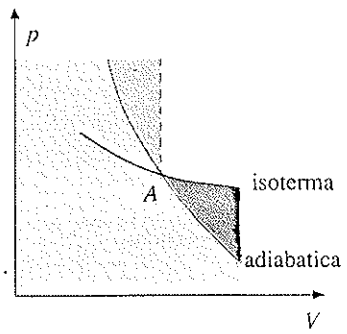


Fig. 12.18

Trattiamo ora in generale le trasformazioni adiabatiche irreversibili di un gas ideale. Date n moli di gas nello stato A tracciamo le curve corrispondenti a una isoterma reversibile e a una adiabatica reversibile passanti per A (figura 12.18). Una espansione adiabatica irreversibile che parte da A non può avere lo stato finale nella zona colorata al di sotto dell'isoentropica passante per A in quanto ciò comporterebbe una diminuzione di entropia, come discusso prima analizzando la figura 12.17, mentre deve essere $\Delta S > 0$. Inoltre la temperatura di tale stato finale è $\leq T_A$ perché durante un'espansione adiabatica un gas si raffredda sempre, a meno che non si tratti di un'espansione libera che è isoterma (a parità di volume finale il raffreddamento è sempre minore per una adiabatica irreversibile che per una adiabatica reversibile). Gli stati finali stanno quindi sotto l'isoterma (per il primo principio) e sopra l'isoentropica (per il secondo principio), nella zona indicata con un grigio intenso.

In una compressione adiabatica che parte da A lo stato finale deve sempre stare sopra l'isoentropica e deve avere volume minore di V_A: la zona a disposizione è quella indicata in grigio chiaro; a parità di volume finale il riscaldamento è maggiore nell'adiabatica irreversibile che in quella reversibile.

Le leggi della termodinamica pongono quindi vincoli ben precisi agli stati finali accessibili da un dato stato iniziale tramite una trasformazione adiabatica irreversibile. Si osservi inoltre che quando si passa tramite un'adiabatica irreversibile da uno stato A a uno stato B, con S_B necessariamente maggiore di S_A, non è più possibile ritornare in A adiabaticamente, né in modo reversibile né in modo irreversibile, perché sarebbe in ogni caso $\Delta S < 0$ (tale osservazione è valida per qualsiasi sistema e non solo per il gas ideale, come del resto abbiamo già rilevato nel paragrafo 12.6). Possiamo dire che una trasformazione adiabatica irreversibile presenta una *irreversibilità in senso stretto*, cioè non è proprio possibile tornare allo stato iniziale con lo stesso tipo di trasformazione. Questo non è il caso di altre trasformazioni irreversibili: l'intervento dell'ambiente con le sue variazioni di entropia rende possibile il ritorno allo stato iniziale con lo stesso tipo di trasformazione (ma non necessariamente attraverso gli stessi stati) senza violare il principio di aumento dell'entropia dell'universo termodinamico.

Concludiamo con un'ultima osservazione, anch'essa di carattere generale. Due stati scelti a caso di un sistema termodinamico non sono sempre collegabili con una trasformazione adiabatica reversibile o irreversibile; fissato lo stato iniziale ciò può avvenire solo per stati finali le cui coordinate termodinamiche soddisfano ben

determinate condizioni, come si è visto. Con riferimento al primo principio ci rendiamo conto che la situazione $W = -\Delta U$ è molto particolare, nel senso che la maggior parte delle trasformazioni di un sistema termodinamico avvengono solo se c'è anche scambio di calore.

12.9 ENERGIA INUTILIZZABILE

Un fenomeno strettamente connesso con *l'irreversibilità dei processi naturali* e quindi con l'*aumento di entropia dell'universo* è la *degradazione dell'energia*, ovvero la *perdita di disponibilità di lavoro*.

Affrontiamo questo argomento discutendo prima alcuni esempi di processi che presentano irreversibilità meccanica o termica, che avvengono cioè in assenza di equilibrio meccanico o termico.

A. Espansione libera

Nell'espansione libera non c'è equilibrio meccanico; il gas non produce lavoro e non scambia calore, $W = Q = 0$, la sua temperatura resta costante, il suo volume aumenta. Abbiamo calcolato nel paragrafo 10.8 la variazione di entropia del gas, che coincide con quella dell'universo per l'adiabaticità del processo:

$$\Delta S_u = n R \ln \frac{V_B}{V_A} \quad .$$

Potremmo collegare gli stati A e B con una trasformazione isoterma reversibile in cui il gas assorbe il calore Q alla temperatura T producendo il lavoro (11.23)

$$W_R = n R T \ln \frac{V_B}{V_A} = T \Delta S_u \quad .$$

La differenza tra il lavoro che avremmo potuto ottenere operando in modo reversibile tra gli stessi stati e il lavoro effettivamente ottenuto è uguale al prodotto della variazione di entropia dell'universo nella trasformazione irreversibile reale per la temperatura costante a cui avviene l'espansione:

$$W_R - W = T \Delta S_u \quad .$$

B. Passaggio di calore da una sorgente calda a una fredda.

Il processo che consideriamo, caso tipico di irreversibilità termica, consiste nel sottrarre il calore Q a una sorgente a temperatura T_2 e cederlo a una sorgente a temperatura $T_1 < T_2$. Il lavoro prodotto in corrispondenza del passaggio di calore è nullo, $W = 0$. Abbiamo calcolato nel paragrafo 12.7 che in questo processo

$$\Delta S_u = -\frac{Q}{T_2} + \frac{Q}{T_1} \quad .$$

Se prelevassimo Q dalla sorgente calda con una macchina reversibile operante tra T_1 e T_2, produrremmo il lavoro (12.6)

$$W_R = Q \eta_R = Q \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = T_1 \Delta S_u \quad ;$$

anche questa volta troviamo $W_R - W = T_1 \Delta S_u$ essendo T_1 la temperatura della sorgente fredda.

C. Macchina irreversibile che lavora tra due sorgenti.

La macchina assorbe Q_2 a temperatura T_2, cede Q_1 a temperatura T_1 e produce il lavoro W, inferiore al lavoro W_R prodotto da una macchina reversibile che lavora tra le stesse sorgenti, a parità di calore assorbito:

$$W_R - W = Q_2\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) - (Q_1 + Q_2) = T_1\left(-\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}\right) .$$

Il termine tra parentesi è la variazione (12.24) di entropia delle sorgenti durante un ciclo della macchina irreversibile e quindi

$$W_R - W = T_1 \Delta S_u .$$

Questi esempi sono casi particolari di una proprietà che può essere dimostrata in generale: *quando avviene un processo irreversibile in cui l'entropia dell'universo aumenta di ΔS_u, la grandezza*

Energia inutilizzabile

$$E_{IN} = T_0 \Delta S_u \qquad (12.30)$$

è pari alla differenza tra il lavoro che si sarebbe potuto ottenere se il processo fosse stato reversibile e il lavoro effettivamente ottenuto; T_0 è la temperatura più bassa tra quelle delle sorgenti disponibili nell'ambiente.

E_{IN} viene chiamata *energia inutilizzabile*: non si tratta di energia persa, ma *sprecata*, in accordo col primo principio secondo cui l'energia viene convertita e non perduta.

Per chiarire il concetto, riprendiamo in considerazione l'esempio C. È stato assorbito il calore Q_2 che non viene utilizzato al massimo producendo W_R; la parte che non si riesce a utilizzare viene ceduta alla sorgente a T_1 e diventa inutilizzabile. In effetti, posto

$$W_R = Q_2 + Q_{1R} = Q_2 - |Q_{1R}| \quad , \quad W = Q_2 + Q_1 = Q_2 - |Q_1| \quad ,$$

da $W_R > W$ risulta $|Q_1| > |Q_{1R}|$, il calore veramente ceduto è maggiore in modulo di quello minimo che si sarebbe potuto cedere, e

$$E_{IN} = W_R - W = |Q_1| - |Q_{1R}| \quad .$$

L'energia inutilizzabile è proprio il calore in più ceduto a T_1 a causa dell'irreversibilità della macchina.

Se questa fosse reversibile, si potrebbe riutilizzare W_R per farla funzionare in ciclo inverso riassorbendo $-Q_{1R}$ a T_1 e cedendo $-Q_2$ a T_2 e l'universo non subirebbe modifiche. Invece, avendo ceduto un calore Q_1 maggiore in modulo di Q_{1R}, il lavoro che occorre per riassorbire $-Q_1$, anche operando con un frigorifero reversibile tra T_1 e T_2, è maggiore in modulo di W_R e la differenza che occorrerebbe in più è proprio E_{IN}: *l'universo ha subito una modifica e l'energia inutilizzabile ne è una misura.*

Quanto detto mostra E_{IN} sotto un altro aspetto: anche rianalizzando gli altri esempi discussi troviamo che *l'energia inutilizzabile è pari al lavoro supplementare che bisognerebbe spendere per riportare in modo reversibile il sistema complessivo nello stato iniziale.*

La pompa di calore

Una macchina reversibile che lavora tra T_1 e T_2 ha il rendimento

$$\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{\Delta T}{T_2} \quad .$$

Operando a temperatura ordinaria e con ΔT piccolo il rendimento è piccolo (qualche percento): del calore assorbito Q_2 solo una minima percentuale $\eta_R Q_2$ viene trasformata in lavoro, la maggior parte $(1 - \eta_R) Q_2$ viene ceduta a T_1, da cui può essere recuperata con un frigorifero reversibile.

Ponendo appunto l'attenzione sul ciclo inverso, Kelvin fece notare che con una modesta spesa di lavoro è possibile far passare notevoli calori da T_1 a T_2, quando la differenza $T_2 - T_1$ è piccola. Questo è il concetto alla base delle *pompe di calore.*

Una macchina frigorifera reale presenta certamente fattori di irreversibilità, ma se anche l'efficienza effettiva fosse la metà di quella teorica il sistema sarebbe egualmente conveniente.

Per fissare le idee, consideriamo le temperature $T_1 = 277$ K = 4°C e $T_2 = 295$ K = 22°C, tipiche rispettivamente di un ambiente freddo e di una casa riscaldata. Da (11.28) risulta un'efficienza teorica

$$\xi = \frac{Q_0}{|W|} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = 15.7 \quad \Rightarrow \quad |W| = 0.065\, Q_0$$

In modulo, il calore ceduto a T_2 è

$$|Q| = |W| + Q_0 = 1.065\, Q_0 \quad \Rightarrow \frac{|W|}{|Q|} = 0.061 = \eta_R \quad .$$

Se Q è il calore che bisogna fornire alla casa per compensare le perdite attraverso muri e finestre, utilizzando una pompa di calore possiamo ipotizzare una spesa di lavoro dell'ordine del 10% di Q, prelevando Q_0 da una sorgente fredda (per esempio l'acqua di un fiume o di un lago).

Con un sistema di riscaldamento convenzionale l'energia da spendere è almeno pari a Q; la pompa di calore consentirebbe un risparmio di circa il 90%.

Ragionando in termini di energia inutilizzabile, lo spreco è piccolo rispetto ai calori in gioco: assumendo un'efficienza pari alla metà di quella teorica, è pur sempre $E_{IN}/Q \cong 0.06$, mentre nel caso convenzionale $E_{IN} = Q$, tutta l'energia in gioco è inutilizzabile.

Nella pratica, essendo costruzione e gestione non banali, la pompa di calore è risultata economicamente conveniente per grossi impianti; vi è però un notevole interesse per l'estensione a piccole utenze.

12.10 CONCLUSIONI TERMODINAMICHE SULL'ENTROPIA

Le leggi della termodinamica introducono la definizione di particolari grandezze fisiche legate allo stato di un sistema:

principio dell'equilibrio termico	$\Rightarrow$	temperatura
primo principio	$\Rightarrow$	energia interna

secondo principio $\Rightarrow$ entropia

Le proprietà di temperatura ed energia interna sono state ampiamente discusse e anche il loro significato fisico appare chiaro, soprattutto dopo lo studio della teoria cinetica dei gas che, pur se riferita a un particolare sistema, porta a considerazioni di carattere microscopico estendibili almeno in parte ad altri sistemi.

Soffermiamoci adesso sull'entropia per riassumere gli aspetti macroscopici, rinviando al paragrafo 12.11 una discussione sul suo significato microscopico.

In quanto funzione di stato l'entropia in generale cambia al variare delle coordinate termodinamiche del sistema. Non bisogna quindi associare la variazione di entropia esclusivamente a scambi di calore: abbiamo visto che essa varia anche in una trasformazione adiabatica irreversibile. La (12.14) fissa il metodo di calcolo e ci dice che solo nelle trasformazioni reversibili ΔS è sempre conseguenza di uno scambio di calore.

Quando si passa a considerare un universo termodinamico che descrive trasformazioni reali, l'entropia complessiva cresce sempre. *L'aumento di entropia dell'universo è il segnale dell'irreversibilità*, ovvero di una modifica permanente dell'universo: una volta che ΔS_u si è verificata, non è più possibile tornare a uno stato entropico precedente; è questo il significato più profondo dell'irreversibilità.

Le impossibilità enunciate con il secondo principio trovano nella variazione di entropia dell'universo la loro espressione quantitativa. Inoltre ΔS_u ha anche una implicazione energetica: l'energia che l'irreversibilità dei processi costringe a sprecare è proporzionale a ΔS_u secondo (12.30); quindi maggiore è ΔS_u, cioè più lontana la trasformazione da un possibile equilibrio, maggiore è lo spreco di energia.

La trasformazione reversibile di un sistema da uno stato A a uno stato B rappresenta lo svolgimento ottimale di un processo, in quanto $\Delta S_u = 0$. Nel fenomeno reale, anche se gli stati iniziale e finale del sistema sono gli stessi, sono differenti le situazioni fisiche all'interno del sistema e tra sistema e ambiente, per cui l'universo reale è diverso da quello ideale: in un certo senso ΔS_u misura questa differenza di comportamento.

12.11 ENTROPIA E PROBABILITÀ

Uno stato termodinamico è individuato dai valori delle coordinate termodinamiche; tuttavia esso può corrispondere a un numero molto grande di distribuzioni diverse della posizione e della velocità dei singoli elementi che lo compongono, come abbiamo già detto nel paragrafo 10.1. Ad esempio, ai fini della pressione esercitata da un gas su una parete, è indifferente che l'urto sulla parete avvenga da parte di una molecola o di un'altra, purché con la stessa velocità: le due configurazioni microscopiche sono diverse, lo stato termodinamico è lo stesso.

Possiamo pertanto affermare che *uno stato termodinamico corrisponde a N stati dinamici*: N è un numero molto grande che viene anche indicato con il nome di *probabilità termodinamica*. Si ammette che sia più probabile uno stato termodinamico a cui corrisponde un maggior numero di stati dinamici e che un sistema tenda a evolvere naturalmente verso stati più probabili.

Probabilità termodinamica

Appare allora evidente che deve esistere un legame tra entropia e probabilità termodinamica. Tale relazione è stata enunciata per la prima volta da Boltzmann:

$$S = k_B \ln N + \text{costante} \quad , \tag{12.31}$$

dove k_B è la costante di Boltzmann (11.8).

Il legame logaritmico si spiega intuitivamente tenendo conto che la probabilità è una grandezza moltiplicativa mentre l'entropia è additiva. Se un sistema si trova in uno stato a caratterizzato da un valore S_a dell'entropia e da una probabilità termodinamica N_a e un altro sistema in uno stato b caratterizzato da S_b e N_b, l'insieme dei due ha entropia $S_a + S_b$ e probabilità termodinamica $N_a N_b$. Se c'è una relazione tra probabilità ed entropia, deve essere tale da trasformare un prodotto in una somma: la funzione logaritmo ha questa proprietà.

Un esempio classico sul numero di stati dinamici corrispondenti a un certo stato termodinamico è quello che considera n particelle distinguibili suddivise in due scatole eguali. Nella tabella 12.1 indichiamo per alcuni piccoli valori di n i vari stati termodinamici differenti tra loro sulla base di quante particelle stanno a sinistra e quante a destra; N è il numero di stati dinamici corrispondenti a una certa partizione, cioè il numero di modi per realizzare questa partizione. Si vede che se n è il numero di particelle, $n + 1$ è il numero di stati termodinamici e 2^n il numero totale di stati dinamici.

Tabella 12.1

$n = 2$			$n = 6$			$n = 10$		
sinistra	destra	N	sinistra	destra	N	sinistra	destra	N
						0	10	1
0	2	1	0	6	1	1	9	10
1	1	2	1	5	6	2	8	45
2	0	1	2	4	15	3	7	120
			3	3	20	4	6	210
			4	2	15	5	5	252
			5	1	6	6	4	210
			6	0	1	7	3	120
						8	2	45
						9	1	10
						10	0	1

Il numero di stati dinamici corrispondenti a uno stato termodinamico con m particelle a destra e $n - m$ a sinistra è dato dalla formula di calcolo combinatorio

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

che rappresenta il numero di combinazioni distinte di n oggetti a gruppi di m. Per esempio, la ripartizione di 6 particelle con 2 in una scatola si può fare in $N = 15$ modi diversi:

$$N = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

N è massimo quando il numero di particelle è eguale nelle due scatole: *lo stato più probabile corrisponde all'equipartizione*.

Se con 6 particelle il rapporto tra la probabilità di una distribuzione uniforme e quella con una sola particella a destra (o a sinistra) è pari a 20/6, con 10 particelle sale a 52/10. Passando a 10^2, 10^3, ... particelle i rapporti di probabilità crescono molto

rapidamente. L'esempio si presta molto bene per spiegare la ripartizione di un gas tra due contenitori comunicanti: se il numero di molecole fosse piccolo si potrebbero osservare fluttuazioni di densità nei contenitori, ma con un numero di molecole che è dell'ordine del numero di Avogadro si osservano solo stati assai prossimi all'equilibrio. Gli stati lontani da quelli più probabili non sono impossibili, ma sono talmente improbabili che non riusciremo mai ad osservarli. Concludiamo che non solo il gas non si concentrerà mai spontaneamente in un solo contenitore, ma che nemmeno piccolissime variazioni di densità nei due contenitori saranno osservate.

Un gas che compie un'espansione libera si trova inizialmente nelle condizioni della prima riga della tabella 12.1; alla fine della trasformazione lo troviamo equipartito tra i due contenitori. Il sistema è isolato e la sua entropia è aumentata; d'altra parte la probabilità termodinamica ha raggiunto il massimo valore possibile. La situazione è in realtà più complessa: anche nello stato termodinamico iniziale il numero di stati dinamici è enorme, perché le molecole non sono ferme; tuttavia nell'espansione aumentano. Infatti la temperatura, e quindi l'energia cinetica media del moto molecolare, restano costanti, però aumenta il volume e quindi aumentano le configurazioni geometriche possibile, a parità di distribuzione delle velocità.

Passiamo a considerare un sistema gassoso non isolato, per esempio un gas che compie una trasformazione isocora: l'entropia del gas può aumentare o diminuire a seconda che venga ceduto o sottratto calore. In corrispondenza la probabilità termodinamica aumenta o diminuisce perché, pur restando costante il volume, cambia la velocità media molecolare con la temperatura.

Un diverso esempio di applicazione della (12.31) a un sistema isolato si ha nella determinazione delle differenze di probabilità termodinamica in uno scambio di calore tra due sorgenti. Supponiamo che il calore $Q = 1$ J passi da una sorgente a temperatura $T_2 = 301$ K a una sorgente a temperatura $T_1 = 300$ K. Sappiamo che

$$\Delta S_u = -\frac{Q}{T_2} + \frac{Q}{T_1} \cong 10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad .$$

Scriviamo questa stessa variazione di entropia come

$$\Delta S_u = (k_B \ln N_{fin} + \text{costante}) - (k_B \ln N_{in} + \text{costante}) = k_B \ln \frac{N_{fin}}{N_{in}}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{N_{fin}}{N_{in}} = \frac{\Delta S_u}{k_B} \cong 10^{18} \quad , \frac{N_{fin}}{N_{in}} \cong e^{10^{18}} \; :$$

tale è il rapporto tra la probabilità dello stato finale e la probabilità dello stato iniziale. L'osservazione del processo inverso, cioè passaggio spontaneo di calore da 300 K a 301 K è estremamente improbabile.

Allo stesso modo si potrebbe calcolare il rapporto di probabilità termodinamica tra stato finale e stato iniziale di una trasformazione adiabatica irreversibile generica: il gas si raffredda, ma si espande e la probabilità termodinamica aumenta.

Accenniamo infine a una sostanza che cambia fase. Premettiamo che in un cambiamento di fase si ha un mutamento della struttura interna: da un solido spazialmente ordinato si passa a un liquido che, pur presentando un certo ordine su piccole distanze, è spazialmente disordinato e a un gas che è completamente disordinato e in cui ogni molecola ha a disposizione un volume notevole (circa 1000 volte maggiore che nel liquido, se guardiamo il rapporto delle densità). Il numero di stati dinamici aumenta in corrispondenza. Anche l'entropia aumenta: per far passare una sostanza dalla fase solida alla fase liquida occorre fornire una certa quantità di

calore per unità di massa e ΔS è dato da (12.16); altrettanto succede nella evaporazione e nella sublimazione. Nei processi inversi l'entropia della sostanza diminuisce e diminuisce la probabilità termodinamica.

Con questi pochi esempi abbiamo messo qualitativamente in evidenza il legame tra entropia e probabilità termodinamica; abbiamo inoltre mostrato come si possa usare quantitativamente la (12.31) per una stima dei rapporti tra probabilità termodinamiche.

La relazione di Boltzmann, che costituisce il collegamento tra la termodinamica macroscopica e la trattazione statistica dei fenomeni termici, suggerisce che le impossibilità sancite dal secondo principio derivino da enormi differenze di probabilità. Da questo punto di vista potremmo correttamente utilizzare il termine *estremamente improbabile al posto di impossibile* per dare maggiore precisione concettuale agli enunciati del secondo principio (però la realtà sperimentale resta quella descritta).

La (12.31) lega l'aumento dell'entropia nell'evoluzione di un sistema isolato alla tendenza del sistema a occupare stati sempre più probabili. Spesso questo fatto viene brevemente riferito come tendenza di un sistema isolato dall'ordine al disordine; però è preferibile parlare di *tendenza verso stati termodinamici in cui è a disposizione il maggior numero di stati dinamici possibili*, il che non comporta necessariamente maggior disordine, a meno che non si intenda disordine come sinonimo di probabilità termodinamica.

Prendiamo per esempio in esame il seguente processo: un blocco di ghiaccio alla temperatura di fusione $T_0 = 273.15$ K si trova dentro un contenitore adiabatico e su di esso viene versata una piccola massa m d'acqua a temperatura $T_0 + \Delta T$, con ΔT piccolo. L'acqua cede al ghiaccio il calore $-Q = -m\,c\,\Delta T$ portandosi a T_0, una massa $m_g = Q/\lambda$ di ghiaccio fonde e alla fine abbiamo acqua e ghiaccio in equilibrio a T_0. La variazione di entropia dell'universo è

$$\Delta S_u = \Delta S_a + \Delta S_g = m\,c\,\ln\frac{T_0}{T_0+\Delta T} + \frac{m\,c\,\Delta T}{T_0} = m\,c\,\ln\frac{T_0}{T_0+\Delta T} + \frac{m_g\,\lambda}{T_0}$$

ed è positiva. Con $m = 0.1$ kg e $\Delta T = 10$ K risulta $m_g = 12.5 \cdot 10^{-3}$ kg, $\Delta S_a = -15.05$ J/K, $\Delta S_g = 15.33$ J/K, $\Delta S_u = 0.28$ J/K.

Inizialmente avevamo acqua a $T_0 + \Delta T$ e ghiaccio a T_0, alla fine c'è un po' più d'acqua a T_0 e un po' meno ghiaccio a T_0. Il numero di stati dinamici dell'acqua iniziale è diminuito perché è scesa la sua temperatura, però nella fusione del ghiaccio la massa m_g è passata in uno stato con maggiore probabilità termodinamica: l'aumento ΔS_u ci dice che il numero di stati dinamici è complessivamente aumentato, malgrado la temperatura di una parte del sistema sia diminuita e, per certi versi, il sistema finale sembri più ordinato di quello iniziale.

A maggior ragione potremmo avere dubbi sul passaggio ordine-disordine se la temperatura iniziale del ghiaccio fosse stata $T < T_0$ e l'acqua fosse solidificata, per cui alla fine avremmo avuto ghiaccio a temperatura T' compresa tra T e T_0, con un aumento di entropia.

Se però il concetto di maggior disordine a cui porterebbe un aumento di entropia dell'universo non viene legato, come intuitivamente si potrebbe pensare, al valor medio dell'energia molecolare, ma più in generale al numero di configurazioni dinamiche accessibili, che non dipende soltanto dalle velocità, la questione si risolve. In questo senso la (12.31) ci dà anche la corretta definizione di disordine molecolare.

La discussione su entropia e probabilità termodinamica porta alla conclusione che il secondo principio, e il principio di aumento dell'entropia che ad esso equivale, hanno origine dalla stessa composizione atomica della materia e dal fatto che gli

atomi, o le molecole, sono in movimento continuo e incontrollabile. Attraverso gli urti eventuali differenze tendono a scomparire e un sistema isolato si porta verso stati in cui grandezze macroscopiche come temperatura e pressione sono uniformi, segno della completa casualità del moto molecolare. In questi stati più probabili il numero di stati dinamici corrispondenti è massimo e di conseguenza è massima la nostra ignoranza sul piano della conoscenza meccanica del moto molecolare.

La stessa irreversibilità meccanica o termica ha origine da questa situazione: una volta raggiunto l'equilibrio è praticamente impossibile, a causa del gran numero di molecole presenti e del loro moto completamente disordinato, che si verifichino le condizioni per trasferire stabilmente energia da una parte del sistema ad un'altra, come sarebbe necessario per invertire una espansione libera o lo scambio di calore tra due corpi (da cui l'enunciato di Clausius). Si può anche intuire come, in tale contesto, sia praticamente impossibile anche la trasformazione integrale di calore in lavoro, ossia il passaggio completo da una forma di energia più disordinata a una meno disordinata (da cui l'enunciato di Kelvin-Planck).

12.12 CENNI SUL TERZO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Terzo principio della termodinamica

Il terzo principio della termodinamica stabilisce che la variazione di entropia associata ad una trasformazione reversibile di un sistema tende a zero al tendere a zero della temperatura termodinamica assoluta (enunciato di Nernst-Simon). Tale enunciato si applica in particolare ad ogni trasformazione isoterma reversibile durante la quale una variabile di stato intensiva del sistema cambia.

Esso venne proposto, in forma leggermente diversa, da Nernst nel 1906 in conseguenza di una serie di risultati sperimentali. La sua base teorica moderna richiede una formulazione statistico-quantistica dell'entropia ed esula dalla termodinamica classica.

L'entropia di un sistema in un dato stato si può scrivere in generale

$$S\ (T, X) = S\ (0, X) + \int_0^T \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}}$$

dove X è una coordinata termodinamica, ad esempio la pressione o il volume, che nel passaggio da 0 a T viene mantenuta costante; $S\ (0, X)$ è una costante che rappresenta il valore dell'entropia del sistema per $T = 0$. È stata avanzata l'ipotesi che per T tendente a zero non solo le variazioni dell'entropia, ma anche l'entropia stessa tenda a zero, per cui la costante $S\ (0, X)$ sarebbe nulla per qualsiasi sistema termodinamico allo zero assoluto. In tale ipotesi l'entropia in un generico stato A si scrive

$$S_A = \int_0^{T_A} \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} \quad ;$$

inoltre anche la costante di (12.31) risulta nulla e quindi, da $S = 0$ per $T = 0$, segue $N = 1$: nello stato termodinamico di zero assoluto qualsiasi sistema avrebbe un solo stato dinamico.

In effetti l'ipotesi di nullità dell'entropia per $T = 0$, che appare corretta in moltissimi casi, è valida per quei sistemi che sono in grado di raggiungere uno stato di equilibrio termodinamico interno anche a bassissima temperatura. Esistono però dei sistemi, come ad esempio il vetro di silice e alcuni solidi molecolari (H_2, N_2, CO_2) che presentano un valore dell'entropia diverso da zero anche per $T = 0$.

Per quanto riguarda il vetro di silice tale risultato è conseguenza del fatto che a

bassissime temperature la trasformazione del vetro a quarzo cristallino, dove le molecole di $Si\ O_2$ sono disposte ordinatamente (unico stato dinamico) è estremamente lenta ovvero improbabile. Il sistema mantiene lo stato amorfo, caratterizzato da un elevato numero di stati dinamici e pertanto $S\ (0, X\ )$ è maggiore di zero.

Nel caso dei solidi molecolari avviene che al di sotto di una certa temperatura la probabilità di rotazione delle molecole, che porterebbe ad uno stato finale caratterizzato dalla stessa orientazione di tutte le molecole (stato dinamico unico), è praticamente nulla; il sistema presenta molecole spazialmente ordinate, ma orientate completamente a caso e la sua entropia, anche per $T = 0$, è maggiore di zero.

Questi risultati, che contraddicono la validità generale dell'ipotesi $S\ (0) = 0$, non sono però in contrasto con l'enunciato del terzo principio.

Dal terzo principio segue il fatto che *i calori specifici devono tendere a zero al tendere a zero della temperatura*, risultato confermato sperimentalmente; così come è confermata un'altra deduzione, *la tendenza a zero per* $T \rightarrow 0$ *del coefficiente di dilatazione termica di ogni sostanza.*

Per quanto riguarda la proprietà dei calori specifici, osserviamo che il calore specifico molare è dato, nella forma generale, da

$$c_X = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_X = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_X = \left(\frac{\partial s}{\partial \ln T}\right)_X$$

dove X è la coordinata termodinamica che si mantiene costante ed $s = S/n$ l'entropia molare. Per $T \rightarrow 0$, $\ln T$ tende a meno infinito e $d\,s$, per il terzo principio, tende a zero. Pertanto c_X tende a zero. Ciò è confermato, come si è detto, sperimentalmente: a bassi valori di T, il calore specifico è proporzionale a T^3 per materiali non conduttori e a T per metalli.

La conseguenza forse più importante del terzo principio è l'impossibilità di raggiungere lo zero assoluto. Per $T \rightarrow 0$ la variazione di entropia associata ad una trasformazione isoterma reversibile tende a zero e quindi tende a zero il prodotto $T\,\Delta\,S$, che è il valore del calore scambiato. Pertanto, al tendere a zero della temperatura, diventa sempre più arduo sottrarre calore a un corpo. Il risultato che con un numero finito di processi non è possibile raggiungere lo zero assoluto viene assunto come enunciato del terzo principio della termodinamica, alternativo, ma equivalente a quello di Nernst-Simon.

12.13 POTENZIALI TERMODINAMICI

Dall'espressione infinitesima del primo principio (10.7) e da (12.21), scritta come $T\,d\,S \geq d\,Q$, abbiamo $d\,U + d\,W = d\,Q \leq T\,d\,S$ ovvero

$$d\,U + d\,W - T\,d\,S \leq 0 \quad . \tag{12.32}$$

Il segno di eguaglianza vale solo se la trasformazione è reversibile. Supponendo di poter esprimere il lavoro come $p\,d\,V$ otteniamo

$$d\,U + p\,d\,V - T\,d\,S \leq 0 \quad . \tag{12.33}$$

Questa relazione costituisce la base per la definizione di alcune funzioni di stato, dette *potenziali termodinamici*, che sono utili in particolari trasformazioni per trovare le condizioni di equilibrio di un sistema. Tutte queste funzioni hanno la stessa unità di misura di lavoro e energia.

Entalpia libera

Consideriamo un sistema che compie una trasformazione da uno stato A a uno stato B tali da avere temperatura e pressione eguali tra loro ed eguali, per esempio, a quelle dell'ambiente. Durante la trasformazione T e p dell'ambiente restano costanti mentre i corrispondenti valori del sistema sono in generale diversi, se la trasformazione non è reversibile.

Da (12.33), se p e T sono costanti, abbiamo

$$d(U + pV - TS) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad dG \leq 0 \quad ;$$

Entalpia libera o potenziale di Gibbs

$$G = U + pV - TS \tag{12.34}$$

è una funzione di stato, detta *entalpia libera o potenziale di Gibbs*, che ha la proprietà di decrescere per una trasformazione tra stati con la stessa temperatura e pressione. Pertanto *lo stato di equilibrio termodinamico di un sistema in condizioni isoterme e isobare è quello in cui l'entalpia libera del sistema è minima.* È chiaro che le condizioni suddette si riferiscono allo stato iniziale e finale, ma per il calcolo di G non importa come si svolge la trasformazione perché G è funzione di stato; è lecito dunque supporre p e T sempre costanti, come abbiamo fatto per ricavare $G_B \leq G_A$.

Energia libera

Si ripete l'argomento precedente, però in condizioni isoterme e isocore, cioè temperatura e volume eguali negli stati iniziale e finale. In questo caso da (12.33) abbiamo

$$d(U - TS) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad dF \leq 0 \quad ;$$

Energia libera o potenziale di Helmholtz

$$F = U - TS \tag{12.35}$$

è detta *energia libera o potenziale di Helmholtz. Il valore minimo dell'energia libera indica il raggiungimento dello stato di equilibrio termodinamico in condizioni isoterme e isocore.*

Nel caso resti costante solo la temperatura dell'ambiente esterno e quindi del sistema nello stato iniziale e finale, da (12.32)

$$dW \leq T\,dS - dU = -dF \quad ,$$

$$\boxed{W \leq -\Delta F} \quad . \tag{12.36}$$

In queste condizioni isoterme il lavoro massimo ottenibile è eguale alla diminuzione di energia libera, se la trasformazione è reversibile; altrimenti $-\Delta F$ è il limite superiore.

Si verifica subito che per una trasformazione isoterma reversibile di un gas ideale ($\Delta U = 0$) risulta

$$W = -\Delta F = -\Delta(U - TS) = T\,\Delta S$$

e da (12.29) si ritrova (11.23). Da (12.36) impariamo che in una isoterma irreversibile di un gas ideale calore e lavoro scambiati sono necessariamente minori che nella

reversibile avente gli stessi estremi.

Entalpia

Siano ora eguali, nello stato iniziale e finale, pressione ed entropia. Da (12.33)

$$d(U + p\,V) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad d\,H \leq 0 \quad ;$$

$$H = U + p\,V \tag{11.24}$$

è la funzione di stato *entalpia* già introdotta nel paragrafo 11.6. *Nei processi isobari e isoentropici lo stato di equilibrio termodinamico è quello di minima entalpia*. Da (12.34) e (11.24) abbiamo

$$G = H - T\,S \quad . \tag{12.37}$$

La principale proprietà dell'entalpia è che la sua variazione è eguale al calore scambiato in una trasformazione isobara, come già rilevato nel paragrafo 11.6. Infatti

$$d\,H = d\,U + p\,d\,V + V\,d\,p \quad \text{e se} \quad d\,p = 0 \quad d\,H = d\,U + p\,d\,V = d\,Q \quad .$$

Questo risultato si applica alla maggior parte delle reazioni chimiche, che avvengono in contenitori aperti, sotto la pressione atmosferica. In una reazione chimica lo stato iniziale si riferisce ai reagenti, lo stato finale ai prodotti e abbiamo

$$\Delta H = H_{\text{prod}} - H_{\text{reag}} \quad ;$$

se $\Delta H > 0$ la reazione è endotermica, il sistema assorbe calore, se $\Delta H < 0$ la reazione è esotermica, il sistema cede calore.

Anche i cambiamenti di fase avvengono a pressione costante e le variazioni di entalpia sono quindi eguali ai calori scambiati. Prendiamo come riferimento un processo di evaporazione, rappresentato dal tratto orizzontale di isoterma nella figura 11.24, a cui partecipano n moli di sostanza. Il calore latente è

$$\lambda = \frac{H_2 - H_1}{n} = h_2 - h_1 \quad ,$$

dove h è l'entalpia molare (nel seguito indicheremo con la lettera minuscola i valori molari delle varie funzioni di stato e delle variabili estensive); gli indici 1 e 2 si riferiscono alle due fasi.

La variazione di entropia è

$$S_2 - S_1 = \frac{n\,\lambda}{T} = \frac{n\,(h_2 - h_1)}{T} \quad \Rightarrow \quad s_2 - s_1 = \frac{\lambda}{T} = \frac{h_2 - h_1}{T} \quad .$$

Da questa e da (12.37)

$$h_1 - T\,s_1 = h_2 - T\,s_2 \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2 \quad :$$

durante l'evaporazione (o la condensazione) l'entalpia libera molare resta costante. Il risultato è in accordo con la proprietà di G: durante la trasformazione p e T sono costanti

e tutti gli stati sono di equilibrio, in essi G ha il suo valore minimo e non può cambiare.

Se consideriamo lo stesso cambiamento di fase a temperatura $T + dT$ e pressione $p + dp$, deve essere

$$g_1 + dg_1 = g_2 + dg_2 \quad \Rightarrow \quad dg_1 = dg_2 \quad .$$

Da (12.34) per una trasformazione infinitesima reversibile

$$dG = dU + p\,dV + V\,dp - T\,dS - S\,dT = V\,dp - S\,dT$$

perché $dU + p\,dV = T\,dS$. Quindi, sempre per mole,

Formula di Clapeyron

$$v_1\,dp - s_1\,dT = v_2\,dp - s_2\,dT \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} = \frac{\lambda}{T\,(v_2 - v_1)} \quad .$$

Abbiamo così ritrovato dalle proprietà dell'entalpia libera durante i cambiamenti di fase la formula di Clapeyron (11.31).

Per completezza, notiamo altri due risultati che si ottengono da (12.32). Se nello stato iniziale e stato finale entropia e volume hanno lo stesso valore, è $dU \leq 0$: in condizioni isoentropiche e isocore lo stato di equilibrio è individuato dal minimo dell'energia interna.

Se U e V sono costanti, con il che $dQ = 0$, cioè la trasformazione è adiabatica, $T\,dS \geq 0$ e ritroviamo il principio di aumento dell'entropia per i sistemi isolati, come deve essere avendo introdotto in partenza (12.21).

Riassumendo, l'introduzione dei potenziali termodinamici è utile nella ricerca degli stati di equilibrio termodinamico dei sistemi che compiono le trasformazioni descritte; si tratta di casi comuni visto che spesso una trasformazione naturale si svolge in contatto con l'ambiente che è a temperatura e pressione costanti.

Nell'evoluzione verso lo stato di equilibrio abbiamo individuato quali funzioni decrescono, indicando così il verso del fenomeno: precisamente

F		T e V	
H	decresce in condizioni di	S e p	costanti
G		T e p	

La decrescita si arresta nello stato di equilibrio quando il potenziale termodinamico considerato ha raggiunto il valore minimo.

Il termine potenziale termodinamico viene usato per queste funzioni che servono a individuare gli stati di equilibrio di un sistema termodinamico in analogia con la terminologia meccanica: infatti la condizione di equilibrio stabile di un sistema meccanico corrisponde al valore minimo dell'energia potenziale.

Nota. Entalpia e reazioni chimiche.

La maggior parte delle reazioni chimiche avviene in condizioni di pressione esterna costante, e pari alla pressione atmosferica, per cui il calore complessivamente scambiato dal sistema formato dai reagenti e dai prodotti di reazione, è eguale alla variazione di entalpia tra stato finale e iniziale:

$$Q = \Delta H = H \text{ (prodotti di reazione)} - H \text{ (reagenti)}.$$

Quando il calore è ceduto all'ambiente ΔH è negativa e si parla di *reazione esotermica* (caso tipico sono i processi di combustione), quando invece il calore è assorbito dal sistema ΔH è positiva e la *reazione* si dice *endotermica* (come ad esempio avviene nella scissione di un composto nei suoi componenti).

Reazione esotermica

Reazione endotermica

Il processo di combustione del metano in presenza di ossigeno porta alla produzione di anidride carbonica e vapor d'acqua:

$$C H_4 + 2 O_2 \rightarrow CO_2 + 2 H_2O \quad .$$

Per ogni mole di metano che brucia (si tratta di 16 grammi) vengono ceduti all'ambiente $802 \cdot 10^3$ J sotto forma di calore e quindi $(\Delta H)_n = -802 \cdot 10^3$ J/mole; nella combustione di n moli di metano la variazione di entalpia è $n\,(\Delta H)_n$, essendo l'entalpia una grandezza estensiva. Se la reazione viene fatta avvenire in senso contrario, produzione di metano e ossigeno da anidride carbonica e vapor d'acqua, la variazione di entalpia è opposta, il processo è endotermico.

Quest'ultima proprietà discende dal fatto che l'entalpia è una funzione di stato; un'altra conseguenza molto importante è che *la variazione di entalpia in una reazione chimica non dipende da come avviene la reazione, cioè direttamente o per stadi intermedi, risultato noto anche come legge di Hess*. Ad esempio, se una reazione può avvenire direttamente dallo stato 1 allo stato 3 oppure con uno stadio intermedio, dallo stato 1 allo stato 2 e poi dallo stato 2 allo stato 3, abbiamo

Legge di Hess

$$\Delta H_{1,3} = \Delta H_{1,2} + \Delta H_{2,3} \quad .$$

L'aspetto pratico di questa relazione è che può essere utilizzata come equazione in una incognita per calcolare una delle tre variazioni di entalpia, note le altre due, come chiariamo con l'esempio seguente.

Quando una mole di carbonio brucia producendo anidride carbonica $(\Delta H)_{n,1} = -393.5 \cdot 10^3$ J/mole, quando invece il risultato è ossido di carbonio, $(\Delta H)_{n,2} = -110.5 \cdot 10^3$ J/mole. Scriviamo questi processi:

$$2 C + 2 O_2 \rightarrow 2 C O_2 \quad , \quad 2 C + O_2 \rightarrow 2 C O$$

$$2 C O + O_2 \rightarrow 2 C O_2 \quad .$$

Complessivamente al processo partecipano due moli di carbonio e due di ossigeno con la formazione di due moli di anidride carbonica, però in un caso avviene la formazione intermedia di ossido di carbonio. Dalla legge di Hess

$$-2 \cdot 393.5 \cdot 10^3 = -2 \cdot 110.5 \cdot 10^3 + \Delta H_{2,3} \quad .$$

$$\Rightarrow \Delta H_{2,3} = -566 \cdot 10^3 \text{ J} \quad .$$

Abbiamo così ricavato il risultato che nella combustione di una mole di ossido di carbonio che porta a una mole di anidride carbonica vengono ceduti all'ambiente $283 \cdot 10^3$ J, ovvero che per scindere l'anidride carbonica in ossido di carbonio e ossigeno occorre cedere al sistema $283 \cdot 10^3$ J per mole di $C O_2$.

Nella reazione appena descritta si parte da due elementi, carbonio e ossigeno, e si forma il composto anidride carbonica; la variazione di entalpia, in questo e nei casi analoghi, si chiama anche *entalpia* o *calore di formazione* (quindi per $C O_2$ l'entalpia di formazione è $-393.5 \cdot 10^3$ J/mole). Si assume nulla per definizione l'entalpia di formazione degli elementi.

Calore di formazione

Entalpia di formazione

Il valore dell'entalpia di formazione in una reazione non dipende solo dalla reazione specifica, ma anche dalla temperatura e pressione a cui è stata realizzata.

Ciò è conseguenza del fatto che lo stato di un sistema dipende dalle coordinate termodinamiche p e T e l'entalpia è una funzione di stato. Pertanto i valori ΔH di varie reazioni possono essere confrontati solo se misurati nelle medesime condizioni di temperatura e pressione. A tal fine sono state fissate alcune condizioni arbitrarie di temperatura e pressione, che sono definite come *condizioni standard*, cioè pressione atmosferica e temperatura di 298 K (= 25°C).

In tabella 12.2 riportiamo le entalpie di formazione per alcuni composti; ne illustriamo l'uso con un esempio. Nella reazione in cui il carbonato di calcio dà ossido di calcio e anidride carbonica,

$$Ca\,C\,O_3 \rightarrow Ca\,O + C\,O_2 \quad ,$$

le entalpie di formazione sono, rispettivamente, $-1207 \cdot 10^3$, $-635.5 \cdot 10^3$, $-393.5 \cdot 10^3$ J/mole. Pertanto l'entalpia di formazione dei prodotti di reazione è $-1029 \cdot 10^3$ J. Nel passaggio dallo stato iniziale allo stato finale l'entalpia varia di

$$\Delta H = (-1029 \cdot 10^3) - (-1207 \cdot 10^3) = 178 \cdot 10^3 \text{ J} \quad .$$

Tabella 12.2 - Entalpie standard di formazione.

Sostanza	ΔH (J/mole)	Sostanza	ΔH (J/mole)
$AgCl$ (s)	$-127.00 \cdot 10^3$	HNO_3 (l)	$-173.20 \cdot 10^3$
Al_2O_3 (s)	$-166.98 \cdot 10^4$	H_2SO_4 (l)	$-811.32 \cdot 10^3$
CO (g)	$-110.50 \cdot 10^3$	KCl (s)	$-435.89 \cdot 10^3$
CO_2 (g)	$-393.50 \cdot 10^3$	NH_3 (g)	$-461.90 \cdot 10^2$
CH_4 (g)	$-748.48 \cdot 10^2$	NO (g)	$903.70 \cdot 10^2$
C_2H_2 (g)	$226.75 \cdot 10^3$	NO_2 (g)	$338.00 \cdot 10^2$
C_2H_4 (g)	$522.84 \cdot 10^2$	N_2O (g)	$816.00 \cdot 10^2$
$CaCO_3$ (s)	$-120.71 \cdot 10^4$	$NaCl$ (s)	$-411.00 \cdot 10^3$
$CaCl_2$ (s)	$-795.00 \cdot 10^3$	$NaOH$ (s)	$-426.80 \cdot 10^3$
CaO (s)	$-635.50 \cdot 10^3$	Na_2SO_4 (s)	$-138.45 \cdot 10^4$
Cr_2O_3 (s)	$-113.97 \cdot 10^4$	PbO (s)	$-219.20 \cdot 10^3$
FeO (s)	$-271.90 \cdot 10^3$	SO_2 (g)	$-296.90 \cdot 10^3$
Fe_2O_3 (s)	$-822.20 \cdot 10^3$	SO_3 (g)	$-395.20 \cdot 10^3$
H_2O (g)	$-241.80 \cdot 10^3$	$SiCl_4$ (l)	$-640.10 \cdot 10^3$
H_2O (l)	$-285.90 \cdot 10^3$	SiO_2 (s)	$-910.90 \cdot 10^3$
HCl (g)	$-923.00 \cdot 10^2$	ZnO (s)	$-348.00 \cdot 10^3$

L'entalpie di formazione degli elementi come, ad esempio Ag (s), Al (s), C $(s, grafite)$, Ca (s), Cl_2 (g), Cr (s), Fe (s), H_2 (g), K (s), N_2 (g), Na (s), O_2 (g), Pb (s), S (s), Si (s), Zn (s) sono nulle.

Le lettere s, l, g stanno per solido, liquido, gas.

La reazione è dunque endotermica e avviene solo se viene ceduto dall'ambiente al sistema il calore $178 \cdot 10^3$ J/mole.

In generale dunque la variazione di entalpia in una reazione chimica può essere scritta

$$\Delta H = \Sigma_f H_f - \Sigma_i H_i \quad ,$$

dove $\Sigma_f H_f$ indica la somma delle entalpie di formazione dei composti nello stato finale, cioè dei prodotti di reazione, e $\Sigma_i H_i$ la somma delle entalpie di formazioni dei composti nello stato iniziale, cioè dei reagenti; se un reagente o un prodotto di reazione è un elemento la corrispondente entalpia di formazione si assume nulla, come detto.

ESEMPIO 12.6

Si calcoli la variazione di entalpia per le seguenti reazioni:

a) $2NO\ (g) + O_2\ (g) \rightarrow 2NO_2\ (g)$

b) $Na\ OH\ (s) + HCl\ (g) \rightarrow Na\ Cl\ (s) + H_2O\ (g)$

c) $H_2\ (g) + \frac{1}{2}\ O_2\ (g) \rightarrow H_2O\ (l)$

d) $6CO_2\ (g) + 6\ H_2O\ (l) \rightarrow C_6\ H_{12}\ O_6\ (s) + 6\ O_2\ (g)$ (reazione di fotosintesi), sapendo che ΔH del glucosio $C_6\ H_{12}\ O_6\ (s)$ è $-\ 127.30 \cdot 10^4$ J/mole.

a) Le entalpie di formazione per N O, O_2 e N O_2 sono rispettivamente 90.4, 0, 33.8 k J/mole.

$$\Delta H = (2 \cdot 33.8 - 2 \cdot 90.4)\ \text{k J} = -\ 112.2\ \text{k J} \quad .$$

In condizioni standard la reazione è esotermica.

b) Le entalpie di formazione per Na O H, H Cl, Na C l e H_2 O sono rispettivamente – 426.8, – 92.30, – 411.00, – 241.8 k J/mole.

$\Delta H = (-\ 411.00 - 241.80) - (-\ 426.80 - 92.30)$ k J =

$= -\ 133.70$ k J.

In condizioni standard la reazione è esotermica.

c) Le entalpie di formazione per H_2, O_2 ed H_2 O (l) sono rispettivamente 0, 0, – 285.9 k J/mole.

$$\Delta H = -\ 285.9\ \text{k J} \quad .$$

In condizioni standard la reazione è esotermica.

d) Le entalpie di formazione per C O_2, H_2 O (l), $C_6\ H_{12}\ O_6$ e O_2 sono rispettivamente – 393.5, – 285.9, – 1273.0, 0 k J/mole.

$\Delta H = -\ 1273 - (-\ 6 \cdot 393.5 - 6 \cdot 285.9)$ k J = + 2803.4 k J.

La reazione è endotermica con un elevato valore del calore di formazione per mole di glucosio. La grande quantità di energia richiesta è fornita dalla luce solare.

L'ultima relazione scritta è molto utile per determinare la variazione di entalpia bale se sono note le entalpie di formazione oppure per calcolare l'entalpia di formazione di un particolare composto se sono note le entalpie di formazione degli altri partecipanti alla reazione e la variazione globale di entalpia. In tutti questi calcoli bisogna prestare attenzione ai numeri di moli delle varie sostanze, cioè ai coefficienti che compaiono davanti ai simboli dei composti.

Osserviamo infine che abbiamo trattato qui per la prima volta un sistema la cui composizione non resta costante durante la trasformazione; lo stato iniziale è di equilibrio termodinamico (per questo basta immaginare separati i reagenti, ciascuno in equilibrio alla data temperatura e pressione) e lo stesso si può dire per lo stato finale, però la composizione del sistema è cambiata, pur restando la stessa la massa totale. Riprenderemo questo argomento da un punto di vista generale nel paragrafo 12.18.

12.14 PROPRIETÀ GENERALI DEI SISTEMI $p\ V\ T$

Le leggi della termodinamica che abbiamo finora esposto, così come le definizioni delle grandezze termodinamiche, si applicano a qualsiasi sistema; in realtà, per esemplificarle e capirne il significato in applicazioni pratiche, ci siamo riferiti a trasformazioni in sistemi composti da una o più sostanze pure: un blocco di metallo,

una massa di liquido e, soprattutto, un certo numero di moli di gas, quasi sempre ideale.

Questi sistemi sono descrivibili tramite le coordinate termodinamiche p, V, T, legate tra loro da un'equazione di stato, caratteristica del sistema (si veda il paragrafo 10.2); essi sono chiamati sistemi semplici o sistemi $p\,V\,T$.

Una grandezza termodinamica funzione di stato, come l'energia interna, l'entropia e i potenziali termodinamici, è funzione di una qualsiasi coppia delle variabili di stato p, V, T e può a sua volta essere considerata una coordinata termodinamica: abbiamo visto un esempio nei diagrammi $T\,S$ del paragrafo 12.6.

All'equazione di stato scritta nella forma esplicita $V = V(p, T)$ si può applicare il teorema del differenziale totale (appendice A):

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT \quad . \tag{12.38}$$

La lettera scritta accanto al simbolo di derivata parziale ricorda esplicitamente che la derivata è eseguita mantenendo costante quella variabile, ad esempio derivata del volume rispetto alla pressione mantenendo costante la temperatura.

I coefficienti della (12.38) sono legati a proprietà elastiche e termiche del sistema. Precisamente ricordiamo dal paragrafo 8.5 che si definisce *modulo di compressibilità isoterma* la grandezza β tale che

$$\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \quad , \tag{8.7}$$

Coefficiente di compressibilità isoterma

ovvero tale che il suo reciproco κ (*coefficiente di compressibilità isoterma*) dà il valore assoluto della variazione relativa del volume con la pressione a temperatura costante (a un aumento della pressione corrisponde sempre una diminuzione di volume, per cui β è sempre positiva).

Coefficiente di dilatazione cubica

Inoltre abbiamo definito nel paragrafo 10.10 il *coefficiente di dilatazione cubica*

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad , \tag{10.24}$$

che dà la variazione relativa di volume con la temperatura a pressione costante; α può essere sia positivo (nella maggior parte delle sostanze) che negativo, come avviene nell'acqua tra 0°C e 4°C (figura 10.15).

Alcuni valori di α e β sono riportati rispettivamente nelle tabelle 10.9 e 8.4.

Dalle definizioni (8.7) e (10.24) ricaviamo che

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{V}{\beta} \quad , \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha V \tag{12.39}$$

e quindi la (12.38) può essere scritta

$$dV = -\frac{V}{\beta}\,dp + \alpha V\,dT \quad . \tag{12.40}$$

Da questa si ottengono le relazioni

$$dp = -\frac{\beta}{V}\,dV + \alpha\beta\,dt \quad , \tag{12.41}$$

$$dT = \frac{1}{\alpha V}\, dV + \frac{1}{\alpha \beta}\, dp \quad , \tag{12.42}$$

e per i coefficienti abbiamo espressioni analoghe a (12.39):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{\beta}{V} \quad , \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \alpha \beta \quad , \tag{12.43}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{1}{\alpha V} \quad , \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{1}{\alpha \beta} \quad . \tag{12.44}$$

In pratica bastano le due grandezze α e β per caratterizzare le relazioni tra le variazioni infinitesime di volume, pressione e temperatura. Sia α che β sono in generale funzioni delle coordinate termodinamiche, però nei solidi e nei liquidi la dipendenza è piuttosto debole per cui possono essere considerate costanti in intervalli non molto ampi di variabilità delle coordinate.

Assumendo α e β costanti la (12.40) può essere facilmente integrata con il risultato

$$V_B / V_A = e^{\alpha (T_B - T_A) - \frac{1}{\beta}(p_B - p_A)}$$

se A e B sono gli stati iniziale e finale; similmente si possono integrare (12.41) e (12.42).

Ricordiamo infine, con riferimento alla figura 11.24, che al punto critico l'isoterma di un fluido reale presenta un flesso a tangente orizzontale e quindi $(\partial p / \partial V)_T = 0$. Ne segue che in un fluido al *punto critico*,

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{(\partial p/\partial T)_V}{V\,(\partial p/\partial V)_T} = \infty \quad ,$$

$$\beta = \left[-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right]^{-1} = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0 \quad ,$$

avendo usato i risultati dell'appendice A per le derivate parziali.

ESEMPIO 12.7

Calcolare i valori di α e β in un gas ideale.

Soluzione

In un gas ideale $p V = n R T$ per cui

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{n R}{p} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{n R}{p V} = \frac{1}{T} \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{n R T}{p^2} \Rightarrow \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T =$$

$$= \frac{n R T}{p^2 V} = \frac{1}{p} \quad .$$

Quindi $\alpha = 1/T$, $\beta = p$: le relative proprietà termiche ed elastiche sono determinate direttamente dalle coordinate termodinamiche temperatura e pressione. Pertanto i gas reali, sufficientemente lontani dal punto di liquefazione, hanno praticamente gli stessi coefficienti di dilatazione cubica e di compressibilità isoterma.

ESEMPIO 12.8

Una data massa di acqua (o mercurio o rame) si trova alla temperatura ambiente e alla pressione di 10^5 Pa (= 1 bar ≈ 1 atm); essa viene riscaldata a volume costante facendo aumentare la temperatura di 1 K. Calcolare il corrispondente aumento di pressione.

Soluzione
A volume costante $dV = 0$ e da (12.41) si ha

$$dp = \alpha\beta\, dT \Rightarrow \Delta p = \alpha\beta\,\Delta T$$

assumendo α e β costanti. In base ai valori noti delle costanti abbiamo

acqua $\Delta p = 1.8 \cdot 10^{-4} \cdot 2.1 \cdot 10^{9}\,\Delta T = 3.8 \cdot 10^{5}\,\Delta T$,

mercurio $\Delta p = 1.8 \cdot 10^{-4} \cdot 2.8 \cdot 10^{10}\,\Delta T = 5.0 \cdot 10^{6}\,\Delta T$,

rame $\Delta p = 1.7 \cdot 10^{-5} \cdot 1.4 \cdot 10^{11}\,\Delta T = 2.4 \cdot 10^{6}\,\Delta T$,

e, per un aumento di temperatura di 1 K, rispettivamente

$\Delta p = 3.8$ bar , 50 bar , 24 bar .

Questo è l'aumento di pressione sulle pareti del contenitore che mantiene costante il volume.

ESEMPIO 12.9

Consideriamo le stesse sostanze dell'esempio 12.8, che occupano a pressione atmosferica un volume $V = 10^{-3}$ m^3, e sottoposte, in modo isotermo reversibile, a una variazione di pressione $\Delta p = 100$ bar $= 10^7$ Pa. Calcolare il lavoro fornito nel processo.

Soluzione
Essendo la trasformazione reversibile $dW = p\,dV$; inoltre da (12.40) se $dT = 0$ si ha $dV = -V\,dp/\beta$. Pertanto

$$W = \int p\,dV = -\int \frac{V}{\beta}\, p\,dp \quad .$$

Assumiamo nel calcolo del lavoro costante β e trascurabile la variazione di V (considerati i grandi valori del modulo di compressibilità); allora

$$W = -\frac{V}{2\beta}\,(p_B^2 - p_A^2) \cong -\frac{V}{2\beta}\, p_B^2$$

Il segno meno significa che il lavoro è fatto sul sistema. In modulo:

acqua $W = \dfrac{10^{-3}}{2.1 \cdot 10^{9}}\,\dfrac{10^{14}}{2} = 23.8$ J ,

mercurio $W = \dfrac{10^{-3}}{2.8 \cdot 10^{10}}\,\dfrac{10^{14}}{2} = 1.8$ J ,

rame $W = \dfrac{10^{-3}}{1.4 \cdot 10^{11}}\,\dfrac{10^{14}}{2} = 0.4$ J .

Le rispettive variazioni di volume ($\Delta V = V\,\Delta p/\beta$ in modulo) sono $4.8 \cdot 10^{-6}$ m^3, $3.6 \cdot 10^{-7}$ m^3, $0.8 \cdot 10^{-7}$ m^3, effettivamente molto piccole; l'ordine di grandezza di $\Delta V/V$ va da 10^{-3} a 10^{-4}.

ESEMPIO 12.10

Per un volume $V = 10^{-3}$ m^3 delle stesse sostanze degli esempi 12.8 e 12.9, a pressione atmosferica e temperatura ambiente, calcolare il lavoro in una trasformazione isobara in cui la temperatura aumenti di $\Delta T = 10$ K.

Soluzione
In condizioni isobare $dp = 0$ e da (12.40) $dV = \alpha V\,dT$; quindi

$$W = \int p\,dV = \alpha V p\,\Delta T$$

assumendo α e V costanti per gli stessi motivi dell'esempio 12.9. Abbiamo:

acqua $W = 1.8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{5} \cdot 10 = 0.18$ J ,

mercurio come per l'acqua ,

rame $W = 1.7 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{5} \cdot 10 = 0.02$ J .

Anche in questo caso le variazioni di volume sono molto piccole, rispettivamente $1.8 \cdot 10^{-6}$ m^3 (acqua e mercurio), $1.7 \cdot 10^{-7}$ m^3 (rame).

Il teorema del differenziale totale si può applicare anche alla variazione di una funzione di stato. Per l'energia interna abbiamo tre possibili espressioni,

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad , \tag{12.45}$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T dp \quad , \tag{12.46}$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p dV \quad ,$$

a seconda della coppia di variabili che si sceglie per esprimere la variazione infinitesima da uno stato di equilibrio ad un altro infinitamente vicino. Delle sei derivate due sole sono indipendenti.

In una trasformazione a volume costante il lavoro è nullo, dal primo principio $dQ = dU$ e si ottiene per il *calore specifico molare a volume costante*

$$c_V = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad . \tag{12.47}$$

Calore specifico molare a volume costante

Se si considera la massa invece del numero di moli basta sostituire m al posto di n e fare attenzione alle unità di misura.

Da (12.47) e (12.45) segue che la variazione di energia interna si può scrivere

$$dU = n c_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad : \tag{12.48}$$

in generale l'energia interna di un sistema $p\,V\,T$ dipende dalla temperatura e dal volume, solo in un gas ideale $(\partial U / \partial V)_T = 0$.

Il calore scambiato in un processo reversibile infinitesimo risulta

$$dQ = dU + p\,dV = n c_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV \quad . \tag{12.49}$$

Consideriamo ora la funzione di stato *entalpia*, già introdotta nel paragrafo 12.13 e precedentemente, per i gas ideali, nel paragrafo 11.6. In un processo reversibile, utilizzando (11.24), abbiamo

$$dQ = dU + p\,dV = d(H - pV) + p\,dV = dH - p\,dV - V\,dp + p\,dV$$

e quindi

$$dQ = dH - V\,dp \quad , \tag{12.50}$$

formula strutturalmente analoga a $dQ = dU + p\,dV$ e con gli stessi limiti di validità. Se la pressione resta costante nella trasformazione la variazione di entalpia eguaglia il calore scambiato e questa proprietà, già ricavata nel paragrafo 12.13, resta valida anche se la trasformazione isobara è irreversibile.

Da $dQ = dH$ a pressione costante segue per il *calore specifico molare a pressione costante*

Calore specifico molare a pressione costante

$$c_p = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \qquad (12.51)$$

Scrivendo la variazione di entalpia in funzione di temperatura e pressione

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp$$

e servendoci di (12.51) otteniamo

$$dH = n c_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp \qquad (12.52)$$

per la quale vale lo stesso commento fatto a proposito di (12.48): in generale l'entalpia di un sistema $p\,V\,T$ è funzione di due variabili, solo per un gas ideale $(\partial H / \partial p)_T = 0$.

La (12.52), inserita nella (12.50), permette di scrivere il calore scambiato in un processo reversibile infinitesimo:

$$dQ = n c_p dT + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right] dp \quad , \qquad (12.53)$$

espressione alternativa a (12.49).

Riprendiamo ora la definizione (11.24) di entalpia:

$$dH = d(U + pV) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dV + d(pV) \quad ,$$

avendo usato (12.45). Per una trasformazione isobara

$$n c_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$= n c_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad .$$

Ricorriamo a (10.24) e otteniamo

$$c_p - c_V = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \alpha V \quad . \qquad (12.54)$$

Sottraendo (12.49) da (12.53) e utilizzando (12.54) e (12.42) si ottiene anche

$$c_p - c_V = -\frac{1}{n}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right] \alpha\beta \quad . \qquad (12.55)$$

ESEMPIO 12.11

Si consideri un gas reale per cui valgono le proprietà

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad , \quad U = cT - \frac{a}{V} + \text{costante}$$

con riferimento a una mole; a, b, c, R sono costanti. Calcolare c_p e c_V (l'espressione di U verrà giustificata successivamente).

Soluzione

Ricorriamo a (12.47) e (12.54), oltre che a (10.24):

$$c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_T = c$$

$$c_p - c_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \alpha V = \left(\frac{a}{V^2} + p\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p =$$

$$= \frac{RT}{V - b}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

La derivata del volume rispetto alla temperatura a pressione costante si calcola esplicitando dall'equazione di stato la relazione tra V e T e risulta

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R V^2}{p V^2 + \frac{2ab}{V} - a} .$$

In definitiva si ottiene

$$c_p - c_V = R \frac{p + \frac{a}{V^2}}{p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}} = \frac{R}{1 - \frac{2a(V - b)^2}{RTV^3}}$$

e si vede che la differenza tra i calori specifici dipende dai valori delle coordinate termodinamiche. Solo se $a = b = 0$ $c_p - c_V = R$.

Dopo energia interna ed entalpia prendiamo in esame l'entropia. Possiamo scrivere, con il solito formalismo,

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \quad ,$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp \quad .$$

Dalla definizione $dS = dQ / T$ abbiamo

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \frac{n c_V}{T}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \frac{n c_p}{T}$$

quindi

$$dS = n c_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \quad , \tag{12.56}$$

$$dS = n c_p \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp \quad . \tag{12.57}$$

Se analizziamo l'insieme dei risultati che abbiamo ottenuto, vediamo che nelle varie formule compaiono le derivate dell'energia interna, dell'entalpia o dell'entropia rispetto alle coordinate p, V, T e i parametri α e β, a loro volta espressi tramite derivate del volume rispetto a temperatura e pressione. Per potere eseguire un calcolo effettivo occorre dunque conoscere l'equazione di stato e le espressioni esplicite delle funzioni di stato; dal confronto tra le pressioni teoriche e le misure sperimentali relative a c_p, c_V e al legame tra p, V, e T otterremo così sia una verifica della teoria che ha fornito le espressioni esplicite che la determinazione di eventuali parametri. L'esempio 12.11 mostra appunto questo modo di procedere. Altrimenti è dalle misure sperimentali che si ricavano valori di $(\partial U/\partial T)_V$ e $(\partial U/\partial V)_T$ e si cerca di trovare un'espressione fenomenologica di $U\ (V, T)$, oppure di $U\ (p, T)$ se sono state sviluppate le formule in funzione di questa coppia di variabili.

12.15 RELAZIONI DI MAXWELL

Il formalismo del paragrafo precedente può essere ulteriormente sviluppato ricorrendo alle proprietà delle forme differenziali lineari ricordate nel terzo paragrafo dell'appendice A.

Le coordinate termodinamiche direttamente misurabili p, V, T e le funzioni di stato U, S, H, F, G, a loro volta possibili coordinate termodinamiche anche se non direttamente misurabili, formano un insieme di otto variabili ciascuna delle quali può essere espressa come funzione di qualsiasi altre due, essendo appunto due sole le variabili indipendenti, come conseguenza dell'esistenza di una equazione di stato.

Possiamo pertanto scrivere sempre le relazioni

$$f = f(x, y) \quad , \quad df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy \quad ;$$

poiché sappiamo che df è un differenziale esatto, cioè che la forma differenziale lineare è integrabile con risultato univoco, deve valere la condizione di integrabilità

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \tag{12.58}$$

che costituisce un vincolo aggiuntivo per le nostre grandezze.

Riprendiamo le definizioni dei *potenziali termodinamici*

$$H = U + pV \quad , \quad F = U - TS \quad , \quad G = H - TS$$

e il primo principio $dU = dQ - dW$ che scriviamo

$$dU = T\,dS - p\,dV \quad , \tag{12.59}$$

facendo riferimento a una trasformazione infinitesima reversibile (ma il risultato non dipende dalla trasformazione). Deduciamo allora

$$dH = d(U + pV) = dU + p\,dV + V\,dp = T\,dS - p\,dV + p\,dV + V\,dp$$

ovvero

$$dH = T\,dS + V\,dp \quad , \tag{12.60}$$

che poteva essere dedotta direttamente anche da (12.50). Analogamente

$$dF = d\,(U - TS) = T\,dS - p\,dV - T\,dS - S\,dT \quad ,$$

$$dF = -S\,dT - p\,dV \tag{12.61}$$

$$dG = d\,(H - TS) = T\,dS + V\,dp - T\,dS - S\,dT \quad ,$$

$$dG = -S\,dT + V\,dp \quad . \tag{12.62}$$

Le espressioni trovate per le variazioni infinitesime di U, H, F, G, mostrano la dipendenza dalle variazioni di una coppia delle variabili considerate (p, V, T, S), che sono dette naturali; per l'energia interna sono ad esempio variabili naturali S e V, per l'entalpia S e p.

Confrontando (12.59), (12.60), (12.61), (12.62) con l'espressione generale

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

si ottiene

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p \quad , \tag{12.62}$$

$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \quad , \tag{12.63}$$

$$V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T \quad , \tag{12.64}$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \quad : \tag{12.65}$$

Le variabili naturali si possono esprimere come derivate delle funzioni U, H, F, G.

Una conseguenza immediata di (12.65) è la possibilità di stabilire una relazione diretta tra U e F e tra H e G:

$$U = F + TS = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -T^2\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)\right]_V \quad ,$$

$$H = G + TS = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -T^2\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{G}{T}\right)\right]_p \quad .$$

La rappresentazione tramite le variabili naturali ha un notevole vantaggio concettuale: infatti la conoscenza per una data sostanza della relazione funzionale $U = U(S, V)$, oppure $H(S, p)$, $F(T, V)$, $G(T, p)$, costituisce una descrizione più completa di quella fornita dall'usuale relazione tipo $V = V(p, T)$.

Per esempio se è nota $U(S, V)$ si calcolano subito temperatura e pressione da

(12.62) e (12.63),

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \quad , \quad p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S \quad ,$$

e così si stabilisce il legame tra T, p e V, cioè l'equazione di stato. Anche H, F, G si calcolano facilmente dalle loro definizioni e da (12.64) e (12.65). Infine possiamo calcolare i calori specifici; ad esempio

$$c_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{(\partial U/\partial S)_V}{(\partial T/\partial S)_V} = \frac{1}{n}\,\frac{(\partial U/\partial S)_V}{(\partial^2 U/\partial S^2)_V} \quad . \tag{12.66}$$

Malgrado questa semplicità concettuale le espressioni tipo $U(S, V)$ non vengono usate nella pratica in quanto U e S non sono grandezze direttamente misurabili, ma vengono sempre riferite alle più usuali coordinate p, V, T sperimentalmente accessibili, per cui la scrittura dell'equazione $U = U(S, V)$ non è facile. Una descrizione del sistema in termini di $V = V(p, T)$ e $U = U(T, V)$ risulta analiticamente più semplice.

ESEMPIO 12.12

Un sistema obbedisce all'equazione di stato

$$U = U(S, V) = A\, e^{S/A}/V^B$$

con A e B costanti. Determinare temperatura, pressione e calore specifico a volume costante e trovare a quale condizione devono soddisfare A e B affinché il sistema sia un gas ideale.

Soluzione
Dalle (12.62), (12.63)

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \frac{A}{V^B}\,\frac{e^{S/A}}{A} = \frac{U}{A} \quad \Rightarrow \quad U = A\,T \quad ,$$

$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = A\, e^{S/A}\,\frac{B}{V^{B+1}} = \frac{B}{V}\,U \Rightarrow pV = AB\,T \quad :$$

è stata così stabilita la relazione tra p, V, T. Da (12.66)

$$n c_V = \frac{(\partial U/\partial S)_V}{(\partial^2 U/\partial S^2)_V} = \frac{T}{(\partial T/\partial S)_V} =$$

$$= \frac{T}{\frac{1}{A}(\partial U/\partial S)_V} = A \quad .$$

Inoltre da (12.54), essendo $(\partial U/\partial V)_T = 0$,

$$n\,(c_p - c_V) = p\,\alpha V = p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = AB \quad .$$

Quindi A è la capacità termica a volume costante, mentre AB è la differenza tra le capacità termiche a pressione costante e a volume costante. Da $A = n c_V$ e $AB = n(c_p - c_V)$ risulta poi $B = \gamma - 1$ con $\gamma = c_p/c_V$. Il sistema ha tutte le caratteristiche di un gas ideale con calori specifici costanti; deve però essere $c_p - c_V = R$ ovvero $AB = nR$, cioè $A = n c_V$, $B = R/c_V$.

La reale utilità della formulazione attraverso le variabili naturali risulta dall'applicazione della condizione di integrabilità (12.58) alle relazioni da (12.59) a (12.62). Si ottiene

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \quad , \tag{12.67}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p \quad , \tag{12.68}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad , \tag{12.69}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad . \tag{12.70}$$

Queste equazioni, che valgono in qualsiasi stato di equilibrio di un sistema pVT sono dette *relazioni di Maxwell*.

Relazioni di Maxwell

Un aspetto interessante è che esse legano le derivate dell'entropia a grandezze direttamente misurabili e la convenienza di ciò si vede considerando le (12.56) e (12.57), che diventano

$$dS = n c_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV = n c_V \frac{dT}{T} + \alpha\beta\, dV \quad , \tag{12.71}$$

$$dS = n c_p \frac{dT}{T} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp = n c_p \frac{dT}{T} - \alpha V\, dp \quad . \tag{12.72}$$

Abbiamo usato la proprietà $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ (si veda A.2) e le definizioni di α e β. Poiché in generale le grandezze c_V, c_p, α, β sono note per le varie sostanze, si hanno in pratica utili relazioni per il calcolo delle variazioni di entropia.

Moltiplicando (12.71) e (12.72) per T otteniamo due espressioni per il calore scambiato dal sistema durante una trasformazione infinitesima reversibile:

$$dQ = n c_V\, dT + \alpha\beta T\, dV = n c_p\, dT - \alpha V T\, dp \quad . \tag{12.73}$$

ESEMPIO 12.13

Si riprenda l'esempio 12.9, compressione isoterma reversibile, e si calcoli il calore scambiato, la variazione di entropia e la variazione di energia interna; si supponga T = 300 k.

Soluzione

Da (12.73) e nelle stesse ipotesi di costanza di α e V

$$dQ = -\alpha V T\, dp \Rightarrow Q = -\alpha V T \Delta p \quad ,$$

$$\Delta S = -\alpha V \Delta p \quad ;$$

il calore è ceduto dal sistema, la cui entropia diminuisce. Per l'energia interna utilizziamo il primo principio $\Delta U = Q - W$, prendendo i risultati dell'esempio 12.9.

	Q (J)	ΔS (J/K)	ΔU (J)
acqua	− 540	− 1.8	−516.2
mercurio	− 540	− 1.8	−538.2
rame	− 51	− 0.2	− 50.6

Il calore è ceduto quasi completamente a spese dell'energia interna, che diminuisce nel processo: si nota che $W << Q$ e quindi $Q \cong \Delta U$, come in pratica è sempre verificato per sistemi solidi o liquidi. Se fosse $\alpha < 0$, come avviene per l'acqua tra 0°C e 4°C, il calore sarebbe assorbito durante la compressione isoterma.

ESEMPIO 12.14

Si consideri una trasformazione adiabatica reversibile di un sistema $p\,V\,T$ e si calcoli la relazione tra le variazioni di pressione, volume, temperatura.

Soluzione
Poniamo $dS = 0$ nelle (12.71) e (12.72):

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\alpha\beta}{n\,c_v}\,dV \quad , \quad \frac{dT}{T} = \frac{\alpha V}{n\,c_p}\,dp \quad .$$

Un aumento di pressione causa un aumento di temperatura se α è positivo e una diminuzione se α è negativo; invece il volume diminuisce sempre se aumenta la pressione. Assumendo costanti tutti i coefficienti

$$\frac{T_B}{T_A} = e^{-c_1(V_B - V_A)} = e^{c_2(p_B - p_A)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B - V_A = -\frac{c_2}{c_1}\,(p_B - p_A)$$

con $c_1 = \alpha\beta/n\,c_V$, $c_2 = \alpha V/n\,c_p$.

Si tratta di effetti piccoli: se un litro di mercurio, a temperatura ambiente e pressione atmosferica, viene sottoposto adiabaticamente a un aumento di pressione di 100 bar la sua temperatura aumenta di ~0.3 K ($\Delta T/T = 10^{-3}$) e il suo volume diminuisce di $0.3 \cdot 10^{-6}$ m^3 ($\Delta V/V = 3 \cdot 10^{-4}$).

ESEMPIO 12.15

Calcolare la variazione di entropia di una mole di gas che obbedisce all'equazione di Van der Waals e l'equazione delle adiabatiche reversibili, assumendo c_V indipendentemente da T.

Soluzione

Nella (12.71) calcoliamo $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$: poiché

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \quad , \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b}$$ e dunque

$$dS = c_V\,\frac{dT}{T} + R\,\frac{dV}{V-b} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta S = \int_{T_A}^{T_B} c_V\,\frac{dT}{T} + R\,\ln\frac{V_B - b}{V_A - b} \quad .$$

Se c_V è indipendente da T

$$\Delta S = c_V\,\ln\frac{T_B}{T_A} + R\,\ln\frac{V_B - b}{V_A - b}$$

e l'equazione delle adiabatiche reversibili è

$$T\,(V-b)^{R/c_V} = \text{costante.}$$

L'espressione (12.71) della variazione di entropia può essere utilmente inserita nella (12.59):

$$dU = T\left[n\,c_V\,\frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV\right] - p\,dV$$

$$= n\,c_V\,dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right] dV \quad ;$$

confrontando con (12.48) si vede che il termine tra parentesi quadre è pari a $(\partial U/\partial V)_T$ e quindi

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p = \alpha\beta T - p \quad . \qquad (12.74)$$

La variazione di energia interna col volume, a temperatura costante, è espressa esclusivamente attraverso la conoscenza dell'equazione di stato $p = p\ (V, T)$ che permette di calcolare $(\partial p / \partial T)_V$, ovvero attraverso la conoscenza dei parametri α e β.

In un gas ideale $\alpha = 1/T$ e $\beta = p$ (esempio 12.7) e quindi $(\partial U / \partial V)_T = 0$, l'energia interna non dipende dal volume. Invece in un sistema reale l'energia interna è funzione del volume a causa dell'interazione tra le molecole: infatti se viene variato il volume si modifica la distanza media delle molecole e varia l'energia potenziale media di queste.

Per esempio in una mole di gas di Van der Waals

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} \quad ,$$

come visto nell'esempio 12.15 e pertanto

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{TR}{V-b} - p = \frac{TR}{V-b} - \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) = \frac{a}{V^2}$$

$$\Rightarrow dU = c_V\, dT + \frac{a}{V^2}\, dV$$

$$U\ (T, V) = \int c_V\, dT - \frac{a}{V} + \text{costante} \quad .$$

Il termine negativo $-a/V$ indica il contributo all'energia interna dovuto all'interazione attrattiva tra le molecole; esso decresce all'aumentare del volume. Assumendo c_V indipendente da T si ritrova l'espressione dell'energia interna utilizzata nell'esempio 12.11.

Procedendo allo stesso modo con le equazioni (12.60), (12.72), (12.52) si trova per la variazione di entalpia con la pressione a temperatura costante

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V\ (1 - \alpha T) \quad , \tag{12.75}$$

che risulta nulla solo per il gas ideale in cui $\alpha = 1/T$.

Le relazioni (12.74) e (12.75), collegate rispettivamente a (12.54) e (12.55) portano entrambe al risultato

$$c_p - c_V = \frac{\alpha^2 \beta T V}{n} \quad , \tag{12.76}$$

che può essere ottenuto anche eguagliando (12.71) con (12.72) e confrontando con (12.42). La (12.76), valida per qualsiasi sistema pVT, è una relazione fondamentale: essa mostra che è sempre $c_p > c_V$ e che la differenza diminuisce al diminuire della temperatura; per $T \neq 0$ $c_p = c_V$ solo se $\alpha = 0$ come avviene per l'acqua a 4°C.

Il rapporto $\gamma = c_p / c_V$ è pertanto sempre maggiore o eguale a uno; si dimostra che vale la relazione

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{(\partial V / \partial p)_T}{(\partial V / \partial p)_S} = \frac{\beta_S}{\beta} \tag{12.77}$$

in cui

$$\frac{1}{\beta_S} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \tag{12.78}$$

Modulo di compressibilità adiabatica
Coefficiente di compressibilità adiabatica

è il *modulo di compressibilità adiabatica* ($\kappa_S = 1/\beta_S$ si dice *coefficiente di compressibilità adiabatica*); risulta sempre $\beta_S \geq \beta$ (ovvero $\kappa \geq \kappa_S$). Abbiamo già incontrato β_S nei paragrafi 11.13 e 11.14, in relazione al calcolo della velocità di propagazione di un'onda elastica in un gas. Da (12.76) e (12.77) risulta

$$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_S} = \kappa - \kappa_S = \frac{\alpha^2 T V}{n c_p} \quad .$$

Poiché β_S può essere determinato da misure di velocità del suono, tale relazione può essere usata per calcolare β .

In conclusione, partendo dalle formule generali ricavate nel paragrafo 12.14 e servendoci delle relazioni di Maxwell, abbiamo ottenuto espressioni utili per il calcolo dell'energia interna, dell'entropia e dei potenziali termodinamici. In tali espressioni compaiono le grandezze c_p , c_V , α, β : sperimentalmente c_p , α, β sono misurabili con relativa facilità, mentre la determinazione di c_V , soprattutto per sostanze solide e liquide, è molto difficile; però il problema si risolve con la relazione (12.76). A questo punto tramite (12.71) o (12.72) siamo in grado di calcolare ΔS (e quindi Q in un processo reversibile), mentre (12.74) e (12.75) ci permettono di calcolare ΔU e ΔH .

La condizione di integrabilità (12.58) è essenziale per arrivare ai suddetti risultati; la sua validità nel nostro contesto è assicurata dal fatto che dU e dS sono differenziali esatti, in quanto energia interna ed entropia sono funzioni di stato, come stabilito dal primo e dal secondo principio della termodinamica. Invece nulla di simile si può affermare per dQ , come abbiamo già detto più volte; una semplice verifica si può fare sull'equazione (12.49) che scriviamo

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV \quad .$$

Si vede subito che (12.58) non è soddisfatta; infatti le derivate dei due coefficienti

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial^2 U}{\partial V\, \partial T} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]_V = \frac{\partial^2 U}{\partial T\, \partial V} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

non sono eguali; lo sarebbero solo se fosse $(\partial p / \partial T)_V = 0$, ma ciò non è vero in generale in quanto sappiamo che $(\partial p / \partial T)_V = \alpha \beta$.

12.16 ESPANSIONE DI JOULE-THOMSON

Nel paragrafo 11.8 abbiamo descritto sommariamente l'espansione di Joule-Thomson; riprendiamo ora più in dettaglio l'argomento, anche alla luce delle nuove nozioni sviluppate.

Schematicamente l'esperienza avviene mettendo una massa di fluido in un condotto isolato termicamente, separato in due parti da un setto poroso; due pistoni, pure isolanti, sono liberi di muoversi senza attrito; le pressioni nei due recipienti,

delimitati dal setto e dai pistoni, sono mantenute costanti tramite il movimento dall'esterno dei pistoni stessi. Supponiamo che inizialmente il fluido sia tutto a sinistra, nel volume V_A alla pressione p_A e alla temperatura T_A, e che alla fine esso sia tutto a destra, nel volume V_B alla pressione p_B e alla temperatura T_B (Fig. 12.19); supponiamo inoltre che sia $p_A > p_B$.



Fig. 12.19

Il lavoro compiuto per l'uscita dal recipiente di sinistra della massa di fluido contenuta nel volume V_A e l'entrata in quello di destra della stessa massa, contenuta nel volume V_B, è dato da

$$W = \int_{V_A}^{0} p_A \, dV_A + \int_0^{V_B} p_B \, dV_B = -p_A V_A + p_B V_B \quad .$$

Data la scelta dei materiali la trasformazione è adiabatica, il calore scambiato è nullo e quindi, dal primo principio,

$$\Delta U = U_B - U_A = -W = p_A V_A - p_B V_B$$

$$\Rightarrow H_A = U_A + p_A V_A = H_B = U_B + p_B V_B \quad :$$

l'entalpia del sistema rimane la stessa nel passaggio attraverso il setto, ovvero l'espansione di Joule-Thomson è un processo isoentalpico.

Con l'aiuto di una pompa che mantiene una differenza di pressione finita $p_A - p_B$ il fenomeno può essere reso continuo: il fluido si muove in regime stazionario nel condotto, subendo una diminuzione di pressione nel passaggio attraverso il setto poroso e senza scambiare calore; la trattazione resta la stessa, se si può trascurare la variazione di energia cinetica della massa fluida.

Storicamente l'esperimento è stato ideato da Joule e Thomson nel 1853 per studiare la dipendenza dell'energia interna dei gas dalle coordinate termodinamiche con un dispositivo più sensibile di quello visto per l'esperienza dell'espansione libera.

In un gas ideale l'entalpia è funzione solo della temperatura e quindi, se un processo è isoentalpico, esso è anche isotermo; invece con i gas reali si trovano, nell'espansione di Joule-Thomson, variazioni di temperatura positive, negative o nulle, a seconda delle condizioni sperimentali.

Una misura può essere effettuata in questo modo: si tengono fisse p_A e T_A, si eseguono varie espansioni con diversi valori di p_B ($< p_A$) e si determina ogni volta T_B, cioè a partire da uno stato iniziale di data entalpia corrispondente alla coppia di valori p_A, T_A si arriva a stati finali di eguale entalpia corrispondenti a diversi valori p_B, T_B. Poi si ripete la misura partendo da un diverso stato iniziale. I risultati possono essere rappresentati graficamente, come è fatto, in maniera solo qualitativa, nella figura 12.20.

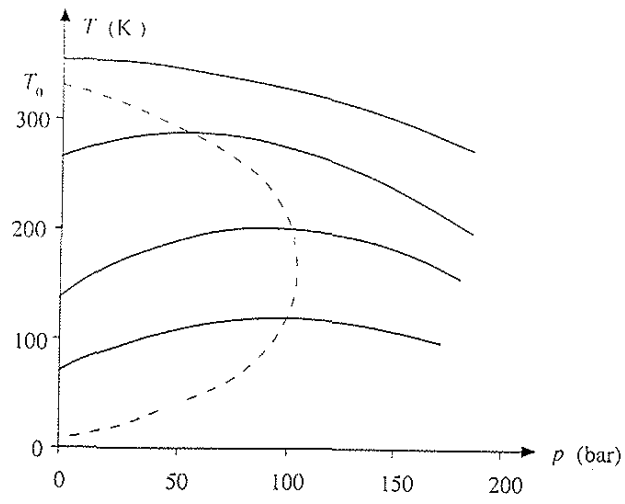


Fig. 12.20

Ciascuna curva continua è una curva isoentalpica; ricordando che il fenomeno procede da pressione alta a pressione bassa, cioè da destra a sinistra, e che gli stati iniziale e finale stanno su una stessa curva, vediamo che a seconda della scelta dello stato iniziale e dell'abbassamento di pressione possono esserci aumenti o diminuzioni di temperatura (e anche $\Delta T = 0$). Alcune curve isoentalpiche presentano un massimo, detto punto di inversione; la curva tratteggiata che collega i punti di inversione si chiama curva di inversione: nella parte di piano a destra della curva di inversione l'espansione di Joule-Thomson comporta sempre riscaldamento, nella parte a sinistra raffreddamento. Per $p = 0$ la curva di inversione determina una temperatura T_0 che è la massima temperatura di inversione; per $T > T_0$ una curva isoentalpica ha sempre pendenza negativa, non si ha mai raffreddamento.

La pendenza di una curva isoentalpica $(\partial T/\partial p)_H$, è detta *coefficiente di Joule-Thomson*. Dalla regola di derivazione

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

e dalle (12.51), (12.75) otteniamo

Coefficiente di Joule-Thomson

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{n c_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right] = -\frac{V(1-\alpha T)}{n c_p} \quad . \qquad (12.79)$$

In un gas ideale $(\partial H/\partial p)_T = 0$, quindi $(\partial T/\partial p)_H = 0$, una curva isoentalpica è una retta parallela all'asse delle pressioni.

La variazione di entropia nell'espansione di Joule-Thomson si calcola da (12.60):

$$dS = \frac{1}{T}\,dH - \frac{V}{T}\,dp$$

e se $dH = 0$

$$dS = -\frac{V}{T}\,dp \qquad \text{ovvero} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_H = -\frac{V}{T} \quad .$$

La derivata dell'entropia rispetto alla pressione, a entalpia costante, è negativa e quindi se la pressione diminuisce l'entropia aumenta. Siccome la trasformazione è adiabatica il sistema coincide con l'universo e il risultato dimostra che il processo descritto è irreversibile. Pertanto gli stati intermedi non sono stati di equilibrio e non possono essere rappresentati nel piano T, p : la curva isoentalpica non è la rappresentazioe grafica dell'espansione di Joule-Thomson.

Abbiamo già accennato nei paragrafi 11.8 e 11.9 che se il fluido è un liquido saturo si ottiene sempre raffreddamento e evaporazione parziale e che l'effetto è sfruttato nei cicli frigoriferi.

L'applicazione principale dell'effetto di raffreddamento si ha nella liquefazione dei gas. Per gas come l'aria, l'argon, l'anidride carbonica che hanno la massima temperatura di inversione T_0 superiore alla temperatura ambiente (nell'aria $T_0 = 659$ K) non c'è bisogno di raffreddamento iniziale, che invece è necessario per l'idrogeno ($T_0 = 202$ K) e per l'elio ($T_0 = 40$ K). Il processo di liquefazione consiste in una successione di espansioni in cui il gas che si raffredda viene riciclato raffreddando il gas che entra nell'apparecchio fino a che non si raggiunge la temperatura di liquefazione alla data pressione.

Per dare un'idea dell'entità del raffreddamento diciamo che con aria a temperatura ambiente (293K) e a pressione atmosferica, un'espansione con pressione iniziale di 2 bar comporta $\Delta T = -0.3$ K, mentre se la pressione iniziale è di 204 bar $\Delta T = -47$ K.

La liquefazione dell'aria è un procedimento industriale fondamentale per la produzione di ossigeno, azoto e gas nobili.

12.17 MISCELE DI GAS IDEALI

Un'estensione naturale dello studio delle proprietà dei sistemi $p\,V\,T$ riguarda i sistemi composti da sostanze diverse, come una soluzione di un sale in acqua o una miscela di gas. Trattiamo qui soltanto il caso di una miscela di gas ideali inerti, per mostrare come si affronta il problema.

Abbiamo già visto alla fine del paragrafo 11.10 la legge di Dalton (11.39) che riguarda la pressione di una *miscela di gas ideali*. Supponiamo anche adesso di avere un contenitore di volume V in cui è racchiusa la miscela di gas alla temperatura T e considerare grandezze estensive come l'energia interna U, l'entalpia H, l'entropia S, l'energia libera F e l'entalpia libera G. Si dimostra che in questa situazione sussiste il *teorema di Gibbs* : il valore di una grandezza estensiva relativo ad una miscela in cui le interazioni tra i costituenti elementari siano trascurabili è pari alla somma dei valori relativi a ciascun componente, se questo occupasse da solo lo stesso volume alla stessa temperatura.

Teorema di Gibbs

Ad esempio, detta U_i l'energia interna dell'i-esimo componente, contenuto da solo nel volume V alla temperatura T , l'energia interna della miscela è data da

$$U = \Sigma_i\, U_i \quad .$$

Ciascun termine è funzione soltanto della temperatura e quindi anche l'energia interna totale è funzione soltanto della temperatura. Molto spesso ci si riferisce a una mole di sostanza e la relazione precedente si scrive

$$n\,u = \Sigma_i\, n_i\, u_i \quad ,$$

dove n_i è il numero di moli dell'i-esimo componente, $n = \Sigma_i\, n_i$ è il numero totale

di moli, e utilizziamo le lettere minuscole per indicare le grandezze molari, come già fatto nel paragrafo 12.13. Ricordando la definizione di frazione molare r_i del paragrafo 11.10 abbiamo

Energia interna molare di una miscela di gas ideali

$$u = \Sigma_i \; r_i \, u_i \tag{12.80}$$

per *l'energia interna molare della miscela.*

Analogamente si ottiene per l'*entalpia*

Entalpia molare di una miscela di gas ideali

$$H = \Sigma_i \; H_i \quad , \quad h = \Sigma_i \; r_i \, h_i \quad . \tag{12.81}$$

Siccome i gas sono ideali possiamo scrivere

$$d\,u_i = c_{V,i} \, d\,T$$

$$d\,u = c_V \; d\,T = (\Sigma_i \; r_i \; c_{V,i}) \, d\,T$$

$$d\,h_i = c_{p,i} \, d\,T$$

$$d\,h = c_p \; d\,T = (\Sigma_i \; r_i \; c_{p,i}) \, d\,T$$

e quindi ricaviamo per i *calori specifici molari della miscela*

Calori specifici molari di una miscela di gas ideali

$$c_V = \Sigma_i \; r_i \; c_{V,i} \quad , \quad c_p = \Sigma_i \; r_i \; c_{p,i}$$

ovvero per le capacità termiche

$$C_V = n\,c_V = \Sigma_i \; n\,r_i \; c_{V,i} = \Sigma_i \; n_i \; c_{V,i} = \Sigma_i \; C_{V,i} \quad ,$$

$$C_p = n\,c_p = \Sigma_i \; C_{p,i} \quad .$$

Pertanto anche le capacità termiche della miscela obbediscono al teorema di Gibbs, come del resto deve essere trattandosi di grandezze estensive. Si verifica poi facilmente che $c_p - c_V = R$.

Passando a considerare l'*entropia*, scriviamo

$$S = \Sigma_i \; S_i \quad , \quad n\,s = \Sigma_i \; n_i \; s_i \quad ,$$

dove ripetiamo che ciascuna S_i è calcolata per l'i-esimo componente nelle condizioni V e T di volume e temperatura e $p_i = r_i \; p$ di pressione (p_i è la pressione parziale del paragrafo 11.10).

Pertanto il contributo del componente i-esimo all'entropia della miscela è dato, secondo la terza delle relazioni (12.27) da

$$S_i = n_i \; \sigma_i \; (T) - n_i \; R \; \ln p_i + \text{costante}$$

dove $\sigma_i \; (T)$ è funzione solo di T. In totale (e tralasciando la costante)

$$S = \Sigma_i \; S_i = \Sigma_i \; n_i \; \sigma_i \; (t) - \Sigma_i \; n_i \; R \ln p_i$$

e ricordando che $p_i = r_i \; p$

$$S = \Sigma_i \, n_i \, \sigma_i \, (T) - \Sigma_i \, n_i \, R \ln p - \Sigma_i \, n_i \, R \ln r_i \quad .$$

Nella miscela ciascun componente è alla pressione $p_i = r_i \, p$; l'entropia di un gas ideale dipende dalla pressione, per cui l'entropia di ciascun componente immaginato separato dagli altri, alla temperatura T e alla pressione p , sarebbe

$$S_i' = n_i \, \sigma_i \, (T) - n_i \, R \, \ln p$$

e l'entropia della miscela di gas, considerati separati, sarebbe

$$S' = \Sigma_i \, S_i' = \Sigma_i \, n_i \, \sigma_i \, (T) - \Sigma_i \, n_i \, R \, \ln p \quad .$$

Confrontando col valore determinato col teorema di Gibbs troviamo

$$\Delta S = S - S' = -R \, \Sigma_i \, n_i \, \ln r_i$$

Entropia di mescolamento

che risulta sempre positiva perché $r_i < 1$, in accordo con il secondo principio della termodinamica, dato che il processo di mescolamento è irreversibile. La quantità ΔS si chiama *entropia di mescolamento*.

Vediamo in conclusione che l'*entropia della miscela* può essere calcolata sia a partire dalle entropie molari iniziali,

$$S = \Sigma_i \, S_i' = \Sigma_i \, n_i \, s_i \quad , \quad s_i = \sigma_i \, (T) - R \, \ln p_i$$

$$s = \frac{S}{n} = \Sigma_i \, r_i \, s_i = \Sigma_i \, r_i \, [\sigma_i \, (T) - R \, \ln p_i] \quad ,$$

Entropia molare di una miscela di gas ideali

che dalle entropie molari finali (nel senso sopra precisato),

$$S = S' + \Delta S = \Sigma_i \, S_i' - R \, \Sigma_i \, n_i \, \ln r_i = \Sigma_i \, n_i \, s_i' - R \, \Sigma_i \, n_i \, \ln r_i \quad ,$$

$$s_i' = \sigma_i \, (T) - R \, \ln p \quad ,$$

$$s = \frac{S}{n} = \Sigma_i \, r_i \, (s_i' - R \, \ln r_i) \quad . \qquad (12.82)$$

Osserviamo che i ragionamenti fatti hanno valore solo se i gas sono diversi tra loro; essi perdono significato se i gas sono identici, perché perde significato il concetto di mescolamento; in tal caso deve essere $\Delta S = 0$, mentre la formula ricavata darebbe $\Delta S \neq 0$. Questo risultato è noto come *paradosso di Gibbs* ed è risolvibile in quanto le due situazioni non sono paragonabili, nemmeno per estrapolazioni: infatti sperimentalmente è sempre possibile separare due gas diversi, ma non c'è maniera di separare due gas identici. Teoricamente la spiegazione del paradosso di Gibbs si basa sull'indistinguibilità di molecole identiche, che è un concetto fondamentale di meccanica quantistica.

Paradosso di Gibbs

La situazione descritta per l'entropia non si presenta per energia interna ed entalpia in quanto tali grandezze non dipendono dalla pressione ($u_i = u_i'$, $h_i = h_i'$).

Invece per il calcolo di *energia libera* ed *entalpia libera*, che dipendono dall'entropia, si hanno risultati analoghi a (12.82):

$$F = U - TS \quad , \quad nf = nu - Tns$$

$$\Rightarrow \quad f = u - Ts = \Sigma_i \, r_i \, u_i - T \, \Sigma_i \, r_i \, s_i' + RT \, \Sigma_i \, r_i \, \ln r_i$$

$$= \Sigma_i \, r_i \, (u_i - T s_i') + RT \, \Sigma_i \, r_i \, \ln r_i$$

$$= \Sigma_i \, r_i \, f_i' + RT \, \Sigma_i \, r_i \, \ln r_i \quad ,$$

avendo utilizzato (12.80) e (12.82) e definito $f_i' = u_i - T s_i'$, energia libera molare dell'i-esimo componente nella miscela. Pertanto

Energia libera molare di una miscela di gas ideali

$$f = \Sigma_i \, r_i \, f_i = \Sigma_i \, r_i \, (f_i' + RT \, \ln \, r_i) \tag{12.83}$$

e analogamente, per l'*entalpia libera molare*,

Entalpia libera molare di una miscela di gas ideali

$$g = \Sigma_i \, r_i \, g_i = \Sigma_i \, r_i \, (g_i' + RT \, \ln r_i) \quad . \tag{12.84}$$

Le relazioni da (12.80) a (12.84) mostrano che in sostanza le grandezze molari relative alla miscela si calcolano come medie pesate dei valori delle stesse grandezze relative ai singoli componenti, prendendo per pesi le frazioni molari; nel caso di S, F, G bisogna tener conto di termini correttivi se si considerano i valori molari s_i' , f_i' , g_i' , riferiti alle coordinate termodinamiche p, V, T e non i valori s_i , f_i , g_i , riferiti a p_i , V , T .

ESEMPIO 12.16

Una miscela gassosa è costituita da una mole di gas ideale monoatomico ($c_{V,1} = 3R/2$) e da una mole di gas ideale biatomico ($c_{V,2} = 5R/2$). Essa viene riscaldata isobaricamente dalla temperatura T_1 alla temperatura T_2 . Calcolare le espressioni del calore assorbito, della variazione di energia interna, del lavoro compiuto e della variazione di entropia.

Soluzione

Abbiamo $n_1 = n_2 = 1$, $n = n_1 + n_2 = 2$
$r_1 = r_2 = 1/2$ e quindi

$$c_V = \frac{1}{2} \, \frac{3}{2} \, R + \frac{1}{2} \, \frac{5}{2} \, R = 2R \Rightarrow c_p = 3R \, .$$

Allora

$$Q = n c_p \, \Delta T = 6R \, (T_2 - T_1) \quad .$$

$$\Delta U = n c_V \, \Delta T = 4R \, (T_2 - T_1) \quad ,$$

$$W = Q - \Delta U = 2R \, (T_2 - T_1) = nR \, \Delta T \, .$$

Nella variazione di entropia il termine $R \, \ln \, r_i$ è costante, per cui

$$\Delta S = n \, \Delta s = n \, \Sigma_i \, r_i \, \Delta s_i' = n \, \Sigma_i \, r_i \, c_{p,i} \, \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$= \ln \frac{T_2}{T_1} \, \Sigma_i \, n_i \, c_{p,i} = n c_p \, \ln \frac{T_2}{T_1} = 6R \, \ln \frac{T_2}{T_1} \quad ,$$

come si poteva calcolare direttamente dalla definizione $dS = (dQ/T)_{rev}$. Vediamo che, una volta stabilito il metodo di calcolo di c_V e c_p , la miscela si può trattare come un unico gas ideale.

12.18 SISTEMI APERTI. POTENZIALE CHIMICO. REGOLA DELLE FASI

In tutte le situazioni esaminate finora il sistema in esame scambiava soltanto energia con l'ambiente, ma la sua massa era ritenuta costante. Pur conservando questa proprietà di costanza della massa totale, sono molto comuni i casi in cui un sistema

è suddiviso in più parti, tra le quali può esserci anche scambio di massa: ciò avviene per esempio nel cambiamento di fase di una sostanza, nella dissoluzione di una sostanza in un'altra, nei processi di diffusione; anche una reazione chimica provoca una situazione di questo tipo, in cui alcune sostanze presenti nello stato iniziale possono scomparire del tutto o in parte per dare luogo ad altre sostanze.

Un *sistema chiuso* può quindi essere composto da *sottoinsiemi aperti*, e si può pensare di essere sempre in tali condizioni anche in presenza di un unico *sistema aperto* se si include l'ambiente. Limitandoci ai sistemi $p\,V\,T$ vediamo che per la descrizione di un *sistema aperto* non sono più sufficienti due sole variabili termodinamiche scelte nella terna p, V, T, ma ne è necessaria un'altra per esprimere la quantità di materia contenuta nel sistema (o la massa).

Sistema aperto

La (12.59) deve allora essere scritta in forma più generale,

$$dU = T\,dS - p\,dV + \mu\,dn \qquad (12.85)$$

Potenziale chimico

dove l'ultimo termine esprime il contributo alla variazione di energia interna del sistema dovuto al cambiamento dn del numero di moli; assumiamo $dn > 0$ se la materia entra nel sistema. In conseguenza di (12.85) la variazione di entalpia si scrive

$$dH = T\,dS + V\,dp + \mu\,dn \qquad (12.86)$$

e analogamente

$$dF = -S\,dT - p\,dV + \mu\,dn \quad , \qquad (12.87)$$

$$dG = -S\,dT + V\,dp + \mu\,dn \quad . \qquad (12.88)$$

La grandezza intensiva μ così definita si chiama *potenziale chimico*. Se confrontiamo le relazioni appena scritte con l'espressione del differenziale totale di una funzione troviamo che

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_{S,p} = \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{T,p} \quad . \qquad (12.89)$$

Il potenziale chimico del sistema esprime così la variazione di una delle grandezze U, H, F, G rispetto alla variazione del numero di moli, calcolata mantenendo costanti le relative variabili naturali.

Considerando in particolare l'energia libera e l'entalpia libera, la loro natura di grandezze estensive permette di scrivere $F = n\,f$ e $G = n\,g$ per cui, da (12.89),

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{T,V} = f \quad , \qquad (12.90)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{T,p} = g \quad . \qquad (12.91)$$

In un processo a temperatura e volume costanti il potenziale chimico coincide con l'energia libera molare, mentre in un processo a temperatura e pressione costanti esso coincide con l'entalpia libera molare.

Prendiamo in esame un sistema chiuso formato da due sottosistemi, costituiti dalla stessa sostanza e messi a contatto, cosicché possano scambiare materia (contatto chimico o diffusivo): essi sono posti in un recipiente a pareti rigide, di volume totale

V, e sono separati da una parete porosa permeabile alla sostanza; inoltre essi sono alla stessa temperatura T, che è mantenuta costante tramite il contatto termico con un serbatoio. Sappiamo dal paragrafo 12.13 che lo stato di equilibrio, a T e V costanti, è quello in cui l'energia libera del sistema è minima, fatto che si esprime con la condizione $dF = 0$.

L'energia libera varia durante il processo per effetto del cambiamento del numero di moli n_1 e n_2 delle due parti, cambimento però soggetto alla condizione $n_1 + n_2 =$ costante. Pertanto, all'equilibrio abbiamo

$$dF = dF_1 + dF_2 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial n_1}\right)_{T,V} dn_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial n_2}\right)_{T,V} dn_2 = 0 \quad .$$

Questa relazione è compatibile con $dn_1 + dn_2 = 0$ solo se

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial n_1}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial n_2}\right)_{T,V}$$

ovvero, da (12.89), solo se

$$\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow f_1 = f_2 \quad .$$

Nello stato di equilibrio del processo considerato i potenziali chimici delle due parti, ovvero le energie libere molari, devono essere uguali.

Il flusso spontaneo di materia, in assenza di forze esterne, avviene dalla zona a potenziale chimico maggiore a quella a potenziale chimico minore. Infatti in una fase intermedia del processo deve essere $dF < 0$, cioè

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial n_1}\right)_{T,V} dn_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial n_2}\right)_{T,V} dn_2 < 0 \quad .$$

Da $dn_1 + dn_2 = 0$ si ha $dn_2 = -dn_1$ e quindi

$$(\mu_1 - \mu_2)\, dn_1 < 0 \quad .$$

Il flusso di materia dalla parte 1 alla parte 2, che comporta $dn_1 < 0$, si ha solo se $\mu_1 > \mu_2$; esso termina quando il potenziale chimico, ovvero l'energia libera molare, sono uniformi in tutto il sistema. In questi processi il potenziale chimico rispetto al flusso di materia gioca lo stesso ruolo della temperatura rispetto al flusso di calore.

ESEMPIO 12.17

Un gas ideale è contenuto in un recipiente a pareti rigide di volume V, suddiviso in due parti separate da una parete rigida permeabile al gas; nella parte 1, di volume V_1, ci sono $n_{1,0}$ moli di gas alla pressione p_1, nella parte 2, di volume V_2, $n_{2,0}$ moli di gas alla pressione p_2. La temperatura del sistema è mantenuta costante al valore T. Determinare, nello stato finale di equilibrio, la distribuzione del numero di moli.

Soluzione

In equilibrio deve essere $\mu_1 = \mu_2$, cioè $f_1 = f_2$, ovvero

$$u_1 - Ts_1 = u_2 - Ts_2 \quad .$$

Siccome il gas è lo stesso e la temperatura è la stessa ovunque, l'energia interna molare, che dipende solo dalla temperatura, deve essere la stessa dalle due parti, $u_1 = u_2$; ciò comporta $s_1 = s_2$. L'entropia molare dipende da due variabili, per esempio temperatura e pressione: ne segue che la pressione nelle due parti deve essere la stessa

e quindi

$$\frac{n_1 R T}{V_1} = \frac{n_2 R T}{V_2} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{V_1}{V_2} \quad , \quad \frac{n_1}{V_1} = \frac{n_2}{V_2} \; .$$

Nello stato di equilibrio il numero di moli di una parte è proporzionale al volume di quella parte, cioè la densità è costante in tutto il sistema.

Il flusso avviene dalla parte a pressione maggiore a quella a pressione minore: infatti, sappiamo che durante il processo $d F < 0$, cioè $(f_1 - f_2)\, d n_1 < 0$, ovvero $f_1 > f_2$ se il flusso è dalla parte 1 alla parte 2. Poiché è sempre $u_1 = u_2$ abbiamo

$$u_1 - T s_1 > u_2 - T s_2 \Rightarrow - T s_1 > - T s_2 \Rightarrow s_1 < s_2 \quad .$$

Per l'espressione dell'entropia ricorriamo a (12.27):

$$c_p \ln T - R \ln p_1 < c_p \ln T - R \ln p_2 \Rightarrow p_1 > p_2 \quad .$$

Notiamo che, per tutto il sistema, la condizione $d F = d U - T d S < 0$ corrisponde a $d S > 0$ essendo $d U = 0$: ciò è in accordo col fatto che il processo è irreversibile e avviene senza scambio di calore (oltre a $d U = 0$ è anche $d W = 0$). Bisogna dire che i risultati si potevano ottenere direttamente dalla definizione di equilibrio termodinamico (che deve essere anche meccanico); però così abbiamo verificato, in un caso semplice, l'applicazione di un metodo generale.

Quando un processo si svolge a temperatura e pressione costanti lo stato di equilibrio è quello in cui è minima l'entalpia libera ($d G = 0$). In un sistema formato da due parti come quelli analizzati negli esempi relativi all'energia libera ciò comporta $\mu_1 = \mu_2$ ovvero $g_1 = g_2$: l'entalpia libera molare è eguale nelle due parti. Abbiamo già trovato tale risultato in un tipico processo a T e p costanti, come l'evaporazione di una sostanza pura (paragrafo 12.13). Le applicazioni più comuni si hanno nelle reazioni chimiche, che di norma avvengono a temperatura e pressione costanti.

Regola delle fasi

Una conseguenza molto importante della formulazione delle condizioni di equilibrio tramite il potenziale chimico è la cosiddetta *regola delle fasi.*

Premettiamo la definizione di fase di un sistema: si chiama così una qualsiasi parte di un sistema che sia omogenea e che abbia limiti geometrici ben definiti; essa può essere composta anche da più specie chimiche diverse. Per esempio, una miscela di gas è un'unica fase gassosa, una soluzione liquida un'unica fase liquida, un liquido in equilibrio col suo vapore è un sistema a due fasi (ma con un solo componente). Per ciascuna fase in equilibrio meccanico e termico è possibile definire il volume, la pressione, la temperatura e la composizione, dando il numero di moli delle varie specie chimiche.

Osserviamo che questa definizione di fase contiene in sé quella più restrittiva usata in precedenza, riferita soltanto a una sostanza pura (p.e. acqua in fase solida, liquida o gassosa).

Supponiamo ora di avere un sistema formato da f fasi che contengono in totale c componenti, in equilibrio meccanico (p uniforme), termico (T uniforme) e chimico. Ciascun componente può essere distribuito nelle varie fasi, però deve esserci equilibrio e di conseguenza il potenziale chimico, ovvero l'entalpia libera molare, di ciascun componente devono essere gli stessi ovunque (accenniamo soltanto al fatto che in questa trattazione si suppongono trascurabili eventuali energie associate alle superficie di contatto tra le diverse fasi). Pertanto devono valere le eguaglianze

$$\begin{aligned}
&\mu_1^1 = \mu_1^2 = \ldots = \mu_1^f \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mu_i^1 = \mu_i^2 = \ldots = \mu_i^f \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mu_c^1 = \mu_c^2 = \ldots \mu_c^f \quad .
\end{aligned} \tag{12.92}$$

Ciascuna riga è composta da $f - 1$ equazioni che affermano appunto l'eguaglianza del potenziale chimico di un dato componente nelle f fasi; le righe sono c e in totale il numero di equazioni è $c\ (f - 1)$.

I potenziali chimici sono funzioni di p, T e delle frazioni molari $r_i = n_i/n$ (n_i è il numero di moli dell'i-esimo componente); le frazioni molari sono c, ma devono soddisfare alla condizione $\Sigma_i\ r_i = 1$, per cui quelle indipendenti sono $c - 1$; il ragionamento va esteso a tutte le fasi e quindi in totale abbiamo $(c - 1)f$ variabili indipendenti più pressione e volume, cioè $(c - 1)f + 2$.

La differenza tra il numero di variabili indipendenti e il numero di equazioni è detta *varianza del sistema* (o numero di gradi di libertà del sistema): essa dà il numero di variabili che possono essere fissate arbitrariamente in uno stato di equilibrio del sistema. Dalla differenza di $(c - 1)f + 2$ e $c\ (f - 1)$ risulta

Regola delle fasi

$$v = c - f + 2 \quad . \tag{12.93}$$

La (12.93), dovuta a Gibbs, si dice *regola delle fasi*. Vediamo alcuni esempi per chiarirne il significato.

1) Sistema omogeneo chimicamente definito: c'è un solo componente ed una sola fase, quindi $v = 2$, si possono fissare arbitrariamente le variabili p e T.
2) Sistema omogeneo miscela di due sostanze pure: $c = 2, f = 1, v = 3$; si possono fissare arbitrariamente p, T e il rapporto n_1/n_2. Se le sostanze sono $m, f = 1, v = m + 1$ in corrispondenza a p, T e $m - 1$ frazioni molari.
3) Sostanza pura solida o liquida in equilibrio col suo vapore: $c = 1, f = 2, v = 1$; se è data la temperatura la pressione è fissata e corrisponde alla tensione di vapore a quella temperatura secondo una formula tipo (11.29).
4) Sostanza pura in tre fasi diverse (solida, liquida, gassosa) in equilibrio: $c = 1, f = 3, v = 0$. Non c'è alcun grado di libertà, l'equilibrio si ha solo per una particolare coppia valori di temperatura e pressione (*punto triplo*).
5) Sistema costituito da due sostanze solubili allo stato liquido, ma insolubili allo stato solido: ci sono due componenti e quattro fasi (solido a, solido b, soluzione liquida, vapore) per cui $v = 0$. Esiste un solo insieme di valori $p, T, n_a/n_b$ per cui le quattro fasi possono coesistere in equilibrio. Tali valori determinano il cosiddetto *punto eutettico* e il rapporto n_a/n_b di equilibrio si dice *composizione eutettica*.

Punto eutettico
Composizione eutettica

L'insieme degli argomenti trattati fa capire l'importanza del concetto di potenziale chimico nella ricerca degli stati di equilibrio di un sistema $p\ V\ T$, soprattutto a temperatura e pressione costanti.

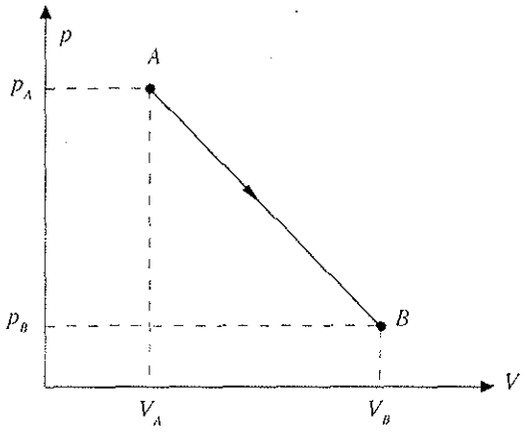
Come abbiamo già avuto modo di rilevare in altri casi simili, le leggi trovate sono poi di utilità pratica se abbiamo a disposizione espressioni analitiche dei potenziali chimici in funzione di coordinate termodinamiche misurabili. A questo proposito, se si tratta di miscele di gas ideali, tornano utili le espressioni ricavate nel paragrafo

12.17; negli altri casi occorrono opportuni modelli, derivati da ipotesi teoriche o da misure sperimentali. Ricordiamo quanto detto alla fine del paragrafo 10.1: la trattazione termodinamica, per la sua grande generalità, può essere applicata a qualsiasi sistema, però, proprio per questo, non può dare risultati che tengono conto di particolari strutture atomiche o molecolari.

PROBLEMI DI TERMODINAMICA

81. Una mole di gas ideale monoatomico compie una espansione reversibile regolata dall'equazione $p\,(V - V_0) = -K$, con $V_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ m^3 e $K = 4.56$ k J, dallo stato iniziale $V_1 = 10^{-2}$ m^3, $p_1 = 1.14$ bar allo stato finale $V_2 = 4 \cdot 10^{-2}$ m^3, p_2. Calcolare il lavoro e il calore scambiati.

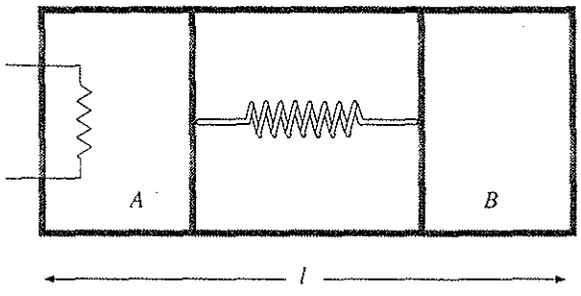
82. n moli di gas ideale compiono la trasformazione reversibile indicata in figura dallo stato V_A, p_A allo stato V_B, p_B (con $V_B > V_A$, $p_B < p_A$). Determinare se nella trasformazione c'è uno stato del gas in cui la temperatura è massima oppure se questa varia monotonamente da A a B.



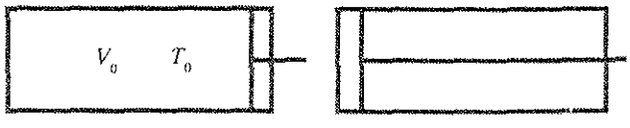
83. 0.42 moli di gas ideale biatomico si trovano dentro un cilindro con pareti adiabatiche di volume $V = 10^{-2}$ m^3, alla pressione atmosferica p. Un piccolo oggetto solido alla temperatura $T_0 = 580$ K viene immesso molto rapidamente nel cilindro; il suo volume è trascurabile rispetto a V. Una volta raggiunto l'equilibrio termico alla temperatura T_1 si toglie, sempre molto rapidamente, il corpo e si lascia muovere una delle basi del cilindro fino a che il gas raggiunge uno stato di equilibrio alla pressione p, che all'esterno è rimasta sempre costante, compiendo un lavoro $W = 705.4$ J. Calcolare la capacità termica del corpo e la variazione complessiva dell'entropia del gas.

84. Un recipiente termicamente isolato contiene $m = 70$ kg d'acqua alla temperatura $T_1 = 20°$ C. Si immerge nell'acqua un blocco di ghiaccio, di massa $M = 20$ kg e temperatura $T_2 = -4°$ C. Calcolare la temperatura di equilibrio e la variazione di entropia dell'universo (calore specifico dell'acqua $c = 4186.8$ J/kg K, del ghiaccio $c/2$, calore latente di fusione $\lambda = 334.4 \cdot 10^3$ J/kg).

85. Un cilindro adiabatico lungo $l = 1.8$ m e di sezione $S = 10^{-2}$ m^2 è diviso in tre parti da due setti adiabatici mobili collegati da una molla di costante elastica $k = 5 \cdot 10^3$ N/m e lunghezza a riposo $l_0 = 0.5$ m. Sia in A che in B ci sono $n = 0.2$ moli di gas ideale biatomico a temperatura T_0 e pressione p_0 ; la lunghezza della molla è $l_m = 0.4$ m. Nella zona centrale dove c'è la molla non c'è gas. Calcolare i valori di T_0 e p_0 .
Si riscalda elettricamente il gas in A molto lentamente finché la lunghezza della molla diventa $l'_m = 0.3$ m. Calcolare il volume e la temperatura del gas in A e in B e il calore ceduto al gas.

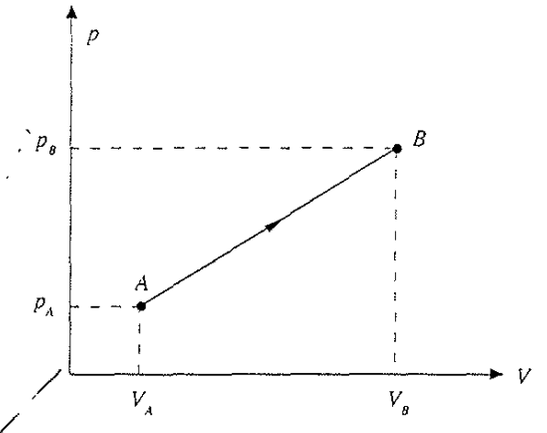


86. In un cilindro a pareti adiabatiche può scorrere senza attrito un pistone, pure adiabatico. Nello stato iniziale due moli di gas ideale monoatomico occupano il volume V_0 e si trovano alla temperatura T_0 . Con una compressione reversibile il volume viene portato al valore $V_1 = V_0/10$, poi viene aperta una valvola nel pistone e il gas si espande liberamente in V_0 . Il lavoro complessivo vale in modulo $W = 27.7 \cdot 10^3$ J. Calcolare la temperatura iniziale e quella finale del gas.



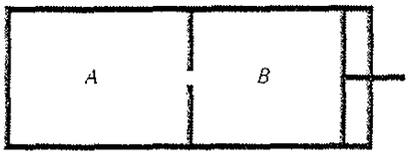
87. Tre moli di gas ideale passano dallo stato A ($V_A = 30 \cdot 10^{-3}$ m^3, $p_A = 2$ bar) allo stato B ($V_B = 100 \cdot 10^{-3}$ m^3, $p_B = 4$ bar) compiendo la trasforma-

zione reversibile indicata in figura.
1) Determinare se il gas è monoatomico o biatomico sapendo che $\Delta S_{AB} = 148.2$ J/K.
2) Calcolare il calore scambiato dal gas.

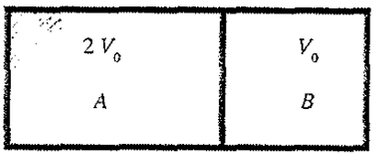


88. Cinque moli di gas ideale biatomico sono contenute, alla temperatura $T_1 = 250°$ C, nel volume V_1 di un cilindro collegato ad un altro cilindro da un rubinetto chiuso. Il gas compie nel primo cilindro un'espasione adiabatica reversibile occupando il volume $V_1' = 4V_1$. Si apre poi il rubinetto e il gas fluisce nel secondo cilindro, di volume $V_2 = V_1'$, inizialmente vuoto. Il sistema è termicamente isolato e con pareti rigide. Calcolare ΔU e ΔS in ciascuna trasformazione.

89. Un recipiente rigido e adiabatico è diviso in due parti eguali, di volume 10^{-2} m^3 ciascuna, da un setto diatermico fisso. In A è contenuta una mole di gas ideale monoatomico a 300 K, in B c'è il vuoto. All'estremità di B c'è un pistone che può scorrere senza attrito. Nel setto viene aperto un foro e il gas si espande fino ad occupare tutto il volume. A equilibrio raggiunto si comprime reversibilmente il gas in A. L'operazione viene ripetuta due volte. Calcolare se il modulo del lavoro fatto sul gas nella seconda compressione è eguale, maggiore o minore di quello della prima, e la temperatura finale.



90. Un contenitore con pareti adiabatiche è diviso in due parti A e B da un setto diatermico fisso; in A, il cui volume è $2V_0$, si trovano $n = 0.57$ moli di gas ideale monoatomico alla temperatura dell'ambiente esterno T_0; in B, il cui volume è $V_0 = 3.24 \cdot 10^{-3}$ m^3, si trova lo stesso numero di moli dello stesso gas alla temperatura T_0. Tramite un opportuno riscaldatore elettrico viene ceduto al sistema il calore Q ed esso si porta alla temperatura T. Successivamente viene praticato un foro nel setto e si attende il raggiungimento dell'equilibrio. Si constata che, passando dallo stato iniziale a quello finale, nella parte A c'è stato un aumento di pressione $\Delta p\ (A) = 1.033 \cdot 10^5$ Pa e che nella parte B c'è stata una diminuzione di pressione $\Delta p\ (B) = -1.054 \cdot 10^5$ Pa. Calcolare i valori di T_0, T e Q.
A causa dell'imperfetta adiabaticità delle pareti il gas nel contenitore, dopo un certo tempo, ritorna alla temperatura T_0 dell'ambiente. Calcolare la variazione di entropia dell'universo in quest'ultima trasformazione.

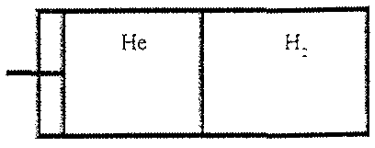


91. Un contenitore adiabatico è diviso in due parti da un setto diatermico fisso; nella parte A ci sono 2 moli di gas ideale monoatomico ($V_A = 20 \cdot 10^{-3}$ m^3), nella parte B 1 mole di gas ideale biatomico ($V_B = 10 \cdot 10^{-3}$ m^3). Il sistema è in equilibrio termico a $T_0 = 290$ K. Con il rapido spostamento di una parete mobile nella parte A il volume V_A viene ridotto a $5 \cdot 10^{-3}$ m^3: il lavoro necessario è $W = -12.7 \cdot 10^3$ J. Ristabilito l'equilibrio termico V_A viene riportato reversibilmente al valore iniziale. Calcolare la temperatura finale del sistema e la variazione di entropia dell'universo in tutto il processo.

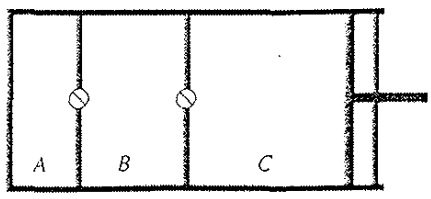
92. Un cilindro con pareti adiabatiche è chiuso da un pistone isolante scorrevole senza attrito. Il volume interno è di $72 \cdot 10^{-3}$ m^3 ed è diviso a metà da una parete diatermica fissa: ambedue le metà sono piene di un gas ideale ($c_V = 16.6$ J/mole K) alla pressione di 1 bar e a 0° C. Si comprime reversibilmente il gas nella parte A fino a che la pressione del gas nella parte B è di 2 bar. Calcolare, per il gas contenuto nella parte A, la variazione di entropia, la variazione di volume, il lavoro subito.

93. Un contenitore adiabatico di volume $2\ V_1$ è diviso in due parti eguali A e B da una parete diatermica fissa. Da entrambe le parti ci sono $n = 3$ moli di gas ideale biatomico alla temperatura $T_1 = 300$ K. Con una trasformazione adiabatica reversibile il gas nella parte A viene compresso spendendo un lavoro $W = -12.47 \cdot 10^3$ J (si ammette pertanto che durante questa trasformazione non ci sia scambio di calore tra il gas in A e il gas in B). Si attende poi il ristabilirsi dell'equilibrio termico alla temperatura T; infine con una trasformazione reversibile si riporta il gas in A al volume iniziale. Calcolare il valore della temperatura T, il valore della temperatura finale del sistema T', la variazione di entropia dell'universo durante tutto il processo.

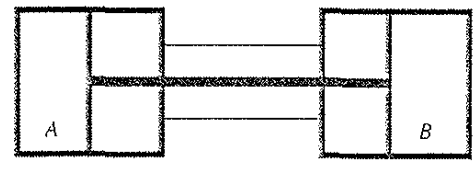
94. Un contenitore adiabatico è diviso in due parti di egual volume $V_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3 da una parete adiabatica fissa; da entrambe le parti pressione e temperatura hanno gli stessi valori $p_0 = 10.13$ bar e $T_0 = 273.2$ K; nella parte di destra c'è idrogeno, nell'altra elio. Tramite un riscaldatore elettrico viene ceduto all'idrogeno il calore $Q = 2 \cdot 10^3$ J. Successivamente l'elio viene compresso in modo adiabatico reversibile fino a che la sua pressione eguaglia quella dell'idrogeno. A seguito del non perfetto isolamento termico dopo un certo tempo i due gas raggiungono l'equilibrio termico. Calcolare la temperatura finale del sistema, la differenza di pressione finale tra le due parti, la variazione complessiva di energia interna e di entropia del sistema.



95. Un cilindro è diviso in tre comparti A, B, C di volumi rispettivamente $10 \cdot 10^{-3}$ m^3, $15 \cdot 10^{-3}$ m^3, $20 \cdot 10^{-3}$ m^3. Inizialmente una mole di gas ideale biatomico si trova nei comparti B e C, collegati da un rubinetto tenuto aperto, alla pressione $p = 2$ bar. Il comparto A, che comunica con B tramite un rubinetto inizialmente chiuso, è vuoto. Il gas viene compresso reversibilmente in B a pressione costante, dopo di che si chiude il rubinetto tra B e C e si apre quello tra A e B, lasciando espandere il gas. A causa del non perfetto isolamento termico il gas si porta infine alla temperatura $T_0 = 300$ K dell'ambiente. Calcolare il calore scambiato in totale, la variazione di energia interna del gas, la variazione di entropia dell'universo.



96. Nel contenitore della figura il gas in A, monoatomico, ha le coordinate termodinamiche $V_0 = 10 \cdot 10^{-3}$ m^3, $p_0 = 10^5$ Pa, $T_0 = 290$ K; esso non può scambiare calore con l'esterno. Il gas in B ha le stesse coordinate, ma è biatomico e può scambiare calore. Il pistone può scorrere senza attrito. Con una trasformazione reversibile il gas in B viene portato alla temperatura T e al volume $V = 12 \cdot 10^{-3}$ m^3. Calcolare il valore di T e il calore ceduto al gas in B.
Successivamente il gas in B viene posto a contatto termico con una sorgente a T_0, mantenendo bloccato il pistone, finché viene raggiunto l'equilibrio termico. Calcolare la pressione del gas in B e la variazione di entropia dell'universo nell'intero processo.
Si sblocca il pistone lasciando che il volume in B ritorni al valore V_0; in quell'istante si blocca di nuovo il pistone e si attende il raggiungimento dell'equilibrio termico con la sorgente a T_0, che è sempre a contatto col gas in B. Se ora si sbloccasse il pistone, da che parte si muoverebbe?



97. Una mole di gas ideale ($c_p = 29.3$ J/mole K) è contenuta in un recipiente chiuso da un pistone mobile. Il recipiente è termicamente isolato e ha una capacità termica $C = 75.4$ J/K. Inizialmente il sistema è in equilibrio alla temperatura $T_A = 300$ K e alla pressione $p_A = 25$ bar. Si opera una espansione reversibile che porta a una pressione $p_B = 1$ bar. Calcolare la temperatura finale T_B del sistema.

98. 0.9 kg di ghiaccio alla temperatura di 250 K vengono introdotti in un recipiente vuoto di 0.1 m^3 di volume, che viene messo in contatto termico con una sorgente a 500 K. Calcolare:
1) la pressione nel recipiente a equilibrio termico raggiunto;
2) le variazioni di entropia dell'acqua e della sorgente.
L'acqua viene poi riportata reversibilmente alla temperatura di 250 K.
3) Calcolare la variazione di entropia dell'universo in tutto il processo. La massa molecolare dell'acqua è 18, il calore specifico è 2093.4 J/kg K per $T < 273.2$ K, 4186.8 J/kg K per $T > 273.2$ K. Il calore latente di fusione è $\lambda_F = 334.4 \cdot 10^3$ J/kg, il calore latente di ebollizione è $\lambda_E = 225.7 \cdot 10^4$ J/kg. Si supponga che l'evaporazione avvenga tutta a 373.2 K e che il vapore si comporti come un gas ideale biatomico.

99. Un blocco di stagno, di massa $m = 1.5$ kg, è nella temperatura ambiente $T_A = 20°$ C. Esso viene posto a contatto con una sorgente alla temperatura di fusione dello stagno $T_F = 232°$ C. A equilibrio raggiunto la variazione di entropia dell'universo vale $\Delta S_u = 42.2$ J/K.
1) Calcolare il calore specifico dello stagno.
Successivamente lo stagno viene posto a contatto con un cilindro pieno di gas ideale, a temperatura T_A, chiuso da un pistone mobile. Si osserva che il gas si espande e che, restando alla temperatura T_A, compie un lavoro $W = 160.1 \cdot 10^3$ J.
2) Calcolare il calore latente di fusione dello stagno.

100. Un gas ideale biatomico, a pressione $p_0 = 1.013$ bar, volume $V_0 = 10 \cdot 10^{-3}$ m^3, temperatura $T_0 = 293.2$ K, viene compresso adiabaticamente e reversibilmente fino a $V = 1.5 \cdot 10^{-3}$ m^3. Dopo un certo tempo il gas ritorna alla temperatura iniziale T_0 a causa dell'imperfetto isolamento termico. Calcolare la massima pressione raggiunta, la massima temperatura, la pressione finale del gas, la variazione di entropia del gas e l'energia inutilizzabile.

101. Una mole di gas ideale passa dallo stato A allo stato B con una trasformazione isobara, in cui $\Delta H = 2269.72$ J, $\Delta U = 1621.23$ J e $\Delta S = 6.931$ J/K. Determinare i valori di T_A e T_B.

102. Un frigorifero reversibile funziona tra $T_2 = 25°$ C e $T_1 = -4°$ C, assorbendo $W = -400$ J in un ciclo. Vi si pone all'interno $m = 1$ kg di acqua a 20° C. Calcolare quanti cicli deve compiere la macchina per trasformare tutta l'acqua in ghiaccio a $-4°$ C.

103. Una macchina termica reversibile lavora tra due sorgenti, una costituita dall'ambiente a $T_1 = 290$ K e l'altra da una grande massa di stagno fuso alla temperatura T_2 di fusione. Ad ogni ciclo della macchina solidificano 8.4 grammi di stagno, viene compiuto il lavoro $W = 209.6$ J e viene ceduto alla sorgente a T_1 il calore $Q_1 = -282.7$ J. Calcolare i valori di T_2 e del calore latente di fusione dello stagno.

104. Una mole di gas ideale ($p_0 = 1$ bar, $V_0 = 30 \cdot 10^{-3}$ m^3) assorbe reversibilmente da una sorgente a T_0 il calore $Q = 4186$ J. Calcolare il volume finale occupato dal gas.
Il lavoro prodotto dal gas durante l'espansione viene interamente ceduto sotto forma di calore a una sorgente a $T_1 = 600$ K e viene poi sottratto alla sorgente da una macchina reversibile che lavora tra T_1 e T_0. Calcolare il lavoro prodotto dalla macchina, la variazione di entropia dell'universo nell'intero processo, l'energia inutilizzabile.

105. Una macchina termica irreversibile lavora tra due sorgenti alle temperature $T_2 = 434.5$ K e $T_1 = 290$ K. La sostanza lavorante è costituita da $n = 1.2$ moli di gas ideale biatomico e il ciclo ha le seguenti caratteristiche. Il gas viene fatto espandere reversibilmente a contatto con la sorgente a T_2 dal volume $V_A = 5 \cdot 10^{-3}$ m^3 al volume V_B. A questo punto si interrompe il contatto termico e si fa espandere il gas in modo adiabatico irreversibile fino al volume V_C e alla temperatura T_1. Si pone quindi il gas in contatto termico con la sorgente a T_1 e lo si comprime reversibilmente fino al volume V_A. Infine si rimette il gas a contatto termico con la sorgente a T_2 mantenendo costante il volume. Il rendimento del ciclo vale 0.216 e ΔS_u in un ciclo è pari a 2.67 J/K. Calcolare i calori scambiati dal gas in un ciclo e i valori dei volumi V_B e V_C.

106. Una macchina termica reversibile assorbe $Q_2 = 2 \cdot 10^5$ J da una sorgente a $T_2 = 973.2$ K, cede Q_1 a una sorgente a $T_1 = 573.2$ K e $Q_3 = Q_1$ a una sorgente a temperatura $T_3 = 373.2$ K. Calcolare

il valore di Q_1, il lavoro totale, il rendimento e le variazioni di entropia di ciascuna sorgente.

107. Una macchina termica reversibile lavora con quattro sorgenti. Dalla prima, a temperatura $T_1 = 500$ K, la macchina assorbe il calore $Q_1 = 5000$ J, alla quarta sorgente, a temperatura $T_4 = 280$ K, la macchina cede il calore $Q_4 = -1400$ J. Con la seconda e terza sorgente, rispettivamente alle temperature $T_2 = 400$ K e $T_3 = 300$ K, la macchina scambia i calori Q_2 e $Q_3 = -Q_2$. Calcolare il rendimento della macchina.

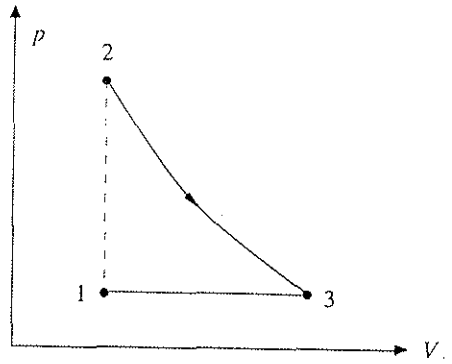
108. Un gas ideale è contenuto nel volume $V_A = 39.84 \cdot 10^{-3}$ m^3 alla pressione $p_A = 10^5$ Pa e alla temperatura $T_A = 300$ K. Con una compressione isoterma il gas viene portato al volume $V_B = V_A/3$ assorbendo dall'esterno il lavoro $W_{AB} = -4482$ J. Mantenendo V_B costante il gas è posto a contatto termico con una sorgente a temperatura $T_C = 600$ K fino al raggiungimento dell'equilibrio. Successivamente, in modo adiabatico irreversibile, il gas viene portato al volume V_A e ad una temperatura $T_D > T_A$: in questa espansione il gas compie il lavoro $W_{CD} = 5976$ J. Infine, mantenendo costante V_A, il gas viene riportato allo stato iniziale ponendolo a contatto con una sorgente a temperatura T_A. Il rendimento del ciclo è $\eta = 0.15$.
1) Calcolare Q_{AB}, Q_{BC}, Q_{DA}.
2) Determinare se il gas è monoatomico o biatomico.
3) Calcolare il valore di T_D, la variazione di entropia ΔS_{CD} del gas e l'energia inutilizzabile in un ciclo.

109. Una mole di gas ideale biatomico compie un ciclo reversibile costituito da una espansione adiabatica da $T_A = 600$ K a $T_B = 300$ K, una compressione isoterma fino al volume iniziale V_A ed una trasformazione isocora fino a che la temperatura ritorna al valore T_A. Calcolare il rendimento del ciclo.

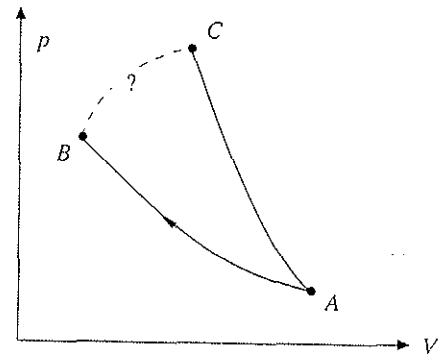
110. Una mole di gas ideale descrive il ciclo in figura: 1–2 è un'isocora irreversibile ottenuta ponendo il gas, inizialmente nello stato 1, a contatto termico con una sorgente a $T_2 = 800$ K; 2–3 è un'isoterma reversibile, 3–1 un'isobara reversibile in cui $V_3/V_2 = 2$. Il calore specifico a pressione costante del gas può essere scritto

$$\frac{c_p}{R} = 2 + 0.02\,T.$$

Determinare il calore assorbito durante il ciclo e il rendimento.



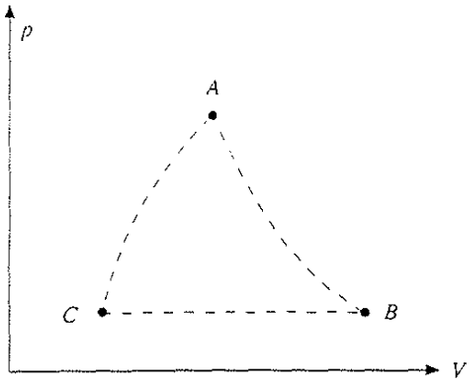
111. Un gas ideale biatomico si trova in equilibrio nello stato A ($p_A = 1$ bar, $V_A = 20 \cdot 10^{-3}$ m^3, $T_A = 288$ K). Con una compressione isoterma reversibile il volume viene ridotto a $V_B = 5 \cdot 10^{-3}$ m^3; dallo stato B il gas passa successivamente allo stato C e infine di qui ritorna allo stato A con una espansione adiabatica reversibile. Il gas assorbe nella trasformazione $B\,C$ il calore $Q_{BC} = 4560$ J; la variazione di entropia dell'ambiente nella stessa trasformazione è $\Delta S_{amb,BC} = -9.63$ J/K. Calcolare il lavoro scambiato in un ciclo e il rendimento. Dire inoltre se la trasformazione $B\,C$ è reversibile o irreversibile.



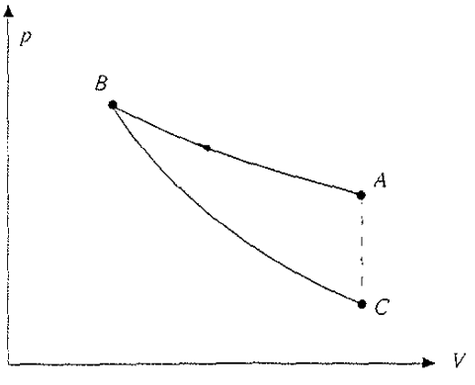
112. Cinque moli di gas ideale monoatomico si trovano inizialmente nello stato di equilibrio A; di qui con una adiabatica irreversibile il gas si porta nello stato B ($T_B = T_A$). La successiva trasformazione $B\,C$ è un'isobara irreversibile. Infine il gas ritorna nello stato iniziale con una generica trasformazione irreversibile. Si conoscono $Q_{BC} = -15.6 \cdot 10^3$ J e $W_{CA} = 8.74 \cdot 10^3$ J. I volumi degli stati A, B, C obbediscono alle relazioni

$$V_B/V_C = 1.5 \quad , \quad V_B - V_A = V_A - V_C.$$

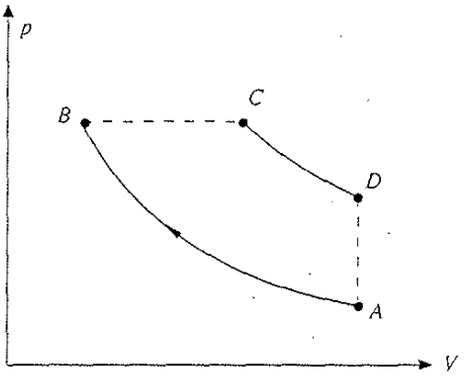
Calcolare il rendimento del ciclo e la variazione di entropia del gas nella trasformazione $C\,A$.



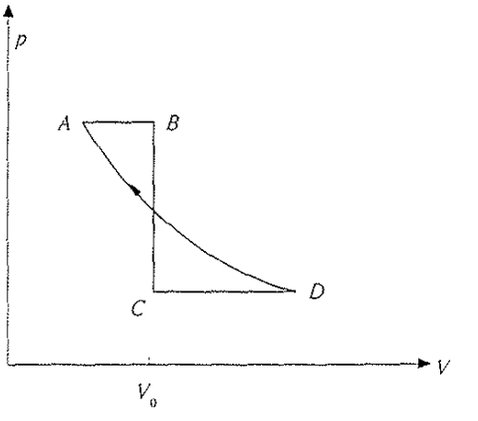
113. Un cilindro con pistone, contenente 3 moli di gas ideale biatomico, si trova in equilibrio termico con 1 kg d'acqua a 373.2 K. Il gas viene compresso in modo isotermo reversibile, sempre a contatto con l'acqua, in modo che il suo volume si riduca a 1/3 del volume iniziale. Un'adiabatica reversibile riporta il gas al suo volume iniziale e infine anche la temperatura viene riportata a 373.2 K ponendo di nuovo il cilindro in contatto termico con l'acqua e mantenendo costante il volume. Calcolare:
1) il lavoro richiesto per ogni ciclo;
2) quanti cicli sono necessari per fare evaporare tutta l'acqua (calore latente $\lambda = 225.7 \cdot 10^4$ J/kg);
3) le variazioni di entropia del gas e dell'acqua durante l'isocora;
4) l'energia inutilizzabile in un ciclo.



114. Due moli di gas ideale monoatomico, inizialmente nello stato di volume $V_A = 5 \cdot 10^{-3}$ m^3 e temperatura $T_A = 273.2$ K, eseguono una trasformazione isoterma reversibile, a contatto con una miscela d'acqua e ghiaccio, fino al volume $V_B = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3. Successivamente il gas viene posto a contatto con una sorgente a temperatura $T_C = 519$ K fino a raggiungere, a pressione costante, l'equilibrio termico. Quindi, per mezzo di una adiabatica reversibile, il gas ritorna al volume iniziale e infine, posto a contatto con la miscela di acqua e ghiaccio, ritorna tramite un'isocora anche alla temperatura iniziale. Calcolare per un ciclo
1) quanti grammi di ghiaccio si sciolgono ($\lambda = 334.4$ J/g);
2) il lavoro compiuto dal gas e il rendimento del ciclo;
3) la variazione di entropia dell'universo.

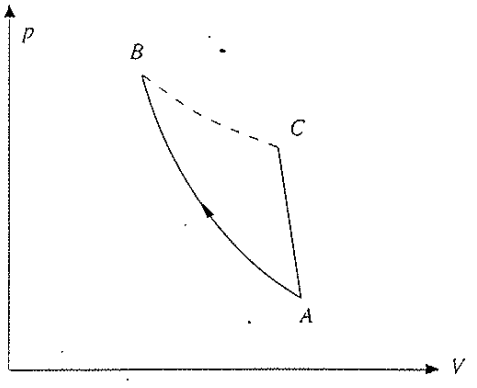


115. Un gas ideale biatomico compie il ciclo descritto in figura ($D\,A$ è una isoterma). I valori dei volumi sono $V_1 = 10^{-3}$ m^3, $V_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ m^3. Calcolare per quale valore di V_0 il lavoro complessivo è nullo. Calcolare inoltre il rapporto tra la variazione complessiva dell'entropia lungo le isobare e la variazione dell'entropia lungo l'isocora.

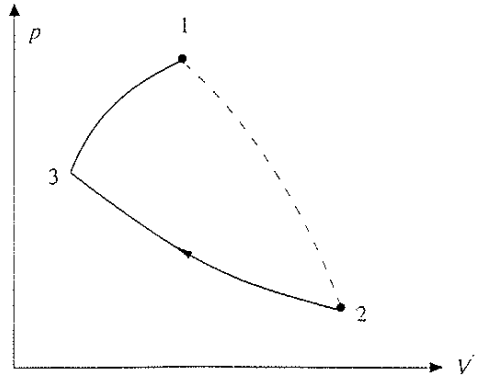


116. $32.62 \cdot 10^{-2}$ moli di gas ideale biatomico descrivono il seguente ciclo:

a) dallo stato iniziale A ($p_A = 10^5$ Pa , $V_A = 8 \cdot 10^{-3}$ m^3) trasformazione adiabatica reversibile fino allo stato B ($V_B = 4 \cdot 10^{-3}$ m^3);
b) dallo stato B trasformazione isoterma irreversibile fino allo stato C ($V_C = 7 \cdot 10^{-3}$ m^3); durante la quale il gas assorbe il calore $Q_1 = 550$ J;
c) dallo stato C allo stato iniziale A trasformazione reversibile rettilinea in cui la pressione decresce linearmente col volume.
Calcolare il rendimento del ciclo e la variazione di entropia dell'universo in un ciclo.

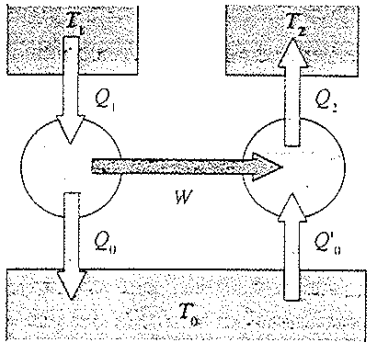


117. Una mole di gas ideale biatomico, inizialmente in equilibrio alla pressione p_1 e al volume $V_1 = 12 \cdot 10^{-3}$ m^3, si espande adiabaticamente contro la pressione esterna costante $p_2 = 1.013$ bar fino al volume $V_2 = 25 \cdot 10^{-3}$ m^3. Il gas viene poi compresso isotermicamente e reversibilmente e in tale processo cede il calore $Q_{2,3} = -6280$ J. Infine il gas ritorna allo stato iniziale mediante una trasformazione reversibile in cui compie il lavoro $W_{3,1} = 6500$ J. Calcolare i valori di T_1, V_3 , $Q_{3,1}$ e la variazione di entropia dell'universo in un ciclo.

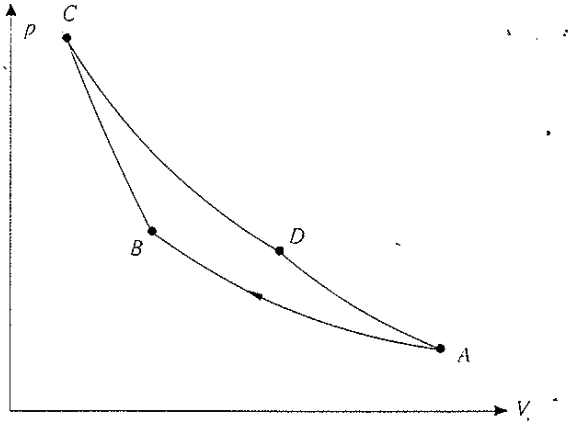


118. Una macchina frigorifera compie 3 cicli al secondo assorbendo la potenza $P = 1256$ W. Essa lavora scambiando calore soltanto con due sorgenti alle temperature $T_1 = 200$ K e $T_2 = 300$ K. Sapendo che ad ogni ciclo l'entropia dell'universo aumenta di $\Delta S_u = 0.7$ J/K si determini il tempo necessario per sottrarre alla sorgente fredda il calore $Q = 10^4$ J. Si ripeta il calcolo nel caso in cui la macchina lavori in condizioni di reversibilità, assorbendo la stessa potenza.

119. Una macchina termica preleva da una sorgente a $T_1 = 323$ K il calore Q_1 , produce il lavoro W e cede il calore Q_0 ad una sorgente a $T_0 = 280$ K. Il lavoro W viene integralmente usato per far funzionare un frigorifero che preleva a T_0 il calore Q_0' e cede ad una sorgente a $T_2 = 373$ K il calore Q_2. Si sa che al termine di un ciclo delle due macchine $\Delta S_u = 87.1$ J/K e $Q_0' + Q_0 = -2.95 \cdot 10^5$ J. Calcolare i valori di Q_1 e Q_2.



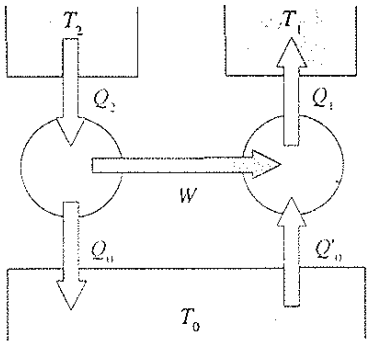
120. Un gas ideale monoatomico descrive un ciclo di Carnot. Nello stato A $V_A = 10 \cdot 10^{-3}$ m^3, $p_A = 1.013$ bar, $T_1 = 290$ K. Il calore assorbito in un ciclo è $Q_2 = 8933$ J e il lavoro prodotto è $W =$



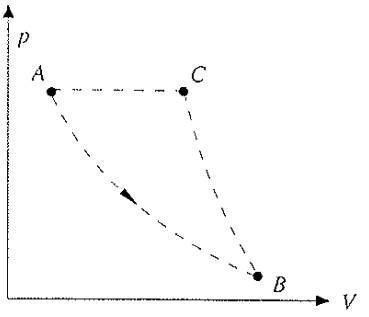
1930 J. Calcolare la temperatura superiore T_2 e il volume minimo del gas.
Se il contenitore è un cilindro di sezione $S = 200$ cm^2 e se tra pistone e cilindro c'è una forza di attrito $F = 10^3$ N, calcolare la diminuzione di rendimento.

121. 0.2 moli di gas ideale biatomico sono chiuse dentro un contenitore di volume V_A alla pressione $p_A = 1.013$ bar e alla temperatura ambiente $T_A = 293.2$ K. Il volume viene rapidamente portato al valore $V_B = 3\ V_A$; raggiunto l'equilibrio si riporta il gas, a volume costante, alla temperatura T_A assorbendo dall'ambiente il calore $Q = 355.9$ J. Infine con una trasformazione isoterma reversibile alla temperatura ambiente il gas ritorna allo stato iniziale. Calcolare la variazione di entropia del gas nella prima trasformazione, il lavoro complessivo scambiato dal gas, la variazione di entropia dell'universo al termine del ciclo.

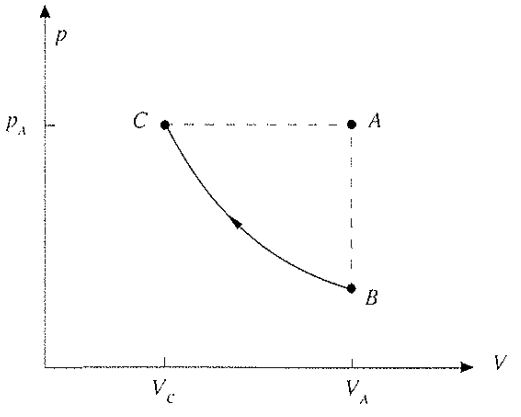
122. Nel complesso in figura le temperature sono $T_2 = 500$ K, $T_1 = 300$ K, $T_0 = 275$ K; il valore assoluto del lavoro prodotto dalla prima macchina e assorbito dalla seconda è $|W| = 6 \cdot 10^3$ J. Le macchine sono sincrone e ad ogni ciclo completo dell'insieme l'energia inutilizzabile vale $E_{IN} = 3 \cdot 10^3$ J. Infine si sa che il rapporto Q_1/Q'_0 vale in modulo 1.091. Determinare se una delle due macchine è reversibile e calcolare il rendimento della macchina a sinistra e il valore di Q_1.



123. Tre moli di gas ideale biatomico sono in equilibrio alla pressione $p_A = 2 \cdot 10^5$ Pa e alla temperatura $T_A = 290$ K. Da questo stato il gas si porta, con una espansione adiabatica nel vuoto, nello stato di equilibrio B con $V_B = 0.144$ m^3 e successivamente, con una compressione adiabatica irreversibile, nello stato di equilibrio C: nella trasformazione $B\ C$ viene compiuto sul gas il lavoro $W_{BC} = -3.7 \cdot 10^4$ J. Infine il gas viene posto a contatto termico con una sorgente a temperatura T_A e ritorna, in modo isobaro, allo stato A. Calcolare il valore di V_C e la variazione di entropia dell'universo nel ciclo.



124. Un cilindro chiuso da un pistone scorrevole senza attrito contiene $V_A = 3 \cdot 10^{-3}$ m^3 di aria in equilibrio con l'ambiente ($T_A = 300$ K, $p_A = 1$ bar). Il cilindro col pistone bloccato viene posto a contatto con una sorgente a $T_B = 250$ K fino a raggiungere l'equilibrio; si sposta ora molto lentamente il pistone, mantenendo il contatto termico, fino a che la pressione ritorna a p_A. Tolto il contatto termico con la sorgente si lascia libero il pistone fino a che il sistema non ritorna in equilibrio alla temperatura T_A. Calcolare:
1) i calori scambiati dall'aria nei tre processi e il lavoro complessivo;
2) le variazioni di entropia dell'aria nei tre processi;
3) la variazione di entropia dell'universo in un ciclo, se la capacità termica del cilindro e del pistone è $C = 25$ J/K.



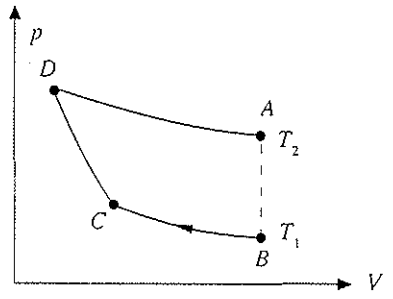
125. Due moli di gas ideale biatomico alla temperatura $T_2 = 100$°C vengono messe in contatto ter-

mico con un blocco di ghiaccio di massa m = 2.18 kg a temperatura T_1 = 0° C, mantenendo costante il volume. Quando il gas si è portato a T_1, il suo volume viene ridotto a metà in modo reversibile e restando sempre a contatto termico col ghiaccio. Successivamente il gas viene riportato a T_2 con una compressione adiabatica reversibile e infine anche il volume ritorna al valore iniziale con una espansione reversibile a contatto termico con una sorgente a T_2. Calcolare:

1) la quantità di ghiaccio sciolta in un ciclo ($\lambda = 334.4 \cdot 10^3$ J/kg);

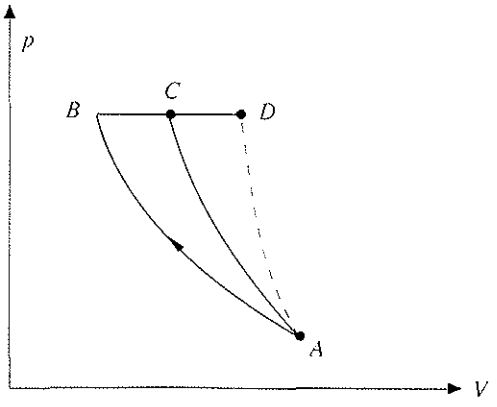
2) il lavoro totale fino al completo scioglimento del ghiaccio;

3) la variazione di entropia dell'universo in un ciclo.



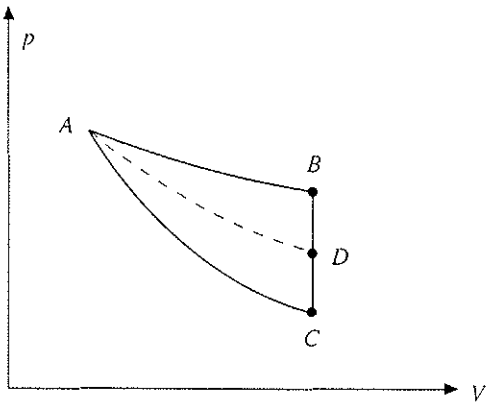
126. 0.86 moli di gas ideale biatomico occupano il volume $V_A = 20 \cdot 10^{-3}$ m^3 alla temperatura T_A = 280 K. Con una trasformazione isoterma reversibile il gas viene portato dallo stato A allo stato B con $V_B = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3. Da B si passa con una trasformazione isobara reversibile a uno stato C tale che con una successiva trasformazione adiabatica reversibile si possa ritornare allo stato iniziale A. Calcolare i valori di T_C e V_C e il rendimento del ciclo.

Si consideri ora uno stato D, con pressione $p_D = p_B$ e volume $V_D = \frac{V_A + V_C}{2}$, e si prenda in esame il ciclo $ABDA$ in cui la trasformazione DA sia adiabatica irreversibile, mentre AB e BD restano isoterma e isobara reversibili. Determinare se tale ciclo $ABDA$ è fisicamente possibile.



127. Una mole di gas ideale descrive il seguente ciclo: dallo stato iniziale A (T_A = 560 K) passa allo stato B con una trasformazione isoterma reversibile; di qui con una trasformazione isocora reversibile passa allo stato C (T_C = 280 K); infine dallo stato C ritorna allo stato A con una trasformazione adiabatica reversibile. Calcolare il rendimento del ciclo.

Si consideri lo stato D (T_D = 420 K) sull'isocora B C e si supponga che il gas descriva invece il ciclo $ADCA$ in cui la trasformazione A D è adiabatica irreversibile; in tale ciclo ΔS_{amb} = 8.4 J/K. Determinare se il gas è monoatomico o biatomico e calcolare il lavoro complessivo svolto nel ciclo $ADCA$.



GUIDA ALLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI. RISULTATI NUMERICI

81. Il lavoro viene calcolato con un integrale, utilizzando la dipendenza della pressione dal volume, mentre tramite il primo principio si ottiene il valore del calore scambiato.
R : $W = 6.32$ kJ , $Q = 31.97$ kJ ($p_2 = 4.56$ bar).

82. L'equazione della trasformazione è $p = a\,V + b$, dove le costanti a e b vengono determinate tramite le coordinate termodinamiche degli stati A e B. Utilizzando l'equazione di stato si ottiene $T = T\,(p, V)$. Si applica la condizione $d\,T/d\,V = 0$, verificando che $d^{\,2}T/dV^{\,2} < 0$ e si ottiene il valore massimo T^*. Occorre verificare anche che la soluzione si trovi all'interno del segmento AB.
R: $T^* = (p_A V_B - p_B V_A)^2 / [\,4\,n\,R\,(p_A - p_B)\,(V_B - V_A)]$.

83. All'equilibrio termico tra il gas e il corpo si ha $C\,(T_1 - T_0) = -\,nc_V\,(T_1 - T)$. Il lavoro del gas nell'adiabatica irreversibile è svolto contro la pressione esterna costante: $W = p\,(V_2 - V) = -\,n\,c_V(T_2 - T_1)$. Di qui si ricava prima V_2, poi T_2 con l'equazione di stato, quindi T_1 e infine C. La variazione di entropia del gas si calcola, noti gli stati iniziali e finali, applicando le relazioni generali.
R: $C = 413$ J/K, $\Delta S = 6.5$ J/K.

84. Si valuti inizialmente se tutto il ghiaccio può fondere, dal confronto tra il calore che può cedere l'acqua e quello necessario per fondere tutto il ghiaccio. Si ottiene che solo $M' = 17$ Kg di ghiaccio fondono e quindi la temperatura di equilibrio è quella di fusione.
R: $T_e = 0$°C ,

$$\Delta S_u = mc \ln \frac{T_e}{T_1} + M \frac{c}{2} \ln \frac{T_e}{T_2} + \frac{M'\lambda}{T_e} = 723 \text{ J/K}.$$

85. In equilibrio $p_0 = k\,\Delta l_m / S$, $V_0 = S\,(l - l_m)/2$, $T_0 = p_0 V_0 / n R$. Dopo il riscaldamento $p = k\,\Delta l'_m / S$; il volume del gas in B si calcola applicando l'equazione delle adiabatiche reversibili e da questo si ricava geometricamente il volume del gas in A. Dal primo principio, tenendo conto del lavoro della molla, si calcola il calore assorbito.
R: $p_0 = 0.5$ bar , $T_0 = 210.5$ K ,
$V_A = 10.73 \cdot 10^{-3}$ m^3 , $T_A = 645.3$ K ,
$V_B = 4.27 \cdot 10^{-3}$ m^3 , $T_B = 256.8$ K ,
$Q = 2075$ J .

86. La prima trasformazione è una adiabatica reversibile e applicando la relativa equazione si ottiene $T_1 = 10^{\gamma-1}\,T_0$. La seconda trasformazione è un'espansione libera ($W = Q = 0$, T = costante). Quindi il lavoro complessivo è $W = n\,c_V\,(T_1 - T_0)$.
R: $T_0 = 304.7$ K , $T_1 = 1415.3$ K .

87. Si utilizzi l'espressione generale della variazione di entropia di un gas ideale in funzione di p e V e la relazione di Mayer: si trova $c_V = 20.8$ J/mole K. Il calore si calcola con il primo principio, sfruttando il fatto che il lavoro è dato dall'area sotto la trasformazione.
R: il gas è biatomico, $Q = 106$ kJ.

88. Dall'equazione delle adiabatiche reversibili $T'_1 = 300.5$ K; $\Delta U_1 = n\,c_V\,(T'_1 - T_1)$ e $\Delta S_1 = 0$. La seconda trasformazione è un'espansione libera, $\Delta U_2 = 0$ e ΔS_2 si calcola lungo l'isoterma reversibile con gli stessi estremi.
R: $\Delta U_1 = -\,23144$ J , $\Delta S_2 = 28.8$ J/K .

89. Nella prima trasformazione (espansione libera) il lavoro è nullo e la temperatura costante. Nella successiva compressione adiabatica reversibile si ottiene $T_1 = 476.3$ K e $|\,W_1\,| = n\,c_V\,\Delta T$. Nella seconda espansione $W = 0$ e la temperatura si mantiene costante al valore T_1 ; infine dopo la seconda compressione il gas raggiunge la temperatura $T_2 = 756.3$ K e $|\,W_2\,| = n\,c_V\,\Delta T$.
R: $|\,W_1\,| = 2198.6$ J, $|\,W_2\,| = 3491.9$ J.

90. Si esprimano, tramite l'equazione di stato, i valori delle pressioni iniziali e di quella finale (in questo caso il numero di moli è $2\,n$). Note le variazioni di pressione si ottengono T_0 e T. Il lavoro meccanico è nullo e quindi $Q = \Delta U$. Nell'ultima trasformazione Q è assorbito dall'ambiente e il gas torna con una trasformazione isocora alla temperatura iniziale.
R: $T_0 = 285.4$ K , $T = 320.0$ K ,

$Q = 491.9$ J ,

$$\Delta S_u = 2\, n\, c_V \ln \frac{T_0}{T} + \frac{Q}{T_0} = 0.09 \ \frac{\text{J}}{\text{K}} .$$

91. La prima trasformazione è una compressione adiabatica irreversibile; da $W = -\Delta U$ si ottiene $T_1 = 799$ K. La temperatura di equilibrio è data da

$$T = (2\, c_V^A T_1 + c_V^B T_0)/(2\, c_V^A + c_V^B) = 567.6 \text{ K}.$$

La successiva trasformazione è reversibile e quindi la variazione di entropia complessiva del gas nei due recipienti è nulla:

$$\Delta S = n_A c_V^A \ln \frac{T_F}{T} + n_A R \ln \frac{V_F^A}{V_A} + n_B c_V^B \ln \frac{T_F}{T} = 0$$

da cui si ricava T_F. La variazione di entropia dell'universo nel processo complessivo, in cui i due gas si trovano alla fine ad occupare il volume iniziale, ma con una variazione di temperatura da T_0 a T_F, è data da

$$\Delta S_u = n_A c_V^A \ln \frac{T_F}{T_0} + n_B c_V^B \ln \frac{T_F}{T_0} .$$

R: $T_F = 342.9$ K , $\Delta S_u = 7.66$ J/K .

92. Il gas in B compie un'isocora reversibile, ricevendo calore da A: $T/T_0 = p/p_0$ da cui $T = 546.4$ K, temperatura finale di tutto il sistema. Nel complesso la trasformazione è adiabatica reversibile per cui $\Delta S = 0$ e quindi $\Delta S_A = -\Delta S_B = -\, n\, c_V \ln (T/T_0)$, dove n si determina con l'equazione di stato ($n = 1.58$ moli). D'altra parte ΔS_A può essere calcolato con l'espressione generale valida per i gas ideali, da cui si ricava V_A/V_0 ovvero V_A. Infine $W = -\Delta U = -2\, n\, c_V (T - T_0)$.
R: $\Delta S_A = -18.2$ J/K ,
$V_A - V_0 = -33.73 \cdot 10^{-3}$ m^3 , $W = -14331$ J.

93. Nella trasformazione adiabatica reversibile in A $W = -\Delta U$, da cui $T_2 = 500$ K, temperatura finale del gas in A; inoltre $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ e quindi $V_1/V_2 = 3.586$. Dall'equazione del successivo equilibrio termico si ottiene T. L'ultima trasformazione è, per il sistema, adiabatica reversibile per cui

$$\Delta S = n\, c_V \ln \frac{T'}{T} + n\, c_V \ln \frac{T'}{T} + n R \ln \frac{V_1}{V_2} = 0$$

e da questo si calcola T'. La variazione di entropia dell'universo è dovuta all'unica trasformazione irreversibile, quella che porta all'equilibrio termico dopo la prima trasformazione:

$$\Delta S_u = n\, c_V \ln \frac{T}{T_2} + n\, c_V \ln \frac{T}{T_1} .$$

R: $T = 400$ K , $T = 310$ K , $\Delta S_u = 4.1$ J/K.

94. L'idrogeno assorbe, in una trasformazione isocora, il calore Q portandosi alla temperatura $T_1 = 381.1$ K e alla pressione $p_1 = 14.13$ bar. A seguito della trasformazione adiabatica reversibile l'elio occupa il volume $V_2 = 1.64 \cdot 10^{-3}$ m^3 alla temperatura $T_2 = 312.5$ K (e $p_2 = p_1$). Dall'equazione dell'equilibrio termico si ricava T_F e quindi p (H_2) = 13.18 bar e p (He) = 16.07 bar. La variazione di energia interna è $\Delta U = \Delta U$ (H_2) + ΔU (He) e analogamente la variazione di entropia è data dalla variazione di entropia dell'idrogeno, che passa da T_0 a T_F a volume costante, sommata a quella dell'elio, che sempre a volume costante passa da T_2 a T_F (la compressione dell'elio è isoentropica).
R: $T_F = 355.4$ K , $\Delta p = 2.89$ bar ,
$\Delta U = 2438.4$ J , $\Delta S = 6.31$ J/K .

95. La temperatura iniziale del gas nel volume $V_B + V_C$ è $T_1 = 842$ K; dopo la compressione isobara $T_2 = 361$ K. In questa trasformazione $\Delta U = -9998$ J e $W = p\, \Delta V = -p\, V_C = -4000$ J e il gas cede $Q_1 = -13998$ J. Nell'espansione libera il gas passa dal volume V_B al volume $V_A + V_B$, a temperatura costante (T_2). Infine il gas si raffredda irreversibilmente a volume costante cedendo il calore $Q_2 = -1268$ J. La variazione di energia interna del gas è $\Delta U = n\, c_V (T_0 - T_1)$. La variazione di entropia dell'universo è data dalla somma della variazione di entropia del gas nell'espansione libera e nell'isocora irreversibile e di quella dell'ambiente nell'isocora:

$$\Delta S_u = n R \ln \frac{V_A + V_B}{V_B} + n\, c_V \ln \frac{T_0}{T_2} + \frac{n\, c_V (T_2 - T_0)}{T_0} .$$

R: $Q = Q_1 + Q_2 = -15266$ J , $\Delta U = -11265$ J , $\Delta S_u = 4.63$ J/K .

96. Il numero di moli in A e in B è $n = 0.415$ (dall'equazione di stato). La prima trasformazione, per il gas in A, è adiabatica reversibile: essendo $V_A = 8 \cdot 10^{-3}$ m^3 si ricava $p_A = 1.45 \cdot 10^5$ Pa, $T_A = 336.2$ K. In B $p_B = p_A$, $V_B = 12 \cdot 10^{-3}$ m^3 e $T_B = 504.3$ K. Dato che il lavoro fatto dal gas in B è $W_B = -W_A = \Delta U_A$, il calore assorbito dal gas in B è $Q = \Delta U_B + W_B = \Delta U_B + \Delta U_A$. La seconda trasformazione, che si riferisce solo al gas in B, è isocora irreversibile: $p_B'/p_B = T_0/T_B$.

$$\Delta S_u = (\Delta S^B_{gas} + \Delta S_{amb})_{isoc} =$$

$$= n c_V^B \ln \frac{T_0}{T} + n c_V \frac{T_B - T_0}{T_0} .$$

Nell'ultima trasformazione il gas in B ritorna nello stato iniziale di coordinate p_0, V_0, T_0, mentre il gas in A compie una trasformazione adiabatica irreversibile fino al volume iniziale V_0, ma non riassume i valori p_0 e T_0 perché deve essere $\Delta S > 0$: pressione e temperature sono maggiore di p_0 e T_0 e pertanto il pistone si sposta verso destra.

97. La trasformazione complessiva è una trasformazione adiabatica reversibile per cui $\Delta S = \Delta S_{gas} + \Delta S_{rec} = 0$. Si osservi che il gas non compie una trasformazione adiabatica perché scambia calore con il recipiente. Pertanto

$$\Delta S_u = n c_p \ln \frac{T_B}{T_A} - n R \ln \frac{p_B}{p_A} + C \ln \frac{T_B}{T_A} = 0 .$$

R: $T_B = 232.3$ K .

98. Il numero di moli d'acqua è $n = 50$ e quindi dall'equazione di stato, applicata al vapore considerato gas ideale, si ottiene p per $T = 500$ K. L'acqua nel passaggio da $T_1 = 250$ K a $T_2 = 273.2$ K, nella fase di ghiaccio, assorbe il calore $Q_1 = 43.7$ KJ, nella fusione $Q_2 = 301.0$ KJ, nel passaggio da T_2 a $T_3 = 373.2$ K, nella fase liquida, $Q_3 = 376.8$ KJ, nell'ebollizione $Q_4 = 2031.3$ KJ e infine nel riscaldamento del vapore fino a $T = 500$ K $Q_5 = 131.8$ KJ (trasformazione isocora). In totale $Q = 2884.6$ KJ, ceduti dalla sorgente a temperatura T. Quindi $\Delta S_{amb} = -Q/T$, mentre per l'acqua bisogna sommare cinque contributi:

$$\Delta S_a = m \frac{c}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + m c \ln \frac{T_3}{T_2} + \frac{Q_4}{T_3} +$$

$$+ n c_V \ln \frac{T}{T_3} .$$

$\Delta S_u = \Delta S_a + \Delta S_{amb}$ perché non c'è contributo nel processo reversibile.

R: $p = 20.8$ bar , $\Delta S_a = 8192.2$ J/K , $\Delta S_{amb} = -5769.2$ J/K , $\Delta S_u = 2422.0$ J/K.

99. A equilibrio raggiunto lo stagno è fuso, avendo assorbito dalla sorgente il calore $Q = m c (T_F - T_A) + m \lambda$. Si scriva la variazione di entropia dello stagno, che subisce prima un riscaldamento da T_A a T_F e poi il cambiamento di fase alla temperatura costante T_F, e quella della sorgente che cede Q; eguagliando la variazione totale a ΔS_u si ricava il calore specifico dello stagno. Nel secondo processo il gas assorbe dallo stagno, che ritorna alla temperatura T_A, il calore Q e compie il lavoro W. Noto W e avendo calcolato prima c si ottiene λ.

R: $c = 226.9$ J/kg K , $\lambda = 5.86 \cdot 10^4$ J/kg.

100. Dall'equazione delle adiabatiche reversibili si ottengono p_{max} e T_{max}; il numero di moli è $n = p_0 V_0 / R T$ e $p_{fin} = n R T_0 / V$. La variazione di entropia del gas si ha nella trasformazione isocora reversibile con cui il gas ritorna alla temperatura iniziale. In questa trasformazione $\Delta S_{amb} = n c_V (T_{max} - T_0)/T_0$, $\Delta S_u = \Delta_{gas} + \Delta S_{amb}$ e l'energia inutilizzabile vale $E_{IN} = T_0 \Delta S_u$.

R: $p_{max} = 14.424$ bar , $T_{max} = 625.6$ K , $p_{fin} = 6.760$ bar , $\Delta S_{gas} = -6.55$ J/K , $E_{IN} = 952.9$ J.

101. Ricordando che $\Delta H = c_p (T_B - T_A)$, $\Delta U = c_V (T_B - T_A)$, $\Delta S = c_p \ln T_B / T_A$, si ha $\Delta H / \Delta U = \gamma = 1.4$ per cui il gas è biatomico e $T_B - T_A = 78$ K. Inoltre $T_B/T_A = e^{\Delta S/c_p} = 1.2689$.

R: $T_A = 290$ K , $T_B = 368$ K .

102. Il rendimento di una macchina reversibile che lavora tra $T_2 = 298.2$ K e $T_1 = 269.2$ K è $\eta = 0.097 = W/Q_2$ da cui $Q_2 = 4123.7$ J e $Q_1 = W - Q_2 = -3723.7$ J. Quando funzione come frigorifero la macchina assorbe $-Q_1 = 3723.7$ J a T_1

e cede $-Q_2 = -4123.7$ J a T_2, con l'apporto del lavoro $-W$. Per far passare l'acqua da T_3 = 293.2 K a T_1 bisogna sottrarle il calore $Q = m\,c\,(T_3 - T_0) + m\,\lambda + m\,c'\,(T_0 - T_1)$ con c = 4186.8 J/kg K, $c' = c/2$ e $\lambda = 334.4 \cdot 10^3$ J/kg. Risulta $Q = 426.51 \cdot 10^3$ J e il numero di cicli è Q/Q_1.
R: circa 115 cicli.

103. Il calore scambiato dalla macchina è $Q_2 + Q_1 = W$: da qui si calcola $Q_2 = m\lambda$ e quindi λ. Essendo la macchina reversibile $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ e si ottiene T_2.
R: $\lambda = 5.86 \cdot 10^4$ J/kg , $T_2 = 505$ K .

104. $T_0 = p_0\,V_0 / n\,R = 360.8$ K; dall'espressione del calore scambiato in una isoterma reversibile da un gas ideale si calcola V_{fin}. Il rendimento della macchina reversibile che lavora tra T_1 e T_0 è $\eta = 0.399$ per cui $W_R = \eta\,Q$. La variazione di entropia dell'universo avviene durante la trasformazione irreversibile del lavoro, ottenuto durante l'isoterma reversibile, in calore assorbito dalla sorgente a temperatura T_1: $\Delta S_u = W / T_1 = Q/T_1$. L'energia inutilizzabile è $E_{IN} = T_0\,\Delta S_u\ (= W - W_R)$.
R: $V_{fin} = 121.1 \cdot 10^{-3}$ m^3 , $W_R = 1670.2$ J , $\Delta S_u = 6.98$ J/K , $E_{IN} = 2518.4$ J , eguale a $W - W_R$ entro le approssimazioni di calcolo.

105. Il rendimento di una macchina termica è pari per definizione a $\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A}$ mentre la variazione di entropia dell'universo è data da quella delle sorgenti: $\Delta S_u = -\frac{Q_A}{T_2} - \frac{Q_C}{T_1}$. Da queste due espressioni si ricavano Q_A e Q_C. La macchina assorbe calore nell'espansione isoterma reversibile e nell'isocora irreversibile, mentre cede calore nella compressione isoter-ma reversibile. Da

$$Q_A = n\,R\,T_2 \ln \frac{V_B}{V_A} + n\,c_V\,(T_2 - T_1) \quad ,$$

$$Q_C = n\,R\,T_1 \ln \frac{V_A}{V_C}$$

si calcolano i valori dei volumi V_B e V_C.
R: $Q_A = 6642.6$ J , $Q_C = -5207.8$ J , $V_B = 10.08 \cdot 10^{-3}$ m^3 , $V_C = 30.25 \cdot 10^{-3}$ m^3 .

106. Dal teorema di Clausius $\Sigma_i\,Q_i/T_i = 0$ si ha Q_1 e $W = Q_2 + 2\,Q_1$; il rendimento vale $\eta = W/Q_2$. Per ciascuna sorgente $\Delta S_i = -Q_i/T_i$.
R: $Q_1 = -0.46 \cdot 10^5$ J , $W = 1.08 \cdot 10^5$ J , $\eta = 0.54$, $\Delta S_1 = 80.3$ J/K , $\Delta S_2 = -205.5$ J/K , $\Delta S_3 = 123.3$ J/K ($\Delta S_u = 0$ entro le approssimazioni).

107. Seguendo il metodo del problema 106 si ottiene $Q_2 = 6000$ J e il rendimento vale $\eta = 1 + \frac{Q_3+Q_4}{Q_1+Q_2} = 0.327$.

108. Il gas scambia lavoro nella compressione isoterma $A\,B$ e nell'espansione adiabatica irreversibile $C\,D$, pertanto $W_{tot} = 1494$ J $= Q_A + Q_C$: il calore assorbito è Q_{BC}, quello ceduto è $Q_{AB} + Q_{DA}$. $Q_A = Q_{BC} = W_{tot}/\eta$, assorbito nell'isocora irreversibile a contatto con la sorgente a T_C . Il calore Q_{AB} ceduto nell'isoterma è eguale a W_{AB}; da $Q_C = W_{tot} - Q_A$ e da $Q_C = Q_{AB} + Q_{DA}$ si ottiene Q_{DA}, ceduto nell'isocora irreversibile a contatto con la sorgente a T_A. Da $Q_{BC} = n\,c_V(T_C - T_A)$ si ricava c_V. La temperatura T_D si ottiene dall'espressione di W_{CD} o di Q_{DA}, la variazione di entropia del gas nella trasformazione $C\,D$ dalla relazione generale che fornisce ΔS per un gas ideale. Infine $\Delta S_u = -\frac{Q_A}{T_C} - \frac{Q_C}{T_A}$ e quindi $E_{IN} = T_A\,\Delta S_u$. Se calcoliamo W_R per una macchina reversibile che lavora tra T_C e T_A otteniamo $W_R = 4980$ J a parità di calore assorbito e si verifica $E_{IN} = W_R - W$.
R: $Q_{AB} = -4482$ J , $Q_{BC} = 9960$ J , $Q_{DA} = -3984$ J ; il gas è biatomico. $T_D = 420$ K , $\Delta S_{CD} = 2.75$ J/K , $E_{IN} = 3486$ J .

109. Il gas assorbe calore nell'isocora e cede calore nella compressione isoterma. Scrivendo il rendimento in funzione dei calori scambiati e utilizzando l'equazione delle adiabatiche reversibili si ottiene $\eta = 1 - \frac{T_B}{T_A - T_B} \ln \frac{T_A}{T_B}$.
R: $\eta = 0.307$.

110. Dalla relazione di Mayer $c_V = c_p - R = R\,(1 + 0.02\,T)$. Il calore assorbito nell'isocora è $Q_{1,2} = \Delta U_{1,2} = \int_{T_1}^{T_2} c_V\, dT$, quello assorbito nell'isoterma è $Q_{2,3} = R\,T_2 \ln V_3 / V_2$, quello ceduto nell'isobara è $Q_{3,1} = \int_{T_3}^{T_1} c_p\, dT$.
R: $Q_A = 47843$ J , $Q_C = -46558$ J ; $\eta = 0.027$.

111. Dall'equazione di stato in A si ottiene $n = 0.835$ moli. Il calore ceduto nella compressione isoterma reversibile è $Q_{AB} = -2772$ J; il calore scambiato in totale è $Q = Q_{AB} + Q_{BC}$, pari al lavoro fatto in un ciclo. Il rendimento è $\eta = W / Q_{BC}$. Se la trasformazione $B\,C$ è reversibile si deve avere $\Delta S_{amb.\,BC} = -\Delta S_{gas,\,BC} = \Delta S_{gas,\,AB}$; infatti nel ciclo $\Delta S_{gas} = 0$ e $\Delta S_{gas,\,CA}$ è nulla. Poiché $\Delta S_{gas,\,AB} = n\,R \ln V_B / V_A = -9.63$ J/K, si conclude che la trasformazione $B\,C$ è reversibile.
R: $W = 1788$ J , $\eta = 0.392$.

112. Il gas assorbe Q_{CA} e cede Q_{BC} per cui $\eta = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{CA}}$. Dal primo principio $Q_{CA} = W_{CA} + \Delta U_{CA}$ e $\Delta U_{CA} = n\,c_V\,(T_A - T_C) = n\,c_V\,(T_B - T_C) = -Q_{BC}/\gamma$ in quanto $Q_{BC} = n\,c_p\,(T_C - T_B)$. Noto Q_{CA} si calcola η. La variazione di entropia nella trasformazione $C\,A$ è

$$\Delta S_{CA} = n\,c_V \ln \frac{T_A}{T_C} + n\,R \ln \frac{V_A}{V_C} \quad ,$$

con $T_A / T_C = V_B / V_C$ e $V_A / V_C = (V_B + V_C) / 2\,V_C$.
R: $\eta = 0.138$, $\Delta S_{CA} = 34.6$ J/K .

113. La temperatura dello stato C si ottiene con l'equazione delle adiabatiche reversibili, $T_C = 240.5$ K. Nell'isoterma reversibile $A\,B$ il gas cede all'acqua il calore $Q_{AB} = -10226$ J, mentre nell'isocora irreversibile C_A assorbe dall'acqua il calore $Q_{CA} = 8275$ J. In un ciclo viene ceduto complessivamente $Q_{AB} + Q_{CA}$, pari al lavoro assorbito, W. Per far evaporare 1 kg d'acqua occorrono $\lambda / |W|$ cicli. Nell'isocora $\Delta S_{gas} = n\,c_V \ln T_A / T_C$, $\Delta S_a = -Q_{CA} / T_A$; la somma dà ΔS_u (infatti l'isocora è l'unica trasformazione irreversibile del ciclo), $E_{IN} = T_A\,\Delta S_u$.
R: $W = -1951$ J, 1157 cicli ,
$\Delta S_{gas} = 27.40$ J/K , $\Delta S_a = -22.17$ J/K , $E_{IN} = 1951$ J $= |W|$.

114. Utilizzando le equazioni valide per le singole trasformazioni e l'equazione di stato si ottengono le coordinate termodinamiche dei vari stati di equilibrio:

stato A $p_A = 9.086$ bar, $V_A = 5.0 \cdot 10^{-3}$ m^3, $T_A = 273.2$ K

stato B $p_B = 22.715$ bar, $V_B = 2.0 \cdot 10^{-3}$ m^3, $T_B = 273.2$ K

stato C $p_C = 22.715$ bar, $V_C = 3.8 \cdot 10^{-3}$ m^3, $T_C = 519.0$ K

stato D $p_D = 14.373$ bar, $V_D = 5.0 \cdot 10^{-3}$ m^3, $T_D = 432.2$ K .

Il gas assorbe il calore $Q_A = Q_{BC}$ lungo l'isobara e cede il calore $Q_C = Q_{AB} + Q_{DA}$ lungo l'isoterma e l'isocora. Si trova $Q_A = 10218$ J, $Q_C = -8128$ J. La massa di ghiaccio sciolta in un ciclo è $m = |Q_C| / \lambda$, il lavoro totale è $W = Q_A + Q_C$, il rendimento è $\eta = W / Q_A$. La variazione di entropia dell'universo è quella delle sorgenti.
R : $m = 24.3$ g , $W = 2090$ J , $\eta = 0.205$, $\Delta S_u = 10.1$ J/K .

115. Il lavoro complessivo nel ciclo è dato da

$$W = p_1\,(V_2 - V_0) + p_2\,(V_0 - V_1) + n\,R\,T \ln \frac{V_1}{V_2} .$$

Si utilizza l'equazione di stato in A e D e si ottiene, ponendo $W = 0$,

$$V_0 = \frac{V_1 V_2}{V_2 - V_1} \ln \frac{V_2}{V_1} \quad .$$

Per le variazioni di entropia si usano le note relazioni per i gas ideali e il rapporto risulta $-\gamma$.
R: $V_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3 , $(\Delta S)_p / (\Delta S)_V = -1.4$.

116. Nello stato A $T_A = 294.98$ K; dall'equazione delle adiabatiche reversibili $T_B = 389.25$ K $= T_C$

e quindi $p_C = 1.508 \cdot 10^5$ Pa. Il calore assorbito è $Q_1 = Q_{BC}$, quello ceduto è $Q_{CA} = \Delta U_{CA} + W_{CA}$, con W_{CA} dato dall'area sotto il segmento $C\,A$; risulta $Q_{CA} = -513.6$ J e si calcola subito il rendimento. La variazione di entropia dell'universo è data dalla somma della variazione di entropia del gas e dell'ambiente nell'unica trasformazione irreversibile $B\,C$.
R: $\eta = 0.066$, $\Delta S_u = 0.105$ J/K .

117. Dall'equazione di stato si ha $T_2 = 304.6$ K. Nell'adiabatica irreversibile il lavoro fatto dal gas contro la pressione esterna costante è $W_{1,2} = p_2 (V_2 - V_1) = 1317$ J ; eguagliando a $-\Delta U_{1,2}$ si calcola T_1 . Da $Q_{2,3}$ si ottiene direttamente V_3 . Il calore $Q_{3,1}$ è dato da $W_{3,1} + \Delta U_{3,1}$, con $\Delta U_{3,1} = -\Delta U_{1,2}$ perché in un ciclo $\Delta U = 0$ e $\Delta U_{2,3} = 0$. La variazione di entropia dell'universo è eguale alla variazione di entropia del gas nell'adiabatica irreversibile.
R: $T_1 = 368.0$ K , $V_3 = 2.09 \cdot 10^{-3}$ m^3 ,
$Q_{3,1} = 7817$ J , $\Delta S_u = 2.17$ J/K .

118. In un ciclo il lavoro assorbito è $W = P/3 = -418.7$ J. Esso è pari a $Q_1 + Q_2$. D'altra parte $\Delta S_u = -\dfrac{Q_1}{T_1} - \dfrac{Q_2}{T_2}$. Si ottiene $Q_1 = 417.7$ J, $Q_2 = -836.4$ J. In un secondo viene sottratto alla sorgente fredda il calore $3\,Q_1$ e quindi $t = Q/3\,Q_1$. Se la macchina fosse reversibile avrebbe il rendimento $\eta = 0.33$, sottrarrebbe $Q'_2 = |W| / \eta = 1268.8$ J a T_2 e cederebbe $Q'_1 = |W| - Q'_2 = -850.1$ J a T_1 . Funzionando come frigorifero assorbirebbe in un secondo $-3\,Q'_1$ e quindi $t' = Q/|3\,Q'_1|$.
R: $t = 8.0$ s , $t' = 3.9$ s .

119. La variazione di entropia dell'universo è

$$\Delta S_u = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_0}{T_0} - \frac{Q'_0}{T_0} \ .$$

Per ciascuna macchina $Q_1 + Q_0 = W$, $Q_2 + Q'_0 = -W$, da cui $Q_1 + Q_2 = -(Q_0 + Q'_0)$. Risolvendo si ottengono i valori di Q_1 e Q_2 .
R: $Q_1 = 4.23 \cdot 10^5$ J , $Q_2 = -1.28 \cdot 10^5$ J .

120. Il rendimento è $\eta = W / Q_2 = 0.216 = 1 - \dfrac{T_1}{T_2}$ e si ottiene T_2 . Dall'equazione di stato in A si ha $n = 4.2$. Il calore ceduto è $Q_1 = W - Q_2 = n\,R\,T_1$. In $\dfrac{V_B}{V_A}$ e si calcola V_B ; dall'equazione delle adiabatiche reversibili si ha il volume minimo V_C . La corsa del pistone è data da $h = (V_A - V_C)/S = 0.3265$ m e $W_{att} = 2\,F\,h = 653$ J in un ciclo. Il lavoro utile è $W' = W - W_{att}$ e il rendimento è $\eta' = W' / Q_2$.
R: $T_2 = 370$ K , $V_C = 3.47 \cdot 10^{-3}$ m^3 ,
$\eta - \eta' = 0.073$ con una diminuzione del 34%.

121. Noto il calore Q assorbito nell'isocora irreversibile $B\,C$ si calcola $T_B = 207.6$ K e quindi, note le coordinate termodinamiche degli stati A e B, la variazione di entropia del gas ΔS_{AB} . Il calore ceduto è quello lungo l'isoterma reversibile, $Q_{CA} = -535.6$ J e quindi $W = Q + Q_{CA}$, negativo. Il ciclo infatti è monotermo in quanto il calore è scambiato con una sola sorgente, la cui variazione di entropia coincide con quella dell'universo.
R: $\Delta S_{AB} = 0.39$ J/K , $W = -179.7$ J ,
$\Delta S_u = 0.61$ J/K .

122. Osserviamo che il rapporto T_1 / T_0 è pari al rapporto $|Q_1 / Q'_0|$ e questo indica che la macchina frigorifera è reversibile. Allora la macchina termica è certamente irreversibile visto che $E_{IN} \neq 0$. Dal sistema di equazioni $Q_2 + Q_0 = W$, $E_{IN} = T_0 \Delta S_u = \left(-\dfrac{Q_2}{T_2} - \dfrac{Q_0}{T_0}\right) T_0$ si ottiene $Q_2 = 20 \cdot 10^3$ J, $Q_0 = -14 \cdot 10^3$ J e si determina il rendimento. Il rendimento della macchina a destra, quando funziona come macchina termica, è $\eta_R = 0.083$ per cui $|Q_1| = |W| / \eta_R$.
R: $\eta = 0.3$, $Q_1 = -72 \cdot 10^3$ J .

123. Nella trasformazione adiabatica irreversibile $B\,C$ $W_{BC} = -\Delta U_{BC}$ e, noto $T_B = T_A$ ($A\,B$ è una espansione libera), si calcola $T_C = 883.7$ K e $V_C = n\,R\,T_C / p_A$. La variazione di entropia dell'universo nel ciclo coincide con quella dell'ambiente, che si verifica soltanto nella trasformazione $C\,A$ in cui l'ambiente a temperatura T_A assorbe il calore $Q = n\,c_p\,(T_C - T_A)$.
R: $V_C = 0.11$ m^3 , $\Delta S_u = 178.6$ J/K .

124. Dall'equazione di stato in A si ottiene $n = 0.12$. Da $V_C / V_A = T_B / T_A$ si ha $V_C = 2.5 \cdot 10^{-3}$ m^3 e si possono calcolare i calori scambiati dall'aria nelle tre trasformazioni. Il cilindro e il pistone

non scambiano calore nell'isoterma, assorbono nell'isobara $Q_0 = C\ (T_A - T_B)$ e cedono nell'isocora $-Q_0$. Le variazioni di entropia dell'aria si calcolano con le note formule e si verifica che la somma è nulla. Anche la variazione di entropia del cilindro e del pistone è nulla e quindi la variazione di entropia dell'universo coincide con quella dell'ambiente, costituito dalle due sorgenti alle temperature T_A e T_B:

$$\Delta S_u = -\frac{Q_{AB}}{T_B} - \frac{Q_{BC}}{T_B} - \frac{Q_{CA}}{T_A} - \frac{Q_0}{T_A} + \frac{Q_0}{T_B} \ .$$

R: $Q_{AB} = -124.7$ J , $Q_{BC} = -45.5$ J , $Q_{CA} = 174.6$ J , $W = 4.4$ J , $\Delta S_{AB} = -0.455$ J/K , $\Delta S_{BC} = -0.182$ J/K , $\Delta S_{CA} = 0.637$ J/K , $\Delta S_u = 0.932$ J/K .

125. Sappiamo che $V_C = V_B / 2$ e dall'equazione delle adiabatiche reversibili ricaviamo anche $V_D = V_B / 4.362$. Possiamo pertanto calcolare $Q_{DA} = 9140.4$ J, $Q_{BC} = -3148.8$ J e $Q_{AB} = -4157.0$ J, $W = 1834.6$ J. Il ghiaccio assorbe il calore $Q = -Q_{AB} - Q_{BC} = 7305.8$ J e in un ciclo fonde la quantità $m' = Q / \lambda$. Il numero di cicli è dato da $N = m/m'$ e il lavoro totale è $N W$. La variazione di entropia dell'universo si verifica nell'isocora.
R: $m' = 21.8 \cdot 10^{-3}$ kg , $W_{tot} = 183460$ J , $\Delta S_u = 2.25$ J/K .

126. Da $V_C / V_B = T_C / T_B = T_C / T_A$ e dall'equazione delle adiabatiche reversibili applicata tra gli stati C e A si ottengono T_C e V_C. Il gas assorbe calore nell'isobara $B\,C$ e cede calore nell'isoterma $A\,B$; calcolati tali calori si ottiene il rendimento. Si determinano le coordinate termodinamiche dello stato D ($V_D = 11.93 \cdot 10^{-3}$ m^3, $T_D = 1670.2$ K) e si calcola ΔS_{DA} che risulta -28.2 J/K, mentre invece la variazione di entropia in una trasformazione adiabatica irreversibile deve essere positiva: il ciclo è impossibile.
R: $T_C = 540.6$ K , $V_C = 3.86 \cdot 10^{-3}$ m^3 , $\eta = 0.293$.

127. Il gas assorbe Q_{AB} nell'isoterma e cede Q_{BC} nell'isocora. Per il calcolo di $Q_{AB} = n R T_A \ln \frac{V_B}{V_A}$ si utilizzi l'equazione delle adiabatiche reversibili con lo scopo di esprimere $V_B / V_A = V_C / V_A$ in funzione di T_A e T_C. Il rendimento è

$$\eta = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{AB}} = 1 - \frac{T_A - T_C}{T_A \ln \frac{T_A}{T_C}} \ .$$

Nel ciclo $A\,D\,C\,A$ la variazione di entropia dell'universo è pari a quella del gas nella adiabatica irreversibile $A\,D$. Poiché in un ciclo $\Delta S_{gas} = 0$ e inoltre $\Delta S_{CA} = 0$, $\Delta S_{AD} = -\Delta S_{DC} = -c_V \ln T_C / T_D$, da cui si determina c_V. Il lavoro è svolto nelle adiabatiche, $W = -\Delta U_{AD} - \Delta U_{CA} = c_V (T_C - T_D)$.
R: $\eta = 0.28$, $c_V = 20.75$ J/mole K (gas biatomico) , $W = -2905$ J .

APPENDICE A

RICHIAMI MATEMATICI

In questa appendice ricordiamo concetti noti di Analisi Matematica I e anticipiamo nozioni di Analisi Matematica II. Nel fare ciò non abbiamo alcuna pretesa di completezza o rigore; vogliamo solo richiamare l'attenzione su argomenti matematici essenziali per la comprensione di varie proprietà e leggi fisiche. Con lo stesso scopo è scritta l'appendice C, dedicata all'introduzione del calcolo vettoriale.

A.1 CHIARIMENTO SUI SIMBOLI

Supponiamo noti tutti i concetti di base, in particolare quelli di funzione, derivata, integrale, almeno per le funzioni di una variabile. Dobbiamo però spiegare la simbologia usata, che è quella normale in Fisica Generale.

Nella (1.1) col simbolo $\frac{d}{dt}$ indichiamo l'operazione di derivazione rispetto al tempo; analogamente con $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, ecc. per la derivazione rispetto ad altre variabili. Utilizziamo questo simbolo, e quindi la scrittura completa dx/dt o df/dx più in generale,

- sia per ricordare esplicitamente il significato del processo di derivazione, limite del rapporto tra la variazione della funzione e quella della variabile;
- sia perché, visto il signficato fisico che hanno gli infinitesimi dx e dt, ovvero df e dx, noi usiamo la (1.1) e le altre relazioni simili come relazioni algebriche.

Da (1.1) infatti scriviamo $dx = v\,dt$, oppure da (1.5) $dv = a\,dt$, che ci servono non solo come base per integrare e calcolare le variazioni finite di x e v, ma anche come espressione dei processi elementari con cui schematizziamo il moto. Sottolineamo che sia $dx = v\,dt$ che $dv = a\,dt$ corrispondono al ben noto risultato secondo cui il *differenziale di una funzione è eguale al prodotto della derivata per l'incremento infinitesimo della variabile indipendente*:

Differenziale di una fur one

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx \qquad (A.1)$$

Anche nell'operazione di derivazione di una funzione di funzione o funzione composta, come $v\,(x\,(t))$, il risultato, che è il prodotto della derivata di v rispetto a x per la derivata di x rispetto a t, si scrive facilmente

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

che equivale a moltiplicare in dv/dt numeratore e denominatore per dx. Sappiamo che scrivendo $a = \frac{dv}{dx} v$ si elimina la dipendenza esplicita dal tempo, si ricava $a\,dx = v\,dv$ e si arriva a (1.9). Si può anche procedere così: da $dx = v\,dt$ e $dv = a\,dt$ si ricava $dt = dv/a$ nella seconda, si sostituisce nella prima e si riottiene $a\,dx = v\,dv$.

Ancora, quando abbiamo uno spostamento infinitesimo dr o $r\,d\theta$ dividiamo per il tempo dt impiegato a percorrerlo e abbiamo la velocità dr/dt o $r\,d\theta/dt$, ottenute direttamente senza eseguire materialmente derivate.

Se una forza $\mathbf{F}$ agisce per un tempo dt, la variazione di quantità di moto è $d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt$; se agisce un momento $\mathbf{M}$, la variazione di momento angolare è $d\mathbf{L} = \mathbf{M}\,dt$; si tratta di applicazioni di (A.1), estesa a funzioni vettoriali (appendice C).

Da questi esempi si capisce cosa intendiamo per uso algebrico della relazione che intercorre tra l'incremento della funzione, l'incremento della variabile e la derivata della funzione rispetto alla variabile.

Per le derivate di ordine superiore usiamo i simboli $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^3f}{dx^3}$, ... Scrivendo per esteso, sarebbe $g = \frac{df}{dx}$, $h = \frac{dg}{dx} = \frac{d^2f}{dx^2}$; alla $h = \frac{dg}{dx}$ si può applicare quanto appena detto, ma non alla relazione $h = \frac{d^2f}{dx^2}$, cioè non ha senso scrivere $h\,dx^2 = d^2f$: d^2f e dx^2 sono simboli che non hanno significato a sé, ma indicano soltanto che l'operazione di derivazione è stata iterata.

A.2 SVILUPPI IN SERIE

In varie occasioni si presenta il problema di calcolare la differenza tra i valori di una funzione in due punti molto vicini, per esempio di coordinate x_0 e x; si utilizza in questo caso uno *sviluppo* in *serie di Taylor*:

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} (x - x_0) + \ldots$$

Sviluppo in serie di Taylor

per cui risulta

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} (x - x_0) + \ldots$$

Se i termini successivi, che contengono $(x - x_0)^2$, $(x - x_0)^3$, ..., si possono trascurare perché la differenza $x - x_0$ è piccola rispetto al valore di x_0, l'incremento della funzione è proporzionale a $x - x_0$, con una certa approssimazione. Al limite, per $x \to x_0$, si ottiene (A.1). Quando $f(x_0) = 0$ la funzione risulta lineare in x in un intorno di x_0; è quanto accade, per esempio, alla forza elastica in una dimensione che, per piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio, è proporzionale allo spostamento, o alla componente tangente della forza peso nel pendolo semplice.

A.3 FUNZIONI DI PIU' VARIABILI. DERIVATE PARZIALI

Dalla nozione di funzione di una variabile si passa in modo naturale a quella di *funzione di più variabili*. Una grandezza fisica definita in una certa regione dello spazio è normalmente funzione della posizione e quindi di tre variabili, $f(x, y, z)$, se non anche del tempo, $f(x, y, z, t)$. In generale si scrive $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Per esprimere le variazioni della funzione f al variare delle variabili da cui dipende si introduce il concetto di *derivata parziale*. L'operazione consiste nell'effettuare la normale derivazione rispetto a x_i, mantenendo costanti tutte le altre $n-1$ variabili, e si indica col simbolo $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Derivando ancora si ottiene $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, però ci sono altre possibilità, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, ecc.: si parla di *derivate seconde miste* e vale la notevole proprietà che *il risultato è lo stesso se si deriva rispetto a x_i e poi a x_j o viceversa*. Il tutto si estende agli ordini superiori.

Limitandoci a considerare una funzione di due variabili, che possiamo scrivere $x = x(y, z)$, valgono le due seguenti relazioni:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} \quad , \tag{A.3}$$

che assicura la reciprocità delle derivazioni parziali e

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \quad , \tag{A.4}$$

relazione ciclica, che permette l'espressione di una particolare derivazione parziale in termini di altre. Con la lettera scritta in basso accanto alla parentesi si indica in modo esplicito la variabile che viene mantenuta costante nella derivazione.

La variazione complessiva della funzione per un incremento dx_i di ciascuna variabile x_i è data dal *teorema del differenziale totale* :

Teorema della differenziazione totale

$$df = f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, ..., x_n + dx_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \Sigma_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad . \tag{A.2}$$

Si chiama forma differenziale lineare in due variabili un'espressione differenziale del tipo

$$g(x, y)\, dx + h(x, y)\, dy \quad .$$

Questa è il differenziale di una funzione $f(x, y)$ solo se

$$g(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \quad , \quad h(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \quad ,$$

come è evidente confrontando con (A.2). Dall'identità delle derivate seconde miste

segue allora che deve essere:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_y \quad .$$

Si dimostra che questa condizione, oltre che necessaria, è sufficiente affinché esista la funzione $f(x, y)$, purché il dominio delle funzioni considerate sia semplicemente connesso. La suddetta condizione si chiama anche *condizione di integrabilità della forma differenziale lineare.*

A.4 CALCOLI DI INTEGRALI DI SUPERFICIE E DI VOLUME

Nel calcolo della posizione del centro di massa di un corpo continuo o del momento d'inerzia capita di dover eseguire operazioni di integrazione nel piano o nello spazio, del tipo

$$\int_S f\,dS\,, \quad \int_V g\,dV \quad ,$$

dove f e g sono le funzioni integrande, dS e dV gli elementi della superficie e del volume su cui si integra.

In generale il calcolo può essere notevolmente complicato e richiedere nozioni che non abbiamo. Però in problemi dotati di una qualche simmetria geometrica si riesce a ricondursi al più semplice calcolo di integrali in una variabile. Facciamo solo alcuni esempi tipici: in ogni caso occorre trovare l'espressione appropriata per dS e per dV.

Supponiamo di dover integrare una funzione $f(r)$ su un'area circolare di raggio R, essendo r la distanza dal centro; cioè di dover calcolare l'integrale $\int_S f(r)\,dS$.

Ricordiamo che per l'integrale $\int f(x)\,dx$ si suddivide l'intervallo di integrazione in intervalli dx infinitesimi all'interno dei quali si calcola $f(x)$ e si formano i prodotti $f(x)\,dx$: l'intervallo dx è così piccolo che non importa dove si calcola $f(x)$, in quanto il valore è praticamente lo stesso all'interno di dx. Nel nostro caso l'area in cui $f(r)$ è praticamente costante è la *corona circolare* compresa tra il raggio r e il raggio $r + dr$, di cui calcoliamo il valore. Ci sono vari metodi:

1) l'area della corona circolare si ottiene sommando gli elementi infinitesimi indicati in figura A.1 con il quadrigliato: per ciascuno, assimilabile a un rettangolo l'area è $r\,d\theta\,dr$ e si vede la dipendenza da due variabili; però lungo la corona r e dr sono sempre gli stessi, per cui in totale

$$dS = r\,dr \int d\theta = 2\pi r\,dr \quad ;$$

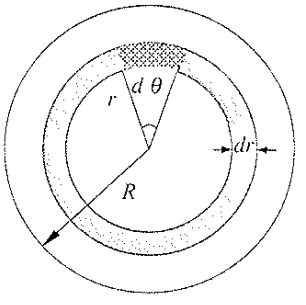


Fig. A.1

2) l'area è data da

$$dS = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi r^2 + 2\pi r\,dr + \pi(dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\,dr$$

in quanto $(dr)^2$ è un infinitesimo di ordine superiore;

3) poiché $S = \pi r^2$, da (A.1) abbiamo

$$dS = \frac{dS}{dr}\, dr = 2\,\pi\, r\, dr \quad .$$

In definitiva

$$\int_S f(r)\, dS = 2\,\pi \int_0^R f(r)\, r\, dr$$

e ci siamo ricondotti ad un integrale in una sola variabile. Quello esposto non è l'unico metodo di scrivere dS, però, vista la simmetria di $f(r)$, è il più comodo.

Come secondo esempio integriamo la funzione $g(r)$ su una sfera di raggio R, $\int_V g(r)\, dV$. Ragionando in modo simile a quello appena visto, dV è il volume di un guscio sferico compreso tra i raggi r e $r + dr$ e quindi

$$dV = \frac{dV}{dr}\, dr = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3\, dr = 4\,\pi r^2\, dr \quad ,$$

per cui

$$\int_V g(r)\, dV = 4\,\pi \int_o^R g(r)\, r^2\, dr \quad .$$

Se invece l'integrazione fosse estesa al volume di un cilindro alto h, il guscio cilindrico avrebbe il volume $dV = h\, 2\,\pi\, r\, dr$.

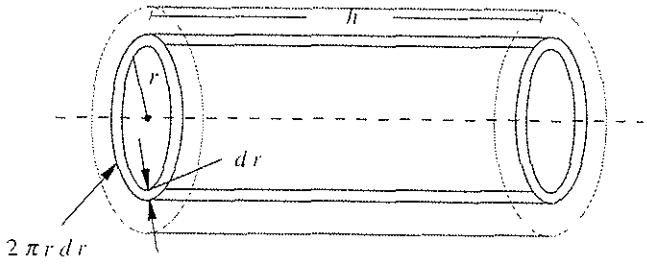


Fig. A.2

A.5 EQUAZIONI DIFFERENZIALI

La (1.1) può essere considerata il primo esempio che incontriamo di equazione differenziale: in essa $x(t)$ è l'incognita e l'equazione non dà x direttamente, ma dice a cosa è eguale la sua derivata. Il problema specifico consiste allora nella determinazione di una funzione se è nota la sua derivata prima e abbiamo visto che si risolve con una integrazione eseguita sulla derivata.

Più in generale un'equazione differenziale è una espressione in cui possono comparire la funzione incognita, le sue derivate (di qualsiasi ordine) ed eventuali termini noti: essa rappresenta una condizione alla quale deve soddisfare la funzione e la sua risoluzione permette di determinare quali sono le funzioni che soddisfano a quella condizione.

Con riferimento ai moti rettilinei che abbiamo studiato possiamo allora dire quanto segue.

1. Moto uniforme, velocità costante:

equazione differenziale $\frac{dx}{dt} = v = \text{costante}$

soluzione $x = x_0 + v\,t$

abbiamo perciò risolto questo problema: quali sono *le funzioni che hanno derivata costante? Sono le funzioni lineari* tipo $x = A\,t + B$, dove A è il valore costante della derivata e B la costante di integrazione, coincidente col valore di x all'istante $t = 0$. Ovvero:

$$\text{se} \quad \frac{df}{dx} = A \quad , \quad f(x) = A\,x + B \qquad \text{con} \quad B = f(0)$$

2. Moto uniformemente accelerato, accelerazione costante:

equazione differenziale $\frac{d^2x}{dt^2} = a = \text{costante}$

soluzione $x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$;

pertanto le funzioni che hanno derivata seconda costante sono quadratiche nella variabile indipendente:

$$\text{se} \quad \frac{d^2f}{dx^2} = A \quad , \quad f(x) = \frac{1}{2}\,A\,x^2 + B\,x + C \quad \text{con} \quad B = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x = x_0} , \quad C = f(0)$$

3. Moto armonico semplice, accelerazione proporzionale a $-x$:

equazione differenziale $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

soluzione $x = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$

con $B = x(0)$ e $A = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}$.

L'integrazione esplicita che porta alla soluzione esula da quanto ora conosciamo; ricordiamo però il risultato: *le funzioni che soddisfano alla condizione che la loro derivata seconda è proporzionale alla funzione stessa con segno negativo sono solo le funzioni seno e coseno* (nel campo reale).

4. Moto esponenziale smorzato, accelerazione proporzionale a $-v$:

equazione differenziale $\frac{dv}{dt} = -kv$

soluzione $v = v_0 e^{-kt}$;

le funzioni la cui derivata è proporzionale alla funzione stessa sono le funzioni esponenziali.

Questo quarto caso è interessante perché viene risolto col *metodo di separazione delle variabili* (che però non è sempre applicabile). Nell'equazione

$$\frac{df}{dx} = -kf$$

si porta a primo membro tutto ciò che dipende esplicitamente da f e a secondo membro tutto ciò che dipende esplicitamente da x, per cui

$$\frac{df}{f} = -k\,dx \quad .$$

Ora anche f può essere considerata variabile indipendente (nel primo membro) e si integra subito:

$$\log f = -kx + \text{costante}$$

$$\Rightarrow f = e^{-kx+\text{costante}} = A\ e^{-kx} \quad , \quad A = f(0) \quad .$$

L'esempio più generale, in cui rientra quello appena visto, è

$$\frac{df}{dx} = A + Bf \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{A+Bf} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{B}\log(A+Bf) = x + \text{costante} \quad \Rightarrow \quad A + Bf = C\,e^{Bx}$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{B}\,(C\,e^{Bx} - A) \quad , \quad C = A + Bf\,(0) \quad .$$

Tutte le volte che la derivata di una funzione è funzione lineare della funzione stessa, questa ha una struttura esponenziale.

Nella soluzione di un'equazione differenziale compaiono sempre delle costanti, dovute al processo di integrazione:

- se nell'equazione c'è solo la derivata prima, abbiamo una sola costante, legata a $f(0)$;
- se nell'equazione c'è anche (o solo) la derivata seconda, abbiamo due costanti, una legata a $f(0)$, l'altra a $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0}$.

Le *costanti di integrazione sono* quindi *in connessione diretta con le condizioni iniziali.*

Nel caso di funzioni di più variabili l'equazione differenziale contiene le derivate parziali; l'esempio più importante che abbiamo visto è l'equazione delle onde piane (8.10). Anche questa va intesa come una particolare condizione: quali sono le funzioni di due variabili tali che la derivata seconda rispetto a una variabile sia

proporzionale alla derivata seconda rispetto all'altra variabile? La ricerca della soluzione esula dalle nostre possibilità, però abbiamo verificato che l'argomento della funzione soluzione deve essere una combinazione lineare delle due variabili.

Non andiamo oltre nel parlare delle equazioni differenziali; la materia è difficile, per esempio non esiste un metodo generale di soluzione valido per tutti i tipi di equazioni differenziali. Queste sono suddivise in varie classi a seconda della loro struttura, ma non sempre è possibile dimostrare che esiste una soluzione e dare i criteri per trovarla. D'altra parte con i metodi del calcolo numerico e l'uso di calcolatori è sempre possibile arrivare a una soluzione approssimata.

APPENDICE B

LE UNITA' DI MISURA

Il procedimento di base che permette la scoperta di una nuova legge fisica o la verifica di un'ipotesi teorica è il metodo sperimentale. Per un determinato fenomeno si individuano quelle che possono essere le grandezze significative e se ne esegue la misura secondo un procedimento chiaro e possibilmente ripetibile, magari variando in misure successive alcuni dei parametri in gioco per metterne in evidenza l'influenza sul fenomeno studiato. La legge che regola il fenomeno è una legge quantitativa che esprime, con il linguaggio della matematica, una relazione tra le grandezze misurate.

La determinazione di ciascuna grandezza comporta quindi una misura, il cui risultato è un numero; per una stessa grandezza i metodi di misura possono essere diversi, però è essenziale che per ciascun metodo sia precisato lo svolgimento sperimentale e si arrivi sempre a un risultato numerico. Si parla di *definizione operativa di una grandezza* ed è l'unica definizione scientificamente accettabile.

L'operazione di misura è una valutazione relativa tra grandezze della stessa specie ed è pertanto necessario definire l'unità di misura per ogni grandezza; il risultato della misura è espresso come rapporto quantitativo rispetto all'unità di misura. Il confronto con l'unità però può essere diretto, come nella misura di una lunghezza con un metro, o indiretto: in questo caso si misurano altre grandezze che sono in relazione nota con la grandezza da determinare; è quanto succede, per esempio, quando si calcola la velocità da misure di spazio e di tempo.

Nella misura ci sono due aspetti sui quali per ragioni diverse non ci soffermiamo, ma che riteniamo opportuno ricordare. Innanzitutto ogni misura è accompagnata sempre da un certo errore, la cui determinazione a volte è altrettanto importante del valore stesso della misura; non discutiamo l'argomento perché di norma è trattato nei corsi di laboratorio. In secondo luogo, l'effettuazione stessa della misura può perturbare il fenomeno in esame; nel mondo macroscopico l'effetto può essere reso trascurabile con opportuni accorgimenti, invece nel mondo microscopico in certi casi la perturbazione è inevitabile e il concetto stesso di misura ha profonde implicazioni che nascono dal *principio di indeterminazione di Heisenberg*.

Da un punto di vista strettamente scientifico la scelta dell'unità di misura è arbitraria: basta che siano soddisfatti i requisiti per una definizione operativa della grandezza e sia chiaramente definita l'unità stessa; che poi il risultato sia espresso, per esempio, in metri o in iarde, in litri o in galloni, è un fatto secondario: L'aumento del numero di ricercatori e il diffondersi delle comunicazioni tra di essi, insieme all'affermarsi dell'idea che la fisica ha una struttura unitaria anche se articolata in

molti campi, hanno però spinto verso l'adozione di una convenzione universalmente accettata su quante e quali siano le grandezze fondamentali e su come devono essere definiti i campioni delle unità di misura di tali grandezze.

Descriveremo tra breve il sistema internazionale; per ora diciamo soltanto che esso è il risultato attuale, accettato da tutta la comunità scientifica, di un lungo processo storico iniziato nel 1791, durante la rivoluzione francese, quando l'Accademia delle Scienze di Parigi decise di adottare il metro e il chilogrammo come unità di misura della lunghezza e della massa e diede il via alla procedura per la costruzione dei relativi campioni. Dopo di allora sono state successivamente identificate le altre grandezze fisiche fondamentali per la descrizione dei vari fenomeni e definite le loro unità di misura. Ancora adesso si tengono periodicamente le Conferenze Generali di Pesi e Misure le quali aggiornano le definizioni delle unità o propongono di adottarne di migliori.

Un sistema di unità di misura è individuato dalle grandezze che in esso sono scelte come fondamentali e dalla definizione delle corrispondenti unità di misura.

Grandezze fondamentali

La scelta delle *grandezze fondamentali*, di per sé arbitraria, è limitata di fatto dalla tradizione storica e da esigenze di praticità. Il numero stesso di grandezze fondamentali non è fissabile a priori: in meccanica, per esempio, è possibile legare tra loro tutte le grandezze fisiche necessarie alla descrizione del moto dei corpi e delle cause che al moto danno origine in modo tale che le grandezze fondamentali siano lunghezza, tempo e massa e tutte le altre, dette grandezze derivate, possano essere espresse in termini di queste tre. Però tale scelta non è l'unica possibile; e inoltre si potrebbe anche ridurre a due il numero di grandezze fondamentali. Senonché non c'è alcuna utilità pratica o concettuale in questo modo di procedere e si preferisce restare con le tre grandezze che la tradizione e l'uso comune hanno consacrato come fondamentali.

Scelte le grandezze fondamentali devono essere fissate le unità di misura e con esse i campioni cui si richiedono determinate caratteristiche, mentre la definizione resta arbitraria. Un buon campione deve essere accessibile e facilmente riproducibile, in modo che per confronto ne possano essere costruiti altri, con la migliore precisione possibile. Però un buon campione deve anche essere invariabile; cioè le sue caratteristiche non dovrebbero cambiare nel tempo sotto l'azione di agenti esterni; occorre allora proteggerlo con il che l'accessibilità non risulta facile. Come si vede le richieste possono essere in contrasto tra loro ed è necessario un certo grado compromesso tra le varie esigenze.

Unità di misura

Il concetto stesso di *unità di misura* si è evoluto nel tempo. Prendendo come esempio il metro, la definizione originaria lo voleva eguale a un quarantamilionesimo del meridiano terrestre passante per Parigi: infatti il riferimento corretto sembrava a terra. In base alla definizione, chiaramente arbitraria, si costruì un campione, ma successive misure geodetiche dimostrarono che la relazione tra metro campione e meridiano terrestre differiva leggermente da quella assunta come vera. Si pose allora un problema notevole: bisognava cambiare il campione o cambiare la definizione? Fortunatamente fu la seconda via ad essere seguita, come sembra naturale vista l'arbitrarietà della definizione, e alla fine risultò conveniente dire semplicemente che il metro campione era quel certo regolo, costruito con una data procedura e conservato in un determinato posto (a Sèvres, Parigi). La realizzazione del campione avvenne nel 1889 e varie copie vennero distribuite nel mondo: l'errore relativo massimo risultò di $2 \cdot 10^{-7}$. Ogni riferimento alle dimensioni terrestri fu così abbandonato; ma ogni epoca ha evidentemente il suo concetto di invariabilità e oggi la tendenza è di riferirsi a fenomeni atomici per la costruzione di campioni, che oltre essere intrinsecamente molto precisi permettono meglio di conciliare i requisiti

di riproducibilità e invariabilità. Esistono in natura lunghezze definibili con estrema precisione: si tratta delle *lunghezze d'onda delle radiazioni emesse dagli atomi*; è possibile confrontare il metro campione con queste lunghezze e ne risulta una definizione la cui precisione relativa è dell'ordine di 10^{-8}. Di recente pure questa definizione è stata superata da un'altra ancora più precisa che vedremo tra poco.

L'aspetto tecnico e pratico della *metrologia* è molto importante. Vengono subito in mente gli innumerevoli metri, bilance, orologi tutti tarati con maggiore o minore accuratezza rispetto ai loro campioni; non bisogna d'altra parte dimenticare che il poter disporre di precisi riferimenti universalmente accettati è essenziale per la costruzione e il controllo di tutte le moderne apparecchiature meccaniche e elettroniche. Infine, lo stimolo a ricercare campioni sempre migliori e riproducibili con sempre migliori precisioni porta all'attuazione di metodi sperimentali che possono poi essere utilizzati nei campi più svariati.

Il Sistema Internazionale

Vediamo ora quali sono le grandezze fondamentali e i relativi campioni nel sistema di unità di misura chiamato *sistema internazionale* (SI) e raccomandato dalla Conferenza Internazionale Pesi e Misure del 1960 per ogni uso scientifico e tecnologico.

Le grandezze fondamentali sono sette: *lunghezza, tempo, massa, temperatura, intensità di corrente elettrica, intensità luminosa e quantità di materia.*

Lunghezza, metro

Il *metro* è l'*unità di misura della lunghezza*: è definito come lo spazio percorso nel vuoto dalla luce nel tempo $t = 1/c$, dove c è il valore della velocità della luce nel moto, pari a $2.99792458 \cdot 10^8$ m/s; l'errore relativo su questo numero è $4 \cdot 10^{-9}$.

Tempo, secondo

Unità di tempo è il *secondo*, pari a $9.162631770 \cdot 10^9$ oscillazioni della radiazione emessa in una particolare transizione dall'isotopo del *Cesio* ^{133}Cs; la precisione relativa è 10^{-11} (1 secondo in 3000 anni). Recentemente è stato messo a punto un altro *orologio atomico* con atomi di berillio a temperatura molto prossima allo zero assoluto che presenta un errore relativo di 10^{-14} (1 secondo in $3 \cdot 10^6$ anni). Come è successo per il metro è stato abbandonato per il secondo il riferimento alla terra, cioè al moto di rotazione della terra attorno al proprio asse o di rivoluzione attorno al sole non essendo questi campioni abbastanza precisi e invariabili.

Massa, chilogrammo

Il *chilogrammo* è l'*unità di misura della massa* ed è ancora valida la definizione data nel 1901: vale un chilogrammo la massa del prototipo di platino-iridio conservato a Sèvres (errore relativo 10^{-8}). Il riferimento atomico a cui si tende è la massa dell'isotopo del carbonio ^{12}C.

Temperatura, Kelvin

Unità di temperatura è il *Kelvin*, pari a 1/273.16 della temperatura termodinamica del *punto triplo dell'acqua*, misurata con un termometro a ciclo di Carnot (errore relativo 10^{-6}).

Intensità di corrente, ampere

Unità di intensità di corrente elettrica è l'*ampere*, definito come quella corrente elettrica costante che percorrendo due fili conduttori paralleli indefiniti distanti un metro tra loro e posti nel vuoto causa tra di essi una forza di $2 \cdot 10^{-7}$ newton per metro (errore relativo 10^{-8}).

Intensità luminosa, candela

Unità dell'intensità luminosa è la *candela*: si tratta dell'intensità luminosa emessa da un corpo nero, a 2045 Kelvin e sotto una pressione di 101325 pascal, in direzione perpendicolare al foro di uscita, la cui sezione ha un'area pari a $1/(6 \cdot 10^5)$ m^2 (errore relativo 10^{-2}).

Materia, mole

Infine l'*unità di quantità di materia* è la *mole*, cioè la quantità di materia che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 12 grammi di ^{12}C; questo

numero è noto come il *numero di Avogadro* e vale $6.02213674 \cdot 10^{23}$ (errore relativo 10^{-8}). Numero di Avogadro

I simboli delle unità che abbiamo elencato sono m, s, kg, K, A, cd, mol. C'è anche una convenzione per i prefissi di alcuni dei *multipli e sottomultipli* e per i relativi simboli, come indicato nella Tabella B.1. Multipli e sottomultipli

Tabella B.1 - Multipli e sottomultipli

10^{3}	chilo	k	10^{-3}	milli	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
			10^{-18}	atto	a

Per esempio, in intervallo di tempo di 10^{-12} s si chiama *picosecondo* (ps), una corrente di 10^{6} A si chiama *megampere* (MA). In questo quadro l'unica anomalia è l'unità di massa, che contiene già il prefisso chilo; così che multipli e sottomultipli sono riferiti al grammo. Inoltre per il tempo ci sono i multipli speciali minuto = 60 s e ora = 3600 s.

Limitandoci alle tre grandezze fondamentali lunghezza, tempo e massa, diamo alcuni valori indicativi per far vedere gli enormi intervalli di variabilità che esistono in natura:

raggio dell'universo	10^{26} m
raggio della galassia	10^{21} m
raggio del sole	$7 \cdot 10^{8}$ m
raggio della terra	$6.4 \cdot 10^{6}$ m
lunghezza d'onda luminosa	$0.5 \cdot 10^{-6}$ m = 0.5 μm
dimensioni di un virus	10^{-8} m = 10 nm
raggio di un atomo	10^{-10} m = 100 pm
raggio di un nucleo	10^{-15} m = 1 fm
raggio dell'elettrone	$<10^{-16}$ m puntiforme?
età dell'universo	10^{17} s = $3 \cdot 10^{9}$ anni
un anno	$3.1 \cdot 10^{7}$ s
periodo di oscillazione della nota la	$2.3 \cdot 10^{-3}$ s = 2.3 ms
ciclo di macchina di un microprocessore	10^{-6} s = 1 μs
tempo di transizione tra livelli atomici	10^{-8} s = 10 ns
tempo di commutazione di un transistor	10^{-9} s = 1 ns
periodo di oscillazione della luce visibile	10^{-14} s = 10 fs
massa dell'universo	10^{53} kg
massa della galassia	$8 \cdot 10^{41}$ kg
massa del sole	$2 \cdot 10^{30}$ kg
massa della terra	$6 \cdot 10^{24}$ kg
massa di un virus	10^{-13} kg
massa del protone	$1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
massa dell'elettrone	$9.1 \cdot 10^{-31}$ kg

Anno luce

Massa atomica

fermi

Si è accennato, parlando dei requisiti delle unità di misura, alla praticità: questa è fuori discussione per ciò che riguarda metro, secondo e chilogrammo rispetto alle necessità della vita di tutti i giorni e anche della tecnologia corrente. Diversa può essere la situazione nel campo scientifico. Facciamo solo alcuni esempi: in astronomia le distanze considerate sono molto grandi ed è più semplice, oltre che più significativo, l'uso dell'unità *anno luce* pari a $9.46 \cdot 10^{15}$ m, cioè alla distanza che un segnale luminoso percorre in un anno viaggiando alla velocità di $3 \cdot 10^8$ m/s. Nella fisica atomica e nucleare c'è un problema simile per le masse tanto che si utilizza l'unità di *massa atomica* eguale a 1/12 della massa dell'atomo ^{12}C, ovvero a $1.660 \cdot 10^{-27}$ kg; unità speciali vengono usate anche per l'energia e la quantità di moto; per le lunghezze a livello nucleare si usa l'unità 10^{-15} m, chiamata *fermi*, col simbolo fm come il *femtometro*. Ad ogni modo il sistema internazionale resta il punto di riferimento per queste unità accessorie.

Radiante, steradiante

Nella lista delle unità fondamentali vengono spesso incluse quelle relative alla misura degli angoli piani e degli angoli solidi, *il radiante e lo steradiante* . Presa una circonferenza di raggio R, il radiante è la misura dell'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza pari al raggio; data una superficie sferica di raggio R lo steradiante è la misura dell'angolo solido con vertice nel centro della superficie sferica che sottende una calotta sferica di area R^2 . I rispettivi simboli sono rad e sr.

Grandezze meccaniche

Elenchiamo in tabella B.2 le principali grandezze incontrate nello studio della meccanica e le loro unità di misura.

Tabella B.2 - Grandezze meccaniche

lunghezza	m
tempo	s
massa	kg
velocità	ms^{-1}
accelerazione	ms^{-2}
velocità angolare	rad s^{-1}
accelerazione angolare	rad s^{-2}
periodo	s
frequenza	s^{-1} = Hz
pulsazione	rad s^{-1}
forza	kg m s^{-2} = N
quantità di moto, impulso	kg m s^{-1} = Ns
lavoro energia	kg m^2 s^{-2} = J = Nm
potenza	kg m^2 s^{-3} = W = Js^{-1}
momento angolare	kg m^2 s^{-1}
momento di una forza	kg m^2 s^{-2}
momento d'inerzia	kg m^2
densità	kg m^{-3}
pressione	kg m^{-1} s^{-2} = Pa = Nm^{-2}
viscosità	kg m^{-1} s^{-1}
tensione superficiale	kg s^{-2} = Nm^{-1}

Questioni dimensionali

Le leggi fisiche sono equazioni tra grandezze: dal punto di vista delle unità di misura i due membri dell'equazione devono essere *omogenei*, devono cioè avere le stesse unità di misura; questa è una condizione necessaria per la correttezza di una equazione, ma certamente non è sufficiente.

Per esempio, se dopo aver risolto un problema si trova per l'accelerazione di un punto $a = g\,h/m\,t$ si può dire subito che la relazione è sbagliata: da una parte abbiamo ms^{-2}, dall'altra $(ms^{-2})\ (m)/(kg)\ (s) = m^2\,kg^{-1}\,s^{-2}$. L'omogeneità richiede invece che entrambi i membri siano espressi dalla stessa combinazione di metri, secondi e chilogrammi. Si dice anche che entrambi i membri devono avere le stesse *dimensioni* rispetto alle unità fondamentali.

Un'applicazione di questi concetti la troviamo quando determiniamo le unità di misura di certe costanti che compaiono nelle varie leggi:

$a = -k\,v$ — k è il rapporto tra un'accelerazione e una velocità e si misura in $ms^{-2}/ms^{-1} = s^{-1}$

$F = -k\,x$ — k si misura in Nm^{-1}

$F = \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ — γ si misura in $Nm^2\,kg^{-2} = m^3\,s^{-2}\,kg^{-1}$.

Allo stesso modo, nella (8.10) si capisce che il coefficiente nell'equazione delle onde piane deve avere le dimensioni di una velocità al quadrato, mentre nella (8.3) si deduce che il coefficiente di Poisson è una *grandezza adimensionale* o, come si dice, un *numero puro*.

Anche la misura di un angolo, intesa come rapporto di lunghezze, è un numero puro che si esprime in radianti. Per questa ragione talvolta la velocità angolare o la pulsazione sono date in s^{-1}. Noi preferiamo scrivere esplicitamente rad s^{-1}, nel caso della velocità angolare per evidenziare il significato di angolo coperto per unità di tempo e nel caso della pulsazione per evitare una confusione numerica con la frequenza: le due grandezze, analoghe come significato, differiscono per il fattore 2π ($\omega = 2\pi/T$, $\nu = 1/T$).

Gli argomenti delle funzioni trigonometriche sono angoli e si misurano in radianti: pertanto non è corretto scrivere sen x o sen t se x è una lunghezza e t un tempo, ma bisogna introdurre una costante moltiplicativa, con le dimensioni rad m^{-1} o rad s^{-1}, e scrivere sen $k\,x$ o sen $\omega\,t$.

Analogamente, gli esponenti delle funzioni esponenziali sono adimensionali e quindi non scriviamo e^{x} o e^{t}, ma $e^{\alpha x} = e^{x/\lambda}$ o $e^{bt} = e^{t/\tau}$, dove le costanti α, λ, b, τ sono espresse rispettivamente in m^{-1}, m, s^{-1}, s. Se invece, come si fa in matematica, si intende scrivere un generico argomento e non riferirsi in particolare a una lunghezza, sono corrette le espressioni e^{x} e sen x.

Infine, quando una grandezza è espressa come $g = df/dx$ la sua unità di misura è quella di f divisa quella di x ($v = dx/dt$ si misura in ms^{-1}); se c'è una derivata seconda, $h = \dfrac{dg}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$, l'unità di misura di h è quella di f divisa per quella di x elevata al quadrato ($a = d^2x/dt^2$ si misura in ms^{-2}) e così via. È appunto in base a ciò che nella (8.10) si determinano le dimensioni di v^2: $\partial^2\xi/\partial t^2$ si misura in ms^{-2}, $\partial^2\xi/\partial x^2$ in m^{-1}, dovendo esserci omogeneità v^2 si misura in $m^2\,s^{-2}$.

APPENDICE C

CALCOLO VETTORIALE

C.1 GRANDEZZE SCALARI E VETTORIALI

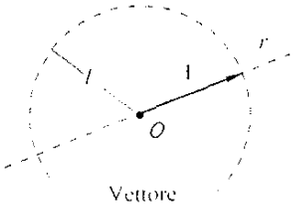
Le leggi della fisica sono espresse da equazioni matematiche nelle quali compaiono quantità che descrivono le grandezze fisiche interessate.

Alcune di queste grandezze possono essere rappresentate da un numero che, nell'appropriata unità di misura, ne dà il valore in un certo punto e in un certo istante. Se prendiamo in esame, per esempio, la temperatura dell'aria in un dato luogo, le nostre misure ci permettono di costruire una funzione $T(P)$ che dà il valore della temperatura in ogni punto P dell'ambiente: nel punto P_i la temperatura vale $T_i = T(P_i)$. Inoltre, se non si prendono speciali precauzioni per termostatare l'ambiente, la temperatura in ogni punto varierà nel tempo, per cui più esattamente essa sarà espressa da una funzione $T(P, t)$ delle cordinate del punto e del tempo. La densità della crosta terrestre in un certo luogo è funzione della profondità; lo stesso succede per la densità di una soluzione. La massa di un corpo macroscopico infine è un numero che si assume costante.

Grandezze scalari

Le grandezze per la cui rappresentazione basta un solo numero, costante o funzione delle coordinate ed eventualmente anche del tempo, si dicono *grandezze scalari*; le operazioni che si eseguono su di esse obbediscono alle solite regole dell'algebra. Nel testo sono indicate in *carattere corsivo*.

Ci sono però situazioni in cui un solo numero non è sufficiente a descrivere completamente una grandezza fisica. L'esempio più semplice e immediato è quello dello spostamento da un punto all'altro. Se, partendo da un punto O, diciamo di compiere uno spostamento rettilineo l, abbiamo specificato semplicemente di quanto ci siamo allontanati da O, ma non possiamo determinare dove arriviamo: tutti i punti che stanno su una superficie sferica di centro O e raggio l sono possibili punti di arrivo. Se precisiamo la direzione r dello spostamento, possiamo ancora arrivare in due punti diametralmente opposti sulla superficie sferica; solo se indichiamo il verso di percorrenza lungo r il risultato è univoco.



Vettore

Fig. C.1

Esistono dunque grandezze che per essere specificate hanno bisogno di un numero, il modulo, che ne dà il valore in assoluto, di una direzione e di un verso. Il *vettore* è l'ente matematico adatto alla rappresentazione di queste *grandezze* che si chiamano appunto *vettoriali* e per le quali vale un'algebra che non è identica all'algebra scalare.

La rappresentazione grafica di un vettore è immediata: essa avviene tramite un segmento orientato la cui lunghezza è pari al modulo del vettore (fissata convenzio-

nalmente una lunghezza unitaria). Come simbolo usiamo un carattere *grassetto* diritto, per esempio **a**; talvolta è usata anche una lettera con una freccia sopra. I vettori **a** e **b** della figura C.2 sono diversi; anche **c** e **d** sono diversi: pur avendo lo stesso modulo e la stessa direzione, differiscono nel verso; invece **e** ed **f** sono eguali e si scrive **e** = **f**, che è il più semplice esempio di equazione vettoriale.

Matematicamente, un vettore ha infinite rappresentazioni: infatti tutti i segmenti orientati di eguale lunghezza, paralleli ed equiversi sono rappresentazioni dello stesso vettore e quindi equivalenti; si dice che essi formano un sistema di *vettori equipollenti*. Però, a seconda del punto di applicazione, una grandezza vettoriale può dare origine a situazioni fisiche diverse: sappiamo che una stessa forza applicata in punti diversi di un corpo rigido può causare moti diversi. Per questo motivo in pratica facciamo sempre uso di *vettori applicati in un certo punto*, cioè ci concentriamo su una particolare delle infinite rappresentazioni di un vettore.

Nello studio della meccanica si incontrano molte grandezze vettoriali oltre allo spostamento: velocità, accelerazione, velocità angolare, forza, quantità di moto, momento angolare, momento della forza sono vettori. Il modulo di ciascuna descrive l'entità della grandezza, la sua intensità, e pertanto deve essere espresso nella relativa unità di misura: il modulo dello spostamento si esprime in metri, quello della forza in newton, quello del momento angolare in kg m^2 s^{-1}.

Riprendendo quanto detto all'inizio del paragrafo, possiamo ora precisare che le equazioni che esprimono le leggi fisiche legano tra loro grandezze scalari o grandezze vettoriali, cioè sono *equazioni scalari o equazioni vettoriali*; non esiste una possibilità intermedia, ovvero non ha senso eguagliare uno scalare a un vettore. Le grandezze scalari e vettoriali non esauriscono tutti i possibili tipi di grandezze che si incontrano nello studio della fisica, però sono sufficienti per i nostri scopi.

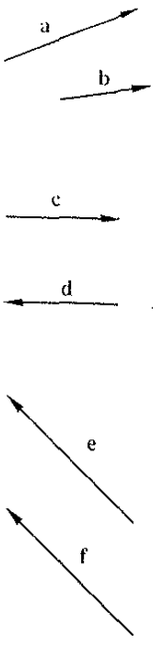
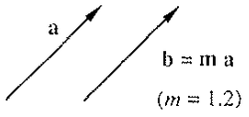


Fig. C.2

C.2 PRIME PROPRIETA' DEI VETTORI

La prima operazione che definiamo per i vettori è il *prodotto di un vettore per uno scalare* (numero),

$$\mathbf{b} = m\,\mathbf{a} \quad ; \tag{C.1}$$



il prodotto dello scalare m per il vettore **a** ha come risultato un altro vettore **b** che ha la stessa direzione di **a**, il modulo m volte quello di **a**, lo stesso verso di **a** se $m > 0$ e verso opposto se $m < 0$. Ponendo $m = -1$ nella (C.1) si ottiene

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a} \tag{C.2}$$

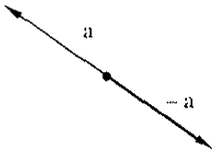


Fig. C.3

che definisce il *vettore opposto* a un dato vettore **a**: – **a** ha stessa direzione e modulo di **a** e verso opposto.

L'operazione prodotto per uno scalare porta a un concetto molto importante: fissata una direzione orientata r vi sono infiniti vettori che hanno quella direzione e differiscono solo nel modulo e nel verso; in particolare tra questi esiste il vettore **u** che è concorde in verso con r e ha modulo unitario. Tutti gli infiniti vettori di cui sopra possono allora scriversi

$$\mathbf{a} = a\,\mathbf{u} \tag{C.3}$$

In questa formulazione **u** descrive la direzione di **a**, mentre a con il suo segno ne

Versore

determina il verso, concorde o discorde a **u**, e con il suo modulo | **a** | il valore. Il *vettore unitario* **u** si chiama il *versore* della direzione orientata r e per ricordare questo fatto si usa scrivere $\hat{\mathbf{u}}$.

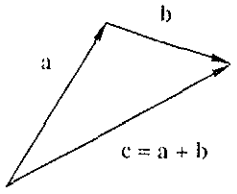


Fig. C.4

Regola di somma

Dati due vettori **a** e **b**, in cui **b** è applicato nel punto terminale di **a**, la *somma* è un vettore che si indica con **c** = **a** + **b** e si ottiene graficamente unendo l'origine del vettore **a** con l'estremo del vettore **b**.

Un metodo alternativo per determinare graficamente la somma di due vettori **a** e **b**, detta *vettore somma* o *vettore risultante*, è il cosiddetto *metodo del parallelogramma*: si applica nell'origine di **a** anche il vettore **b** spostandolo parallelamente a se stesso; il vettore somma **c** = **a** + **b** coincide con la diagonale del parallelogramma che ha come lati **a** e **b**. Il confronto della figura C.5 con la figura C.4 mostra che il risultato è lo stesso.

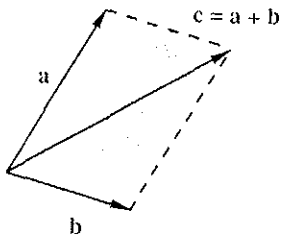


Fig. C.5

La costruzione col metodo del parallelogramma consente di verificare che per la somma di due vettori vale la proprietà commutativa:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad .$$

La regola di somma completa la definizione di vettore: *una grandezza è vettoriale quando è individuata da modulo, direzione e verso e obbedisce alla regola di somma ora definita.*

Tramite il concetto di vettore opposto (C.2) e la regola di somma, si definisce anche la *differenza di due vettori*:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \quad .$$

Nella figura C.6 sono mostrate le due costruzioni corrispondenti alle figure C.4 e C.5; si vede che il vettore differenza **a** − **b** coincide con l'altra diagonale del parallelogramma utilizzato per il calcolo del vettore somma.

La regola di somma si estende alla somma di più vettori:

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} \quad .$$

Si disegnano in successione i diversi vettori ponendo l'origine di uno nel punto in cui termina il precedente: si costruisce così una linea spezzata e il vettore somma **R** si ottiene congiungendo i due estremi di questa linea.

È evidente che il risultato non dipende dall'ordine con cui si considerano gli addendi e che vale la *proprietà associativa*:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad .$$

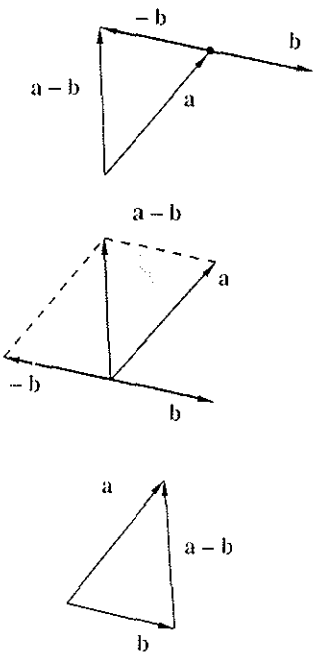


Fig. C.6

Nel caso di vettori paralleli, scritti con la notazione (C.3), si ha

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = a_1\,\mathbf{u} + a_2\,\mathbf{u} = (a_1 + a_2)\,\mathbf{u} \qquad \text{(C.4)}$$

e analogamente per più vettori $\Sigma_i\,\mathbf{a}_i = (\Sigma_i\,a_i)\,\mathbf{u}$. La somma consiste nella somma algebrica dei moduli con segno e vediamo che vale la proprietà distributiva nel prodotto di un vettore per uno scalare.

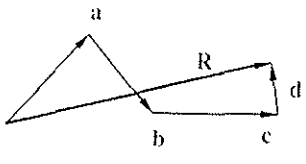


Fig. C.7

Scomposizione di un vettore

Consideriamo un vettore $\boldsymbol{v}$ e due direzioni orientate r e s caratterizzate rispettivamente dai versori $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_s$. Vogliamo scomporre il vettore $\boldsymbol{v}$ nella somma di due vettori, uno $\boldsymbol{v}_r$ parallelo a $\mathbf{u}_r$ e l'altro $\boldsymbol{v}_s$ parallelo a $\mathbf{u}_s$, tali che

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_s = v_r \mathbf{u}_r + v_s \mathbf{u}_s \quad ;$$

$\boldsymbol{v}_r$ e $\boldsymbol{v}_s$ si chiamano i *vettori componenti* del vettore $\boldsymbol{v}$ lungo r e s. La costruzione grafica della figura C.8 è ottenuta applicando al contrario il metodo di somma dei vettori.

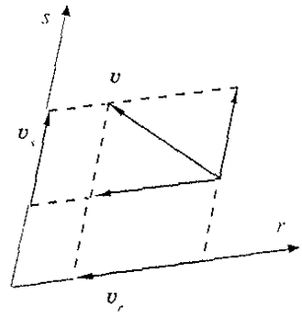


Fig. C.8

Dalla scomposizione lungo due direzioni $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_s$ che individuano un piano si passa alla scomposizione secondo tre direzioni nello spazio caratterizzate dai versori $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_s$, $\mathbf{u}_t$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_s + \boldsymbol{v}_t = v_r \mathbf{u}_r + v_s \mathbf{u}_s + v_t \mathbf{u}_t \quad .$$

Il caso di gran lunga più frequente è che le tre direzioni siano gli *assi cartesiani ortogonali di un sistema di riferimento*, caratterizzati dai versori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ così che si può scrivere

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_x + \boldsymbol{v}_y + \boldsymbol{v}_z = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z \quad . \qquad \text{(C.5)}$$

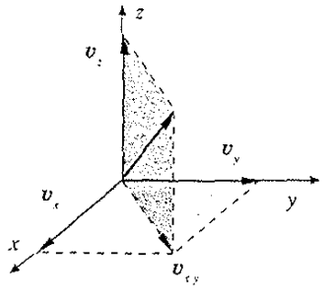


Fig. C.9

I vettori $\boldsymbol{v}_x$, $\boldsymbol{v}_y$, $\boldsymbol{v}_z$ si chiamano i *vettori componenti* di $\boldsymbol{v}$, mentre v_x, v_y, v_z si chiamano *le componenti* di $\boldsymbol{v}$ secondo i tre assi cartesiani del sistema di riferimento prescelto.

Dati due vettori rappresentati in un certo sistema da

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z \;, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{u}_x + b_y \mathbf{u}_y + b_z \mathbf{u}_z \;,$$

la loro somma è data da

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z + b_x \mathbf{u}_x + b_y \mathbf{u}_y + b_z \mathbf{u}_z$$

ovvero, secondo (C.4), da

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\, \mathbf{u}_x + (a_y + b_y)\, \mathbf{u}_y + (a_z + b_z)\, \mathbf{u}_z \quad . \qquad \text{(C.6)}$$

Il vettore somma ha come componenti la somma delle componenti dei singoli vettori. Il risultato si estende alla somma di un numero qualunque di vettori e resta valido anche se gli assi non sono ortogonali.

Proprietà di invarianza

L'operazione di scomposizione che abbiamo appena descritto fa sì che dato un vettore si ricavino le componenti; viceversa, date le componenti è possibile stabilire modulo, direzione e verso. Tutto questo in un ben determinato sistema di riferimento. Si pone allora il problema se il concetto di vettore e le operazioni che abbiamo finora definito, somma e prodotto per uno scalare, come altre che definiremo in seguito, dipendano dal particolare sistema di riferimento prescelto.

Ritorniamo per un momento alle grandezze scalari e al nostro esempio della

temperatura: il valore $T(P, t)$ dipende dalle condizioni fisiche dell'ambiente, ma non dal fatto che osserviamo il fenomeno da un certo sistema di riferimento. Fissato un sistema in cui P ha le coordinate x, y, z, possiamo considerarne un altro legato al primo da una traslazione: i nuovi assi sono paralleli e concordi ai vecchi, l'origine si è spostata; oppure possiamo considerare un terzo sistema ottenuto mantenendo fissa l'origine e ruotando gli assi (il caso più generale è una combinazione di questi due, una rototraslazione). Tali operazioni comportano un cambiamento delle coordinate di P, ma la temperatura nel punto P in quel dato istante resta sempre la stessa, da qualunque sistema la guardiamo, essendo piuttosto legata alla distribuzione nello spazio delle sorgenti di energia e a caratteristiche fisiche dell'ambiente. *Una grandezza scalare cioè è invariante rispetto al sistema di riferimento.*

Grandezze scalari

La stessa situazione si presenta per un vettore: se ripensiamo all'esempio dello spostamento a partire da O, individuato dal vettore **I** (figura C.1), notiamo che la sua definizione è indipendente dal sistema di coordinate. In generale l'operazione di fissare due punti e congiungerli con un segmento orientato non ha bisogno del supporto di un sistema di riferimento per essere definita. Ne discende che anche le operazioni di somma e prodotto per uno scalare sono invarianti rispetto alla scelta del sistema: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} = m\,\mathbf{a}$ sono equazioni valide in qualsiasi sistema di riferimento.

Proprietà di invarianza

Questa *proprietà di invarianza* è certamente molto soddisfacente dal punto di vista matematico e addirittura essenziale in fisica, visto il significato delle grandezze che rappresentiamo con scalari o vettori. Abbiamo già osservato che le leggi della fisica si esprimono tramite equazioni matematiche in cui compaiono le grandezze che descrivono un certo fenomeno. Possiamo dire ora che quando queste *equazioni* sono *scalari*, cioè del tipo $a = b$ o più complesse, oppure *vettoriali*, cioè del tipo $\mathbf{b} = m\,\mathbf{a}$ o più complesse, esse *hanno una validità intrinseca che non dipende dal sistema di riferimento*: in qualsiasi sistema conservano la stessa struttura. Nel caso scalare questo vuol dire in particolare che le grandezze scalari che compaiono nell'equazione hanno lo stesso valore indipendentemente dal sistema adottato; per il caso vettoriale è necessaria una discussione più approfondita.

Quando si fissa un sistema di riferimento un vettore è individuato dalle sue componenti; nella pratica questo procedimento si usa frequentemente. Un'equazione tra vettori equivale a tre equazioni nelle componenti ($\mathbf{b} = m\,\mathbf{a}$ comporta $b_x = m\,a_x$, $b_y = m\,a_y$, $b_z = m\,a_z$) e le operazioni che già conosciamo e quelle che studieremo si portano a termine molto spesso ragionando sulle componenti. Quindi è importante stabilire come si comportano le componenti quando si cambia sistema di riferimento. Il risultato generale è che esse cambiano se cambia il sistema ed è istruttivo studiare questo problema.

Per semplicità poniamoci nel piano cartesiano e consideriamo un sistema x, y, un sistema x', y' ottenuto dal primo per *traslazione* e un sistema x'', y'' ottenuto per *rotazione*, come disegnato in figura C.10, nella quale sono anche riportate le formule di trasformazione delle coordinate da un sistema all'altro.

Traslazione

Nel primo caso (*traslazione*) le componenti di $\mathbf{r}_{AB}$ nel sistema O sono $x_{AB} = x_B - x_A$ e $y_{AB} = y_B - y_A$, che risultano eguali rispettivamente a $x'_{AB} = x'_B - x'_A$ e $y'_{AB} = y'_B - y'_A$, componenti nel sistema O': *in una traslazione le componenti di un vettore restano invariate.*

Rotazione

Nel secondo caso (*rotazione*) abbiamo:

$$x''_{AB} = x''_B - x''_A = x_B \cos\theta + y_B \operatorname{sen}\theta - (x_A \cos\theta + y_A \operatorname{sen}\theta) =$$

$$= (x_B - x_A)\cos\theta + (y_B - y_A)\operatorname{sen}\theta = x_{AB}\cos\theta + y_{AB}\operatorname{sen}\theta \quad .$$

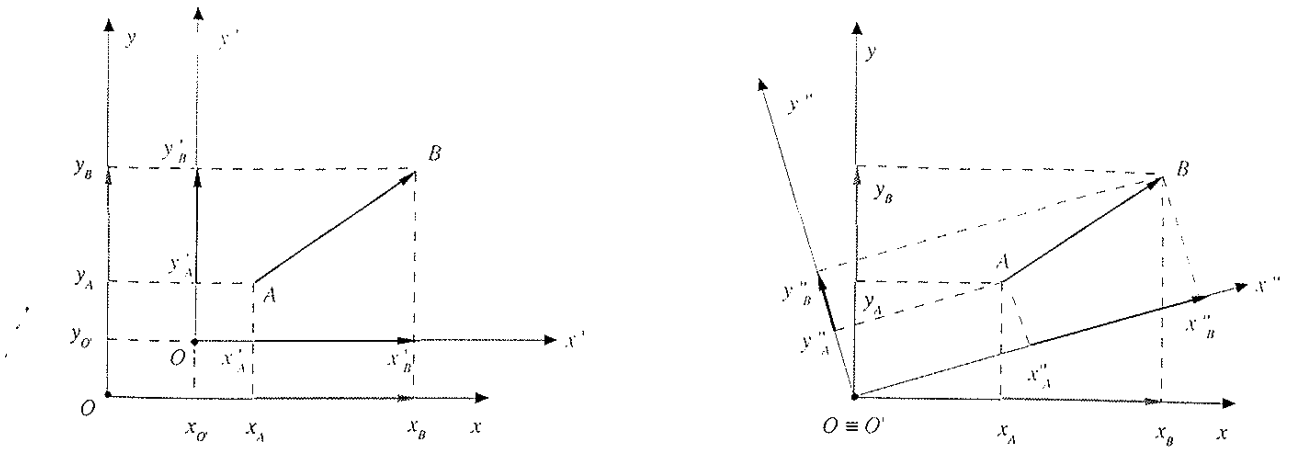


Fig. C.10

Analogamente

$$y''_{AB} = -x_{AB} \operatorname{sen}\theta + y_{AB} \cos\theta \quad .$$

In una rotazione le componenti di un vettore cambiano obbedendo alla stessa regola di trasformazione valida per le coordinate (si veda il paragrafo 3.7). Questa proprietà è del tutto generale e può essere assunta come definizione: *il vettore è l'ente individuato da tre numeri, dipendenti dal sistema di riferimento, che si trasformano sotto rotazioni con la stessa legge con cui si trasformano le coordinate.*

Definizione di vettore

In conclusione, quando scriviamo un'equazione vettoriale **a** = **b** e la consideriamo in un determinato sistema di riferimento, le tre equazioni $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$ sono valide come struttura in qualsiasi sistema, però con valori delle componenti diversi in ciascun sistema. *Le componenti* stesse, non essendo indipendenti dal sistema, *non sono quantità scalari*. È invece uno scalare il modulo che, con riferimento alla (C.5) e alla figura C.9, si scrive

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{C.7}$$

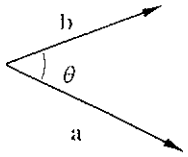
e si verifica essere lo stesso in qualsiasi sistema.

C.3 PRODOTTI TRA VETTORI

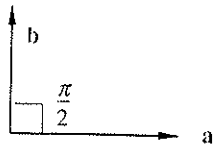
Si definiscono due operazioni di prodotto tra due vettori, che danno come risultato una quantità scalare o un altro vettore; li chiamiamo rispettivamente *prodotto scalare e prodotto vettoriale*.

Prodotto scalare

Dati due vettori **a** e **b** si definisce *prodotto scalare* la quantità



$s = a\, b \cos\theta$



$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

Fig. C.11

$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\, b \cos\theta \quad . \tag{C.8}$$

indicando con θ l'angolo formato dai due vettori. Il risultato del prodotto scalare è una quantità scalare data dal prodotto dei moduli di **a** e di **b** per il coseno dell'angolo compreso tra **a** e **b**.

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

- è nullo non solo se uno dei due vettori è nullo, ma anche se i due vettori formano un angolo di $\pi / 2$;
- vale la *proprietà commutativa*

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = b\, a \cos(-\theta) = b\, a \cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad ;$$

- in particolare, se $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ $(\theta = 0,\ \cos\theta = 1)$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 \quad ; \tag{C.9}$$

il prodotto scalare di un vettore per se stesso, detto anche *quadrato del vettore, è eguale al quadrato del modulo del vettore*;

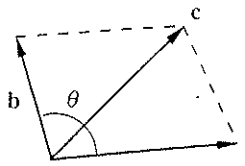
- non ha senso iterare il prodotto scalare: la scrittura $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ è priva di significato perché $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ è uno scalare e non può essere moltiplicato scalarmente per **c**;
- vale la *proprietà distributiva*:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \ldots) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \ldots \quad ;$$

- se $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, dalla proprietà distributiva e da (C.9) si ha

$$c^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = a^2 + b^2 + 2\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^2 + b^2 + 2\, a\, b \cos\theta$$

che è *il teorema di Carnot o del coseno* per il triangolo avente come lati a, b, c e permette di calcolare subito il modulo della somma di due vettori. In particolare se $\theta = \pi/2$ si ritrova il *teorema di Pitagora* $c^2 = a^2 + b^2$.



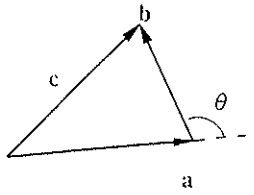


Fig. C.12

La definizione (C.8) è certamente invariante in quanto tutte le grandezze che compaiono nel risultato dell'operazione sono scalari. Vediamo ora di calcolare l'espressione del prodotto scalare in un determinato sistema di riferimento, cioè in funzione delle componenti cartesiane dei due vettori. Posto

$$\mathbf{a} = a_x\, \mathbf{u}_x + a_y\, \mathbf{u}_y + a_z\, \mathbf{u}_z \quad , \qquad \mathbf{b} = b_x\, \mathbf{u}_x + b_y\, \mathbf{u}_y + b_z\, \mathbf{u}_z$$

osserviamo che in base alla definizione di versore e alla (C.8)

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = 1 \ ,$$

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x = 0 \ ,$$

e quindi il prodotto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, sviluppato secondo la proprietà distributiva, dà

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z \quad . \tag{C10}$$

Il prodotto scalare tra due vettori è eguale alla somma dei prodotti delle componenti omologhe dei singoli vettori. In particolare

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

che è la relazione (C.7).

Un altro modo, spesso fisicamente molto significativo, di rappresentare il prodotto scalare è il seguente:

$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a \cos\theta)\, b = a\,(b \cos\theta) \quad .$$

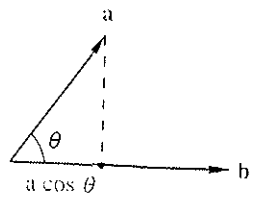


Fig. C.13

Il prodotto scalare tra due vettori è eguale al prodotto del modulo di uno dei vettori per la proiezione su di questo dell'altro vettore.

Prodotto vettoriale

Dati due vettori **a** e **b** si definisce *prodotto vettoriale* il vettore **c** che si indica col simbolo

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \hat{\times} \mathbf{b}$$

e che ha le seguenti caratteristiche:

- la *direzione* è perpendicolare al piano individuato da **a** e **b** ;
- il *verso* è quello di una normale vite destrogira, cioè ruotando da **a** a **b** nel verso della vite, il verso di **c** è indicato dalla punta della vite; alternativamente, si può dire che dalla punta di **c** deve apparire antioraria la rotazione che porta **a** su **b**;
- il *modulo* è

$$c = a\, b \,\text{sen}\,\theta \qquad \text{(C.11)}$$

e coincide con l'area del parallelogramma di lati a e b.

È bene osservare subito che *il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa*. Infatti se eseguiamo il prodotto $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ in base alla definizione otteniamo il vettore $-\mathbf{c}$, opposto a **c**:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} \ ,$$

e si dice che *il prodotto vettoriale è anticommutativo*.

Valgono inoltre le seguenti proprietà:

- il risultato è nullo se uno dei due vettori è nullo oppure se i due vettori sono paralleli ($\theta = 0$, $\theta = \pi$: due vettori paralleli non individuano un piano); in particolare è nullo il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$;
- si applica la proprietà distributiva:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{R} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \ldots) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \ldots \quad ;$$

- il prodotto vettoriale può essere iterato, ma va completamente specificata la sequenza delle diverse operazioni, perché *non vale la proprietà associativa*:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \quad .$$

La definizione di prodotto vettoriale è indipendente dal sistema di riferimento perché è ricondotta a operazioni invarianti per la determinazione di direzione, verso

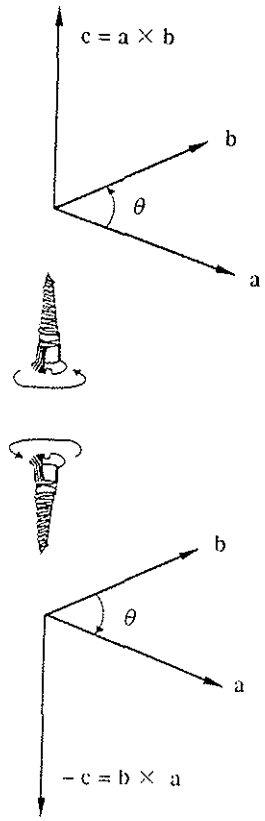


Fig. C.14

e modulo del risultato. Il calcolo dell'espressione in funzione delle componenti cartesiane in un dato sistema di riferimento si basa sulle

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{u}_x + a_y\,\mathbf{u}_y + a_z\,\mathbf{u}_z \quad , \qquad \mathbf{b} = b_x\,\mathbf{u}_x + b_y\,\mathbf{u}_y + b_z\,\mathbf{u}_z$$

e sulle proprietà dei prodotti vettoriali tra i versori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$:

$$\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_z = 0$$

$$\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \quad , \quad \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x \quad , \quad \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \quad ,$$

$$\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x = -\mathbf{u}_z \quad , \quad \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_y = -\mathbf{u}_x \quad , \quad \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z = -\mathbf{u}_y \quad .$$

Applicando la proprietà distributiva si ottiene

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{u}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{u}_z$$

che è suscettibile della seguente forma

$$\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Il vettore **c** si calcola come *determinante* della matrice formata con i versori degli assi del sistema di riferimento, le componenti di **a** e quelle di **b**, nell'ordine prefissato (chiaramente scambiando la seconda e la terza riga cambia il verso del risultato, **c** diventa – **c**).

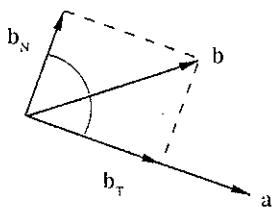


Fig. C.15

Un'altra rappresentazione molto utile consiste nello scomporre **b** secondo un componente $\mathbf{b}_T$ parallelo ad **a** e un componente $\mathbf{b}_N$ ortogonale ad **a**, per cui

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b}_T + \mathbf{b}_N) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_N$$

in quanto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}_T = 0$ essendo i due vettori paralleli. Il modulo di **c** è $c = a\,b_N$ ($\theta = \pi/2$, sen $\theta = 1$): *il modulo del prodotto vettoriale è eguale al prodotto del modulo di un vettore per la componente dell'altro vettore normale al primo.*

Momento di un vettore rispetto ad un punto

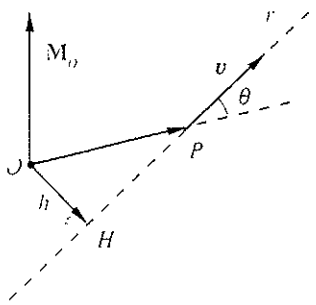


Fig. C.16

Sia $\boldsymbol{v}$ un vettore applicato nel punto P e O un altro generico punto. Si definisce *momento del vettore* $\boldsymbol{v}$ *rispetto al punto* O, chiamato *polo*, il vettore

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \boldsymbol{v} \quad , \tag{C.13}$$

ortogonale al piano individuato da **OP** e $\boldsymbol{v}$. Detto **OH** il componente di **OP** perpendicolare a $\boldsymbol{v}$ (si veda anche la figura C.16) otteniamo

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{OH} \times \boldsymbol{v} \quad .$$

Il modulo di $\mathbf{M}_O$ *è dato da*

$$M_O = |OP| v \text{ sen } \theta = |OH| v = h v \ , \qquad \text{(C.14)}$$

essendo h la distanza di O dalla retta r contenente $\boldsymbol{v}$, detta *retta di applicazione* di $\boldsymbol{v}$; h prende il nome di *braccio* di $\boldsymbol{v}$ rispetto ad O.

Dovunque si prenda P lungo r il momento non cambia in quanto $\mathbf{OH}$ rimane lo stesso; analogamente, se si sposta O lungo una retta parallela a r il momento non cambia.

Se si sceglie un altro polo O', il momento di $\boldsymbol{v}$ rispetto a O' è dato da

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{O'P} \times \boldsymbol{v} \ .$$

Poiché $\mathbf{OP} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'P}$ abbiamo

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{OO'} \times \boldsymbol{v} + \mathbf{O'P} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{OO'} \times \boldsymbol{v} + \mathbf{M}_{O'} \ . \qquad \text{(C.15)}$$

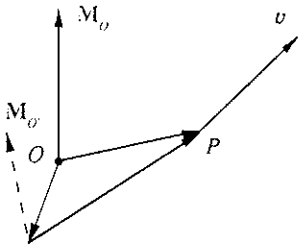


Fig. C.17

In generale $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{M}_{O'}$: *il momento di un vettore dipende dal polo*; solo se $\mathbf{OO'}$ è parallelo a $\boldsymbol{v}$, $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'}$ e ritroviamo il risultato enunciato sopra.

C.4 DERIVATA DI UN VETTORE

Le operazioni tipiche del calcolo infinitesimale possono essere estese alle grandezze vettoriali. Cominciamo col considerare un vettore $\boldsymbol{v}$ funzione di una variabile scalare t, cioè una grandezza vettoriale il cui modulo e la cui direzione cambiano al variare di t, in un modo che in generale supponiamo continuo; $\boldsymbol{v}(t)$ e $\boldsymbol{v}(t + \Delta t)$ sono due diversi valori della funzione, comprendendo nel termine valore modulo e direzione. Possiamo scrivere

$$\boldsymbol{v}(t + \Delta t) = \boldsymbol{v}(t) + \Delta \boldsymbol{v}$$

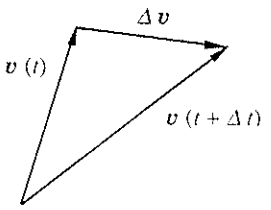


Fig. C.18

e costruire il rapporto

$$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

tra la variazione $\Delta \boldsymbol{v}$ della funzione vettoriale $\boldsymbol{v}(t)$ e l'*incremento della variabile t*. Si definisce *derivata del vettore* $\boldsymbol{v}$ *rispetto alla variabile* t la quantità

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

Derivata di un vettore

Osserviamo che *la derivata di un vettore è ancora un vettore* in quanto l'operazione equivale al prodotto di un vettore, $d\boldsymbol{v}$, per uno scalare, $1/dt$; inoltre il vettore derivata in generale non è parallelo a $\boldsymbol{v}$, come si può intuire dalla figura C.18: $\Delta \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}$ non sono paralleli, neppure al limite.

Per la derivata di un vettore valgono le usuali *regole di derivazione*; ne elenchiamo alcune:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m\,\boldsymbol{v}) = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad \text{se } m \text{ è costante}$$

Regole di derivazione dei vettori

$$\frac{d}{dt}(m\,\boldsymbol{v}) = \frac{dm}{dt}\,\boldsymbol{v} + m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad \text{se } m \text{ dipende da } t$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

In quest'ultimo caso bisogna fare attenzione all'ordine con cui sono scritti i vettori nel prodotto vettoriale.

La derivata di un vettore, essendo, come abbiamo già osservato, a sua volta un vettore, non dipende per il significato e per la sua definizione dal sistema di riferimento. Se però rappresentiamo il vettore $\boldsymbol{v}$ in un sistema di assi cartesiani ortogonali per cui $\boldsymbol{v} = v_x\,\mathbf{u}_x + v_y\,\mathbf{u}_y + v_z\,\mathbf{u}_z$, allora ripetendo il procedimento di passaggio al limite abbiamo

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\,\mathbf{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\,\mathbf{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\,\mathbf{u}_z \qquad \text{(C.16)}$$

nell'ipotesi che i versori $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$, che caratterizzano il sistema di riferimento, siano fissi, ovvero costanti rispetto a t. In tal caso il vettore derivato di $\boldsymbol{v}$ ha come componenti le derivate delle componenti di $\boldsymbol{v}$. La (C.16), che può essere anche assunta come definizione, fornisce un mezzo molto comodo per calcolare le derivate di vettori.

Derivata di un versore $\mathbf{u}(t)$

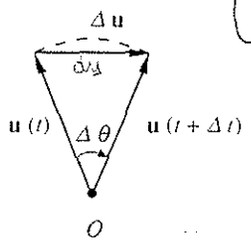


Fig. C.19

Dal momento che un *versore* è per definizione un vettore di modulo unitario, ciò che può cambiare in funzione di t è solo la direzione, cioè il versore può compiere solamente una rotazione di un certo angolo $\Delta\theta$, come mostrato in figura C.19. Possiamo quindi scrivere

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(t+\Delta t) - \mathbf{u}(t)$$

essendo $\Delta\mathbf{u}$ la *corda* che unisce gli estremi dell'arco di circonferenza descritto da $\mathbf{u}(t)$ nella rotazione di $\Delta\theta$. Al limite per $\Delta t \to 0$ la corda $\Delta\mathbf{u}$ tende ad un vettore infinitesimo $d\mathbf{u}$, perpendicolare a $\mathbf{u}(t)$, il cui modulo si confonde con l'arco:

$$du = |\underbrace{u(t)}_{1}|\,d\theta = d\theta \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{u} = d\theta\,\mathbf{u}_N$$

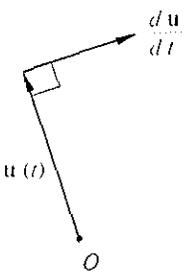


Fig. C.20

essendo $\mathbf{u}_N$ *un versore perpendicolare a* $\mathbf{u}(t)$. Definiamo la *derivata del versore* $\mathbf{u}(t)$ come

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_N \qquad \text{(C.17)}$$

La derivata di un versore è un vettore perpendicolare al versore, di modulo $d\theta/dt$, *in generale diverso da* 1: in altre parole $d\mathbf{u}/dt$ *non è un versore.*

Scrittura intrinseca della derivata

Consideriamo il vettore $\boldsymbol{v}$ nella sua forma (C.3), $\boldsymbol{v} = v\,\mathbf{u}$, invariante rispetto al sistema di riferimento. Calcoliamo la derivata di $\boldsymbol{v}\,(t)$ con la regola di derivazione di un prodotto:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{u} + v\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad .$$

Vediamo che la variazione rispetto a t del vettore $\boldsymbol{v}$ ha due termini: il primo $\frac{dv}{dt}\,\mathbf{u}$, parallelo a $\boldsymbol{v}$, è dovuto alla variazione del modulo di $\boldsymbol{v}$, il secondo $v\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} = v\,\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_N$ secondo (C.17) è ortogonale a $\boldsymbol{v}$ ed è dovuto alla variazione della direzione di $\boldsymbol{v}$. Quindi:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{u} + v\,\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_N \quad . \tag{C.18}$$

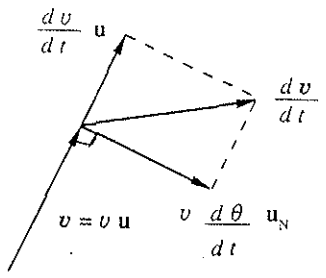


Fig. C.21

Il *modulo del vettore derivato* è

$$\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(v\,\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \tag{C.19}$$

e osserviamo che *il modulo della derivata di $\boldsymbol{v}$ è diverso dalla derivata del modulo di $\boldsymbol{v}$.*

La presenza di uno solo dei termini di (C.18) dà origine a situazioni particolari che si incontrano spesso:

a) $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{u}$: il vettore varia solamente in modulo e mantiene inalterata la direzione, cioè $d\theta/dt = 0$;

b) $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = v\,\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_N$: il vettore non varia in modulo, $dv/dt = 0$, ma solo in direzione, cioè compie una rotazione.

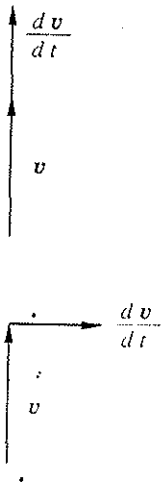


Fig. C.22

Dal caso b) ricaviamo questo risultato: *la derivata di un vettore di modulo costante è perpendicolare al vettore stesso* (si estende così quanto trovato prima per un versore).

Notiamo che nel caso più generale la variazione di direzione che compare nella (C.18) non è contenuta sempre nello stesso piano, ma è tridimensionale.

Dalla definizione di derivata di un vettore si può ottenere un vettore infinitesimo dato da

$$d\boldsymbol{v} = \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) dt$$

oppure, ricorrendo alle componenti cartesiane, espresso da

$$d\boldsymbol{v} = dv_x\,\mathbf{u}_x + dv_y\,\mathbf{u}_y + dv_z\,\mathbf{u}_z \quad , \tag{C.20}$$

sempre nell'ipotesi che i versori degli assi coordinati siano fissi. Infine, da (C.18),

$$d\boldsymbol{v} = dv\,\mathbf{u} + v\,d\theta\,\mathbf{u}_N \quad :$$

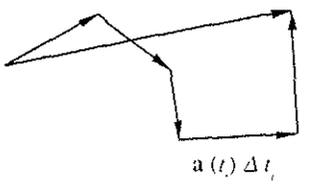
$d\,\boldsymbol{v}$ giace nel piano in cui avviene la variazione istantanea di $\boldsymbol{v}$, individuato da $\mathbf{u}_\parallel$ parallelo a $\boldsymbol{v}$, e da $\mathbf{u}_\perp$, perpendicolare a $\boldsymbol{v}$. In un istante successivo di norma $\mathbf{u}_\perp$ non giace in questo piano.

C.5 INTEGRAZIONE VETTORIALE

La funzione vettoriale $\mathbf{a}(t)$ sia definita in un certo intervallo della variabile t ; dividiamo questo intervallo in tanti sottointervalli Δt_i in ciascuno dei quali consideriamo un valore $\mathbf{a}(t_i)$ della funzione. Costruiamo i vettori $\mathbf{a}(t_i)\,\Delta t_i$ e ne consideriamo la somma

$$\mathbf{A} = \sum_1^n \mathbf{a}(t_i)\,\Delta t_i \quad .$$

$\mathbf{A}$ è un vettore che unisce l'origine del primo vettore $\mathbf{a}(t_1)\,\Delta t_1$ con l'estremo dell'ultimo $\mathbf{a}(t_n)\,\Delta t_n$.



Si definisce *integrale definito* di $\mathbf{a}(t)$ il vettore a cui tende la somma quando tutti i Δt_i tendono a zero:

$$\mathbf{A} = \lim \sum_1^n \mathbf{a}(t_i)\,\Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t)\; d\,t \quad ;$$

t_1 e t_2 sono gli estremi dell'intervallo di t considerato.

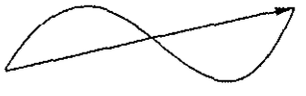


Fig. C.23

Il vettore $\mathbf{A}(t)$, ottenuto dall'integrazione di $\mathbf{a}(t)$, *non* dipende dal sistema di riferimento. Tuttavia per eseguire i calcoli è conveniente fissare un sistema di coordinate, per esempio cartesiane ortogonali: allora

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\,\mathbf{u}_x + a_y(t)\,\mathbf{u}_y + a_z(t)\,\mathbf{u}_z$$

e l'integrale si scrive

$$\mathbf{A} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t)\,d\,t = \mathbf{u}_x \int_{t_1}^{t_2} a_x(t)\,d\,t + \mathbf{u}_y \int_{t_1}^{t_2} a_y(t)\,d\,t + \mathbf{u}_z \int_{t_1}^{t_2} a_z(t)\,d\,t \quad :$$

l'integrale di un vettore ha come componenti gli integrali delle componenti del vettore. Continuano a valere le usuali regole.

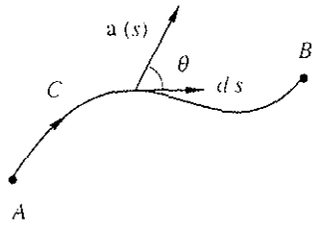


Fig. C.24

Integrale di linea

Consideriamo una curva continua C, di estremi A e B, nei punti della quale è definito un vettore $\mathbf{a}(s)$, essendo s una coordinata curvilinea che individua il punto corrente sulla curva. Se $d\,\mathbf{s}$ è un vettore infinitesimo tangente alla curva nel punto P, calcoliamo il prodotto scalare

$$\mathbf{a}(s) \cdot d\,\mathbf{s} = a(s) \cos\theta\, d\,s = a_\tau(s)\,d\,s$$

dove $a_\tau(s)$ è la componente di $\mathbf{a}(s)$ tangente alla curva nel punto P. Si sommano tutti

questi infiniti contributi infinitesimi ottenuti suddividendo la curva C in infiniti elementi $d\,\mathbf{s}$; il risultato si chiama *integrale di linea* di **a** lungo la linea C orientata da A a B e si indica con

$$\Gamma(A \to B \text{ lungo } C) = \int_A^B \mathbf{a} \cdot d\,\mathbf{s} \ . \qquad \text{(C.21)}$$

Integrale di linea di un vettore

L'integrale di linea Γ è uno scalare; dati i punti A e B in generale il suo valore *dipende* dalla curva C che congiunge A e B.

Se la curva è chiusa ($A \equiv B$) si parla di *circuitazione* di **a** *lungo la linea chiusa* e si usa il simbolo

$$\oint \mathbf{a} \cdot d\,\mathbf{s} \ .$$

C.6 GRADIENTE DI UNA FUNZIONE SCALARE

Sia $f\ (x, y, z)$ una funzione scalare, continua e derivabile, delle coordinate del punto P in una certa regione dello spazio. Nel passaggio dal punto P al punto P' di coordinate $x + d\,x$, $y + d\,y$, $z + d\,z$ la variazione della funzione è espressa da

$$\begin{aligned} d\,f &= f(x + d\,x, y + d\,y, z + d\,z) - f(x, y, z) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} d\,x + \frac{\partial f}{\partial y} d\,y + \frac{\partial f}{\partial z} d\,z \quad , \end{aligned} \qquad \text{(C.22)}$$

come visto nella (A.2) dell'appendice A. Il vettore $\mathbf{PP'}$ è rappresentato da

$$d\,\mathbf{r} = \mathbf{PP'} = d\,x\,\mathbf{u}_x + d\,y\,\mathbf{u}_y + d\,z\,\mathbf{u}_z \quad .$$

A partire dalle derivate parziali della funzione f costruiamo il vettore

$$\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{u}_z \qquad \text{(C.23)}$$

Gradiente di una funzione scalare

detto *gradiente della funzione f*. Se confrontiamo (C.23) e (C.22), con l'espressione di $d\,\mathbf{r}$ e con (C.10), che dà il prodotto scalare in funzione delle componenti, vediamo che

$$d\,f = \mathbf{grad}\, f \cdot d\,\mathbf{r} \quad . \qquad \text{(C.24)}$$

Questo fatto ci dice innanzitutto che il *gradiente*, definito da (C.23), *è* effettivamente *un vettore*, in quanto il suo prodotto scalare per un altro vettore dà una quantità scalare; inoltre, scrivendo (C.24) come

$$d\,f = (\mathbf{grad}\, f \cos\theta)\, d\,r \quad ,$$

vediamo che la variazione della funzione f per uno spostamento $d\,r$ è eguale al prodotto di $d\,r$ per la proiezione del gradiente della funzione sulla direzione dello spostamento.

Consideriamo due spostamenti particolari. Il luogo dei punti in cui f assume un valore costante, individuato dall'equazione f = costante, rappresenta una superficie nello spazio: per uno spostamento $d\,\mathbf{r}$ lungo una tale superficie $df = 0$ e quindi, da (C.24), risulta che *il gradiente di f è perpendicolare alle superficie su cui f è costante* (se f è la temperatura si parla di *superficie isoterme*, se f è la pressione di *superficie isobariche*, se f è l'energia potenziale di *superficie equipotenziali*). Se lo stesso spostamento è effettuato in direzione parallela e concorde al gradiente, df risulta invece massima (cos $\theta = 1$).

Nella figura C.25 sono mostrati alcuni spostamenti, tutti eguali in modulo, a partire da un punto di una superficie f = costante.

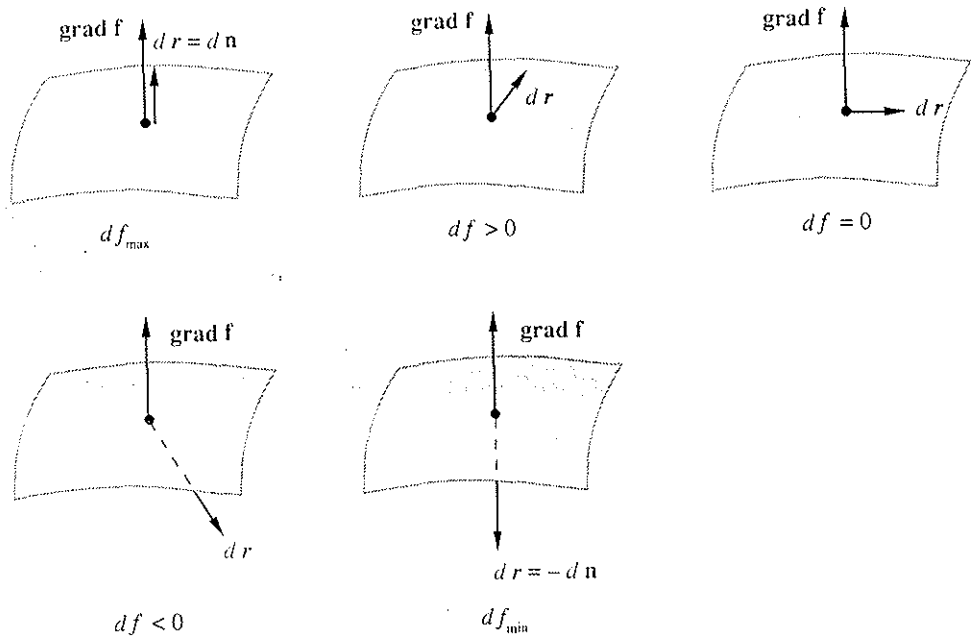


Fig. C.25

Quindi *il gradiente della funzione f è un vettore che in ogni punto è ortogonale alla superficie f = costante passante per quel punto e che con il suo verso indica il verso di massima variazione di f*; il suo modulo è dato da

$$|\,\mathbf{grad}\, f\,| = \frac{df}{dn} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \quad .$$

In conclusione, data una funzione scalare $f(x, y, z)$, con l'operazione gradiente si costruisce una funzione vettoriale **grad** f, a sua volta funzione della posizione, che riassume le informazioni sulle variazioni della funzione f nello spazio, dato che permette di calcolare df per qualsiasi spostamento $d\,\mathbf{r}$.

La figura C.26 mostra alcune superficie appartenenti alla famiglia di superficie f = costante: ciascuna corrisponde a un diverso valore della costante. Le linee tratteggiate sono tali che in ogni loro punto la direzione della tangente alla curva coincide con la direzione del gradiente in quel punto: esse sono orientate nel verso di crescita di f e sono ortogonali alle superficie f = costante.

Sia direttamente per il fatto che è un vettore, sia analizzando come si possono

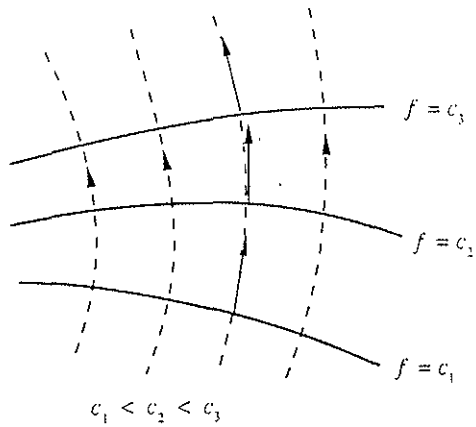


Fig. C.26

definire direzione, verso e modulo, è evidente che il gradiente è invariante rispetto alla scelta del sistema di riferimento. D'altra parte, come abbiamo notato più volte, l'espressione (C.23) in un sistema cartesiano ortogonale è utile sia per comprenderne bene il significato che per eseguire calcoli specifici. In particolari problemi può essere più appropriato adottare altri sistemi di coordinate, per esempio polari; allora, ferme restando le proprietà del gradiente, la (C.23) assume una forma diversa.

Indice analitico

Accelerazione 8, 21, 75
  angolare 24
  assoluta 75
  centripeta 21
  di Coriolis 76
  di trascinamento 76, 83
  istantanea 8
  media 8
  nel moto piano 20
  radiale 22
  relativa 75
  tangenziale 21
  trasversa 22
Accelerometri 82
Angolo di contatto 264
Aspiratore ad acqua 251
Asse istantaneo di rotazione 151
Attrito
  interno 245
  radente 41
  radente dinamico 41
  viscoso 45
  volvente 172
Avogadro
  legge di 323
  numero di 323

B

Barometro aneroide 235
  di Torricelli 240
Battimenti 103
Bernoulli, teorema di 249
Bilancia di torsione 223
Binet, formula di 69
Boltzmann, costante di 325
Bruciatore a gas 251

C

Calcolo vettoriale 470
Calore 296
  latente 310
  specifico 304, 306, 330
  specifico molare 305, 330, 419, 420, 432
  specifico dei solidi 308
Caloria 319
Calorimetro di Regnault 306
Cambiamenti di fase 309, 396
Cammino libero medio 366
Campo gravitazionale 198, 199
Capacità termica 304
Capillarità 264
Carico di rottura 220
  specifico 215
Carnot
  ciclo di 343
  teorema di 381
Centro di massa 121, 124
Chilomole 323
Ciclo
  frigorifero 342, 349, 356
  monotermo 377
  reale 356
  termico 342
Clapeyron, formula di 358, 412
Clausius teorema di 385
Coefficiente di dilatazione termica
  cubica 317, 416
  lineare 317
Coefficiente di Poisson 218
  di Joule-Thomson 430
Composizione di moti 29
Compressibilità
  adiabatica 371, 428
  isoterma 371, 416
Conduzione del calore, 311
  conducibilità termica 312
  convezione del calore 314
  irraggiamento 315
  legge di Fourier 312
  legge di Newton 316
Conservazione
  del momento angolare 66, 129, 185, 254
  della quantità di moto 38, 123
  dell'energia meccanica 60, 62, 135
Contatto termico 292
Convezione 314
Coordinate polari 90
Coppia di forze 145
Corpo rigido 149, 151, 159
  libero 183
  rotazione attorno ad un asse fisso 155
Costante di Boltzmann 325
Costruzione di Fresnel 101

D

Dalton, legge di 367
Deformazione
  elastica 215
  plastica 219
  specifica 215
Densità di un corpo 152
  critica 354
  lineare 153

superficiale 153
Diagramma
pV 352
TS 389
pT 352, 356
pVT 415
Diesel, ciclo 347
Durezza 225
Duttilità 220

E

Effetto Magnus 259
Efficienza di un ciclo frigorifero 349
Elettronvolt 363
Ellissoide d'inerzia 177
Energia
cinetica 56, 159
cinetica media 360
dell'oscillatore armonico 97
gravitazionale di una massa sferica omogenea 207
interna di un gas 298, 331, 351, 432
inutilizzabile 402
libera 410
meccanica 60
potenziale 57, 59, 201
potenziale della forza peso 57
potenziale efficace, 212
potenziale gravitazionale 203
Entalpia 339, 411
di formazione 413
libera 410
Entropia 387, 397, 404
di mescolamento 433
Enunciato di Clausius 377
Enunciato di Kelvin-Planck 377
Equazione di stato 292
dei gas ideali 320, 324, 350
di una trasformazione adiabatica reversibile 335
Equazioni differenziali 460
Equilibrio
chimico 291
di carrucole 193
meccanico 291
statico 191, 235
termico 291, 292
termodinamico 291
Equipartizione dell'energia 361
Equivalenza tra calore e lavoro 297
Equivalenza massa-energia 92
Espansione libera 331, 401
Esperimenti di Joule 295

F

Fase
del moto 12
differenza di 101
iniziale 12
Fattore di merito 116
Fluidi
effetti dinamici 254
equilibrio statico 235
ideali 246
legge di Hagen-Poiseuille 256
legge di Stokes 258
moto di un fluido 247, 257
moto laminare di un fluido 255
paradosso di d'Alembert 258
reali 255
resistenza del mezzo 258
Formule di Poisson 89
Forza (Forze) 34
apparente 77
centrale 67
centrifuga 83
centripeta 40, 47
complanari 147
conservativa 58, 59, 60
di adesione 263
di attrito interno 246
di attrito radente dinamico 41
di attrito radente statico 41
di attrito viscoso 45
di coesione 263
di Coriolis, 83
di inerzia 77
elastica 43
gravitazionale 195, 197
impulsiva 136
parallele 146
peso 40, 57
risultante 38
viscosa 108
Fourier, analisi di 116
legge di 312
Frequenza 13
Fresnel, costruzione di 101

G

Gas 321, 325, 331, 397
costante dei 324
energia interna 298, 331, 351
entropia 387, 397
equazione di stato 292, 324
isoterme del gas ideale 321
lavoro 327
modello cinetico 359
trasformazione adiabatica reversibile 335
trasformazioni adiabatiche 334, 399
trasformazioni isobare 339
trasformazioni isocore 338
trasformazioni isoterme 338
Van der Waals 355
Gauss, teorema di 204
Gibbs

paradosso di 433
teorema di 431
Giroscopi 181
Gittata 27
Gradi di libertà 150, 361
Gradiente 483
dell'energia potenziale 64
della pressione 236

H

Hess, legge di 413
Huygens-Steiner, teorema di 166

I

Incrudimento 221
Inerzia
assi centrali di 179
assi principali di 179
momento di 156, 161, 165, 179
Interferenza 102
Irraggiamento 315
Isoterme del gas ideale 321
Isteresi elastica 220

J

Joule-Thomson
coefficiente di 430
espansione di 352, 428

K

Keplero 68
leggi di 195
Köenig
primo teorema 131
secondo teorema 132
Kelvin, definizione di 384

L

Lavoro 55, 159
della forza di attrito radente 58
della forza conservativa 59
della forza elastica 58
della forza peso 57
delle forze dissipative 135
delle forze non conservative 60
di una forza 55
in un moto circolare 67
Legge di Avogadro 323
degli stati corrispondenti 355
di Fourier 312
di Hagen-Poiseuille 256
di Hess 413
di Hooke 215
di Jurin 265
di Keplero 195
di Newton 35, 196, 316
di Poisson 218
di Stefan-Boltzmann 315
di Stevino 238
di Stokes 258
isocora di Volta-Gay Lussac 322
isobara di Volta-Gay Lussac 322
isoterma di Boyle 320
Liquidi 263
in rotazione 243
saturi 353
Lorentz, trasformazione di 91
Lunghezza ridotta del pendolo composto 169

M

Manometro ad U 239
Massa
equivalenza massa-energia 92
gravitazionale 198
inerziale 35, 198
relativistica 36
ridotta 209
Mayer, relazione di 332
Maxwell, funzione di 363
relazioni di 425
Menisco concavo 265
convesso 265
Miscela di gas 431
Modulo
di compressibilità adiabatica 371, 428
di compressibilità isoterma 224, 371, 416
di rigidità 221
di Young 216
Momento angolare 65, 126, 155, 210
assiale 147
della forza 65
dell'impulso 175
di inerzia 156, 161, 165, 179
Moto (Moti)
armonico semplice 12
circolare 23, 53, 67
circolare uniformemente accelerato 24
composizione di 29
del corpo rigido 151
di precessione 27
di puro rotolamento 169
di trascinamento rettilineo accelerato 80
di trascinamento rettilineo uniforme 78
di trascinamento rotatorio uniforme 83
di un fluido 247, 257
laminare 255
nel piano 17
nel piano inclinato 46
nello spazio 29
parabolico dei corpi 27
relativi 72
rettilineo 4

rettilineo smorzato 15
rettilineo uniforme 6
rispetto alla terra 85
uniformemente accelerato 8
verticale di un corpo 10
vorticoso 256

N

Newton, legge di 35, 196, 316
Nutazione del giroscopio 182

O

Onda
elastica 226
elastica in una sbarra solida 226
in una corda 230
in un gas 372
longitudinale 230
trasversale 232
Opposizione di fase 14
Oscillatore armonico 95, 97
forzato 112
smorzato da attrito 106
smorzato da una forza 108
Otto, ciclo di 346

P

Paradosso di d'Alembert 258
di Zenone 16
idrodinamico 252
Pascal, principio di 239
Pendolo
balistico 140
composto 168
conico 48
di torsione 223
reversibile di Kater 169
semplice 49, 62
Periodo 12, 50
di precessione 182
Pitot, tubo di 252
Poinsot, teorema di 177
Poisson, formule di 74, 89
Pompa di calore 403
Portanza 259
Portata 248
Potenza 55
Potenziale chimico 435
Potenziale di Gibbs, 410
Potenziale di Helmholtz 410
Precessione 27
del giroscopio 181
Pressione 223, 235, 359
atmosferica 241
in un fluido 235
Primo principio della termodinamica 297
Principio d'inerzia 34
dei vasi comunicanti 239
di Archimede 242
di aumento dell'entropia 391
di azione e reazione 119
di Pascal 239
di relatività 91
di sovrapposizione 96
Probabilità termodinamica 404
Proprietà elastiche dei gas 370
Pseudoperiodo 108
Pulsazione 12
vascolare 253
Punto
critico 353, 417
triplo 293, 354
Punto materiale 3
Puro rotolamento 169

Q

Quadratura di fase 14
Quantità di moto 36, 38

R

Raggio giratore 165
molecolare 365
vettore 18
Rapporto γ 333
Reazione vincolare 35, 38
Regime stazionario 247
Regola delle fasi 437
Relatività galileiana 77
generale 90, 200
Relazione di Mayer 332
Rendimento del ciclo di Otto 346
del ciclo Diesel 348
del ciclo Stirling 345
di un ciclo termico 342
Resistenza del mezzo 258
Reynolds, numero di 256
Risonanza 114
Risultante delle forze 38
Rückhardt, esperienza di 336

S

Scala Fahrenheit 295
Scala Rankine 295
Scorrimento 221
Seconda legge di Newton 35
Secondo principio della termodinamica 377
enunciato di Clausius 377
enunciato di Kelvin-Planck 377
Sfigmomanometro 257
Sistema di riferimento
del centro di massa 129
inerziale 76
non inerziale 77
Sistema termodinamico 289, 290

aperto 290, 434
chiuso 290
isolato 290
Somma di moti armonici 100, 102
su assi ortogonali 103
Stalagmometro 262
Stefan-Boltzmann, legge di 315
Stirling, ciclo di 345
Stokes, legge di 258
Superficie equipotenziale 237

T

Temperatura 293
empirica 294
scala Fahrenheit 295
scala Rankine 295
termodinamica 294
termodinamica assoluta 294, 384
Tensione dei fili 51
Tensione di vapore saturo 353
Tensione superficiale 261
Teorema
del momento angolare 66, 126
del momento dell'impulso 67
del moto del centro di massa 121
delle accelerazioni relative 75
dell'energia 134
dell'impulso 37
delle velocità relative 74
di Bernoulli 249
di Clausius 385
di Fourier 117
di Huygens-Steiner 166
di Koenig 131, 132
di Poinsot 177
di Torricelli 252
Teoria cinetica dei gas 359
dei gas reali 368
Termometro 293
a gas ideale 325
Terzo principio della termodinamica 408
Trasformazione
adiabatica 301, 334, 392, 399
ciclica 342
irreversibile 302, 380
isobara 339
isocora 338
isoterma 338
reversibile 302, 379
termodinamica 292
Trasformazione
di Lorentz 91
galileiana 78
Tubo di flusso 247
di Pitot 252
di Venturi 251

U

Ultracentrifughe 245
Unità di misura 464
Universo termodinamico 290
Urto anelastico 143
completamente anelastico 138
elastico 140
tra due punti materiali 136
tra punti materiali e corpi rigidi 186

V

Van der Waals, equazione di 355
Vapore saturo 353
Variabili termodinamiche 290
Varignon esperienza di 54
Vasi comunicanti 239
Vaso Dewar 315
Velocità 20, 73, 74
angolare 23, 182
areale 68
assoluta 73
della luce nel vuoto 91
di propagazione di un'onda elastica 228, 232, 372, 374
di trascinamento 74
istantanea 6
media 6, 364
media quadratica 360, 364
nel moto rettilineo 6
più probabile 363
radiale 20
relativa 73
trasversa 20
vettoriale 18
Vincolo liscio 46
Viscosità 245, 367
Volume molare 324
specifico 353
Vortici 254

Z

Zenone, paradosso di 16
Zero assoluto 385