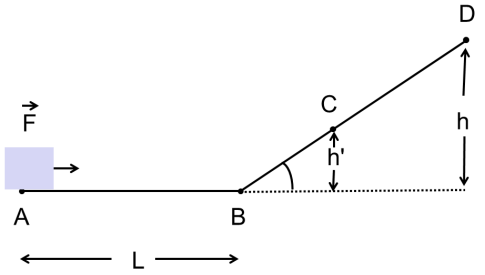
Università dell'Aquila - Ingegneria

Prima prova parziale di Fisica Generale I - 04/04/2014

Una forza $\vec{F}$ parallela al tratto orizzontale L come indicato in figura viene applicata su un oggetto di massa M, inizialmente in quiete nel punto A. La forza diviene parallela al piano inclinato quando l'oggetto incomincia a salire ed agisce fino alla quota h' (punto C) in maniera che il punto materiale si ferma quando arriva nel punto D (alla quota h). Sia il tratto orizzontale che il tratto in salita sono scabri con coefficiente di attrito dinamico pari a μ. Il piano inclinato ha un angolo θ rispetto alla direzione orizzontale.



Determinare:
1) la velocitá in B (*3 punti*); 2) Calcolare il lavoro della forza di attrito tra B e D (*2 punti*); 3) la quota h' (*3 punti*); 4) La velocitá in C (*2 punti*);
(Dati del problema: $F = 20\ N$, $L = 1\ m$, $M = 1\ kg$, $\mu = 1.2$, $\theta = 30^o$, $h = 0.5\ m$)

Soluzione:

1)
Nel tratto AB agiscono solo la forza trainante F e l'attrito dinamico e quindi il loro lavoro vale:

$$W_{AB} = (F - \mu Mg)L = 8.2\ J$$

Che é anche pari alla energia cinetica posseduta dall'oggetto nel punto B:

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = W_{AB}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2L_{AB}}{M}} = \sqrt{\frac{2(F - \mu Mg)L}{M}} = 4.1\ m/s$$

2)
Il lavoro fatto dalla forza di attrito durante la salita sarà:

$$W_a = -\mu Mg\cos\theta\frac{h}{\sin\theta} = \mu Mg\frac{h}{\tan\theta} = -10.2\ J$$

3)
Alla fine del tratto in salita l'energia potenziale sarà divenuta:

$$E_p = Mgh = 4.9\ J$$

Notare come la differenza tra l'energia potenziale nel punto più alto e il lavoro (cambiato di segno) della forza di attrito e l'energia cinetica iniziale ($\frac{1}{2}Mv_B^2$) sia pari:

$$E_p - W_a - W_{AB} = 6.9\ J > 0$$

Cioè è necessario un lavoro aggiuntivo della forza F per raggiungere la quota h a velocità nulla:

$$\frac{Fh'}{\sin\theta} = E_p - W_a - W_{AB}$$

$$h' = \frac{E_p - W_a - W_{AB}}{F}\sin\theta = 0.17\ m$$

4)
Nel punto h' dalla conservazione dell'energia:

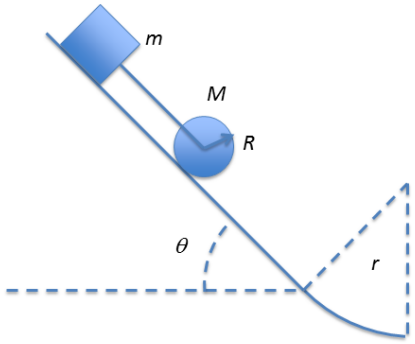
$$\frac{1}{2}Mv_C^2 + Mgh' = Mgh + \mu Mg\frac{(h-h')}{\tan\theta}$$

$$v_C = \sqrt{2g(h-h') + 2\mu g\frac{(h-h')}{\tan\theta}} = 4.45\ m/s$$

Università dell'Aquila - Ingegneria

Seconda prova parziale di Fisica Generale I - 22/05/2014

Un disco pieno di raggio $R = 60\ cm$ poggia su un piano inclinato di un angolo $\theta = 45^o$ rispetto alla direzione orizzontale. Esso è collegato tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile, vincolata al suo centro ad un corpo di massa $m = 1.3\ kg$ (assimilabile ad un punto materiale) che striscia sul piano inclinato con un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.9$, con la fune che si mantiene sempre tesa e parallela al piano inclinato. Inizialmente il sistema è fermo ed il cilindro comincia a rotolare sul piano inclinato, e dopo un tempo $t_1 = 1.2\ s$ la velocità angolare del cilindro è diventata di $\omega = 6\ rad/s$.



Assumendo che il moto del disco sia di puro rotolamento, determinare: 1) la velocità e l'accelerazione del corpo di massa m (*2 punti*); 2) la tensione T della fune (*1 punto*); 3) La massa M del disco (*4 punti*).

4) Al tempo t_1 il disco raggiunge il punto di raccordo con una guida liscia (senza attrito) di raggio $r = 4\ m$ e in quell'istante la fune si spezza, calcolare la velocità del disco nel punto più basso della guida (*3 punti*).

(Si suggerisce di rispondere al primo quesito in base a sole considerazioni cinematiche, osservando che tutte le forze in gioco fino al raccordo con la guida sono costanti).

Soluzione

1)

Il moto del cilindro è di puro rotolamento con accelerazione angolare costante (agendo solo forze costanti):

$$\alpha = \frac{\omega}{t_1} = 5\ rad/s^2$$

quello del corpo m è un moto accelerato uniforme con velocità al tempo t_1:

$$v_1 = \omega R = 3.6\ m/s$$

ed accelerazione:

$$a = \alpha R = 3\ m/s^2$$

2) Sul corpo m agiscono come forze trainanti la tensione del filo T e la componente della forza peso ($mg\sin\theta$) e come forza frenante l'attrito del piano inclinato ($\mu_d mg\cos\theta$), per cui la II equazione della dinamica si scrive:

$$ma = T + mg\sin\theta - \mu_d mg\cos\theta$$

$$T = m(a + \mu_d g\cos\theta - g\sin\theta) = 3\ N$$

3) Scrivendo la I equazione cardinale per quanto riguarda il disco, chiamando f la forza di attrito tra disco e piano inclinato:

$$Ma = Mg\sin\theta - T - f$$

Assunto come polo il centro del disco, l'unico momento è quello dovuto alla forza di attrito, quindi la II equazione cardinale:

$$I\alpha = Rf$$

Se sostituiamo ad $I \to \frac{1}{2}MR^2$ e ad $\alpha \to \frac{a}{R}$, si ha che dalla II equazione:

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} = Rf \qquad \to f = \frac{Ma}{2}$$

Sostituendola nella prima:

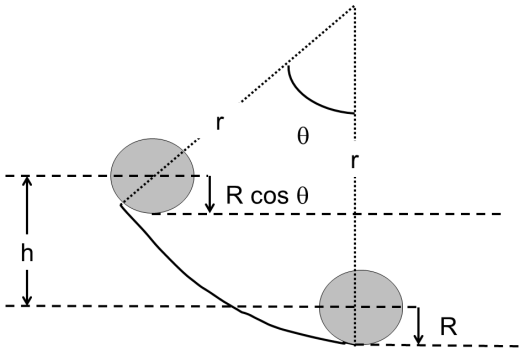
$$Ma = Mg\sin\theta - T - \frac{Ma}{2}$$

Da cui:

$$M = \frac{T}{g\sin\theta - 3/2a} = 1.23\ kg$$

4) Per calcolare la velocità finale del disco si può applicare la conservazione dell'energia meccanica, in quanto il dislivello tra la fine del piano inclinato ed il punto più basso è (vedi figura a fianco):

$$h = r - r\cos\theta - R + R\cos\theta = 1\ m$$



Applicando la conservazione dell'energia meccanica (varia solo l'energia potenziale gravitazionale):

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{v^2 + gh} = 5.7\ m/s$$

Università dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 16/06/2014

Problema 1

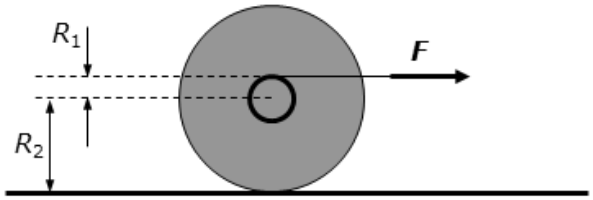
Su una automobile di massa M agisce una forza che è data dalla legge:

$$F = F_o - kt$$

Con $F_o = 1000\ N$ e $k = 50\ N/s$. Al tempo $t = 0$ la macchina è ferma. Trascorso un tempo $t_1 = 12\ s$ la macchina ha una velocitá eguale a $v_1 = 45\ km/h$.
Determinare a) la massa della macchina (4 punti); b) la accelerazione al tempo t_1 (2 punti); c) lo spazio percorso fino al tempo t_1 (4 punti).

Problema 2

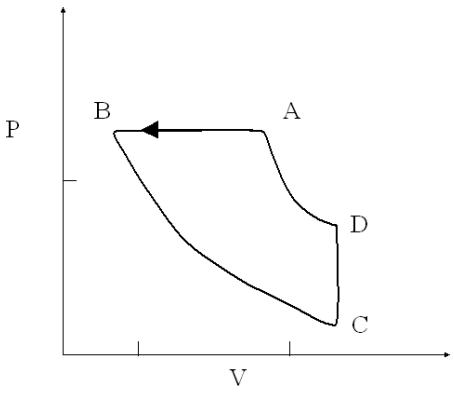
Una ruota è composta da due dischi metallici sottili concentrici omogenei di raggio $R_1 = 5\ cm$ ed $R_2 = 30\ cm$. La ruota è in posizione verticale su di un piano orizzontale scabro. Sul disco di raggio inferiore è arrotolato un filo inestensibile e di massa trascurabile a cui si applica una forza $F = 10\ N$ costante e parallela al piano orizzontale.



Si misura che il filo si srotola completamente una volta che la ruota ha compiuto $n = 10$ giri completi dalla posizione iniziale nella quale la sua velocità era nulla. Sapendo che il disco di raggio minore R_1 ha massa $M_1 = 0.1\ kg$, che quello di raggio maggiore R_2 ha massa $M_2 = 5\ kg$.
Si determini nell'ipotesi di moto di puro rotolamento: a) il valore della velocità angolare ω della ruota una volta che il filo si è completamente srotolato; (5 punti) b) il valore del momento frenante costante da applicare alla ruota se si vuole arrestarla in un tempo pari a $\Delta t = 30\ s$ una volta raggiunta la velocità angolare ω trovata nel rispondere alla precedente domanda. (5 punti)

Problema 3

$n = 2.1$ *moli* moli di un gas ideale biatomico (aria) descrivono il seguente ciclo frigorifero (mostrato in figura): dallo stato iniziale A lo stato B dalla temperatura massima $T_2 = 320\ K$, viene eseguita una trasformazione isobara, $p_A = 3 \cdot 10^5\ Pa$, per punti di equilibrio fino a raggiungere la temperatura $T_1 = 270\ K$. A questo punto una trasformazione isoterma reversibile raddoppia il volume V_A iniziale del gas. Poi una isocora, per stati di equilibrio, riporta il gas alla temperatura iniziale. Ed infine una isoterma reversibile riporta il sistema nello stato A.



Il ciclo avviene con due sole sorgenti di calore a temperatura T_1 e T_2.

Determinare: a) Il volume in C (2 punti); b) il lavoro necessario per compiere un ciclo (2 punti); c) i calori scambiati con le sorgenti in un ciclo (3 punti). d) Dimostrare se il sistema termodinamico descritto è reversibile o irreversibile dal calcolo della variazione di entropia dell'universo in un ciclo (3 punti).

Problema 4

Una nuvola sferica carica ha una densità di carica $\rho = 4 \cdot 10^{-10}\ C/m^3$ uniforme tra 0 ed $R_1 = 23\ m$. Tale densità rimane uniforme tra R_1 e $R_2 = 30\ m$, ma diventa 2ρ. Per infine annullarsi all'esterno del raggio R_2. Determinare a) la carica totale (2 punti); b) il campo elettrico sul bordo esterno $r = R_2$ ed in $r = R_3 = 60\ m$ (4 punti); c)la differenza di potenziale tra il centro ed il bordo della distribuzione di raggio R_2 (4 punti).

SOLUZIONI

Problema 1

a) Integrando nel tempo l'equazione del moto:

$$M\frac{dv}{dt} = F_o - kt$$

con la condizione che $v(t=0) = 0$:

$$v = \frac{F_o}{M}t - \frac{k}{2M}t^2$$

Dalle condizioni note al tempo t_1 si ha:

$$M = \frac{F_o}{v_1}t_1 - \frac{k}{2v_1}t_1^2 = 672\ kg$$

b) Quindi:

$$a_1 = \frac{F_o - kt_1}{M} = 0.6\ m/s^2$$

c) Integrando nel tempo l'espressione della velocità:

$$s(t) = \frac{F_o}{2M}t^2 - \frac{k}{6M}t^3$$

$$s(t_1) = 86\ m$$

Problema 2

a)

La prima parte si può risolvere o mediante la conservazione dell'energia:

La forza F, di direzione parallela al piano orizzontale, agisce fino a che il filo è arrotolato attorno al disco di raggio minore.

Lo spostamento della ruota compiendo 10 giri vale:

$$s = n2\pi R_2 = 19\ m$$

Quindi il lavoro fatto dalla forza è pari a:

$$W_F = Fs = 188\ J$$

Inoltre questa forza esercita un momento motore W_m rispetto al centro della ruota. Pertanto, a sua volta, il momento compie un lavoro fino a che la forza ha la possibilità di agire sulla ruota. Il lavoro dovuto al momento ha la seguente espressione:

$$W_m = 20\pi R_1 F = 31\ J$$

Quindi imponendo che:

$$\frac{1}{2}\left[I_{tot}\omega^2 + (M_1+M_2)v_{CM}^2\right] = W_F + W_m$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 + M_1R_2^2 + M_2R_2^2\right]\omega^2 = W_F + W_m$$

dove si è posto: $I_{tot} = \frac{1}{2}(M_1R_1^2 + M_2R_2^2)$ e $v_{CM} = \omega R_2$ Quindi:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(W_F+W_m)}{\frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 + M_1R_2^2 + M_2R_2^2}} = 25.3\ rad/s$$

Mentre mediante la cinematica (detto f l'attrito), l'equazioni cardinali sono:

$$F - f = (M_1+M_2)a$$
$$FR_1 + fR_2 = I_{tot}\alpha$$

Essendo un moto di puro rotolamento $a = \alpha R_2$, quindi eliminando f:

$$a = \frac{F(1+R_1/R_2)}{M_1+M_2+I_{tot}/R_2^2} = 1.53\ m/s^2$$

$$\alpha = \frac{a}{R_2} = 5.1\ rad/s^2$$

Poichè:

$$\frac{1}{2}\alpha t_1^2 = n2\pi$$
$$t_1 = \sqrt{4n\pi/\alpha} = 4.96\ s$$
$$\omega(t_1) = \alpha t_1 = 25.3\ rad/s$$

b)
Essendo:

$$I_{tot} = \frac{1}{2}(M_1R_1^2 + M_2R_2^2) = 0.225\ kgm^2$$

se si vuole arrestare la ruota in un tempo pari $\Delta t = 30\ s$, applicando alla ruota un momento costante, si deve applicare un momento M_f che provochi una decelerazione $\alpha_d = -\omega_1/\Delta t$.
Le equazioni cardinali diventano (l'attrito statico diventa frenante):

$$-f = (M_1+M_2)a_d$$

Il momento della forza di attrito agisce in direzione opposta al momento frenante:

$$M_f - fR_2 = I_{tot}\alpha_d$$

Ma continuando ad essere il moto di puro rotolamento, deve essere:

$$a_d = -\alpha_d R_2$$

segue che eliminando f dalle due equazioni cardinali:

$$M_f = -R_2 \left(I_{tot}/R_2^2 + M_1 + M_2 \right) \frac{\omega_1 R_2}{\Delta t} = -0.58 \ Nm$$

Problema 3

a) Dai dati del problema, nello stato B il volume sará:

$$V_A = \frac{nRT_2}{p_A} = 0.0186 \ m^3$$

Dai dati del problema, nello stato B il volume sará:

$$V_B = V_A \frac{T_1}{T_2} = 0.0157 \ m^3$$

Mentre in C il volume sará:

$$V_C = 2V_A = 0.0372 \ m^3$$

b) Da $A->B$ il lavoro assorbito vale:

$$W_{AB} = p_A(V_B - V_A) = -873 \ J$$

Da $B->C$ il lavoro fatto vale:

$$W_{BC} = nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_B} = 4.068 \ kJ$$

Da $D->A$ (nella isocora non viene fatto lavoro) il lavoro assorbito vale:

$$W_{DA} = nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_D} = -3.87 \ kJ$$

In totale la macchina frigorifera assorbe in un ciclo il lavoro:

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{DA} = -677 \ J$$

c)

I calori scambiati con la sorgente piú fredda in ogni ciclo:

$$Q_{AB} = n\frac{7}{2}R(T_1 - T_2) = -3.06 \ kJ$$

$$Q_{BC} = W_{BC} = 4.068 \ kJ$$

in totale, dalla sorgente T_1 viene assorbita la quantità di calore:

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BC} = 1.013 \ J$$

I calori scambiati con la sorgente T_2:

$$Q_{CD} = n\frac{5}{2}R(T_2 - T_1) = 2182 \ J$$

$$Q_{DA} = W_{DA} = -3.87\ kJ$$

in totale, dalla sorgente T_2 viene ceduta la quantità di calore:

$$Q_2 = Q_{CD} + Q_{DA} = -1.69\ kJ$$

d)
Quindi la variazione di entropia dell'universo in un ciclo (il gas che compie il ciclo non varia la sua entropia in un ciclo per definizione di ciclo) vale:

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 1.53\ J/K$$

Problema 4
a)
La carica totale della parte interna vale:

$$Q_1 = \frac{4}{3}\pi\rho R_1^3 = 2 \times 10^{-5}\ C$$

Mentre quella più esterna:

$$Q_2 = \frac{4}{3}\pi 2\rho(R_2^3 - R_1^3) = 5 \times 10^{-5}\ C$$

Quindi:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 7 \times 10^{-5}\ C$$

b)
Per $r = R_2$ il campo è radiale con intensità:

$$E(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R_2^2} = 700\ V/m$$

Per $R = R_3$:

$$E(R_3) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R_3^2} = 175\ V/m$$

c)
Il campo elettrico $0 \leq r \leq R_1$:

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o} \qquad 0 \leq r \leq R_1$$

Mentre , applicando il teorema di Gauss per $R_1 \leq r \leq R_2$:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_1 + 8\pi\rho(r^3 - R_1^3)/3}{\varepsilon_o}$$

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o r^2} + \frac{2\rho}{3\varepsilon_o}(r - \frac{R_1^3}{r^2}) \qquad R_1 \leq r \leq R_2$$

$$E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}(2r - R_1^3/r^2)$$

Quindi:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = -\int_{R_1}^{0} E_1 dr - \int_{R_2}^{R_1} E_2 dr =$$

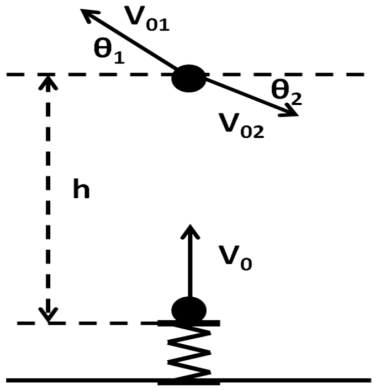
$$\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left[\int_0^{R_1} r dr + \int_{R_1}^{R_2}(2r - R_1^3/r^2)dr\right] = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(R_2^2 + R_1^3 - \frac{3}{2}R_1^2\right) = 7.7\ kV$$

Università dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 01/07/2014

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	CFU	Docente
.....	.....	.....	.....	....	.....

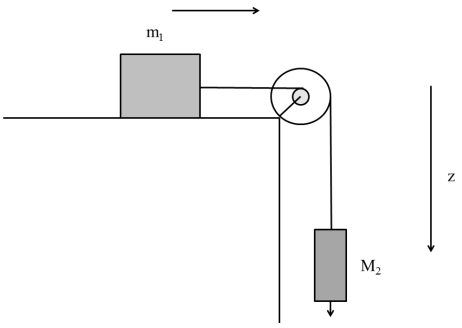
Problema 1



Un punto materiale di massa $m = 0.3\ kg$ viene lanciato lungo la verticale da una molla di costante elastica $K = 300\ N/m$, con lunghezza a riposo $x = 18\ cm$ e compressione iniziale $\Delta x = 10\ cm$. Il punto materiale si stacca quando la molla raggiunge la posizione di riposo. Raggiunta un'altezza $h = 30\ cm$ dalla posizione di distacco dalla molla, (ancora in fase ascendente) il punto materiale esplode in due frammenti di massa $m_1 = 0.1\ kg$ e $m_2 = 0.2\ kg$ come illustrato in figura. Gli angoli formati dalle direzioni delle due velocità v_{01} e v_{02} dei due frammenti subito dopo l'esplosione rispetto all'orizzontale sono $\theta_1 = 30^o$, $\theta_2 = 20^o$.

Si chiede di calcolare (trascurando l'attrito): a) La velocitá v_0 del punto materiale subito dopo il distacco dalla molla (2 punti); b)le velocitá v_{01} e v_{02} dei due punti materiali subito dopo l'esplosione (4 punti); c) L'altezza massima raggiunta da m_1 rispetto alla posizione dell'esplosione (4 punti).

Problema 2



Su un piano orizzontale è posta una massa $m_1 = 10\ kg$. Essa viene messa in movimento tramite un filo che si avvolge sulla gola di una puleggia di raggio $r_1 = 20\ cm$. La puleggia è messa in rotazione dalla discesa, sotto l'azione della forza peso di una massa $M_2 = 4\ kg$, a cui è collegata da un filo avvolto su una gola di raggio $R_2 = 50\ cm$ (della stessa puleggia), coassiale e rigidamente fissata alla precedente. Il momento di inerzia dell'insieme delle due pulegge vale $I = 6\ kgm^2$. Calcolare in assenza di attrito: a) Le velocità di M_2 ed m_1 dopo che è scesa di una quota $h = 1\ m$ (3 punti); b) Le tensioni dei due fili durante il moto (4 punti);

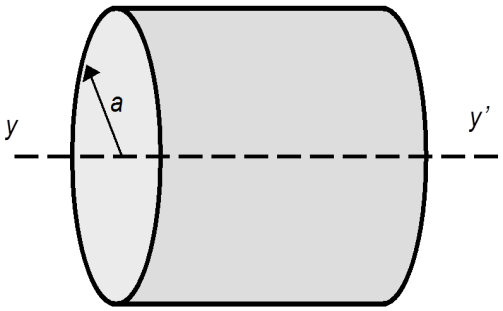
c) quale sarebbe la velocità della massa M_2 nel caso in cui esistesse tra m_1 ed il piano un coefficiente di attrito $\mu = 0.25$ (3 punti).

Problema 3

Una macchina termica lavora utilizzando solo due sorgenti alle temperature $T_2 = 400\ K$ e $T_1 = 300\ K$ con $n = 10\ moli$ di gas perfetto monoatomico compiendo le seguenti trasformazioni: AB: espansione isoterma (dalla temperatura maggiore) reversibile da $V_A = 2\ dm^3$ a $V_B = 30\ dm^3$; BC: raffreddamento isocoro irreversibile a contatto della sorgente a temperatura T_1; CD: compressione isoterma reversibile fino al volume V_A; DA: trasformazione irreversibile adiabatica e isocora nel senso che riporta il gas al volume iniziale V_A e alla temperatura T_2, ottenuta fornendo dall'esterno lavoro al sistema.
Si chiede di: a) riportare in grafico nel piano PV il ciclo descritto nel testo; (1 punto) b) calcolare il lavoro da fornire nella trasformazione DA per chiudere il ciclo; (2 punti) c) calcolare il lavoro totale eseguito al gas e il suo rendimento confrontandolo con quello del ciclo di Carnot che lavora con le medesime sorgenti; (4 punti) d) calcolare la variazione di entropia dell'universo termodinamico. (3 punti)

Problema 4

Con riferimento alla figura, in una regione di spazio a simmetria cilindrica rispetto a un asse yy' di raggio $a = 20\ cm$ è presente una densità di carica elettrica $\rho(r)$ che varia con il raggio r secondo la legge $\rho(r) = \rho_o(1 + br)$ con $b = 15\ m^{-1}$ ed $\rho_o = 1.1 \cdot 10^{-8}\ C/m^3$. Si determini: a) il valore del campo elettrico ad una distanza $r_1 = 10\ cm$ dal centro; (3 punti) b) il valore del campo elettrico ad una distanza $r_2 = 2a$ dal centro; (3 punti) b) la differenza di potenziale tra il centro ed $r = a$; (4 punti)



SOLUZIONI

Problema 1

a)

La velocità al momento del distacco dalla molla si può calcolare utilizzando la conservazione dell'energia meccanica, ricordandosi anche del contributo dato dalla variazione dell'energia potenziale gravitazionale:

$$\frac{1}{2}K\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\Delta x$$

da cui:

$$v_0 = \sqrt{\frac{K\Delta x^2 - 2mg\Delta x}{m}} = 2.84\ m/s$$

Notiamo che con questa velocità iniziale potrebbe arrivare fino ad h_{max}, essendo:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_{max}$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 41\ cm$$

b)

Subito prima di esplodere la velocità v, si ricava dalla conservazione dell'energia:

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 1.47\ m/s$$

Poiché la divisione avviene a causa di sole forze interne si conserva la quantità di moto durante il distacco, perciò imponendo tale conservazione nella direzione orizzontale:

$$m_1 v_{01}\cos\theta_1 - m_2 v_{02}\cos\theta_2 = 0$$

si può calcolare la relazione tra le velocità v_{01} e v_{02}:

$$v_{02} = \frac{v_{01}m_1\cos\theta_1}{m_2\cos\theta_2}$$

Quindi dalla conservazione della quantità di moto nella direzione verticale:

$$mv = m_1 v_{01}\sin\theta_1 - m_2 v_{02}\sin\theta_2$$

sostituendo:

$$mv = m_1 v_{01}\sin\theta_1 - m_2 v_{01}\frac{v_{01}m_1\cos\theta_1}{m_2\cos\theta_2}\sin\theta_2$$

$$v_{01} = \frac{mv}{m_1(\sin\theta_1 - \cos\theta_1\tan\theta_2)} = 24\ m/s$$

$$v_{02} = \frac{v_{01}m_1\cos\theta_1}{m_2\cos\theta_2} = 11\ m/s$$

c)

L'altezza massima del punto m_1 può essere calcolata applicando la conservazione dell'energia lungo la direzione verticale:

$$\frac{1}{2}m_1(v_{01}\sin\theta_1)^2 = m_1 g h_1$$

da cui:

$$h_1 = \frac{(v_{01}\sin\theta_1)^2}{2g} = 7.2\ m$$

Problema 2

a)

Applicando la conservazione dell'energia, tra la quota più alta e quella più bassa:

$$M_2 g h = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}M_2 v_M^2 + \frac{1}{2}m_1 v_m^2$$

Non slittando

$$v_M = -\omega R_2$$

$$v_m = -\omega r_1$$

sostituendo:

$$M_2 g h = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}M_2\omega^2 R_2^2 + \frac{1}{2}m_1\omega^2 r_1^2$$

da cui:

$$\omega = -\sqrt{\frac{2M_2 g h}{I + M_2 R_2^2 + m_1 r_1^2}} = -3.3\ rad/s$$

$$v_M = -\omega R_2 = R_2\sqrt{\frac{2M_2 g h}{I + M_2 R_2^2 + m_1 r_1^2}} = 1.6\ m/s$$

$$v_m = -\omega r_1 = 0.65\ m/s$$

b)

Le tre equazioni cardinali sono:

$$M_2 g - T_M = M_2 a_M$$

$$T_M R_2 - T_m r_1 = I\alpha$$

$$T_m = m_1 a_m$$

Essendo:

$$a_m = \frac{r_1}{R_2}a_M$$

Dall'ultima:

$$a_M = \frac{T_m R_2}{m_1 r_1}$$

Inoltre

$$\alpha = \frac{a_M}{R_2} = \frac{T_m}{m_1 r_1}$$

Le due rimanenti equazioni diventano:

$$M_2 g - T_M = \frac{M_2 T_m R_2}{r_1 m_1}$$

$$T_M R_2 - T_m r_1 = \frac{I T_m}{r_1 m_1}$$

Da cui eliminando T_M (dividendo per R la seconda e sommandole):

$$T_m = \frac{m_1 M_2 g r_1 R_2}{M_2 R_2^2 + m_1 r_1^2 + I} = 5.3\ N$$

$$T_M = M_2 g - \frac{T_m R_2 M_2}{r_1 m_1} = 34\ N$$

c)
Se l'energia non viene conservata:

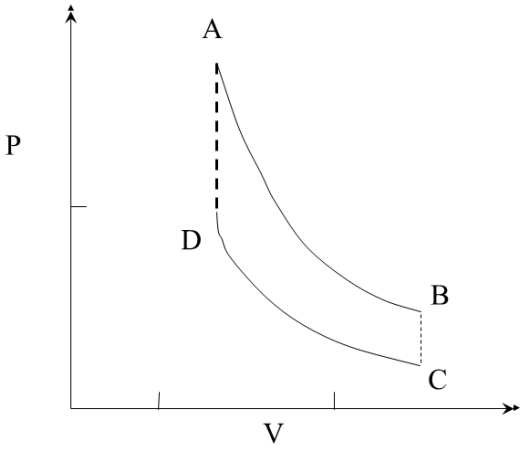
$$M_2 g h = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M_2 \omega^2 R_2^2 + \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \mu m_1 g \frac{r_1}{R_2} h$$

da cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 M_2 g h - 2 \mu m_1 g h r_1 / R_2}{I + M_2 R_2^2 + m r_1^2}}$$

$$v_M = R_2 \sqrt{\frac{2 M_2 g h - 2 \mu m_1 g h r_1 / R_2}{I + M_2 R_2^2 + m_1 r_1^2}} = 1.4\ m/s$$

Problema 3
a)



b) Essendo la trasformazione DA una adiabatica, è possibile calcolare il lavoro da fornire alla macchina per chiudere il ciclo utilizzando la variazione di energia interna del gas (cambiata di segno) dche è una funzione di stato:

$$W_{DA} = n c_v (T_1 - T_2) = \frac{3}{2} n R (T_1 - T_2) = -12.47\ kJ$$

c) Il lavoro fatto nella trasformazione AB:

$$W_{AB} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 90\ kJ$$

Nella trasformazione CD:

$$W_{CD} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = -68\ kJ$$

Il lavoro totale è, pertanto, la somma di quello positivo nella trasformazione AB, e di quelli negativi delle due trasformazioni CD e DA:

$$W_{tot} = W_{AB} + W_{CD} + W_{DA} = 10.04\ kJ$$

Nella isoterma AB:

$$Q_{AB} = W_{AB}$$

Dato che il solo calore assorbito dal gas è quello fornito nella sola trasformazione AB, il rendimento della macchina vale:

$$\eta = \frac{W_{tot}}{Q_{AB}} = 0.11$$

Quello della macchina reversibile di Carnot vale, invece:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.25$$

d)
Il calore assorbito nella isoterma CD vale:

$$Q_{CD} = W_{CD}$$

Mentre nella isocora irreversibile BC la quantità di calore scambiato è uguale alla variazione di energia interna del gas:

$$Q_{BC} = nc_v(T_1 - T_2) = -12.4\ kJ$$

Per trovare la variazione di entropia dell'universo termodinamico basta considerare che, essendo la variazione del ciclo termodinamico nulla, essa è quella delle sorgenti:

$$\Delta S_u = -\Delta_{Sorgenti} = -\left[\frac{Q_{AB}}{T_2} + \frac{Q_{BC}}{T_1} + \frac{Q_{CD}}{T_1}\right] = 41.6\ J/K$$

Problema 4
a)
Applicando il teorema di Gauss ad un cilindro di altezza h con raggio $r \leq a$:

$$E_r 2\pi r h = \frac{2\pi\rho_o}{\varepsilon_o} h \int_0^r (1 + br')r'dr' \qquad r \leq a$$

Da cui:

$$E_r = \frac{\rho_o r}{\varepsilon_o}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}br\right)$$

in particolare per $r = r_1$:

$$E_r(r_1) = \frac{\rho_o r_1}{\varepsilon_o}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}br_1\right) = 124\ V/m$$

b)
Applicando il teorema di Gauss ad un cilindro di altezza h con raggio $r \geq a$:

$$E_r 2\pi r h = \frac{2\pi\rho_o}{\varepsilon_o} h \int_0^a (1 + br')r'dr' \qquad r \geq a$$

Da cui:

$$E_r = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o r}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{3}ba^3\right)$$

Quindi

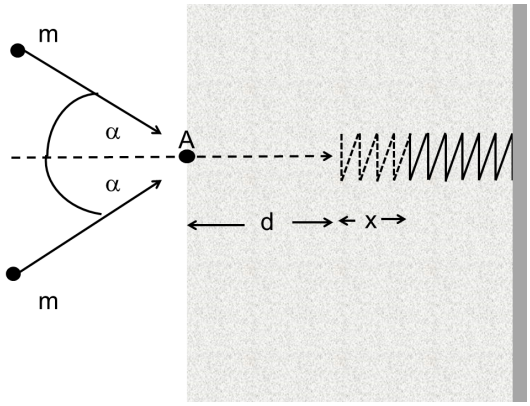
$$E_r(r_2) = 186\ V/m$$

c)
La differenza di potenziale tra a e 0:

$$\Delta V_a = V(r=0) - V(a) = \int_0^a E_r dr = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}\int_0^a \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{3}br^2\right)dr = \frac{\rho_o a^2}{\varepsilon_o}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}ba\right) = 29\ V$$

Universitá dell'Aquila - Ingegneria
Prova Scritta di Fisica Generale I - 18/07/2014

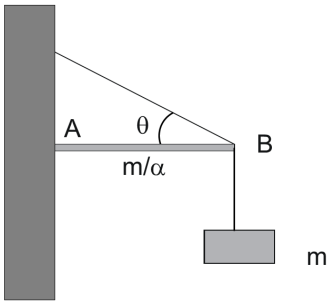
Problema 1



Due punti materiali di massa uguale $m = 0.3\ kg$ si muovono su di un piano liscio urtandosi nel punto A della figura in modo completamente anelastico. Dopo l'urto, il punto materiale risultante entra in una zona scabra percorrendo una distanza di lunghezza $d = 1\ m$ prima di comprimere una molla di costante elastica $K = 10\ N/m$ di un tratto $x = 0.5\ m$ (dove ancora il piano è scabro). Con riferimento alla figura, sapendo che l'angolo $\alpha = 30^o$ e che il modulo delle velocità iniziali vale $v_1 = v_2 = v_{in} = 4\ m/s$.

Si chiede di determinare: a) La velocità subito dopo l'urto in modulo, direzione e verso; (2 punti) b) il valore del coefficiente di attrito dinamico del tratto scabro; (3 punti) c) la perdita totale di energia meccanica calcolata rispetto all'istante subito prima dell'urto e a quello in cui la molla è stata compressa del tratto x; (3 punti) d)il tratto percorso dai due corpi all'indietro dopo che hanno compresso la molla del tratto x (2 punti).

Problema 2

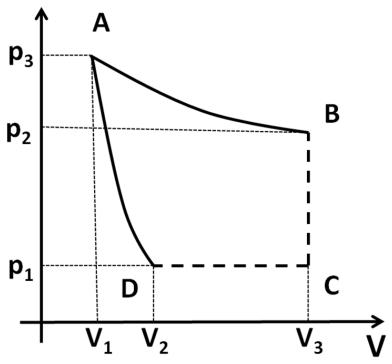


Una fune sostiene una trave orizzontale di massa $m/2$, lunga $l = 8\ m$, bloccata ad un estremo da una parete verticale e all'altro è appesa una massa $m = 900\ kg$. La fune è fissata nell'estremo B della trave, quindi non può scorrere, e forma un angolo $\theta = 40^o$ con la direzione orizzontale.

Determinare a) la tensione della fune tra il muro e l'asta (3 punti); b) la componente normale esercitata dalla trave sulla parete (3 punti); c) il coefficiente minimo di attrito statico tra parete e trave, in maniera che la trave rimanga bloccata alla parete (4 punti).

Problema 3

$n = 1.5\ moli$ di un gas ideale con calore specifico molare $c_v = 5/2R$, tramite l'utilizzo di due sorgenti a temperature $T_1 = 400\ K$ e $T_2 = 300\ K$, viene sottoposto al ciclo illustrato in figura. La trasformazione AB è una isoterma reversibile a temperatura T_1, BC è un'isocora irreversibile eseguita a contatto con la sorgente T_2, CD è una isobara irreversibile eseguita con la stessa sorgente fino ad ottenere una temperatura del gas uguale a T_2 in D. DA è una adiabatica reversibile. Sapendo che $V_1 = 1 \cdot 10^{-3}\ m^3$, $V_3 = 2.2 \cdot 10^{-3}\ m^3$ si calcoli: a) il volume in D (V_2) (2 punti); b) la temperatura del gas in C (2 punti); c) il lavoro fatto in un ciclo (3 punti);



d) la variazione di entropia dell'universo termodinamico in un ciclo (3 punti).

Problema 4

Una nuvola sferica di raggio $R = 3\ m$ ha una densità di carica variabile radialmente secondo la legge:

$$\rho = \rho_o \left(\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

con $\rho_o = 5.9 \cdot 10^{-8}\ C/m^3$.

Determinare a) la carica totale (3 punti); b) dove il campo elettrico è massimo ed il suo valore (3 punti); c) la differenza di potenziale tra il centro della nuvola ed il suo bordo (4 punti).

SOLUZIONI

Problema 1

a)

Tenendo conto che le masse dei due punti materiali sono uguali e che le direzioni dei due vettori velocità formano lo stesso angolo rispetto all'asse delle ascisse indicato nella figura, dovendosi conservare la quantità di moto del sistema, le sue componenti y si annullano. Ci si aspetta, di conseguenza, che il punto materiale risultante dopo l'urto proceda lungo l'asse delle ascisse. Infatti, si ha:

$$2mv_{in}\cos\alpha = 2mv_{fin,x}$$

$$mv_{in}\sin\alpha - mv_{in}\sin\alpha = 2mv_{fin,y} = 0$$

Quindi:

$$v_{fin,x} = 3.46\ m/s$$

b)

La conservazione dell'energia meccanica dall'istante subito dopo l'urto a quello in cui la molla risulta compressa del tratto x si scrive nel seguente modo:

$$\frac{1}{2}Kx^2 - mv_{fin}^2 = -2\mu mg(d+x)$$

$$\mu = \frac{2mv_{fin}^2 - Kx^2}{4mg(d+x)} \approx 0.27$$

c)

La perdita totale di energia meccanica ΔE dall'istante prima dell'urto a quello dell'avvenuta compressione della molla si ricava dalla seguente relazione:

$$\Delta E = mv_{in}^2 - \frac{1}{2}Kx^2 \approx 3.55\ J$$

d)

Il tratto percorso all'indietro dall'insieme dei due corpi si ricava sempre dalla conservazione dell'energia meccanica, ottenendo:

$$\frac{1}{2}Kx^2 = 2\mu mg\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{Kx^2}{4\mu mg} \approx 0.80\ m$$

Problema 2

a)

Imponendo che sia nullo il momento totale delle forze, rispetto all'estremo sulla parete:

$$mgl + \frac{m}{2}g\frac{l}{2} - Tl\sin\theta = 0$$

segue che:

$$T = \frac{mg}{\sin\theta}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 17 \cdot 10^3 \ N$$

b)
La componente normale della reazione vincolare della parete alla compressione vale:

$$N = T\cos\theta = 13 \cdot 10^3 \ N$$

c)
Le forze verticali agenti sulla trave ad esclusione della reazione vincolare sono:

$$F_y = -mg - \frac{mg}{2} + T\sin\theta = -\frac{mg}{4} = -2.2 \cdot 10^3 \ N$$

Quindi, dovendo essere:

$$\mu_s N + F_y = 0$$

Il minore coefficiente di attrito statico che garantisce il blocco della trave vale:

$$\mu_s = -\frac{F_y}{N} = 0.17$$

Problema 3
a)
Dalla relazione di Mayer: $c_p = c_v + R = 7R/2$ quindi $\gamma = c_p/c_v = 1.4$.
Nella trasformazione adiabatica:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$V_2 = V_1\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/(\gamma-1)} = 2.1 \cdot 10^{-3} \ m^3$$

b)
In D:

$$p_1 = \frac{nRT_2}{V_2} = 1.82 \cdot 10^6 \ Pa$$

Quindi:

$$T_C = \frac{p_1 V_3}{nR} = 321.5 \ K$$

c)

$$W_{AB} = nRT_1 \log\frac{V_3}{V_1} = 3.93 \cdot 10^3 \ J$$

$$W_{CD} = p_1(V_2 - V_3) = -268 \ J$$

Nella adiabatica reversibile:

$$W_{DA} = \Delta U_{DA} = nc_v(T_1 - T_2) = -3.12 \cdot 10^3 \ J$$

In totale:

$$W = W_{AB} + W_{CD} + W_{DA} = 547 \ J$$

d)
Il calore assorbito nella isoterma:

$$Q_{AB} = W_{AB} = 3.93 \cdot 10^3 \ J$$

Il calore assorbito nella isocora:

$$Q_{BC} = nc_v(T_C - T_1) = -2.45 \cdot 10^3 \ J$$

Il calore assorbito nella isobara:

$$Q_{CD} = nc_p(T_2 - T_C) = -939 \ J$$

La variazione di entropia dell'universo è data dal contributo delle sole sorgenti, in quanto il sistema compie un ciclo e quindi la sua variazione di entropia è nulla:

$$\Delta S_u = -\left(\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{BC} + Q_{CD}}{T_2}\right) = 1.45 \ J/K$$

Problema 4
a)

$$Q = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 \int_0^R \left(\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 dr = 4\pi\rho_0 \left[\frac{r^4}{4R} - \frac{r^5}{5R^2}\right]_0^R = \frac{\pi\rho_o R^3}{5} = 1 \ \mu C$$

b)
Dal teorema di Gauss per $0 \leq r \leq R$:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_0^r \rho 4\pi x^2 dx = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_o}\int_0^r \left(\frac{x}{R} - \frac{x^2}{R^2}\right) x^2 dx = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_o}\left(\frac{r^4}{4R} - \frac{r^5}{5R^2}\right)$$

$$E_r(r \leq R) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_o R}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^3}{5R}\right)$$

Mentre per $r \geq R$:

$$E_r(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Notare che

$$E_r(r \to R-) = E_r(r \to R+) = \frac{\rho_0 R}{20\varepsilon_o}$$

Inoltre il campo elettrico è nullo per $r = 0$, quindi all'interno della distribuzione ha un massimo, quando cioè:

$$\frac{\partial E_r}{\partial r} = 0$$

cioè per:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^3}{5R}\right) = 0$$

$$\frac{2r}{4} - \frac{3r^2}{5R} = 0$$

$$r = \frac{5}{6}R = 2.5\ m$$

$$E_r(2.5) = 1.15 \cdot 10^3 V/m$$

c) La d.d.p. vale:

$$V = \int_0^R E_r dr = \frac{\rho_0}{\varepsilon_o R} \int_0^R \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^3}{5R} \right) dr$$

$$V = \frac{\rho_0}{\varepsilon_o R} \left(\frac{R^3}{12} - \frac{R^4}{20R} \right) = \frac{\rho_0 R^2}{30\varepsilon_o} = 2000\ V$$

Universitá dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 12/09/2014

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	CFU	Docente
.....	.....	.....	.....	....	.....

Tempo a disposizione (tre esercizi) 2 ore e 30' (compito su due pagine)

Problema 1

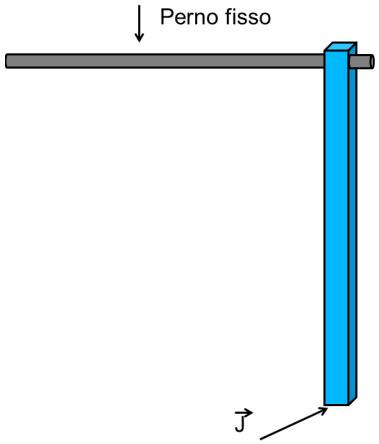
Un punto materiale si muove su un'orbita circolare, orizzontale di raggio $R = 25\ m$. La velocità angolare aumenta linearmente con il tempo:

$$\omega(t) = At$$

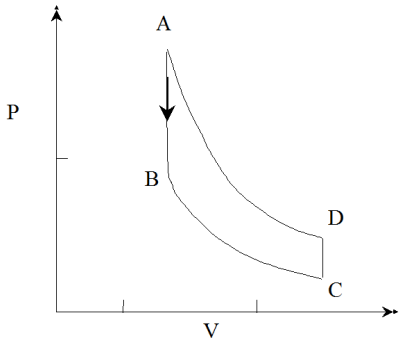
con $A = 0.025\ rad/s^2$.
Trovare a) il tempo t_1 per cui le due componenti della accelerazione (quella tangenziale e quella centripeta) hanno stesso valore (5 punti); b) determinare la velocità al tempo t_1 (2 punti); c) quale frazione di giro il punto materiale ha compiuto al tempo t_1 a partire dall'istante iniziale (3 punti).

Problema 2

Una sbarra di lunghezza $l = 40\ cm$ e massa $m = 2.5\ kg$ è incernierata ad un estremo ad un perno fisso orizzontale, può muoversi liberamente in un piano verticale ed inizialmente è ferma in basso. Riceve un impulso all'estremo opposto a quello in cui è incernierata e compie un quarto di giro.
Determinare: a) la velocità angolare che assume inizialmente (3 punti); b) l'impulso che viene applicato (3 punti); c) l'impulso esercitato dal vincolo quando riceve l'impulso esterno (4 punti).

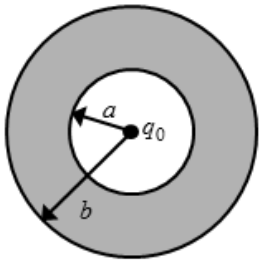


Problema 3



Una pompa di calore, è fatta funzionare con due isoterme e due isocore. Tale ciclo, irreversibile, per stati di equilibrio termodinamico avviene tra due sole sorgenti di calore a temperatura $T_1 = 20\ ^oC$ e $T_2 = 55\ ^oC$. Questo significa che lungo le isocora AB il gas cede calore alla sorgente a temperatura minore T_1 e lungo l'isocora CD assorbe calore dalla sorgente a temperatura maggiore T_2. Il ciclo è percorso in senso antiorario.
Una macchina siffatta viene detta una pompa di calore in quanto il lavoro $W = -400\ J$ assorbito in un ciclo serve a mantenere dell'acqua calda alla temperatura T_2 (la sorgente a temperatura maggiore), mentre la sorgente a temperatura inferiore (T_1) è l'ambiente. Immaginando che le trasformazione isoterme vengano percorse in maniera reversibile da un gas perfetto biatomico ($c_v = \frac{5}{2}R$) con un rapporto tra i volumi massimo e minimo di $V_D/V_A = 2$, determinare:
a) il numero di moli del gas (3 punti); b) il calore scambiato con la sorgente T_2 in un ciclo (4 punti); c) la variazione di entropia dell'universo termodinamico in un ciclo (3 punti).

Problema 4



Al centro di un guscio sferico di raggio interno a e raggio esterno $b = 2\ m$ è collocata una carica puntiforme $q_o = 0.1\ \mu C$. All'interno del guscio sferico, per $a \leq r \leq b$, esiste una distribuzione di carica con densità di volume $\rho = K/r$, con K una costante. All'interno del guscio sferico si misura che il campo elettrico è costante e vale $E_o = 1\ kV/m$.
Si determini: a. il valore del raggio interno a del guscio sferico; (3 punti) b. il valore della costante K ; (4 punti) c. il valore della carica totale $Q_{tot}(r > b)$, dell'intero sistema. (3 punti)

SOLUZIONI

Problema 1

a)

La accelerazione tangenziale vale:

$$a_T = R\frac{d\omega}{dt} = AR$$

mentre quella centripeta vale:

$$a_c = \omega^2 R = A^2 t^2 R$$

quindi sono eguali quando per $t = t_1$:

$$AR = A^2 t_1^2 R$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{A}} = 6.3\ s$$

b)

La velocità che ha il punto materiale vale:

$$v_1 = At_1 R = 4\ m/s$$

c)

Mentre l'angolo descritto vale:

$$\theta_1 = \frac{1}{2}At_1^2 = 0.5\ rad$$

cioé $\theta_1/(2\pi) = 0.08$ giro.

Problema 2

a)

Il momento di inerzia rispetto al vincolo vale, utilizzando il teorema di Huygens-Steiner:

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{3}ml^2 = 0.13\ kg \cdot m^2$$

Essendo trasformata tutta l'energia cinetica in energia potenziale del centro di massa:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = mg\frac{l}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 8.6\ rad/s$$

b)

Data la presenza del vincolo, si conserva il momento della quantità di moto rispetto al vincolo stesso nel momento dell'urto:

$$Jl = I\omega$$

$$J = \frac{I\omega}{l} = m\sqrt{\frac{gl}{3}} = 2.86\ Ns$$

c)
La velocità del centro di massa vale:

$$v_{CM} = \omega\frac{l}{2} = 1.72\ m/s$$

L'impulso opposto dal vincolo durante l'azione della forza impulsiva è tale che la risultante dei due impulsi R_v (vincolo) e quello esterno (appena calcolato) sia pari alla variazione di q.m. del CM:

$$R_I + J = mv_{CM}$$
$$R_I = -1.43\ Ns$$

Problema 3
a)
Il lavoro viene fatto durante le due isoterme e vale:

$$W = nRT_2 \ln\frac{V_A}{V_D} + nRT_1 \ln\frac{V_D}{V_A}$$

Quindi:

$$n = \frac{W}{R\ln V_D/V_A(T_1 - T_2)} = 2\ moli$$

b)
Alla sorgente a temperatura maggiore viene ceduto del calore durante la trasformazione isoterma DA ($T_2 = 328.15\ K$):

$$Q_{DA} = nRT_2 \ln\frac{V_A}{V_D} = -3750\ J$$

ed assorbito durante la isocora CD:

$$Q_{CD} = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = 1443\ J$$

Quindi in totale scambiato :

$$Q_2 = Q_{DA} + Q_{CD} = -2307\ J$$

Essendo negativo il totale vuol dire che il lavoro della macchina viene trasformato in calore che va nella sorgente a temperatura maggiore (cioè si fa acqua calda).
c)

$$Q_1 = W - Q_2 = 1910\ J$$

Quindi la variazione di entropia ($T_1 = 293.15\ K$) in un ciclo è :

$$\Delta S = -\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0.52\ J/K$$

Problema 4

a)

Se il campo elettrico è costante lo è anche sul suo bordo interno al cui interno è presente la sola carica q_o utilizzando la legge di Gauss si ha:

$$4\pi a^2 E_o = \frac{q_o}{\varepsilon_o}$$

quindi:

$$a = \sqrt{\frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o E_o}} = 0.95\ m$$

b)

Mentre nella regione compresa tra a e b la carica non è costante e dipende dalla distanza dal centro:

$$Q(r) = q_o + \int_a^r \frac{K}{r'} 4\pi r'^2 dr' = q_o + 2\pi K(r^2 - a^2)$$

Utilizzando la legge di Gauss si ha:

$$4\pi r^2 E_o = \frac{Q(r)}{\varepsilon_o} = \frac{q_o + 2\pi K(r^2 - a^2)}{\varepsilon_o}$$

Per potere essere valida tale espressione il coefficiente del termine in r^2:

$$4\pi E_o - \frac{2\pi K}{\varepsilon_o}$$

Deve essere nullo, cioè:

$$E_o = \frac{K}{2\varepsilon_o}$$

$$K = 2\varepsilon_o E_o = 18 \cdot 10^{-9}\ C/m^2$$

c)

La carica totale vale:

$$Q(r) = q_o + 2\pi K(b^2 - a^2) = 0.45\ \mu C$$

Università degli Studi dell'Aquila - Ingegneria

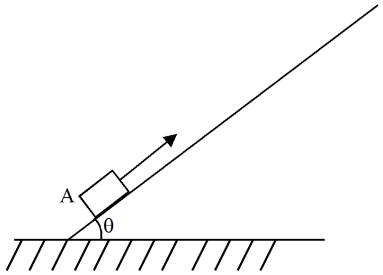
Prova Scritta di Fisica Generale I - 17/11/2014

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	CFU	Docente
.....	.....	.....	.....	....	.....

Tempo a disposizione (tre esercizi) 2 ore e 30'

Problema 1

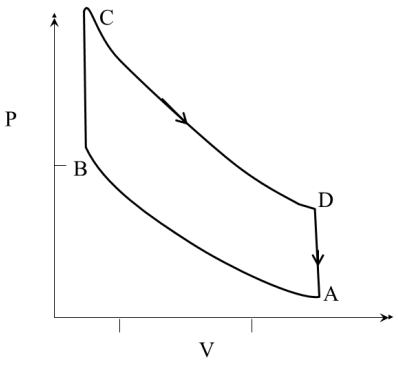
Un oggetto di massa m (non data in quanto inessenziale) viene lanciato con velocità $v_o = 5$ m/s lungo un piano inclinato che ha un angolo $\theta = 45°$ con la direzione orizzontale. I coefficienti di attrito statico e dinamico tra l'oggetto ed il piano inclinato valgono $\mu_s = 0.5$ e $\mu_d = 0.4$. Determinare: a) il tempo t_1 che impiega a raggiungere il punto più alto (2 punti); b) la distanza massima x_B dal punto di partenza (2 punti); c) l'accelerazione in fase di discesa (3 punti); d) la velocità con cui ripassa nel punto A (3 punti).



Problema 2 Una giostra è costituita da due seggiolini di massa $m = 90$ kg (compresi gli occupanti) sospesi a due funi di lunghezza $l = 3$ m. Il sistema, assimilabile a un pendolo conico con due masse, è inizialmente posto in rotazione con velocità angolare ω_1 attorno ad un asse verticale sul quale sono ancorate le funi che si dispongono su un piano contenente la verticale ad angoli $\theta_1 = 45°$ sui lati opposti.
a) Determinare la tensione T della fune nella configurazione iniziale e il momento angolare totale del sistema (punti 4). b) Supponendo che i due occupanti, esercitando forze interne per esempio utilizzando una fune, riescano ad avvicinarsi riducendo l'angolo delle funi di sospensione al valore $\theta_2 = 30°$, calcolare la velocità dei seggiolini (punti 3). c) Determinare il lavoro fatto dalle forze interne per passare dallo stato a) allo stato b) (punti 3).

Problema 3

Un ciclo Otto ideale è costituito dal ciclo schematizzato in figura. AB una compressione adiabatica fino al volume in cui viene fatta esplodere la miscela. BC rappresenta la conseguente trasformazione isocora che porta la miscela alla massima pressione e temperatura. La trasformazione CD è una espansione adiabatica. Infine il gas ritorna alla condizione iniziale A mediante una trasformazione isocora. Il ciclo è percorso per stati di equilibrio termodinamico. Se il rapporto di compressione vale $V_A/V_B = 6$ e inoltre $\gamma = 1.3$, $T_A = 300$ K e $T_C = 1200$ K.



Determinare: a) T_B (2 punti); b) T_D (2 punti); c) il rendimento del ciclo (4 punti); d) il rendimento del ciclo ideale tra le stesse temperature estreme (2 punti).

SOLUZIONI

Problema 1

a)
Chiamiamo A e B rispettivamente il punto di partenza e il punto più alto. Essendo $\tan\theta > \mu_s$ quando l'oggetto arriva nel punto B si ferma e poi torna indietro.
La equazione di Newton nel tratto in salita è:

$$ma_1 = -mg\sin\theta - \mu_d mg\cos\theta$$

Quindi il moto risulta uniformemente accelerato con accelerazione:

$$a_1 = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta) = -9.7\ \mathrm{m/s^2}$$

Il tempo impiegato per raggiungere la quota massima (velocità nulla) è:

$$t_1 = -\frac{v_o}{a_1} = 0.51\ \mathrm{s}$$

b)
La distanza percorsa dal punto A al punto B è:

$$x_B = v_o t_1 + \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = 1.3\ \mathrm{m}$$

c)
Le condizioni iniziali del moto di discesa successivo sono quindi: $x = x_B$ e $v = 0$.
La equazione di Newton nel tratto in discesa è:

$$ma_1 = -mg\sin\theta + \mu_d mg\cos\theta$$

in quanto l'attrito radente dinamico si oppone alla velocità. Quindi il moto risulta accelerato uniforme con accelerazione:

$$a_2 = -g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = -4.2\ \mathrm{m/s^2}$$

d)
Tenendo conto delle condizioni iniziali la legge oraria risulta:

$$x = x_B + \frac{1}{2}a_2 t^2$$

che si annulla per:

$$t_2 = \sqrt{-\frac{2x_B}{a_2}} = 0.79\ \mathrm{s}$$

e quindi la velocità con cui ripassa da B vale:

$$v_B = a_2 t_2 = -3.3\ \mathrm{m/s}$$

Problema 2

a) Inizialmente per ognuna delle due masse posso scrivere, nella direzione verticale (asse z):

$$T\cos\theta_1 = mg$$

quindi:

$$T = 1247\ N$$

La componente della tensione del filo lungo la direzione orizzontale è inizialmente la sola forza centripeta, del moto rotatorio con raggio:

$$r_1 = l\sin\theta_1 = 2.12\ m$$

Quindi:

$$m\frac{v_1^2}{r_1} = T\sin\theta_1$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{Tr_1\sin\theta_1}{m}} = 4.6\ \text{m/s}$$

Quindi:

$$\vec{L} = m\vec{r_1}\times\vec{v_1} + m\vec{r_2}\times\vec{v_2} = 2mr_1v_1\vec{k}$$

$$|\vec{L}| = 1.74\cdot 10^3\ \text{kg m}^2\text{s}^{-1}$$

b)

Poiché agiscono solo forze interne, $\vec{L}$ si conserva e poiché nella condizione finale la direzione rimane la stessa, si deve avere che:

$$2ml\sin\theta_1 v_1 = 2ml\sin\theta_2 v_2$$

$$v_2 = v_1\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = 6.4\ \text{m/s}$$

c)

L'Energia meccanica iniziale vale:

$$E_o = mv_1^2 + 2mgl(1-\cos\theta_1)$$

mentre quella finale vale:

$$E_f = mv_2^2 + 2mgl(1-\cos\theta_2)$$

La differenza:

$$E_f - E_o = m[v_2^2 - v_1^2 + 2gl(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)] = 1030\ \text{J}$$

è positiva e rappresenta l'energia acquistata dal sistema a spese delle forze interne.

Problema 3

a)

Nella I adiabatica:

$$T_BV_B^{\gamma-1} = T_AV_A^{\gamma-1} =$$

da cui:

$$T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = 513\ K$$

b)
Mentre nella II adiabatica:

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$$

$$T_D = T_C / \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = 701\ K$$

c)
Le uniche fasi in cui viene assorbito calore sono BC e invece il calore è ceduto nella fase DA.
Quindi:

$$\eta_i = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{nc_v(T_A - T_D)}{nc_v(T_C - T_B)} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = 0.416$$

d)
Che è minore del rendimento della trasformazione ideale:

$$\eta = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 0.75$$

Universitá dell'Aquila - Ingegneria

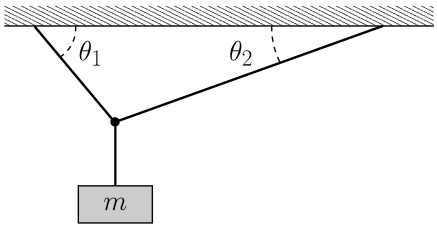
Prova Scritta di Fisica Generale I - 12/01/2015

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	CFU	Docente
.....	.....	.....	.....	....	.....

Tempo a disposizione (tre esercizi) 2 ore e 30' (compito su due pagine)

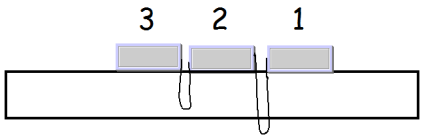
Problema 1

Una massa è appesa ad una fune verticale, che a sua volta è annodata a due altre funi fissate al soffitto, la tensione della fune di destra vale $T_2 = 150\ N$ e forma un angolo di $\theta_2 = 20^o$ con il soffitto, mentre quella di sinistra forma un angolo di $\theta_1 = 40^o$. Determinare: a) la tensione della fune di sinistra (3 punti) ; b) il valore della massa (3 punti); c) Se le tre funi hanno la stessa tensione massima $T_{max} = 500\ N$, quale è la massima massa che può sostenere il sistema (lasciando invariati gli angoli)? (4 punti)



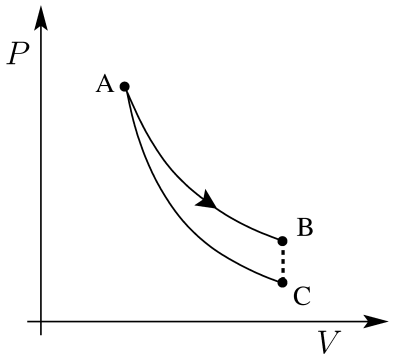
Problema 2

Tre carrelli di masse eguali $m = 20\ kg$ sono posti su una guida orizzontale senza attrito, uno dietro l'altro, e collegati mediante due corde (inestensibili). Le corde sono allentate la prima è lunga $l_1 = 20\ cm$, la seconda $l_2 = 10\ cm$. Al tempo $t = 0$ al primo carrello viene impartita una velocità $v_o = 0.6\ m/s$ verso destra della figura. Notare come agiscano solo forze interne al sistema e che via via che i carrelli vengono messi in moto le corde rimangono tese.



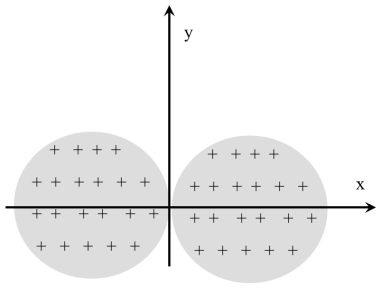
Il processo agli effetti del calcolo è simile una sequenza di urti completamente anelastici. Determinare: a) la velocità del terzo carrello quando inizia a muoversi (3 punti); b) Quando (t_x) il terzo carrello comincia a muoversi (3 punti); c) l'energia meccanica dissipata (4 punti);

Problema 3



$n = 1.2$ *moli* di un gas ideale monoatomico, tramite l'utilizzo di due sorgenti a temperature $T_A = 600\ K$ e $T_C = 300\ K$, viene sottoposto al ciclo illustrato in figura. La trasformazione AB è una isoterma reversibile a temperatura T_A, BC è un'isocora irreversibile (ma con lavoro nullo) eseguita ponendo il gas a contatto con la sorgente T_C, CA è una adiabatica reversibile. Sapendo che $P_A = 8 \cdot 10^5\ Pa$, si calcoli: a) il volume in C (V_C) (2 punti);
b) il lavoro fatto in un ciclo (3 punti); c) il rendimento del ciclo (2 punti) d) la variazione di entropia dell'universo termodinamico in un ciclo (3 punti).

Problema 4



Due sfere di raggio $R = 40\ cm$ come in figura sono cariche uniformemente con densità di carica eguale $\rho = 6 \cdot 10^{-7}\ C/m^3$ e sono a distanza pari a due volte il raggio. Determinare a) il valore del campo elettrico lungo l'asse delle x all'interno della sfera di destra e in particolare nel punto di coordinate $x = R$ (3 punti);
b) il valore del campo elettrico lungo l'asse delle y e in particolare nel punto di coordinate $y = R$ (3 punti);
c) la velocità minima che deve avere un protone di massa $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\ kg$ e carica $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$ per riuscire ad attraversare il sistema passando per l'origine delle coordinate provenendo da distanza molto grande (l'infinito) (4 punti).
Si ricorda che:

$$\int \frac{ydy}{(y^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

SOLUZIONI

Problema 1

a)
Nella direzione orizzontale le due tensioni debbono avere componenti eguali e contrarie cioè:

$$T_1 \cos\theta_1 = T_2 \cos\theta_2$$

quindi

$$T_1 = T_2 \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = 184\ N$$

b)
La tensione della fune verticale è quindi pari:

$$T_3 = T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 = 170\ N$$

e compensa esattamente la forza peso:

$$mg = T_3$$

$$m = \frac{T_3}{g} = 17\ kg$$

c)
La fune di sinistra è soggetta alla tensione massima, ponendo quindi:

$$T_{1M} = T_{max}$$

Quindi nella condizione di tensione massima della fune di sinistra, quella di destra avrà una tensione di:

$$T_{2M} = T_{1M} \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} = 408\ N$$

La tensione della fune verticale è quindi pari:

$$T_{3M} = T_{1M} \sin\theta_1 + T_{2M} \sin\theta_2 = 461\ N$$

quindi la massima massa che può essere sostenuta vale:

$$m_{max} = \frac{T_{3M}}{g} = 47\ kg$$

Problema 2

a)
La q.m. si conserva quindi quando il I filo si tende e si muove il II carrello, entrambi si muoveranno con velocitá v_1 tale che:

$$mv_o = 2mv_1$$

$$v_1 = \frac{v_o}{2} = 0.3\ m/s$$

quando il II filo si tende e si muove il III carrello, tutti si muoveranno con velocitá v_2 tale che:

$$mv_o = 3mv_2$$
$$v_3 = \frac{v_o}{3} = 0.2\ m/s$$

b)
Il tempo che impiega il primo filo a tendersi vale:

$$t_1 = \frac{l_1}{v_0} = 0.33\ s$$

Il tempo che impiega il secondo filo a tendersi vale:

$$t_2 = \frac{2l_2}{v_0} = 0.33\ s$$

Quindi in totale:

$$t_x = t_1 + t_2 = 0.66\ s$$

c)
L'energia meccanica iniziale vale:

$$E_{ko} = \frac{1}{2}mv_o^2$$

Quella finale:

$$E_{kf} = \frac{3}{2}m\left(\frac{v_o}{3}\right)^2$$

Quindi l'energia dissipata vale:

$$\Delta E = E_{ko} - E_{kf} = \frac{1}{3}mv_o^2 = 2.4\ J$$

Problema 3
a)

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 0.0075\ m^3$$

Essendo il gas monoatomico: $\gamma = 1.67$ e $c_v = 3/2R$.
Essendo la trasformazione CA adiabatica:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

$$V_C = V_A(T_A/T_C)^{1/(\gamma-1)} = 0.0212\ m^3$$

b)

Il lavoro fatto nella isoterma (che coincide con il calore assorbito), essendo $V_B = V_C$ vale:

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_C}{V_A} = 6220\ J$$

Mentre il lavoro assorbito durante la compressione adiabatica è pari alla variazione di energia interna:

$$W_{BC} = nc_v(T_A - T_C) = -4490\ J$$

Quindi in totale il lavoro fatto vale:

$$W = W_{AB} + W_{BC} = 1730\ J$$

c)
Il rendimento è pari al rapporto tra il lavoro fatto ed il calore assorbito dalla sorgente a temperatura maggiore:

$$\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = 0.28$$

d)
La variazione di entropia dell'universo termodinamico durante il ciclo è dovuta alla variazione due sorgenti di calore: Il calore ceduto durante la isocora vale:

$$Q_{BC} = nc_v(T_C - T_A) = -4490\ J$$

$$\Delta S = -\left(\frac{Q_{AB}}{T_A} + \frac{Q_{BC}}{T_C}\right) = 4.59\ J/K$$

Problema 4
a)
La carica di una sfera positiva vale:

$$Q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = 160 \cdot 10^{-9}\ C/m^3$$

Dal teorema di Gauss il campo generato dalla sola sfera di destra è nullo al centro e vale all'interno:

$$E_{xd} = \frac{\rho(x-R)}{3\varepsilon_o} \qquad 0 \le x \le 2R$$

(come all'interno di una sfera uniformente carica ma con origine nel punto $x = R$). Mentre quello della sfera di sinistra è semplicemente:

$$E_{xs} = \frac{Q}{4\varepsilon_o(R+x)^2} \qquad 0 \le x \le 2R$$

Quindi in totale:

$$E_x = \frac{\rho(x-R)}{3\varepsilon_o} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o(R+x)^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left[x - R + \frac{R^3}{(R+x)^2}\right] = \frac{\rho x(x^2 + Rx - R^2)}{3\varepsilon_o(R+x)^2}$$

In particolare per $x = R$:

$$E_x = \frac{\rho R}{12\varepsilon_o} = 2.26\ kV/m$$

o anche più semplicemente:

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o(2R)^2} = 2.26\ kV/m$$

b)
In questo caso il campo coincide con quello di due cariche Q puntiformi poste in $(-R, 0)$ e $(R, 0)$. Che generano un campo avente solo componente y (l'altra componente è nulla) che vale:

$$E_y = \frac{2Qy}{4\pi\varepsilon_o(y^2 + R^2)^{3/2}}$$

Quindi per $y = R$:

$$E_y = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_o R^2(2)^{3/2}} = 6.4\ kV/m$$

c)
La differenza di potenziale tra il centro della distribuzione e l'infinito vale:

$$V = -\int_{\infty}^{0} E_y dy = \int_0^{\infty} \frac{2Qy}{4\pi\varepsilon_o(y^2 + R^2)^{3/2}} dy = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o} \int_0^{\infty} \frac{ydy}{(y^2 + R^2)^{3/2}}$$

Essendo:

$$\int \frac{ydy}{(y^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{y^2 + R^2}}$$

$$V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o} \left[-\frac{-1}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right]_0^{\infty} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o R} = 7.2\ kV$$

Quindi imponendo che:

$$\frac{1}{2} m_p v^2 \geq eV$$

si ha che:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2eV}{m_p}} = 1.18 \cdot 10^6\ m/s$$

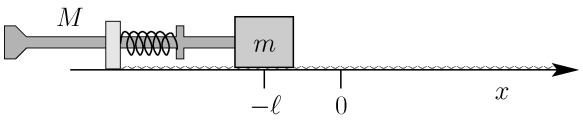
Universitá dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 29/01/2015

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	CFU	Docente
.....	.....	.....	.....	....	.....

Tempo a disposizione (tre esercizi) 2 ore e 30' (compito su due pagine)

Problema 1



Una massa $m = 0.08$ kg viene lanciata orizzontalmente utilizzando un lanciatore da flipper, schematizzabile come un pistone di massa $M = 0.15$ kg ed una molla armonica di massa trascurabile e costante elastica $k = 50$ N/m che lavora solo in compressione (cioè per $x < 0$). Il sistema pistone+massa viene inizialmente compresso da $x = 0$ a $x = -\ell = -6$ cm, (rimanendo in contatto come un unico corpo) e quindi rilasciato. Il pistone si muove nella sua sede senza attrito mentre la superficie di contatto della massa m ha un coefficiente di attrito dinamico pari a $\mu_d = 0.18$. Quando la molla è completamente distesa la massa m si stacca (e non vi sono forze dissipative aggiuntive agenti sulla massa m, ma il pistone rimane bloccato da un fermo non visibile). Determinare: a) l'energia del sistema massa pistone al momento del distacco (2 punti); b) la velocità v_0 della massa m al distacco (2 punti); c) quando t_x (a partire dal distacco) e dove (d) la massa m si ferma (3 punti); d) dove si sarebbe fermata la massa se la compressione della molla fosse stata $x_1 = -\ell_1 = -3$ cm (2 punti).

Problema 2

Una sfera omogenea piena di massa $m = 500\ g$ e raggio $r = 10\ cm$, è posta su un piano orizzontale scabro; inizialmente la sfera è ferma. Viene applicato un impulso parallelo al piano orizzontale $|J| = 3\ Ns$, appartenente al piano verticale che passa per il centro della sfera e la cui retta d'azione passa ad un altezza xr, con $0 < x < 2$, dal piano orizzontale.
Determinare : a) La velocità iniziale della sfera in funzione di x (2 punti). b) La velocità angolare iniziale della sfera in funzione di x e nel caso particolare di $x = 1$ (4 punti) c) Il valore di x per cui il moto diventa subito di puro rotolamento (4 punti).
Si ricorda che il momento di inerzia di una sfera piena riferito ad un asse passante per il centro è $\frac{2}{5}mR^2$.

Problema 3

Un quantità pari a $n = 0.3$ moli di gas ideale biatomico sono contenuti in un cilindro dotato di pistone (usare $c_V = \frac{5}{2}R$ e $R = 8.314$ J mol^{-1}K^{-1}) . Inizialmente il sistema è in equilibrio (stato A) alla temperatura ambiente $T_A = 297$ K e alla pressione P_A determinata dalla pressione ambiente 0.95×10^5 Pa e dalla forza peso della massa $M = 5.1$ kg del pistone (su area del cilindro $S = 0.002$ m^2). Con il pistone bloccato il gas viene messo in contatto con una sorgente a temperatura $T_B = 500$ K fino ad ottenere l'equilibrio termico (stato B). Il pistone viene quindi sbloccato e il gas subisce (in contatto con la sorgente T_B) una espansione irreversibile compiendo lavoro contro la pressione esterna P_A fino a raggiungere un nuovo stato di equilibrio C.
Determinare: a) la pressione del gas nello stato A (2 punti); b) la pressione del gas in B (2 punti); c) il calore assorbito durante la trasformazione $A \to B$ (2 punti); d) lo spostamento h del pistone nella trasformazione $B \to C$ ed il lavoro eseguito (2 punti); e) il rendimento del ciclo se venisse chiuso con una isobara reversibile C→A (2 punti).

Problema 4

Una nuvola sferica carica ha un raggio $R = 50\ cm$. La densità di carica è uniforme tra 0 ed $R/2$ e vale $\rho/2$, mentre nel resto della nuvola (il guscio esterno restante) la densità è ancora uniforme, ma vale ρ. La carica totale della nuvola è nota e vale $Q = 2 \cdot 10^{-7}\ C$.
Determinare: a) La carica contenuta nel mezzo guscio interno (tra 0 ed $R/2$) (3 punti). b) Il campo elettrico a $2R/3$ dal centro (3 punti); c) La differenza di potenziale tra il centro della nuvola e $R/2$ (4 punti).

SOLUZIONI

Problema 1

a)
L'energia potenziale della molla compressa è:

$$E_p = \frac{1}{2}\, k\, \ell^2 = 0.09 \text{ J} \tag{1}$$

L'energia dissipata dalla massa m durante il tragitto tra $-\ell$ e 0 vale:

$$E_d = \mu_d\, mg\ell = 0.0085 \text{ J} \tag{2}$$

Quindi l'energia del sistema massa più pistone al momento del distacco è:

$$E_s = E_p - E_d = \frac{1}{2}\, k\, \ell^2 - \mu_d\, mg\ell = 0.0815 \text{ J} \tag{3}$$

b)
Essendo al distacco:

$$E_s = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} M v_o^2 \tag{4}$$

quindi:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k\ell^2 - 2\mu_d\, mg\ell}{m+M}} \simeq 0.84 \text{ m/s} \tag{5}$$

c)
Dall'istante $t = 0$ la massa è soggetta alla sola forza di attrito dinamico radente per cui ponendo:

$$0 = v_0 - \mu_d\, g\, t^* \tag{6}$$

si ha:

$$t^* = \frac{v_0}{\mu_d\, g} \simeq 0.48 \text{ s} \tag{7}$$

Sostituendola nella equazione oraria

$$d = v_o t^* - \mu_d\, g\, t^{*2} = 0.2 \text{ m} \tag{8}$$

La posizione di arresto, ottenibile anche da considerazioni energetiche:

$$d = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu_d\, g} = \frac{m}{m+M}\left(\frac{k\ell^2}{2\mu_d\, m\, g} - \ell\right) \simeq 0.2 \text{ m} \tag{9}$$

d)
Se $\ell_1 = -3$ cm. Sostituendo questo valore nella equazione 9) si ha:

$$d_1 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu_d\, g} = \frac{m}{m+M}\left(\frac{k\ell_1^2}{2\mu_d\, m\, g} - \ell_1\right) \simeq 0.045 \text{ m} \tag{10}$$

Problema 2

a)
Indipendentemente da x, si ha che :

$$mv_0 = |J|$$

da cui:

$$v_0 = 6\ m/s$$

b)
Inoltre:

$$I_c\omega_o = |J|(r - xr)$$

con $I_c = 2/5mr^2$ é il momento di inerzia della sfera.

$$\omega_o = \frac{5|J|(1-x)r}{2mr^2} = \frac{5|J|(1-x)}{2mr}$$

Quindi per $x = 1$:

$$\omega_o = 0\ rad/s$$

Il moto rotatorio iniziale é in senso orario se $x > 1$, antiorario nel caso opposto
c)
Il moto diventa istantaneamente di puro rotolamento solo se:

$$\omega_o r = -v_{CM}$$

cioé se:

$$\frac{5|J|(1-x)}{2m} = -\frac{|J|}{m}$$

$$x = \frac{7}{5}$$

Problema 3

a)
Nello stato A la pressione interna al cilindro è pari a:

$$P_A = P_{atm} + \frac{Mg}{S} \simeq 1.2 \times 10^5 \text{ Pa}$$

e quindi il volume vale:

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} \simeq 0.0062 \text{ m}^3$$

b)
La trasformazione A→B è una isocora ($V_B = V_A$, $W = 0$) irreversibile nella quale viene raggiunto lo stato B con T_B e pressione

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_A} \simeq 2.02 \times 10^5 \text{ Pa}$$

c)

Il calore assorbito dalla sorgente nella trasformazione è pari alla variazione di energia interna del gas:

$$Q_{AB} = \Delta U = n\frac{5}{2}R(T_B - T_A) \simeq 1.26 \text{ kJ}$$

d)
Il pistone si solleva di una altezza:

$$h = (V_C - V_B)/S \simeq 2.1 \ m$$

Il lavoro compiuto dal sistema contro la pressione esterna P_A è pari a $W_{BC} = P_A(V_C - V_B) = 0.504$ kJ.
e)
Chiudendo il ciclo con una isobara reversibile C→A il lavoro assorbito sarebbe eguale a $-W_{BC}$ quindi il rendimento totale del ciclo sarebbe nullo.

Problema 4

La carica totale vale:

$$Q = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3\frac{\rho}{2} + \frac{4}{3}\pi\left[R^3 - \left(\frac{R}{2}\right)^3\right]\rho = \frac{5}{4}\pi\rho R^3$$

quindi:

$$\rho = \frac{4Q}{5\pi R^3} = 4.1 \cdot 10^{-7} \ C/m^3$$

a) Quindi nella sfera interna:

$$Q_i = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3\frac{\rho}{2} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3\frac{2Q}{5\pi R^3} = \frac{Q}{15} = 1.3 \cdot 10^{-8} \ C$$

b)
Nel guscio sferico compreso tra $R/2$ e $2R/3$ vi é una carica:

$$Q_e = \frac{4}{3}\pi\left[\left(\frac{2R}{3}\right)^3 - \left(\frac{R}{2}\right)^3\right]\rho = 3.6 \cdot 10^{-8} \ C$$

Dal teorema di Gauss:

$$E = \frac{Q_i + Q_e}{4\pi\epsilon_o\left(\frac{2}{3}R\right)^2} = 4 \cdot 10^3 \ V/m$$

c)
Dal teorema di Gauss essendo il campo elettrico radiale la sua intensitá tra 0 ed $R/2$ vale:

$$E4\pi r^2 = \int_0^r \frac{\rho}{2}4\pi r^2 dr$$

$$E = \frac{\rho r}{6\epsilon_o} = \frac{2Qr}{15\pi\epsilon_o R^3}$$

Quindi la d.d.p. vale:

$$\Delta V = \int_0^{R/2} E dr = \frac{Q}{60\pi\epsilon_o R} = 240 \ V$$

Universitá dell'Aquila - Ingegneria

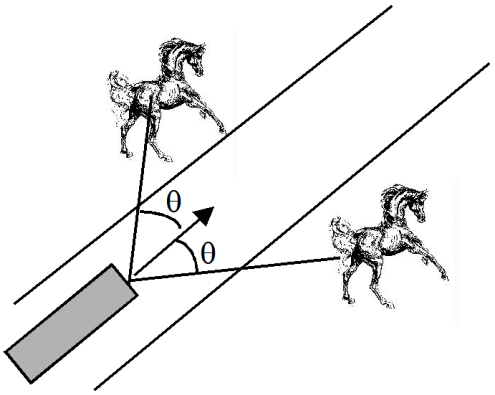
Prova Scritta di Fisica Generale I - 12/02/2015

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	CFU	Docente
.....	.....	.....	.....	....	.....

Tempo a disposizione (tre esercizi) 2 ore e 30' (compito su due pagine)

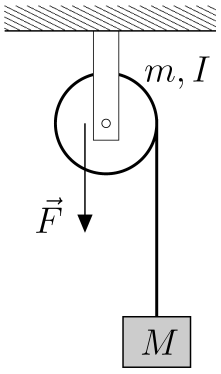
Problema 1

Una chiatta di massa $M = 1830\ kg$ si muove lungo un canale ad una velocità $v_1 = 1\ m/s$ trascinata da due cavalli che camminano sulla riva e tirano la chiatta mediante due funi che formano un angolo $\theta = 30^o$ con la direzione del moto. La velocità del moto è costante a causa del fatto che l'acqua del canale esercita un attrito viscoso (resistente) proporzionale alla velocità istantanea della chiatta ($F_v = -kv$). Ogni cavallo esercita una forza costante di modulo F_c e, a regime, eroga una potenza $P_1 = 735\ W$. Determinare a) quale sia la forza esercitata da ogni cavallo (2 punti) ; b) la costante k di attrito viscoso (3 punti); c) l'equazione del moto della chiatta, inizialmente ferma, e la sua velocità dopo $t_1 = 1\ s$ (5 punti).



Problema 2

Una massa $M = 8$ kg è sostenuta da una fune arrotolata su una carrucola (un disco) di massa $m = 12$ kg, raggio $r = 20$ cm fissata al soffitto per il suo asse. Inizialmente il sistema è mantenuto in equilibrio statico da una forza $\vec{F}$ verticale, applicata a distanza $r/2$ dall'asse della carrucola dal lato opposto della massa M. Determinare: a) la forza $\vec{R}_o$ esercitata dal supporto e la tensione del filo $\tau_o$in condizioni statiche (3 punti); b) eliminando la forza $\vec{F}$ il sistema si mette in moto determinare l'accelerazione di M lungo la verticale, la nuova tensione τ della fune e la forza $\vec{R}$ esercitata dal supporto. (4 punti)



c) il tempo impiegato dalla carrucola per compiere il primo giro (3 punti). Notare che, mentre la massa si muove, il filo che la sostiene non slitta sulla carrucola.

Problema 3

$n = 1.2$ moli di un gas ideale monoatomico alla temperatura iniziale $T_o = 25\ ^oC$ eseguono una trasformazione generica reversibile di equazione $TV^{-3} = cost$, aumentando del 40% il volume iniziale V_o, cioè $V_f = \alpha V_o$ con $\alpha = 1.4$. Determinare: a) la temperatura finale del gas (3 punti); b) il lavoro fatto durante la trasformazione (3 punti); c) il calore assorbito durante la trasformazione (4 punti).

Problema 4

Una carica $q = 100\ pC$ è posta nell'origine delle coordinate ed ad una distanza $d = 1\ cm$ vi è un dipolo elettrico con momento $|p| = 2 \times 10^{-14}\ Cm$ orientato parallelamente alle linee del campo generato dalla carica stessa. Assunto come asse delle x la congiungente la carica ed il dipolo.
Determinare a) la forza con cui si attraggono (3 punti); b) il campo elettrico generato nel punto $x = 2d/3$ (3 punti); c) la differenza di potenziale tra $x = 0.2d$ e $x = 0.8d$ (4 punti).

SOLUZIONI

Problema 1

a)
La potenza sviluppata da ogni cavallo deve essere pari al prodotto scalare tra la forza dei cavalli F_c per la velocitá della chiatta:

$$F_c v_1 \cos\theta = P_1$$

$$F_c = \frac{P_1}{v_1 \cos\theta} = 848\ N$$

b)
A regime dovendosi bilanciare la forza fatta dai cavalli con il lavoro fatto dall'attrito:

$$2F_c \cos\theta = k v_1$$

Quindi:

$$k = \frac{2F_c \cos\theta}{v_1} = \frac{2P_1}{v_1^2} = 1470\ Ns/m$$

c)
L'equazione della dinamica per chiatta vale:

$$M\frac{dv}{dt} = -kv + 2F_c \cos\theta$$

$$-\frac{M}{k}\frac{dv}{dt} = v - \frac{2F_c}{k}\cos\theta$$

Definendo $\tau = \frac{M}{k} = 1.24\ s$:

$$-\tau\frac{dv}{dt} = v - v_1$$

$$\frac{dv}{v - v_1} = -\frac{dt}{\tau}$$

Integrando tra 0 e $v(t)$ e tra 0 e t il secondo membro segue che:

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{v - v_1} = -\int_0^t \frac{dt'}{\tau}$$

$$\ln\frac{v(t) - v_1}{-v_1} = -\frac{t}{\tau}$$

$$v(t) = v_1\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Quindi:

$$v(t_1) = 0.55\ m/s$$

Problema 2

a)
La condizione che il momento delle forze sia nullo implica che:

$$F\frac{1}{2}r = Mgr$$

da cui:

$$F = 2Mg = 157\ N$$

Le forze applicate alla carrucola hanno tutte direzione verticale e sono: la forza peso della carrucola $\vec{P}_C = m\vec{g}$ e la reazione vincolare $\vec{R}$, entrambe applicate all'asse, la forza peso della massa $\vec{P}_M = M\vec{g}$ applicata tangenzialmente alla circonferenza e la forza $\vec{F}$. La condizione di equilibrio implica anche che

$$\vec{P}_C + \vec{P}_M + \vec{R}_o + \vec{F} = \vec{0}$$

Quindi:

$$R_o = mg + Mg + 2Mg = 354\ N$$

La tensione della fune in condizioni statiche vale:

$$\tau_o = Mg = 79\ N$$

b)
Eliminando $\vec{F}$ il sistema si mette in moto e la dinamica può essere descritta dall'accelerazione verticale a di M:

$$Ma = Mg - \tau$$

e dalla II equazione cardinale, per l'accelerazione angolare α:

$$I\alpha = \tau r$$

Dove $I = \frac{1}{2}mr^2$ è il momento di inerzia della carrucola, ed $\alpha r = a$ non slittando:

$$\frac{1}{2}mr^2\frac{a}{r} = \tau r \qquad \rightarrow \tau = \frac{1}{2}ma$$

sostituendola nella prima equazione cardinale:

$$Ma = Mg - \frac{1}{2}ma$$

$$a(M + \frac{1}{2}m) = Mg$$

$$a = \frac{M}{M + 1/2m}g = 5.6\ m/s^2$$

$$\tau = 34\ N$$

La reazione vincolare diventa:

$$R = mg + \tau = 152\ N$$

c)
La accelerazione angolare vale:

$$\alpha = \frac{a}{r} = 28\ rad/s^2$$

Essendo il moto rotatorio uniformemente accelerato:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

Quindi per compiere un giro:

$$2\pi = \frac{1}{2}\alpha\, t_x^2$$

$$t_x = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} = 0.67\ s$$

Problema 3

a)
Trasformando la temperatura in gradi K:

$$T_o = 298\ K$$

Essendo la trasformazione politropica (generica reversibile):

$$T_o V_o^{-3} = T_f (\alpha V_o)^{-3}$$

$$T_f = \alpha^3 T_o = 818\ K$$

b)
Il lavoro fatto durante la trasformazione vale:

$$W = \int_{V_o}^{\alpha V_o} p dV = \int_{V_o}^{\alpha V_o} \frac{nRT}{V} dV = \frac{nRT_o}{V_o^3} \int_{V_o}^{\alpha V_o} V^2 dV = \frac{nRT_o}{3}(\alpha^3 - 1) = 1.73\ kJ$$

c)
Essendo:

$$c_v = \frac{3}{2}R = 12.47\ J/K$$

La variazione di energia interna è:

$$\Delta U = n c_v (T_f - T_o) = 7.8\ kJ$$

Quindi il calore scambiato dalla trasformazione è:

$$Q_a = W + \Delta U = 9.5\ kJ$$

Problema 4

a)
Un dipolo, posto nel punto di coordinate d, genera lungo il suo asse un campo pari:

$$E_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{p}{(d-x)^3}$$

In particolare per $x = 0$ (dove è la carica q):

$$E_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{p}{(d)^3} = 360\ V/m$$

Quindi la forza attrattiva sulla carica q vale:

$$F = qE_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{pq}{(d)^3} = 36\ nN$$

b)
Il campo generato lungo l'asse delle x per $x \leq 0$ vale:

$$E_{xt} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{x^2} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{p}{(d-x)^3}$$

Quindi se $x = 2/3d = 6.7\ mm$:

$$E_{xt} = 3 \cdot 10^4\ V/m$$

c)
La differenza di potenziale dovuta alla carica vale:

$$DV_q = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{0.2d}^{0.8d}\frac{1}{x^2}dx = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{x}\right]_{0.2d}^{0.8d} = -337\ V$$

La differenza di potenziale dovuta al dipolo vale:

$$DV_p = -\frac{p}{2\pi\varepsilon_o}\int_{0.2d}^{0.8d}\frac{1}{(d-x)^3}dx$$

Facendo un cambio di variabile $y = d - x$:

$$DV_p = \frac{p}{2\pi\varepsilon_o}\int_{0.8d}^{0.2d}\frac{1}{y^3}dy = \frac{p}{2\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{2}{y^2}\right]_{0.8d}^{0.2d} = -168\ V$$

Quindi in totale:

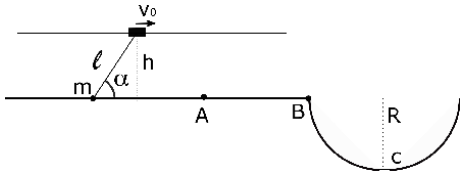
$$DV = DV_q + DV_p = -505\ V$$

Università dell'Aquila - Ingegneria Industriale

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	CFU
.....	.....	.....	.....	....

Prima prova parziale di Fisica Generale I - 10/04/2015

Tempo a disposizione un'ora. Usare questo foglio ed il retro per la bella.



Uno sciatore (rappresentato come un punto materiale di massa $m = 75\,kg$) è trainato da uno skilift e sta percorrendo l'ultimo tratto in piano. Lo skilift è schematizzato da un nastro mobile, posto a un'altezza $h = 3.4\,\mathrm{m}$ dal suolo e ad esso parallelo, che si muove con velocità costante v_0. Lo sciatore è trascinato da un cavo di lunghezza $l = 5.1\,m$ fissato al nastro mobile.
Il coefficiente di attrito dinamico fra neve e sci è pari a $\mu_d = 0.051$.
Determinare a) la tensione F_T del cavo (3 punti); b) la velocità v_0 di trascinamento dello skilift, se lo sciatore si sgancia dallo skilift nel punto A e si ferma in B, (l'attrito sul tratto orizzontale $\bar{AB} = 8.4\,\mathrm{m}$ è caratterizzato dallo stesso μ_d del tratto precedente) (2 punti). c) Una volta in B, lo sciatore si lascia andare, con velocità iniziale che possiamo considerare nulla, in una conca semisferica di raggio $R = 15\,m$ ricoperta di ghiaccio. Trascurando l'attrito, a che velocità v_C verrà raggiunto C, il punto più basso della conca? (2 punti). d) Lo sciatore ignora che in C il ghiaccio, che ricopre un piccolo lago, è sottile e in tale punto è capace di sostenere una sollecitazione massima di $F_M = 1,5 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$. Determinare se lo sciatore riuscirà a superare il punto C senza far rompere il ghiaccio o se cadrà in acqua. (3 punti)

Soluzione:

a) Sullo sciatore agiscono le seguenti forze:

- La forza peso $\vec{F}_p = -mg\hat{j}$
- La reazione vincolare del suolo $\vec{N} = N\hat{j}$
- La forza $\vec{F}_T$ esercitata dal cavo, pari alla sua tensione e diretta lungo la direzione del cavo, che si scompone in
$$\vec{F}_T = F_T^{(x)}\hat{i} + F_T^{(y)}\hat{j}.$$
L'angolo fra il cavo e il suolo è dato da
$$\alpha = \arcsin\frac{h}{l} = 42^o$$
per cui
$$F_T^{(x)} = F_T\cos\alpha,$$
$$F_T^{(y)} = F_T\sin\alpha.$$
- La forza di attrito dinamico $\vec{F}_A = -\mu_d|N|\hat{i}$

Lo sciatore si muove di moto rettilineo uniforme, di conseguenza la somma delle forze applicate deve essere nulla
$$N + F_p + F_T^{(y)} = 0,$$
$$F_T^{(x)} + F_A = 0.$$
Dalla prima equazione si ricava
$$N = mg - F_T\sin\alpha,$$
che, sostituita nella seconda, dà
$$F_T\cos\alpha - \mu_d\left(mg - F_T\sin\alpha\right) = 0.$$
La tensione del cavo è quindi
$$F_T = \frac{mg\mu_d}{\cos\alpha + \mu_d\sin\alpha} = 48\,\mathrm{N}$$

b)Sulla superficie orizzontale, la forza d'attrito vale
$$F_A = -\mu_d mg.$$
Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito per frenare lo sciatore è
$$W_{AB} = \int_A^B F_A dx = -\mu_d mg\bar{B}\bar{A}.$$
Per il teorema dell'energia cinetica
$$W_{AB} = \Delta T = -\frac{1}{2}mv_0^2,$$

$$v_0 = \sqrt{2\mu_d g \bar{BA}} = 2.9 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

c) In assenza di attrito siamo in presenza soltanto di forze conservative. Il bilancio energetico è

$$E_k^B + E_p^B = E_k^C + E_p^C,$$

$$mgR = \frac{1}{2} m v_C^2,$$

$$v_C = \sqrt{2gR} = 17 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

d)La reazione vincolare in C deve opporsi alla forza peso e, in più, generare l'accelerazione centripeta necessaria a compiere una traiettoria circolare

$$N_C = mg + m\frac{v_C^2}{R} = 3mg = 2.2 \cdot 10^3 \, \mathrm{N},$$

quindi il ghiaccio si rompe.

Università dell'Aquila - Ingegneria Industriale

Nome	Cognome	N. Matricola	CFU
.....	.....	.....	....

Seconda prova parziale di Fisica Generale I - 12/05/2015

Un tubo spesso di massa m, di momento di inerzia I_z (rispetto al suo asse), di raggio esterno r_2, lungo ℓ e densità uniforme , viene lasciato rotolare da fermo lungo un piano inclinato con angolo θ rispetto al piano orizzontale a partire da una altezza h. Appena il tubo comincia a rotolare, con moto di puro rotolamento, agisce su di esso una momento frenante costante di modulo M_f.
Determinare : a) la densità ρ del materiale del tubo ed il suo raggio interno r_1 (2 punti); b) il valore del momento frenante M_f se l'accelerazione vale a (3 punti); c) il coefficiente di attrito minimo che permette il moto di puro rotolamento (2 punti); d) il lavoro fatto dal momento frenante dopo che il corpo è sceso in basso (3 punti).
(dati del problema $m = 12.7\ kg$, $I_z = 0.32\ kgm^2$, $r_2 = 20\ cm$; $\ell = 5\ cm$, $a = 1.8\ m/s^2$, $\theta = 20^o$, $h = 3\ m$)

Soluzione:

a)
La massa totale è:

$$m = \int_{r_1}^{r_2} \rho \ell 2\pi r dr = \rho \ell \pi (r_2^2 - r_1^2)$$

Mentre il momento di inerzia vale:

$$I_z = \int_{r_1}^{r_2} \rho \ell 2\pi r^3 dr = \frac{\rho \ell \pi}{2}(r_2^4 - r_1^4)$$

Dividendo la prima per la seconda:

$$\frac{I_z}{m} = \frac{\rho \ell \pi}{2}(r_2^4 - r_1^4)\frac{1}{\rho \ell \pi (r_2^2 - r_1^2)} =$$

b)
La I equazione cardinali del moto è:

$$ma = mg \sin\theta - f_a$$

Per cui:

$$f_a = m(g \sin\theta - a) = 19.7\ N$$

La accelerazione angolare essendo un moto di puro rotolamento vale:

$$\alpha = a/r_2$$

Quindi la II equazione cardinale è:

$$I_z\alpha = f_a r_2 - M_f$$

$$M_f = f_a r_2 - I_z \frac{a}{r_2} = 1.07\ Nm$$

c)
Quindi imponendo che:

$$fa \leq \mu_s mg\cos\theta$$

$$\mu_s = \frac{f_a}{mg\cos\theta} = 0.17$$

d)
Alla fine della discesa la velocità del C.M. sarà:

$$v = \sqrt{\frac{2ha}{\sin\theta}} = 5.6\ m/s$$

$$\omega = \frac{v}{r_2} = 28\ rad/s$$

quindi l'energia dissipata vale:

$$\Delta E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2 - Mgh = -47\ J$$

Università dell'Aquila - Ingegneria
Prova Scritta di Fisica Generale I - 12/06/2015

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	CFU	Docente
.....	.....	.....	.....	....	.....
data orale	25/06/2015 ☐	2/07/2015 ☐			

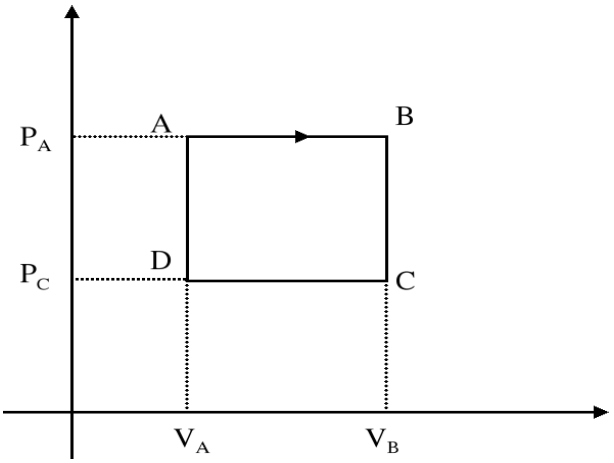
Il compito è su due pagine, Tempo a disposizione:
tre esercizi: 2 ore e 30'.
un esercizio (esonero): 1 ora.

Problema 1
Una pallottola indeformabile di massa $m = 30\ g$, approssimabile come un punto materiale, è sparata perpendicolarmente ad una tavola spessa $d = 5\ cm$. La pallottola colpisce con una velocità $v_o = 250\ m/s$ la tavola e ne emerge con velocità $v_f = 110\ m/s$. Si assuma la forza frenante costante su tutto lo spessore della tavola. Calcolare: a) la forza frenante (3 punti); b) la durata del tempo di attraversamento (2 punti); c) l'impulso trasmesso alla tavola (2 punti); d) Lo spessore d_x della tavola necessario a fermare la pallottola (3 punti).

Problema 2
Una coppia motrice $M = 1.6\ Nm$ viene applicata sul mozzo di una ruota approssimabile come un disco pieno. La ruota ha massa $m = 3\ kg$ e raggio $r = 20\ cm$ e giace su un piano orizzontale. Il punto di contatto ha un coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.3$. Determinare: a) la forza di attrito tra ruota e piano (5 punti); b) la distanza percorsa a partire da fermo in un tempo $t_1 = 15\ s$ (2 punti); c) la massima coppia motrice applicabile M_{max} (3 punti).

Problema 3

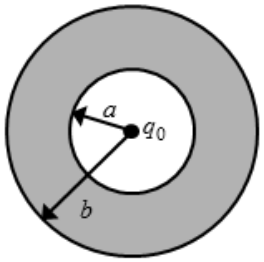
Una macchina termica lavora con $n = 2.3$ *moli* moli di un gas perfetto biatomico. Il ciclo è irreversibile in quanto le trasformazioni avvengono a contatto con sorgenti aventi temperatura costante in ognuna delle trasformazioni. Tuttavia, le trasformazioni avvengono per un continuo di stati di equilibrio termodinamico (in modo quasi statico), in modo tale che il ciclo sia rappresentabile nel piano di Clapeyron (p, V) con un rettangolo di vertici ABCD avente i lati paralleli agli assi coordinati. La trasformazione da A a B, si svolge a pressione costante, e la temperatura varia da $T_A = 400\ K$ a $T_B = 500\ K$. Nella trasformazione da B a C, che si svolge a volume costante, il gas ritorna alla stessa temperatura iniziale $T_C = T_A$, ma ad una diversa pressione $p_C = 1.2 \times 10^5\ Pa$.



Una isobara porta il sistema alla temperatura più bassa T_D. La macchina lavora tra tre sorgenti di calore a temperatura T_A ($D \to A$, $B \to C$), T_B ($A \to B$) e T_D ($C \to D$). Si ricorda che il rendimento è lavoro compiuto diviso la somma del calore ceduto da tutte le sorgenti da cui il sistema assorbe calore. Determinare: a) La temperatura più bassa T_D (3 punti); b) il lavoro eseguito in un ciclo (2 punti); c) Il rendimento del ciclo (3 punti); d) L'aumento di entropia dell'universo termodinamico in un ciclo (2 punti).

Problema 4

Al centro di un guscio sferico spesso di raggio interno $a = 0.8\ m$ e raggio esterno $b = 1.5\ m$ è collocata una carica puntiforme $q_o = 0.3\ \mu C$. All'interno del guscio sferico, per $a \leq r \leq b$, esiste una distribuzione di carica con densità di volume $\rho = K/r$, con K una costante. Il campo elettrico radiale all'interno del guscio sferico è costante in modulo.



Si determini: a) il campo elettrico sul bordo interno del guscio (2 punti); b) il valore della costante K (3 punti) che rende all'interno della distribuzione il campo elettrico costante in modulo; c) il valore della carica totale dell'intero sistema (3 punti); d) la differenza di potenziale tra il bordo esterno ed interno del guscio sferico (2 punti).

SOLUZIONI

Problema 1

a)

Il lavoro fatto dalla forza frenante vale:

$$W = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_o^2) = -756\ J$$

Quindi essendo una forza frenante costante che agisce nello spessore della tavola:

$$|F| = \frac{|W|}{d} = 15120\ N$$

b)

La accelerazione di frenamento vale:

$$a = \frac{|F|}{m} = 5.04 \cdot 10^5\ m/s^2$$

La durata di attraversamento della tavola:

$$t = \frac{v_o - v_f}{a} = 0.28\ ms$$

c)

L'impulso trasmesso alla tavola vale:

$$I = |F|t = 4.2\ Ns$$

d)

Lo spessore d_x della tavola necessario a fermare il proiettile vale:

$$|F|d_x = \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$d_x = \frac{1}{2|F|}mv_o^2 = 6.2\ cm$$

Problema 2

a)

La forza di attrito massimo vale;

$$f_{max} = \mu_s mg = 8.83\ N$$

La prima equazione cardinale sul piano:

$$f = ma$$

Mentre se il momento è applicato in senso orario, la seconda equazione cardinale è:

$$-M + fr = I\frac{d\omega}{dt}$$

Ipotizzando che valga la condizione di puro rotolamento e sostituendo la prima equazione cardinale:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{a}{r} = -\frac{f}{mr}$$

Inoltre $I = 1/2mr^2$ quindi la II diventa:

$$-M + fr = -\frac{1}{2}mr^2\frac{f}{mr}$$

$$fr(1 + 1/2) = M$$

$$f = \frac{M}{r(1 + 1/2)} = 5.3\ N$$

Inferiore alla forza di attrito massimo, quindi il moto è di puro rotolamento.
b)
L'accelerazione della ruota vale:

$$a = \frac{f}{m} = 1.8\ m/s^2$$

quindi essendo il moto accelerato uniforme.

$$s = \frac{1}{2}at_1^2 = 200\ m$$

c)
Imponendo che:

$$f_{max} = \frac{M_{max}}{r(1 + 1/2)}$$

$$M_{max} = f_{max}r(1 + 1/2) = 2.65\ Nm$$

Problema 3
a)
Dalla equazione di stato ai quattro estremi (ABCD):

$$p_AV_A = nRT_A$$

$$p_AV_B = nRT_B$$

$$p_CV_B = nRT_A$$

$$p_CV_A = nRT_D$$

Dividendo la prima per la seconda e la quarta per la terza:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_A}$$

$$T_D = \frac{T_A^2}{T_B} = 320\ K$$

b)
Il volume alla temperatura T_D vale;

$$V_A = V_D = \frac{nRT_D}{P_D} = 0.051\ m^3$$

Quindi il massimo volume vale:

$$V_C = V_B = 1.3V_A = 0.064\ m^3$$

e la massima pressione:

$$p_B = p_A = 1.5 \cdot 10^5 Pa$$

Quindi il lavoro fatto in un ciclo vale:

$$W = (p_A - p_D)(V_C - V_A) = 382\ J$$

c)

$$c_v = \frac{5}{2}R \qquad c_p = \frac{7}{2}R$$

Quindi:

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = 6690\ J$$
$$Q_{BC} = nc_v(T_C - T_B) = nc_v(T_A - T_B) = -4780\ J$$
$$Q_{CD} = nc_p(T_D - T_C) = nc_p(T_D - T_A) = -5354\ J$$
$$Q_{DA} = nc_v(T_A - T_D) = 3824\ J$$

La sorgente intermedia scambia calore $Q_{BC} + Q_{DA}$, tale somma è negativa, ossia la sorgente intermedia riceve calore dalla macchina. In definitiva, la macchina assorbe calore soltanto dalla sorgente a temperatura T_B

$$Q_a = Q_{AB} = 6693\ J$$

Quindi:

$$\eta = \frac{W}{Q_a} = 0.057$$

d)
La variazione di entropia nell'universo termodinamico vale:

$$DS = -\left(\frac{Q_{AB}}{T_B} + \frac{Q_{BC}}{T_A} + \frac{Q_{CD}}{T_D} + \frac{Q_{DA}}{T_A}\right) = 5.74\ J/K$$

Problema 4
a)

Nella regione $r \leq a$ dal centro vi è solo la carica puntiforme per cui:

$$E(r) = \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o r^2} \quad r \leq a$$

Quindi:

$$E(a) = 4.2 \ KV/m$$

b)
All'interno di una sfera gaussiana di raggio $a \leq r \leq b$ la carica totale vale:

$$Q(r) = q_o + \int_a^r \frac{K}{r} 4\pi r'^2 dr' = q_o + 2\pi K(r^2 - a^2)$$

Quindi dovendo per il teorema di Gauss:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_o} = \frac{q_o + 2\pi K(r^2 - a^2)}{\varepsilon_o}$$

$$E(r) = \frac{q_o - 2\pi K a^2}{4\pi\varepsilon_o r^2} + \frac{K}{2\varepsilon_o}$$

Perchè quindi non dipenda da r deve essere:

$$q_o - 2\pi K a^2 = 0$$

$$K = \frac{q_o}{2\pi a^2} = 7.5 \cdot 10^{-8} \ C/m^2$$

c)
La carica totale vale:

$$Q(b) = q_o + 2\pi K(b^2 - a^2) = 1.05 \ \mu C$$

d)
Essendo costante il campo elettrico la d.d.p. tra b ed a vale:

$$\Delta V = E(a)(b - a) = 2950 \ V$$

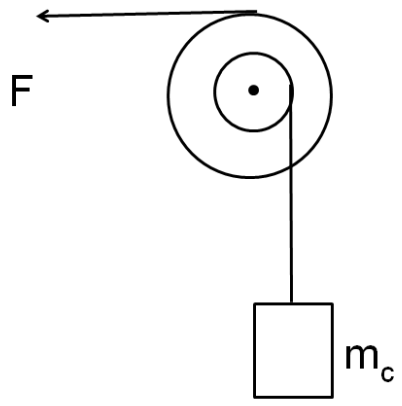
Università dell'Aquila - Ingegneria
Prova Scritta di Fisica Generale I - 03/07/2015

Nome	Cognome	N. Matricola	CFU
.....	.....	.....	.....

Tempo a disposizione (tre esercizi) 2 ore e 30'
1 esercizio (esonero) 1 ora

Problema 1
Una massa $M = 75\ kg$ è sospesa ad una parete, con inclinazione $\theta = 60^o$ rispetto alla direzione orizzontale, tramite una corda elastica di costante di richiamo elastico $K = 1000\ N/m$. Il coefficiente di attrito statico tra la massa e la parete vale $\mu_s = 0.5$, mentre quello dinamico vale $\mu_d = 0.45$. Vi è un ampio intervallo di valori di allungamenti della corda elastica per cui si ha equilibrio statico.
Determinare: a) per quale valore dell'allungamento della corda elastica la massa è in equilibrio e l'attrito è nullo (1 punti); b) il minimo ed il massimo allungamento per cui la massa è in equilibrio (2 punti); c) il punto più basso raggiunto nel caso la massa venga rilasciata con velocità nulla dalla posizione di riposo della corda elastica (allungamento nullo) al termine della prima semi-oscillazione lungo il piano inclinato (4 punti); d) il lavoro fatto dalla forza di attrito durante la prima semi-oscillazione discendente e la potenza media dissipata (3 punti).

Problema 2
Un argano è schematizzabile come una ruota con due gole che ruota senza attrito sul suo asse. Un carico di massa $m_c = 100\ kg$ è collegato, tramite una fune inestensibile, al raggio interno $R_1 = 40\ cm$ dell'argano di momento di inerzia $I = 10\ kgm^2$. Sulla gola esterna, di raggio $R_2 = 80\ cm$ dell'argano agisce attraverso un'altra fune una forza $F = 500\ N$ (orizzontale). Supponendo di poter trascurare la massa dei due cavi e che gli stessi abbiano moto senza strisciamento lungo le gole, calcolare: a) la accelerazione (4 punti); b) la tensione che agisce sulla fune verticale (2 punti); c) la potenza media sviluppata dalla forza se il carico viene sollevato di $h = 3\ m$ (4 punti).



Problema 3
Una macchina, irreversibile, lavora tra $T_1 = 20\ ^oC$ e $T_2 = 300\ ^oC$, ed ha un rendimento che è 1/4 della macchina reversibile operante tra le stesse temperature. La macchina compie un ciclo in un tempo $t_1 = 2\ s$.
La potenza termica dissipata nella sorgente più fredda vale $P_1 = -1100\ W$. Determinare: a) la potenza meccanica sviluppata (5 punti); b) la variazione di entropia dell'universo in una giornata di funzionamento continuo (5 punti).

Problema 4

Una nuvola sferica di raggio $2R = 6\ m$ carica ha una densità di carica $\rho = 1 \cdot 10^{-8}\ C/m^3$ uniforme a distanza dal centro tra 0 ed R e diventa di segno opposto $-\rho$, ma sempre uniforme tra R e $2R$.
Determinare a) la carica Q_2 tra R e $2R$ (2 punti); b) il campo elettrico in $4R$ (1 punto); c) a che distanza dal centro (escludendo il centro e l'infinito) il campo è nullo (3 punti); d) La differenza di potenziale tra il bordo della nuvola (2R) ed la regione di transizione (R) (4 punti).

SOLUZIONI

Problema 1

a) La forza di attrito è nulla quando la componente della forza peso lungo il piano inclinato è bilanciato dalla forza di richiamo elastico:

$$K\Delta\ell - Mg\sin\theta = 0$$

$$\Delta\ell = \frac{Mg\sin\theta}{K} = 0.64\ m$$

b)

La forza di attrito ha il valore massimo pari a:

$$f_{max} = \mu_s Mg\cos\theta = 184\ N$$

Se è diretta verso l'alto come la forza di richiamo elastico:

$$K\Delta\ell_u + f_{max} - Mg\sin\theta = 0$$

$$\Delta\ell_u = \frac{Mg\sin\theta - f_{max}}{K} = 0.45\ m$$

Mentre se è diretta verso il basso come la forza peso:

$$K\Delta\ell_d - f_{max} - Mg\sin\theta = 0$$

$$\Delta\ell_d = \frac{Mg\sin\theta + f_{max}}{K} = 0.82\ m$$

c)

Posto lo zero dell'energia potenziale gravitazionale nella posizione di riposo della corda elastica: la somma della energia potenziale elastica, energia potenziale gravitazionale iniziale è nulla. Questa energia nulla deve essere pari alla energia potenziale elastica, energia potenziale gravitazionale più l'energia dissipata per attrito nel punto più basso.
Nel punto a quota minima $-h$ l'allungamento della corda elastica è $\Delta\ell_{max}$:

$$-h = \Delta\ell_{max}\sin\theta$$

Quindi:

$$0 = \frac{1}{2}K\Delta\ell_{max}^2 + Mgh + \mu_d Mg\cos\theta\Delta\ell_{max}$$

$$\frac{1}{2}K\Delta\ell_{max}^2 - Mg\Delta\ell_{max}\sin\theta + \mu_d Mg\cos\theta\Delta\ell_{max} = 0$$

$$\Delta\ell_{max} = 2Mg\frac{\sin\theta - \mu_d\cos\theta}{K} = 0.94\ m$$

Quindi la quota minima risulta:

$$h = -\Delta\ell_{max}\sin\theta = -0.82\ m$$

d)

Il modulo del lavoro fatto dalla forza di attrito è pari a:

$$W_a = \mu_d M g \cos\theta \Delta\ell_{max} = 156\ J$$

Il tempo, detto pseudo periodo, che impiega il sistema a fare una mezza oscillazione vale:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 0.86\ s$$

Quindi la potenza media dissipata vale:

$$P = \frac{W_a}{\tau} = 181\ W$$

Problema 2

a)
Le due equazioni che rappresentano il moto dell'argano e del carico sono:

$$FR_2 - TR_1 = I\alpha$$

$$T - m_c g = m_c a$$

Essendo $\alpha R_1 = a$, dalla prima:

$$F\frac{R_2}{R_1} - T = \frac{I}{R_1^2}a$$

Quindi sommandola all'altra equazione:

$$F\frac{R_2}{R_1} - m_c g = (m_c + \frac{I}{R_1^2})a$$

$$a = \frac{FR_2/R_1 - m_c g}{m_c + I/R_1^2} = 0.123\ m/s^2$$

b)
Di conseguenza:

$$T = m_c(g + a) = 992\ N$$

c)
Il moto della massa m_c è uniformemente accelerato e il tempo di salita vale:

$$h = \frac{1}{2}at_s^2$$

$$t_s = \sqrt{2h/a} = 7\ s$$

Il lavoro fatto è pari a:

$$W = Fh\frac{R_2}{R_1} = 3000\ J$$

La potenza media:

$$P_m = \frac{W}{t_s} = 430\ W$$

Problema 3

a)
Il rendimento vale (esprimendo le temperature in K):

$$\eta = \frac{1}{4}(1 - \frac{T_1}{T_2}) = 0.122$$

Il calore ceduto alla sorgente fredda in un ciclo vale:

$$Q_1 = P_1 t_1 = -2.2\ kJ$$

Quindi essendo:

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = \eta$$

$$Q_2 = \frac{Q_1}{\eta - 1} = 2.51\ kJ$$

Quindi:

$$W = Q_1 + Q_2 = 306\ J$$

$$P = \frac{W}{t_1} = 153\ W$$

b)
In un giorno il numero di cicli è:

$$n = \frac{24 \times 3600}{t_1} = 43200$$

La variazione di entropia vale:

$$\Delta S = -\frac{Q_1 n}{T_1} - -\frac{Q_2 n}{T_2} = 1.35 \times 10^5\ J/K$$

Problema 4

a)
La carica totale tra R e $2R$ vale:

$$Q_2 = -\rho \frac{4}{3}\pi[(2R)^3 - R^3] = -7.9\ \mu C$$

b)

La carica tra 0 ed R vale:

$$Q_1 = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 = 1.1\ \mu C$$

Quindi la carica totale tra 0 e $2R$ vale:

$$Q = Q_1 + Q_2 = -6.8\ \mu C$$

Quindi per il teorema di Gauss il campo elettrico all'esterno della distribuzione ($r > 2R$) vale:

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Quindi per $r = 4R$:

$$E(4R) = -424\ V/m$$

Cioè punta verso l'interno.

c)

Il campo è nullo nella sfera di raggio r_x all'interno della regione con carica negativa per cui la carica

$$Q_2' = -\rho\frac{4}{3}\pi[(r_x)^3 - R^3]$$

è eguale ed opposta a:

$$Q_2' = -Q_1$$

$$-\rho\frac{4}{3}\pi[(r_x)^3 - R^3] = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$r_x^3 = 2R^3$$

$$r_x = R\sqrt[3]{2} = 3.8\ m$$

d)

Dal teorema di Gauss per $R \leq r \leq 2R$:

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_1 - 4\pi\rho\int_R^r r'^2 dr'}{\varepsilon_o} = \frac{Q_1 - 4/3\pi\rho(r^3 - R^3)}{\varepsilon_o}$$

$$E_r = \frac{Q_1 + 4/3\pi\rho R^3}{4\pi\varepsilon_o r^2} - \frac{\rho r}{3\varepsilon_o}$$

La d.d.p. vale:

$$\Delta V = \int_R^{2R} E_r dr = \frac{Q_1 + 4/3\pi\rho R^3}{4\pi\varepsilon_o}\int_R^{2R}\frac{dr}{r^2} - \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\int_R^{2R} r dr$$

$$\Delta V = \frac{Q_1 + Q_1}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{2R} - \frac{\rho}{6\varepsilon_o}\left[r^2\right]_R^{2R} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R} - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} = -1695\ V$$

Università dell'Aquila - Ingegneria
Prova Scritta di Fisica Generale I - 17/07/2015

Nome	Cognome	N. Matricola	CFU
.....	.....	.....	.....

Tempo a disposizione (tre esercizi) 2 ore e 30'
1 esercizio (esonero) 1 ora

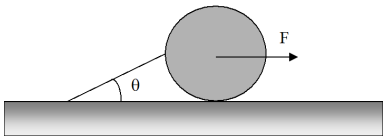
Problema 1

Un bambino è seduto su un'altalena di un parco giochi. Il sistema è schematizzabile come un pendolo semplice costituito da un filo inestensibile di lunghezza $l = 2\ m$ al quale è applicata una massa puntiforme $m = 20\ kg$. A partire dalla posizione di equilibrio (sistema fermo in verticale) l'altalena raggiunge l'angolo massimo (90° rispetto alla verticale) attraverso una sequenza di $n = 15$ spinte eguali. Ad ogni spinta, esercitata quando la massa ha velocità istantanea nulla, nel punto più alto ogni volta raggiunto, viene fornito un impulso $\vec{J}$ che ha sempre lo stesso modulo e direzione tangente alla traiettoria della massa (arco di circonferenza).

Determinare: a) Il modulo dell'impulso $|J|$ dato ad ogni spinta (4 punti) (suggerimento si determini la relazione tra l'impulso e l'energia cinetica acquistata dall'altalena dopo una spinta) ; b) l'angolo massimo dell'altalena rispetto alla verticale dopo la prima spinta (3 punti); c) la tensione massima del filo che sorregge l'altalena (3 punti).

Problema 2

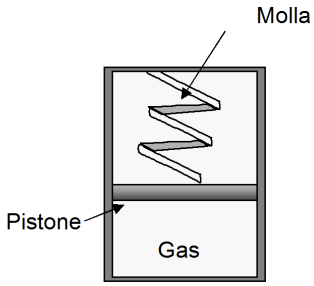
Un disco di massa $m = 3\ kg$ e raggio $R = 20\ cm$ è sottoposto all'azione di una forza $F = 20\ N$ che è applicata ad altezza R, poggia su un piano orizzontale scabro ed è trattenuto fermo da un filo disposto come in figura con un angolo $\theta = 30^o$ rispetto alla direzione orizzontale.



Determinare a) la tensione del filo (3 punti); b) il coefficiente di attrito statico minimo che permette l'equilibrio (2 punti). c) Se la forza viene applicata, più in alto ad altezza x, trovare il valore x per cui la forza di attrito è nulla e quindi il piano può essere liscio come si vuole (5 punti).

Problema 3

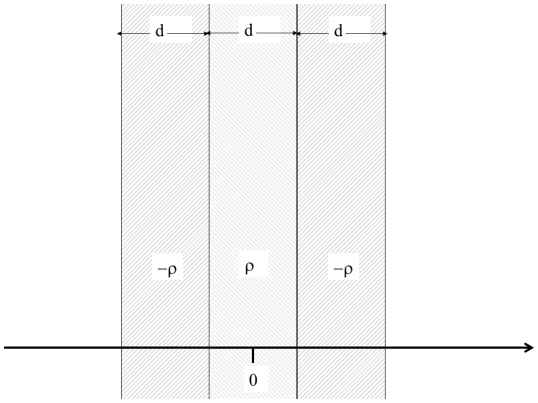
Un gas ideale monoatomico ($n = 0.3$ moli) è confinato in un recipiente cilindrico con pareti rigide ed isolanti, base conduttrice inizialmente in contatto con una sorgente a temperatura $T_0 = 300$ K, e delimitato da un pistone mobile senza attrito di spessore e massa trascurabile. Inizialmente il gas è in equilibrio termodinamico e il pistone, sul quale agisce la sola forza di compressione di una molla di costante elastica $K = 50000\ N/m$, delimita un volume di altezza $h = 20$ cm.



Il volume iniziale in cui è contenuto il gas vale Sh, ma la sezione S del cilindro non è necessaria conoscerla. A partire dalla configurazione iniziale si fornisce calore al gas (attraverso la base conduttrice) fino a comprimere la molla ad un valore doppio di quello iniziale. Determinare: a) la compressione iniziale dl della molla (3 punti); b) la temperatura finale T_f del gas (3 punti); c) il calore Q_a assorbito dal gas (4 punti).

Problema 4

Un triplo strato è costituito da regioni planari (ai fini dei conti infinite) di densità di carica $-\rho$, $\rho = 3\ C/m^3$ e $-\rho$ e di spessore $d = 3\ \mu m$ come mostrato in figura. Assunto come asse delle x un asse perpendicolare ai piani (come mostrato in figura) con centro come indicato. Da considerazioni di simmetria il campo elettrico è nullo al centro (cioè per $x = 0$). Determinare: a) L'intensità del campo elettrico in $2d$ e $-2d$; b) a che distanza dal centro il campo è nullo; c) la differenza di potenziale tra il centro e il bordo a destra $(3/2d)$.



SOLUZIONI

Problema 1

a) In ciascuna spinta il modulo della quantità di moto della massa passa da zero a $|J| = m|v|$, corrispondentemente l'energia cinetica passa da zero a

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{J^2}{m}$$

L'energia meccanica totale in ogni spinta subisce il medesimo incremento $\Delta E_{tot} = E_c$.
In totale debbo imporre che:

$$mgl = \frac{1}{2}n\frac{|J|^2}{m}$$

Quindi:

$$|J| = m\sqrt{\frac{2gl}{n}} = 32\ Ns$$

La variazione dell'energia meccanica totale dalla configurazione iniziale di equilibrio a quella corrispondente all'angolo massimo di 90° vale mgl, pertanto

$$mgl = n\frac{1}{2}\frac{J^2}{m} \quad , \qquad |J| = m\sqrt{\frac{2gl}{n}} \simeq 32.3 \text{ Ns}$$

b)
Applicando la conservazione dell'energia meccanica dopo la prima spinta, l'angolo massimo θ_1 risulta:

$$mgl(1 - \cos\theta_1) = \frac{1}{2}\frac{J^2}{m}$$

ovvero

$$\cos\theta_1 = 1 - \frac{|J|^2}{2m^2gl} = 0.875 \quad \text{, e} \quad \theta_1 \simeq 0.367 \text{ rad} \simeq 21^\circ$$

c)
La massima tensione della fune viene esercitata nell'ultima oscillazione quando la massa ha la velocità massima trovandosi nel punto più basso.

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 = mgl \quad \text{e} \quad v_{max} = \sqrt{2gl} = 6.3 \text{ m/s}$$

La fune deve supportare la forza peso e fornire la necessaria ulteriore forza centripeta, pertanto:

$$m\frac{v_{max}^2}{l} = T_{max} - mg \quad \text{e} \quad T_{max} = m\left(g + \frac{v_{max}^2}{l}\right) = 3\,mg = 588 \text{ N}$$

Problema 2

Sul disco agiscono quattro forze la forza peso, la tensione del filo, la reazione vincolare e la forza esterna.
a)

Scomponiamo la reazione vincolare in una componente normale al piano R_n ed una orizzontale f. La condizione di equilibrio per le forze, sull'asse orizzontale:

$$F + T\cos\theta + f = 0$$

Per quanto riguarda i momenti rispetto al baricentro (positivo antiorario):

$$TR\sin\theta - fR = 0$$

Eliminando f:

$$T = -\frac{F}{\cos\theta + \sin\theta} = -14.6\ N$$

b)

$$f = T\sin\theta = -7.3\ N$$

per quanto riguarda la reazione vincolare normale:

$$R_n = -mg - T\sin\theta = 37\ N$$

Imponendo che:

$$|f| \leq \mu_s R_n$$

$$\mu_s \geq 0.2$$

c)
Se la forza è applicata in x la risultante delle forze orizzontali ha la stessa espressione anche se la tensione è diversa:

$$F + T_x\cos\theta + f_x = 0$$

Il pedice T_x è il modulo della tensione ed f_x è la forza di attrito statico se F è applicato nel punto ad altezza x. Per quanto riguarda i momenti rispetto al baricentro invece:

$$T_x R\sin\theta - F(x - R) - f_x R = 0$$

Eliminando T_x:

$$f_x = \frac{F(x - R - R\tan\theta)}{R(1 + tan\theta)}$$

Che è nulla per

$$x - R - R\tan\theta = 0$$

$$x = 0.315\ m = 31.5\ cm$$

Problema 3
a)
Sul pistone agiscono la pressione del gas e la compressione della molla e le due forze si bilanciano:

$$Kdl = P_o S$$

Detta P_o la pressione iniziale del gas, e S la superficie del cilindro. Valendo l'equazione di stato:

$$Kdl = \frac{nRT_o}{Sh}S$$

$$dl = \frac{nRT_o}{Kh} = 0.075\ m$$

b)
Nello stato finale il volume del gas diventa:

$$V_f = S(h + dl)$$

La condizione di equilibrio diviene:

$$p_f S = K2dl = K2\frac{nRT_o}{Kh}$$

$$p_f = \frac{2nRT_o}{Sh}$$

Quindi:

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{2nRT_o S(h + dl)}{ShnR} = 2T_o(1 + dl/h) = 824\ K$$

c)
Il lavoro necessario a comprimere la molla vale:

$$W = \frac{1}{2}K(2dl)^2 - \frac{1}{2}Kdl^2 = \frac{3}{2}K(dl)^2 = 420\ J$$

Quindi dal I principio:

$$Q_a = \Delta U + W = n\frac{3}{2}R(T_f - T_o) + W = 2390\ J$$

Problema 4

Dal teorema di Gauss in forma locale nella regione centrale $-d/2 \leq x \leq d/2$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$E_x(x) = E_0 + \frac{\rho x}{\varepsilon_o} \qquad -d/2 \leq x \leq d/2$$

dovendo essere $E_x(0) = 0$:

$$E_x(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_o} \qquad -d/2 \leq x \leq d/2$$

Quindi all'estremo della distribuzione: $E_x(d/2) = \rho d/(2\varepsilon_o)$.
Nella regione estrema $d/2 \leq x \leq 3d/2$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$E_x(x) = E_0 - \frac{\rho x}{\varepsilon_o} \qquad d/2 \leq x \leq 3d/2$$

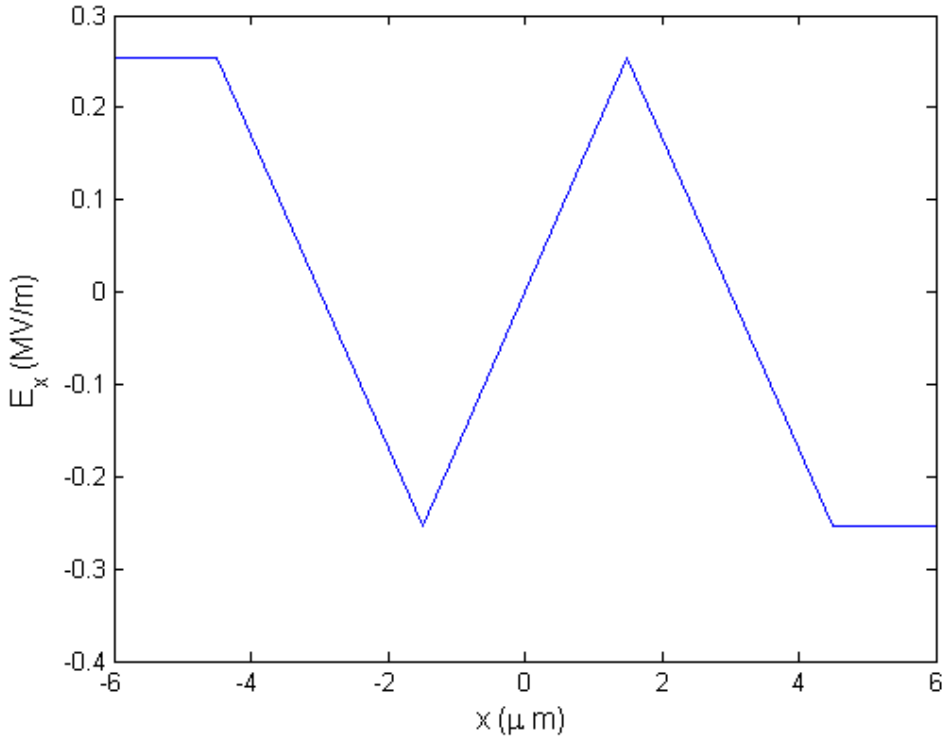
Imponendo che: $E_x(d/2) = \rho d/(2\varepsilon_o)$ segue che:

$$E_x(x) = \frac{\rho d}{\varepsilon_o} - \frac{\rho x}{\varepsilon_o} \qquad d/2 \leq x \leq 3d/2$$

Di conseguenza per ragioni di simmetria nella regione simmetrica rispetto al centro:

$$E_x(x) = -\frac{\rho d}{\varepsilon_o} - \frac{\rho x}{\varepsilon_o} \qquad -3d/2 \leq x \leq -d/2$$

All'esterno non essendovi carica, il campo elettrico è costante.



Quindi
a)

$$E(2d) = -\frac{\rho d}{2\varepsilon_o} = -0.5\ MV/m$$

b)
Il campo è nullo per $x = d$ e $x = -d$.
c)
La differenza di potenziale vale (l'area del triangolo tra d e $3/2d$):

$$DV = E(2d)d/4 = 0.38\ V$$

Gli stessi risultati si hanno se si considera un cilindro retto di area di base S e perpendicolare al piano con una base sull'origine e l'altra nella regione $x \leq d/2$:

$$E_x S = \frac{\rho S x}{\varepsilon_o}$$

$$E_x(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_o} \qquad 0 \leq x \leq d/2$$

Estendendo alla regione tra $d/2$ e $3/2d$:

$$E_x S = \frac{\rho S d/2 - \rho S(x - d/2)}{\varepsilon_o}$$

$$E_x(x) = \frac{\rho d}{\varepsilon_o} - \frac{\rho x}{\varepsilon_o} \qquad d/2 \leq x \leq 3d/2$$

E infine all'esterno:

$$E_x S = \frac{\rho S d/2 - \rho S d}{\varepsilon_o}$$

$$E_x(x) = -\frac{\rho x}{2\varepsilon_o} \qquad x \geq 3d/2$$

Università dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 17/07/2015

Nome	Cognome	N. Matricola	CFU
.....	.....	.....	.....

Tempo a disposizione (tre esercizi) 2 ore e 30'

Problema 1

Una particella vibra di moto armonico semplice. All'istante iniziale ($t = 0$) l'energia potenziale e l'energia cinetica sono eguali e valgono $E_0 = 2\ J$ e la particella si allontana dalla posizione di equilibrio. Il periodo del moto vale $T = 0.1\ s$, la massa della particella vale $m = 700\ g$.
Determinare a) la costante di richiamo elastico k (2 punti); b) la massima velocità acquistata (2 punti); d) l'ampiezza di oscillazione (2 punti); d) dopo quanto tempo la particella passa per il centro di oscillazione (4 punti);

Problema 2



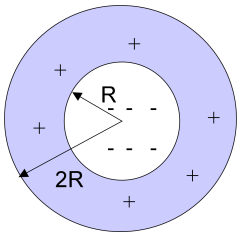
Un punto materiale di massa $m_0 = 0.7\,kg$ urta elasticamente nel punto A un pendolo composto formato da una sbarretta di lunghezza $l = 16\,cm$ e massa m_1 al cui estremo è fissata rigidamente una sfera S di massa m_0 e raggio $R = 4\,cm$. Il sistema composto è incernierato in B ed è libero di ruotare intorno a un asse ivi passante e perpendicolare al foglio.
Il momento d'inerzia rispetto a tale asse è $I_p = 0.05\,kg \cdot m^2$. Subito dopo l'urto, il pendolo composto acquista una velocità angolare $\omega = 8.0\,rad/s$. Calcolare:
a)la massa della sbarretta (3 punti); b) la velocità v_1 del punto materiale prima dell'urto e la sua velocità v_2 subito dopo l'urto (4 punti); c)la distanza da B del centro di massa (1 punto). d)l'angolo massimo ϕ_{max} raggiunto dal pendolo composto (2 punti).

Problema 3

Un blocco di ghiaccio (calore specifico $c_g = 2051\ J/kgK$, calore latente di fusione $\lambda_g = 3.3 \cdot 10^5\ J/kg$) di massa m_1 si trova all'interno di un contenitore isolante a temperatura $T_1 = -20\ ^oC$. Molto rapidamente vengono inseriti nel contenitore un corpo solido a temperatura $T_2 = 60\ ^oC$, massa $m_2 = 4\ kg$, calore specifico $c_2 = 380\ J/kgK$ e dell'acqua di massa $m_3 = 0.8\ kg$, calore specifico dell'acqua $c_a = 4186\ J/kgK$ e temperatura $T_3 = 10\ ^oC$. La temperatura di equilibrio vale $T_4 = -3\ ^oC$. Determinare: a) il calore sottratto all'acqua a temperatura T_3 nel processo di raffreddamento del liquido, solidificazione e raffreddamento del ghiaccio (2 punti); b) il valore della massa m_1 (4 punti); c) la variazione di entropia del sistema in tale processo irreversibile (4 punti).

Problema 4

In una regione di spazio a simmetria **cilindrica** vi è nella regione centrale, cioè a distanza compresa tra 0 ed $R = 3\ mm$, una densità di carica volumetrica costante pari a $\rho_m = -3 \cdot 10^{-3}\ C/m^3$. Nella regione tra R e $2R$ vi è una carica volumetrica negativa ρ_p, sempre costante, tale che all'esterno della distribuzione il campo elettrico è nullo.



Determinare a) il valore della densità di carica ρ_p (2 punti); b) a che distanza dal centro il campo elettrico è massimo (in valore assoluto) ed il suo valore (2 punti); c) il valore del campo elettrico alla distanza dal centro di $r = 5\ mm$ (3 punti); d) la differenza di potenziale tra l'esterno e il centro della distribuzione (3 punti).

SOLUZIONI

Problema 1

a)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 63\ rad/s$$

di conseguenza:

$$k = \omega^2 m = 2760\ N/m$$

b)

Dovendosi conservare l'energia la massima velocità è quella per cui tutta l'energia è cinetica:

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = 2E_o$$

$$v_o = 3.4\ m/s$$

c)

Mentre l'ampiezza di oscillazione è quella per cui tutta l'energia è potenziale:

$$\frac{1}{2}kx_o^2 = 2E_o$$

$$x_o = 5.4\ cm$$

d)

Essendo un moto armonico posso scrivere:

$$x = x_o \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = x_o \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

dovendo essere

$$\frac{1}{2}kx(0)^2 = \frac{1}{2}mv(0)^2$$

$$\frac{1}{2}kx_o^2 \sin^2(\varphi) = \frac{1}{2}mx_o^2\omega^2 \cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}mx_o^2\frac{k}{m}\cos^2(\varphi)$$

da cui

$$\tan\varphi = 1$$

Che ha due soluzioni la prima se si allontana dalla posizione di equilibrio

$$\varphi = 45^o = \pi/4$$

La seconda soluzione se si avvicina alla posizione di equilibrio:

$$\varphi = 135^o = 5/4\pi$$

è esclusa dalla condizione iniziale.

Quindi imponendo che:

$$\omega t_1 + \varphi = \pi$$

segue che:

$$t_1 = 37\ ms$$

Problema 2

a)Il momento d'inerzia dell'asta rispetto a B è:

$$I_{Asta} = \frac{m_1 l^2}{3}$$

mentre quello della sfera S è:

$$I_S = \frac{2}{5} m_0 R^2 + m_0 (l+R)^2 = 0.028\, kg \cdot m^2$$

Il momento di inerzia del pendolo composto è quindi

$$I_P = I_{Asta} + I_S,$$

e, invertendo

$$m_1 = \frac{3\,(I_P - I_S)}{l^2} = 2.5\, kg.$$

b)Per la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m_0 v_1^2 = \frac{1}{2} m_0 v_2^2 + \frac{1}{2} I_P \omega^2,$$

mentre, imponendo la conservazione del momento angolare, si ottiene

$$m_0 v_1 (l+R) = m_0 v_2 (l+R) + I_P \omega.$$

$$\begin{aligned} m_0 \left(v_1^2 - v_2^2\right) &= m_0 (v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = I_P \omega^2 \\ m_0 (l+R)(v_1 - v_2) &= I_P \omega \end{aligned}$$

$$\frac{I_P \omega (v_1 + v_2)}{l+R} = I_P \omega^2$$

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= \omega (l+R) \\ v_1 - v_2 &= \frac{I_P \omega}{m_0 (l+R)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\omega (l+R)}{2} + \frac{I_P \omega}{2 m_0 (l+R)} = \omega \frac{m_0 (l+R)^2 + I_P}{2 m_0 (l+R)} = 2.2\, m/s \\ v_2 &= \frac{\omega (l+R)}{2} - \frac{I_P \omega}{2 m_0 (l+R)} = \omega \frac{m_0 (l+R)^2 - I_P}{2 m_0 (l+R)} = -0.6\, m/s \end{aligned}$$

c)La distanza del centro di massa da B è:

$$l_{CM} = \frac{m_1 l/2 + m_0 (l+R)}{m_0 + m_1} = 11\, cm,$$

d)Dopo l'urto il pendolo trasforma l'energia cinetica guadagnata in energia potenziale:

$$\frac{1}{2} I_P \omega^2 = (m_0 + m_1)\, g l_{CM} (1 - \cos\phi_{max}).$$

$$I_P \omega^2 = g\left[m_1 l + 2m_0(l+R)\right](1 - \cos\phi_{max}),$$

$$\cos\phi_{max} = 1 - \frac{I_P \omega^2}{g\left[m_1 l + 2m_0(l+R)\right]},$$

$$\phi_{max} = 58^o.$$

Problema 3

a)
Detto $T_0 = 0\ ^oC$, il calore da sottrarre alla massa m_3 per portarla a T_4 è dato dal raffreddamento del liquido fino a T_0, solidificazione (calore latente di solidificazione) e raffreddamento del ghiaccio fino aT_4:

$$Q_3 = m_3[c_a(T_3 - T_0) + \lambda_g + c_g(T_0 - T_4)] = 3.02 \cdot 10^5\ J$$

b)
Il calore da sottrarre a m_2 per portarla da T_2 a T_4 vale:

$$Q_2 = m_2 c_2 (T_2 - T_4) = 9.6 \cdot 10^4\ J$$

Quindi dovendo essere:

$$m_1 c_g (T_4 - T_1) = Q_2 + Q_3$$

$$m_1 = \frac{Q_2 + Q_3}{c_g(T_4 - T_1)} = 11.4\ kg$$

c)
Tutte le temperature vanno espresse in gradi K:

$$T_0 = 273.15\ K \qquad T_1 = 253.15 \qquad T_2 = 333.15\ K \qquad T_3 = 283.15\ K \qquad T_4 = 270.15\ K$$

La diminuzione di entropia dell'acqua di massa m_3 per andare da T_3 a T_4:

$$DS_3 = m_3 \left[c_a ln\frac{T_0}{T_3} - \frac{\lambda_g}{T_0} + c_0 ln\frac{T_4}{T_0}\right] = -1105\ J/K$$

La diminuzione di entropia del solido:

$$DS_2 = m_2 c_2 ln\frac{T_4}{T_2} = -319\ J/K$$

L'aumento di entropia del ghiaccio:

$$DS_1 = m_1 c_1 ln\frac{T_4}{T_1} = 1522\ J/K$$

Quindi in totale l'entropia aumenta di:

$$DS = DS_1 + DS_2 + DS_3 = 99\ J/K$$

Problema 4

a)
Per essere nullo il campo elettrico all'esterno della distribuzione si deve avere che dato un cilindro di raggio $r > 2R$ coassiale con la distribuzione ed altezza h, la carica in esso contenuta deve essere nulla cioè:

$$\rho_m \pi R^2 h + \rho_p \pi (4R^2 - R^2) h = 0$$

$$\rho_p = -\frac{\rho_m}{3} = 1 \cdot 10^{-3}\ C/m^3$$

b)
Applicando il teorema di Gauss ad un cilindro di raggio r, ma tale che $0 \leq r \leq R$ coassiale con la distribuzione e di altezza h, il flusso attraverso la superficie laterale (il campo per ragioni di simmetria è radiale):

$$E_r 2\pi r h = \frac{\rho_m \pi R^2 h}{2\varepsilon_o} \qquad r \leq R$$

$$E_r(r \leq R) = \frac{|\rho_m| r}{2\varepsilon_o}$$

Il campo elettrico è nullo al centro, cresce linearmente (in valore assoluto) fino a distanza $r = 3\ mm$ dove ha il valore massimo in assoluto:

$$|E_{max}| = \frac{|\rho_m| R}{2\varepsilon_o} = 5.1 \cdot 10^5\ V/m$$

per poi diminuire in valore assoluto fino ad annullarsi sul bordo.
c)
Applicando il teorema di Gauss ad un cilindro di raggio r, ma tale che $R \leq r \leq 2R$ coassiale con la distribuzione e di altezza h, il flusso attraverso la superficie laterale :

$$E_r 2\pi r h = \frac{\rho_m \pi R^2 h + \rho_p \pi (r^2 - R^2) h}{\varepsilon_o} \qquad R \leq r \leq 2R$$

$$E_r(r = 5mm) = -1.24 \cdot 10^5\ V/m$$

d)

$$E_r = \frac{\rho_m R^2 + \rho_p (r^2 - R^2)}{2\varepsilon_o r} = \frac{-4\rho_p R^2 + \rho_p r^2}{2\varepsilon_o r} = -\frac{2\rho_p R^2}{\varepsilon_o r} + \frac{\rho_p r}{2\varepsilon_o} \qquad R \leq r \leq 2R$$

$$E_r = \frac{\rho_m r}{2\varepsilon_o} \qquad r \leq R$$

Quindi:

$$\Delta V_1(R - 2R) = -\frac{2\rho_p R^2}{\varepsilon_o} \int_R^{2R} \frac{1}{r} dr + \frac{\rho_p}{2\varepsilon_o} \int_R^{2R} r dr = \frac{\rho_p R^2}{\varepsilon_o} \left(\frac{3}{4} - 2log2 \right) = -647\ V$$

$$\Delta V_2(0 - R) = \frac{\rho_m}{2\varepsilon_o} \int_0^R r dr = \frac{\rho_m R^2}{4\varepsilon_o} = -763\ V$$

Quindi la differenza di potenziale vale:

$$\Delta V = \Delta V_1(R - 2R) + \Delta V_2(0 - R) = 1410\ V$$

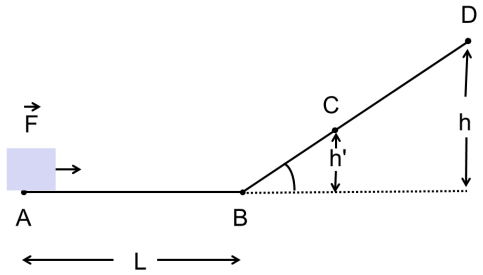
Università dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 09/11/2015

Nome	Cognome	N. Matricola	CFU
.....	.....	.....	.....

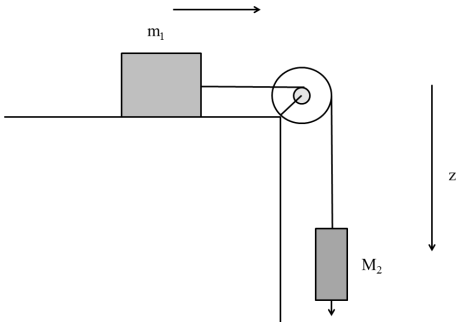
Tempo a disposizione (tre esercizi) 2 ore e 30'

Problema 1



Una forza $|\vec{F}| = 30\ N$ parallela al tratto orizzontale $L = 1\ m$ come indicato in figura viene applicata su un oggetto di massa $M = 2\ kg$, inizialmente in quiete nel punto A. La forza diviene parallela al piano inclinato quando l'oggetto incomincia a salire ed agisce fino alla quota h' (punto C) in maniera che il punto materiale quando arriva nel punto D ha una velocità $v_D = 0.5\ m/s$ (alla quota $h = 30\ cm$). Sia il tratto orizzontale che il tratto in salita sono scabri con coefficiente di attrito dinamico pari a $\mu = 0.8$. Il piano inclinato ha un angolo $\theta = 25^o$ rispetto alla direzione orizzontale. Determinare:
a) Calcolare il lavoro della forza di attrito tra B e D (*2 punti*); b) la velocità in B (*3 punti*); c) la quota h' (*3 punti*); 4) La velocitá in C (*2 punti*);

Problema 2



Su un piano orizzontale è posta una massa $m_1 = 7\ kg$. Essa viene messa in movimento tramite un filo che si avvolge sulla gola di una puleggia di raggio $r_1 = 10\ cm$. La puleggia è messa in rotazione dalla discesa, sotto l'azione della forza peso di una massa $M_2 = 6\ kg$, a cui è collegata da un filo avvolto su una gola di raggio $R_2 = 40\ cm$ (della stessa puleggia), coassiale e rigidamente fissata alla precedente. Il momento di inerzia dell'insieme delle due pulegge vale $I = 4\ kgm^2$.

Calcolare in assenza di attrito: a) La velocità angolare della puleggia dopo che è scesa di una quota $h = 50\ cm$ (3 punti); b) La accelerazione angolare della puleggia durante la discesa (4 punti); c) nel caso in cui esistesse tra m_1 ed il piano un coefficiente di attrito $\mu = 0.4$ quale sarebbe l'energia cinetica totale del sistema alla fine della discesa (3 punti).

Problema 3

Una macchina frigorifera, irreversibile, lavora tra $T_2 = 20\ ^oC$ e $T_1 = -20\ ^oC$, ed ha un coefficiente di prestazione che è 1/3 della macchina frigorifera reversibile operante tra le stesse temperature. La macchina compie un ciclo in un tempo $t_1 = 3\ s$.
La potenza termica dissipata nella sorgente più calda vale $P_2 = 200\ W$. Determinare: a) il calore assorbito in ogni ciclo dalla sorgente a temperatura minore (3 punti); b)la potenza meccanica necessaria a far funzionare la macchina frigorifera (4 punti); b) la variazione di entropia dell'universo termodinamico in un ciclo (3 punti).

SOLUZIONI

Problema 1

a)
Il lavoro fatto dalla forza di attrito durante la salita sarà:

$$W_a = -\mu M g \cos\theta \frac{h}{\sin\theta} = \mu M g \frac{h}{\tan\theta} = -10\ J$$

b)
Nel tratto AB agiscono solo la forza trainante F e l'attrito dinamico e quindi il loro lavoro vale:

$$W_{AB} = (F - \mu M g)L = 14.3\ J$$

Che è anche pari alla energia cinetica posseduta dall'oggetto nel punto B:

$$\frac{1}{2} M v_B^2 = W_{AB}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2L_{AB}}{M}} = \sqrt{\frac{2(F - \mu M g)L}{M}} = 3.8\ m/s$$

c)
Alla fine del tratto in salita la somma dell'energia potenziale e cinetica sarà divenuta:

$$E_D = Mgh + \frac{1}{2} M v_D^2 = 6.1\ J$$

Sommando l'energia dissipata per attrito nella salita (cambiato di segno):

$$E_T = E_D - W_a = 16.2\ J$$

Quindi maggiore di W_{AB}. Quindi è necessario un lavoro aggiuntivo della forza F per raggiungere la quota h a velocità v_D:

$$E_T - W_{AB} = Fh'/\sin\theta$$

Detto h' l'altezza maggiore:

$$h' = \frac{E_T - W_{AB}}{F \sin\theta} = 0.027\ m$$

d)
Nel punto h' dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} M v_C^2 + Mgh' = Mgh + \mu M g \frac{(h - h')}{\tan\theta} + \frac{1}{2} M v_D^2$$

$$v_C = \sqrt{2g(h - h') + 2\mu g \frac{(h - h')}{\tan\theta} + v_D^2} = 3.8\ m/s$$

Problema 2

a)
Applicando la conservazione dell'energia, tra la quota più alta e quella più bassa:

$$M_2 gh = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} M_2 v_M^2 + \frac{1}{2} m_1 v_m^2$$

Non slittando

$$v_M = -\omega R_2$$

$$v_m = -\omega r_1$$

sostituendo:

$$M_2 g h = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M_2 \omega^2 R_2^2 + \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2$$

da cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 M_2 g h}{I + M_2 R_2^2 + m_1 r_1^2}} = 3.4 \ rad/s$$

b)
Le tre equazioni cardinali sono:

$$M_2 g - T_M = M_2 a_M$$

$$T_M R_2 - T_m r_1 = I \alpha$$

$$T_m = m_1 a_m$$

Essendo:

$$a_M = \alpha R_2$$

$$a_m = \alpha r_1$$

Le equazioni diventano:

$$M_2 R_2 g - T_M R_2 = M_2 \alpha R_2^2$$

$$T_M R_2 - m_1 \alpha r_1^2 = I \alpha$$

Sommandole:

$$M_2 R_2 g - m_1 \alpha r_1^2 = M_2 \alpha R_2^2 + I \alpha$$

$$\alpha = \frac{M_2 g R_2}{M_2 R_2^2 + m_1 r_1^2 + I} = 4.7 \ rad/s^2$$

c)
La differenza tra la variazione di energia potenziale e l'energia dissipata per attrito è pari alla energia cinetica totale:

$$M_2 g h - \mu m_1 g \frac{r_1}{R_2} h = 26 \ J$$

Problema 3

a)
Il coefficiente di prestazione vale (esprimendo le temperature in K):

$$COP = \frac{1}{3} \frac{T_1}{T_2 - T_1} = 2.1$$

Il calore ceduto alla sorgente più calda in un ciclo vale:

$$Q_2 = -P_2 t_1 = -600 \ J$$

Quindi essendo:

$$COP = -\frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}$$

Il calore assorbito dalla sorgente più fredda in un ciclo vale:

$$Q_1 = -\frac{Q_2 COP}{1 - COP} = 407\ J$$

b)

$$W = Q_1 + Q_2 = -193\ J$$

$$P = \frac{W}{t_1} = -64\ W$$

c)
La variazione di entropia vale:

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.44\ J/K$$

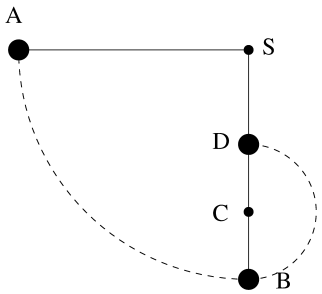
Università dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 15/01/2016

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	CFU
.....	.....	.....	.....	....

Il compito è su due pagine, Tempo a disposizione: 2 ore e 30'.

Problema 1



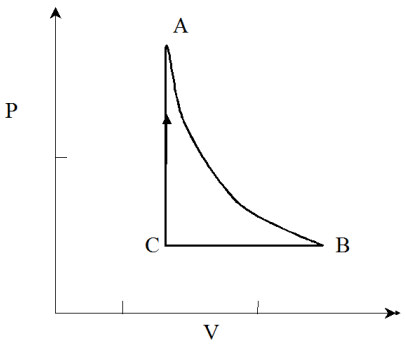
Un punto materiale di massa $m = 185$ g è appeso ad un filo di lunghezza $\ell = 80$ cm sospeso nel punto S. Il peso è inizialmente rilasciato dal punto A (filo teso orizzontalmente) con velocità nulla $\vec{v}_A = 0$. Dopo un quarto di oscillazione pendolare il punto materiale raggiunge il punto B (filo verticale) con velocità $\vec{v}_B$. Il filo tocca un ostacolo (chiodo) di sezione trascurabile conficcato in C e il moto pendolare prosegue con un arco di raggio ℓ' centrato in C.
Determinare: a) La velocità $\vec{v}_B$ nel punto B (2 punti);
b) La massima lunghezza ℓ' (e la corrispondente distanza d fra i punti C e S) affinché la massa raggiunga il punto D con velocità $\vec{v}_D$ sufficiente a mantenere il filo teso, (3 punti). c) La tensione del filo quando la massa è nel punto B, prima e dopo il contatto con l'ostacolo (2 punti). d) L'impulso complessivo delle forze agenti sulla massa fra le posizioni A e D (3 punti). [Per per risposte c) e d) assumere i valori di ℓ' trovati nel punto b).]

Problema 2

Un cilindro pieno ed omogeneo di raggio $R = 15\ cm$ e massa $M = 2\ kg$ viene posto in rotazione intorno al proprio asse orizzontale, con velocità angolare $\omega_o = 40\ rad/s$. In seguito il cilindro viene appoggiato su una superficie orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.25$. Nella prima fase il cilindro striscia sul piano, trascorso un tempo t' comincia il moto di puro rotolamento. Determinare a) t' (4 punti); b) la velocità del centro di massa al tempo t' (2 punti); c) i giri fatti fino a t' (2 punti); d) l'energia dissipata per attrito (2 punti).

Problema 3

$n = 2$ moli di un gas ideale monoatomico eseguono la trasformazione ciclica ABC mostrata nella figura: la trasformazione avviene con due sole sorgenti la più alta a $T_A = 350^oC$ con volume $V_A = 5$ *litri* e la più bassa a $T_C = 25\ ^oC$. La trasformazione AB è una adiabatica reversibile, la BC una isobara irreversibile ma per stati di equilibrio termodinamico (viene eseguita ponendo il gas a contatto con la sorgente a temperatura T_C). Infine il gas mediante una isocora CA (anch'essa irreversibile, ma per stati di equilibrio termodinamico) viene riportato alla temperatura T_A.



Determinare: a) il volume V_B e la temperatura T_B (3 punti); b) il lavoro totale eseguito durante il ciclo termodinamico (3 punti); c)il rendimento della macchina termica, confrontandolo con quello della macchina reversibile che opera tra le stesse temperature (2 punti); d) la variazione di entropia nell'universo termodinamico in un ciclo (2 punti).

Problema 4

In una nuvola carica a simmetria sferica vi è una carica totale $Q = 2.5\ \mu C$ e raggio $R = 3\ m$. Metà della carica è distribuita uniformemente tra 0 e $R/2$. L'altra metà uniformemente tra $R/2$ ed R. Determinare: a) le due densità di carica (2 punti); b) il campo elettrico a $r = 2\ m$ (2 punti); c) a che distanza il campo all'interno della distribuzione è pari a quello che vi è a $10R$ (cercando di semplificare i ragionamenti) (3 punti); d) quale velocità minima deve avere una carica $q_1 = 100\ pC$ e di massa $m = 10^{-12}\ kg$ per entrare dentro la nuvola a partire da molto lontano (3 punti).

SOLUZIONI

Problema 1

a)
Scegliendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale alla quota del punto B, le energie meccaniche totali del punto materiale nei punti A e B sono rispettivamente:

$$E_A = mg\ell \simeq 1.45 \text{ J} \quad \text{e} \quad E_B = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Poichè nel tratto A-B l'energia meccanica si conserva

$$v_B = \sqrt{2g\ell} \simeq 3.96 \text{ m/s}$$

b)
Per poter raggiungere il punto D (di equilibrio instabile) con il filo teso, la velocità v_D deve essere tale che la forza centripeta necessaria per tenere massa in traiettoria sia maggiore del peso, ovvero $mv_D^2/\ell' > mg$ quindi l'energia meccanica totale in D, che coincide con quella in A, deve risultare:

$$E_A = mg\ell = E_D = \frac{1}{2}mv_D^2 + mg\,2\ell' > \frac{1}{2}mg\ell' + mg\,2\ell' = \frac{5}{2}mg\ell'$$

Quindi:

$$\ell' < \frac{2}{5}\ell = 32 \ cm$$

e, tenendo conto che $\ell = d + \ell'$,

$$d > \frac{3}{5}\ell = 48 \ cm$$

c)
La tensione del filo deve sostenere il peso e fornire la forza centripeta necessaria a mantenere la traiettoria circolare. Con la massa in B questi contributi sono entrambi verticali e differiscono per il differente raggio di curvatura della traiettoria la tensione prima:

$$T_p = mg + mv_B^2/\ell = 3mg \simeq 5.44 \ N$$

e dopo:

$$T_d = mg + mv_B^2/\ell' = 6mg \simeq 10.9 \ N$$

d)
L'impulso richiesto è pari alla variazione della quantità di moto del punto materiale. Applicando il teorema dell'impulso fra le posizioni A e D, tenendo presente che $\vec{v}_A = 0$ e $v_D = \sqrt{g\ell'} \simeq 1.77$ m/s, la differenza di quantità di moto che coincide con la quantità di moto finale è un vettore orizzontale di modulo $p_D = mv_D \simeq 0.328$ kg m/s. diretto da S ad A (quindi destra a sinistra nella figura)

Problema 2

a)

Il moto del centro di massa del cilindro è uniformente accelerato con forza propulsiva data dall'attrito, per cui:

$$a_{CM} = \mu_d g$$

Il moto quindi è uniformente accelerato:

$$v_{CM} = a_{CM} t$$

Contemporaneamente l'effetto dell'attrito è di applicare un momento frenante nel moto di rotazione, quindi l'accelerazione angolare vale:

$$\alpha = -\mu_d M g \frac{R}{I}$$

con $I = 1/2MR^2$ è il momento di inerzia del cilindro, quindi

$$\alpha = \mu_d 2 \frac{g}{R} = 33 \ rad/s^2$$

Quindi la velocità angolare:

$$\omega = \omega_o - \alpha t$$

imponendo la condizione di puro rotolamento:

$$\omega = \frac{v_{CM}}{R}$$

$$\omega_o - \mu_d 2 \frac{g}{R} t' = \frac{\mu_d g t'}{R}$$

Da cui:

$$t' = \frac{\omega_o R}{3 \mu_d g} = 0.82 \ s$$

b)

Quindi

$$v_{CM}(t')) = a_{CM} t' = 2 \ m/s$$

c)

L'angolo descritto è:

$$\theta(t') = \omega_o t' - \mu_d \frac{g}{R} t'^2$$

Quindi il numero di giri è:

$$N = \frac{\theta(t')}{2\pi} = 3.46$$

d)

L'energia iniziale vale:

$$E_o = \frac{1}{2} I \omega_o^2 = 18 \ J$$

Quella finale:

$$E_f = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 = \frac{3}{4} M v_{CM}^2 = 6 \ J$$

Quindi l'energia dissipata per attrito vale:

$$\Delta E = E_o - E_f = 12\ J$$

Problema 3

a)

Dall'equazioni della termodinamica valide per una trasformazioni adiabatica si ha che:

$$V_B = V_A(T_A/T_C)^{1/\gamma} = 0.0078\ m^3$$

$$T_B = T_C(V_B/V_A) = 464\ K$$

b)

Il calore assorbito dalla sorgente T_A, nel passaggio di stato tra T_C e T_A vale:

$$Q_{CA} = n\frac{3}{2}R(T_A - T_C) = 8100\ J$$

Mentre quello ceduto alla sorgente T_C nel passaggio di stato tra T_B e T_C vale:

$$Q_{BC} = n\frac{5}{2}R(T_C - T_B) = -6900\ J$$

Quindi il lavoro fatto in un ciclo:

$$W = Q_{CA} + Q_{BC} = 1200\ J$$

c)

Il rendimento vale:

$$\eta = \frac{W}{Q_{CA}} = 0.15$$

Il rendimento di un ciclo reversibile operante tra le stesse temperature è:

$$\eta_R = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 0.52$$

d)

La variazione di entropia nell'universo termodinamico in un ciclo vale:

$$\Delta S = -\left(\frac{Q_{CA}}{T_A} + \frac{Q_{BC}}{T_C}\right) = 10.1\ J/K$$

Problema 4

a)

La densità di carica nella zona centrale:

$$\rho_1 = \frac{Q/2}{4/3\pi(R/2)^3} = 8.8 \cdot 10^{-8}\ C/m^3$$

La densità di carica nella altra zona è:

$$\rho_2 = \frac{Q/2}{4/3\pi R^3 - 4/3\pi(R/2)^3} = 1.3 \cdot 10^{-8}\ C/m^3$$

b)
Dal teorema di Gauss a distanza $r = 3/2R = 2\ m$:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q/2}{\varepsilon_o} + \frac{4\pi\rho_2}{3\varepsilon_o}\left[R^3 - (R/2)^3\right]$$

$$E_r = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o r^2} + \frac{4\pi\rho_2}{12\pi\varepsilon_o r^2}\left[R^3 - (R/2)^3\right] = 3360\ V/m$$

c)
Il campo elettrico a distanza $r = 10R$ vale:

$$E_r(10R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} = 25\ V/m$$

Il campo cresce in maniera monotona tra 0 ed R ed a una distanza di $R/2$ vale:

$$E_r(R/2) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_o R^2} = 5000\ V/m$$

Quindi solo la zona centrale vi è un campo così piccolo, poichè all'interno il campo vale:

$$E_r(x) = \frac{\rho_2 x}{3\varepsilon_o}$$

Imponendo che:

$$\frac{\rho_2 x}{3\varepsilon_o} = E_r(10R)$$

$$x = E_r(10R)\frac{3\varepsilon_o}{\rho_2} = 7.5\ mm$$

d)
La differenza di potenziale tra il bordo della nuvola e l'infinito vale:

$$V_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} = 7.5\ kV$$

Quindi per potere entrare deve essere che:

$$\frac{1}{2}mv_{min}^2 > q_1 V_R$$

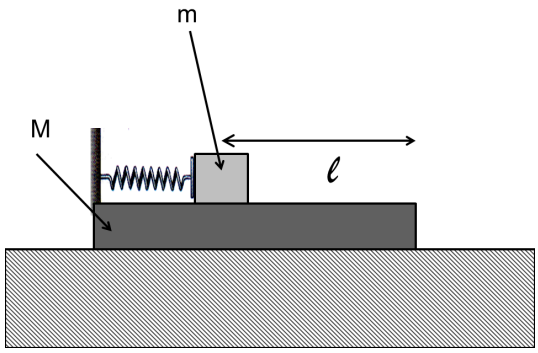
$$v_{min} > \sqrt{2q_1 V_R/m} = 866\ m/s$$

Università dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 01/02/2016

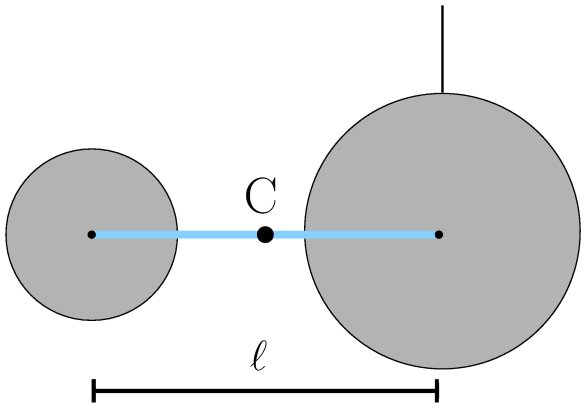
Il compito è su due pagine, Tempo a disposizione: 2 ore e 30'.

Problema 1



Un corpo di massa $m = 1.5\ kg$ è poggiato su una lastra di massa $M = 3\ kg$ che può scivolare senza attrito su un piano orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e la lastra vale $\mu_d = 0.4$. Una molla compressa di $\Delta\ell = 6\ cm$ è fissata ad un estremo della lastra e all'altro estremo è sul corpo e ha una costante elastica $k = 800\ N/m$. All'istante iniziale la molla viene liberata. Il corpo dista dall'estremo della lastra di $\ell = 20\ cm$. Determinare: a) appena liberata la molla l'accelerazione di m ed M (4 punti); b) l'energia potenziale iniziale e il lavoro fatto dalla forza di attrito (2 punti); c) La velocità di m e M quando il corpo raggiunge il bordo della lastra (4 punti).

Problema 2



Una asta rigida di massa trascurabile ha agli estremi due sfere piene di ferro $\rho_{Fe} = 7.8\ g/cm^3$ di raggio $R_1 = 2.5\ cm$ e $R_2 = 4\ cm$. Al centro dell'asta un perno (fulcro) nel punto C permette la rotazione del sistema. La distanza tra i centri delle sfere ed il fulcro vale $\ell/2 = 5\ cm$. Un filo trattiene la sfera di massa maggiore. Determinare: a) la massa totale del sistema e la posizione del centro di massa rispetto al punto C (2 punti); b) la reazione vincolare del fulcro (2 punti).

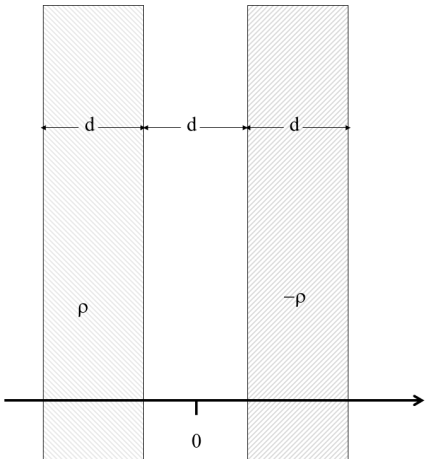
Il filo si spezza e il sistema incomincia a ruotare, determinare c) l'accelerazione angolare del sistema all'istante iniziale del moto (3 punti); d) la velocità angolare quando l'asta è verticale (3 punti).

Problema 3

Un recipiente cilindrico di $V = 10$ *litri*, è diviso in due parti eguali da un pistone di massa trascurabile. Il primo lato ha $n_1 = 2.5$ *mol* di un gas perfetto, mentre nell'altro sono contenute $n_2 = n_1/10$ dello stesso gas. Il sistema è a temperatura $T = 300$ K. Se viene sbloccato il pistone in maniera irreversibile si ha una nuova situazione di equilibrio. Notare che lo stato di equilibro viene prodotto da un processo irreversibile senza generare alcun lavoro e senza che la temperatura cambi. Determinare: a) il volume finale dei due scomparti (3 punti); b)la pressione finale del gas nei due contenitori (2 punti); c) la variazione di entropia del sistema (5 punti).

Problema 4

Due strati piani carichi di spessore $d = 2$ cm con densità di carica uniforme eguale e contraria $\rho = 3 \cdot 10^{-5}$ C/m^3 sono posti a distanza d. In figura è disegnato l'asse delle x e la sua origine. Determinare: a) il campo a grande distanza (2 punti); b) L'espressione del campo elettrico lungo l'asse delle x e in particolare al centro lungo al centro (4 punti); c) la velocità minima che deve avere una particella di massa $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg e carica $q = 1.67 \cdot 10^{-19}$ C per potere attraversare i due strati provenendo da grande distanza ($+\infty$) da destra nella figura (4 punti).



SOLUZIONI

Problema 1

a)
Nell'istante in cui la molla viene liberata, l'equazione del corpo è:

$$ma_m = k\Delta l - \mu_d mg$$

$$a_m = \frac{k\Delta l}{m} - \mu_d g = 28\ m/s^2$$

Mentre quella della lastra (sono tutte forze interne quindi eguali ed opposte):

$$Ma_M = -k\Delta l + \mu_d mg$$

$$a_M = -\frac{k\Delta l}{M} + \mu_d g\frac{m}{M} = -14\ m/s^2$$

b)
Energia potenziale della molla:

$$E_p = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = 1.44\ J$$

Mentre il lavoro fatto dalla forza di attrito è:

$$E_a = m\mu_d g\ell = 1.18\ J$$

c)
La energia iniziale del sistema, viene trasformata in energia cinetica del corpo e della lastra e in parte dissipata per attrito:

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}mv_{m,f}^2 + \frac{1}{2}Mv_{M,f}^2 + \mu_d mg\ell$$

Ma anche per la conservazione della quantità di moto (essendo inizialmente il centro di massa fermo e agendo solo forze interne):

$$mv_{m,f} + Mv_{M,f} = 0 \qquad \Rightarrow v_{M,f} = -\frac{m}{M}v_{m,f}$$

quindi:

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}mv_{m,f}^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v_{m,f}^2 + \mu_d mg\ell$$

$$v_{m,f} = \sqrt{\frac{k\Delta l^2 - 2\mu_d mg\ell}{m + m^2/M}} = 0.48\ m/s$$

Mentre quella della lastra (in direzione opposta):

$$v_{M,f} = -\frac{m}{M}v_{m,f} = -0.24\ m/s$$

Problema 2

a)

La massa della sfera più piccola è:

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_{Fe} = 0.51\ kg$$

di quella maggiore:

$$M_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 \rho_{Fe} = 2.1\ kg$$

Quindi:

$$M = M_1 + M_2 = 2.6\ kg$$

Il centro di massa del sistema è a destra del fulcro a distanza:

$$x_{CM} = \frac{-M_1\ell/2 + M_2\ell/2}{M} = 0.03\ m$$

b)

Per avere equilibrio il momento delle forze rispetto a C deve essere nullo quindi, detta T_2 la tensione del filo, deve essere:

$$T_2\frac{\ell}{2} = Mgx_{CM}$$

quindi:

$$T_2 = \frac{Mgx_{CM}2}{\ell} = 15.5\ N$$

Chiamiamo T_1 la reazione vincolare del perno (diretta seconda la verticale). Dovendo essere la risultante delle forze nulle:

$$Mg = T_1 + T_2$$

$$T_1 = Mg - T_2 = 10\ N$$

c)

Il momento di inerzia della sfera di sinistra rispetto al fulcro vale:

$$I_1 = \frac{2}{5}M_1R_1^2 + M_1\frac{\ell^2}{4} = 0.0014\ kgm^2$$

Il momento di inerzia della sfera di destra rispetto al fulcro vale:

$$I_2 = \frac{2}{5}M_2R_2^2 + M_2\frac{\ell^2}{4} = 0.0066\ kgm^2$$

Quindi il momento di inerzia totale vale:

$$I = I_1 + I_2 = 0.008\ kgm^2$$

Quando si spezza il filo dalla seconda equazione cardinale:

$$I\alpha = Mgx_{CM}$$

$$\alpha = \frac{Mgx_{CM}}{I} = 97\ rad/s^2$$

d)
Nel punto più basso l'energia potenziale del sistema è diventata cinetica:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = Mgx_{CM}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mgx_{CM}}{I}} = 13.9\ rad/s$$

Problema 3
a)
Imponendo che la pressione finale sia eguale:

$$\frac{n_1RT}{V_{1f}} = \frac{n_2RT}{V_{2f}}$$

da cui:

$$V_{2f} = \frac{n_2}{n_1}V_{1f}$$

Ma anche:

$$V_{1f} + V_{2f} = V$$

da cui:

$$V_{1f} = 0.0091\ m^3$$

$$V_{2f} = 0.0009\ m^3$$

b)
Quindi:

$$p_f = \frac{n_1RT}{V_{1f}} = 6.9 \cdot 10^5\ Pa$$

c)
La trasformazione isoterma reversibile che porterebbe il gas dal volume $V/2$ a V_{1f} assorbirebbe un calore Q_1

$$dQ_1 = n_1RT\frac{dV'}{V'}$$

quindi un aumento di entropia di:

$$DS_1 = \int_{V/2}^{V_{1f}} \frac{dQ_1}{T} = n_1R\log\frac{V_{1f}}{V/2} = n_1R\log\frac{20}{11} = 12.4\ J/K$$

Mentre la trasformazione isoterma reversibile che porterebbe il gas dal volume $V/2$ a V_{2f} cederebbe un calore Q_2

$$dQ_2 = n_2RT\frac{dV'}{V'}$$

quindi con una diminuzione di entropia di:

$$DS_2 = \int_{V/2}^{V_{2f}} \frac{dQ_2}{T} = n_2R\log\frac{V_{2f}}{V/2} = n_2R\log\frac{2}{11} = -3.5\ J/K$$

Quindi in totale l'entropia aumenta di:

$$DS = DS_1 + DS_2 = 8.9\ J/K$$

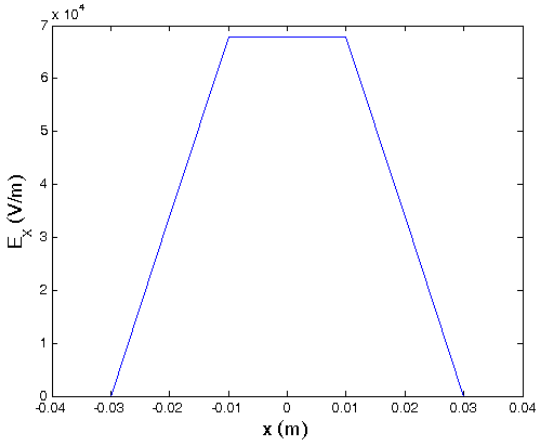
Problema 4

L'unica componente del campo elettrico è lungo l'asse delle x.

a)

A grande distanza il campo è nullo in quanto la sovrapposizione di due strati carichi con carica eguale ed opposta.

b)



Per $x \geq 3/2d$ e $x \leq -3/2d$:

$$E_x = 0 \qquad x \geq 3/2d \quad e \quad x \leq -3/2d$$

Per $-3/2d \leq x \leq -d/2$ si ha che cresce in maniera lineare:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

Quindi (imponendo che sia nullo per $x = -3/2d$:

$$E_x = \frac{\rho x}{\varepsilon_o} + \frac{3\rho d}{2\varepsilon_o} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}(x + 3d/2) \qquad -3/2d \leq \quad x \leq -d/2$$

Per $-d/2 \leq x \leq d/2$ è costante:

$$E_x = \frac{\rho d}{\varepsilon_o} = 6.8 \cdot 10^4\ V/m \qquad -d/2 \leq x \leq d/2$$

Per $d/2 \leq x \leq 3d/2$ diminuisce linearmente:

$$E_x = \frac{\rho}{\varepsilon_o}(3d/2 - x) \qquad d/2 \leq \quad x \leq 3d/2$$

c)

La differenza di potenziale tra ∞ e $-\infty$ (integrando il campo elettrico tra $x = -3/2d$ e $x = 3/2d$)

$$\Delta V = \frac{2\rho d^2}{\varepsilon_o} = 2722\ V$$

Quindi imponendo che:

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq q\Delta V$$

si ha che la velocità deve essere maggiore di:

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = 7.2 \cdot 10^5\ m/s$$

Si noti che se proveniva dalla direzione opposta non trova nessuna barriera.

Università dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 19/02/2016

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	CFU
.....	.....	.....	.....	....

Il compito è su due pagine, Tempo a disposizione: 2 ore e 30'.

Problema 1

Un pendolo semplice porta ad un estremo una massa $m = 8$ kg, il moto oscillatorio è descritto dall'equazione del moto delle piccole oscillazioni:

$$\theta = \theta_o \sin \Omega_o t$$

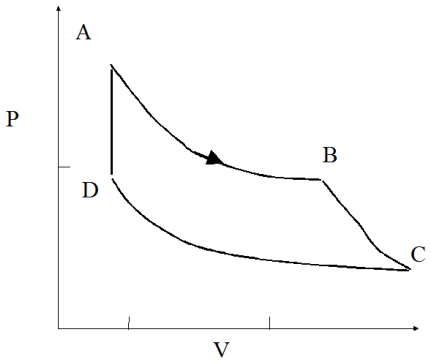
con $\theta_o = 8^o$ e $\Omega_o = 3\ rad/s$. Calcolare: a) la lunghezza del filo (2 punti); b) la massima differenza di energia potenziale durante il moto (2 punti); c) la tensione del filo massima e minima (precisione nei calcoli all'1%) (3 punti); d) la velocità al tempo $t_1 = \pi/(8\Omega_o)$ (3 punti).

Problema 2

Un tubo di raggio interno $r_1 = 10\ cm$ ed esterno $r_2 = 20\ cm$, lungo $\ell = 5\ cm$ e densità uniforme $\rho = 2.7\ g/cm^3$, viene lasciato rotolare da fermo lungo una discesa (un piano inclinato con angolo $\theta = 20^o$ rispetto al piano orizzontale) da una altezza $h = 3\ m$. Il tubo rotola con moto di puro rotolamento.

Determinare : a) la massa del tubo (1 punto); b) il momento di inerzia del tubo (2 punti); c) la accelerazione nel moto in discesa (2 punti), d) la accelerazione durante il moto in discesa se viene applicato anche un momento frenante di $M_f = 5\ Nm$ (3 punti) (3 punti); e) il coefficiente di attrito minimo che permette il moto di rotolamento con il momento frenante(2 punti).

Problema 3



$n = 1.5$ moli di un gas perfetto biatomico compiono il seguente ciclo termodinamico irreversibile: dallo stato A ($T_A = 500\ K$, $p_A = 9 \times 10^5\ Pa$) una espansione reversibile isoterma porta il gas nello stato B ($p_B = 4.5 \times 10^5\ Pa$); una espansione adiabatica reversibile porta il gas in C ($V_C = 40$ litri); una compressione isoterma reversibile porta il gas in D ed infine una trasformazione isocora irreversibile riporta il sistema nello stato iniziale (viene riportata nel disegno con la linea continua in quanto avviene per stati di equilibrio. ma con una sola sorgente di calore a temperatura T_A). Il ciclo utilizza due sole sorgenti di temperatura una a T_A e l'altra a T_C.
Determinare: a) il volume in B (2 punti); b) la temperatura T_C (2 punti); c) il lavoro ed il rendimento del ciclo (4 punti); d) La variazione di entropia nell'universo termodinamico in un ciclo (2 punti).

Problema 4
Una sfera di raggio $R = 30\ cm$ ha una densità di carica di:

$$\rho = \rho_o \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right)$$

con $\rho_o = 2 \cdot 10^{-6}\ C/m^3$.
Determinare: a) la carica totale (3 punti); b) a che distanza dal centro il campo è più intenso ed il suo valore (4 punti); c) la differenza di potenziale tra il centro e il bordo (3 punti).

SOLUZIONI

Problema 1

$$\theta_{r0} = 180\theta_0/\pi = 0.14\ rad$$

Il periodo vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Da cui: a)

$$\Omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

quindi:

$$\ell = \frac{g}{\Omega_o^2} = 1.1\ m$$

b)
L'altezza del pendolo dal punto più basso vale:

$$h = \ell(1 - \cos\theta_0)$$

Quindi la massima differenza di energia potenziale vale:

$$\Delta E_p = mg\ell(1 - \cos\theta_0) = 0.83\ J$$

c)
La tensione minima del filo si ha nel punto più alto

$$T_{min} = mg\cos\theta_0 = 78\ N$$

Mentre è massima nel punto più basso e vale:

$$T_{max} = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right)$$

Dalla conservazione dell'energia tra il punto più basso e il più alto:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = mg\ell(1 - \cos\theta_0) = \Delta E_p$$

si ricava la velocità in basso:

$$v_M = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta_0)} = 0.46\ m/s$$

$$T_{max} = mg(3 - 2\cos\theta_0) = 80\ N$$

d)
Quando $t = t_1 = 0.13\ s$:

$$\theta_1 = \theta_{r0}\sin\Omega_o t_1 = 0.05\ rad$$

Si può risolvere con la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgl(1-\cos\theta_1) = mgl(1-\cos\theta_{r0})$$

$$v_1 = \sqrt{2g\ell(\cos\theta_1 - \cos\theta_{r0})} = 0.42\ m/s$$

O in maniera cinematica:

$$\omega(t) = \frac{\partial\theta}{\partial t} = \theta_{r0}\Omega_o\cos\Omega_o t$$
$$v(t_1) = \omega(t_1)\ell = 0.42\ m/s$$

Problema 2

a)

La massa totale è:

$$m = \int_{r_1}^{r_2} \rho\ell 2\pi r dr = \rho\ell\pi(r_2^2 - r_1^2) = 12.7\ kg$$

b)

$$I_z = \int_{r_1}^{r_2} \rho\ell 2\pi r^3 dr = \frac{\rho\ell\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4) = 0.318\ kgm^2$$

c)

Le equazioni cardinali del moto sono:

$$ma = mg\sin\theta - f_a$$

$$I_z\alpha = f_a r_2$$

essendo il moto di puro rotolamento:

$$r_2\alpha = a$$

Quindi la II equazione cardinale diventa:

$$\frac{I_z a}{r_2^2} = f_a$$

Che sommata alla I equazione cardinale:

$$ma + \frac{I_z a}{r_2^2} = mg\sin\theta$$

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 + I_z/mr_2^2} = 2.06\ m/s^2$$

d)

Se è presente un momento frenante l'equazioni cardinali diventano:

$$ma = mg\sin\theta - f_a$$

$$I_z\alpha = f_a r_2 - Mf \rightarrow \frac{I_z a}{r_2^2} = f_a - \frac{M_f}{r_2}$$

che sommate:

$$a = \frac{g\sin\theta - M_f/(mr_2)}{1 + I_z/mr_2^2} = 0.86\ m/s^2$$

e)
Essendo

$$f_a = m(g\sin\theta - a)$$

Quindi se:

$$f_a \leq \mu_s mg\cos\theta$$

$$\mu_s \geq \frac{g\sin\theta - a}{g\cos\theta} = 0.27$$

Problema 3
a)
Il volume in A vale:

$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 0.0069\ m^3$$

Mentre in B vale:

$$V_B = \frac{p_A V_A}{p_B} = 0.0139\ m^3$$

b)
Essendo un gas biatomico $\gamma = 1.4$ e quindi nella adiabatica:

$$p_C = p_B\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma} = 1.07 \times 10^5\ Pa$$

Quindi:

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = 327\ K$$

c)
Nella trasformazione isoterma $A - B$ viene assorbito il calore (dalla sorgente T_A):

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = 4322\ J$$

Nella trasformazione isoterma $C - D$ viene ceduto il calore (alla sorgente T_C):

$$Q_{CD} = W_{CD} = nRT_C \ln\frac{V_D}{V_C} = -7154\ J$$

Ed infine nella isocora viene assorbito dalla sorgente T_A il calore:

$$Q_{DA} = n\frac{5}{2}R(T_A - T_C) = 5388\ J$$

Quindi il lavoro fatto vale:

$$W = Q_{AB} + Q_{CD} + Q_{DA} = 2555\ J$$

Mentre il calore assorbito dalla sorgente a temperatura piú alta vale:

$$Q_2 = Q_{AB} + Q_{DA} = 9710\ J$$

Quindi il rendimento vale:

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = 0.263$$

d)

$$\Delta S_u = -\frac{Q_2}{T_A} - \frac{Q_{CD}}{T_C} = 2.44\ J/K$$

Problema 4

a)

La carica totale è:

$$Q = \rho_o \int_0^R \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_o}{R^2}\int_0^R r^4 dr - 4\pi\rho_o \int_0^R r^3 dr$$

$$Q = 4\pi\rho_o(1/5 - 1/3)R^3 = -\frac{8}{15}\pi\rho_o R^3 = -90\ nC$$

b)

Applicando il teorema di Gauss su una superficie gaussiana, una sfera concentrica di raggio $r \leq R$,:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}\int_0^r \left(\frac{x^2}{R^2} - 1\right) 4\pi x^2 dx \qquad r \leq R$$

$$E_r = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o r^2 R^2}\int_0^r x^4 dx - \frac{\rho_o}{\varepsilon_o r^2}\int_0^r x^2 dx = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left(\frac{r^3}{5R^2} - \frac{r}{3}\right)$$

Questa funzione è nulla al centro, ed una funzione che ha un massimo quando:

$$\frac{\partial E_r}{\partial r} = 0$$

cioè per:

$$3\frac{r_M^2}{5R^2} - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow r_M = \sqrt{5/9}R = 22\ cm$$

$$E_r(r_M) = -11\ kV/m$$

Notiamo come sul bordo il campo abbia un valore minore:

$$E_r(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2} = -9\ kV/m$$

c)

La differenza di potenziale tra il centro e il bordo è pari a:

$$DV = \int_R^0 E_r dr = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o 5R^2}\int_R^0 r^3 dr - \frac{\rho_o}{\varepsilon_o 3}\int_R^0 r dr = -\frac{\rho_o R^2}{\varepsilon_o}\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{6}\right) = 2373\ V$$

Università dell'Aquila - Ingegneria
Prova Scritta di esonero di Fisica Generale I - 15/04/2016

Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

Problema (10 punti)
Un corpo di massa m è lanciato verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale v_0. Supponendo che la resistenza dell'aria sia descritta dalla forza viscosa $F_r = -bv$, con b una costante e v la velocità istantanea del punto materiale, si misura che la sua velocità limite è v_l. Determinare:
a) il valore di b con l'opportuna unità di misura; (2 punti) ;
b) il tempo t_r che impiega il punto materiale a raggiungere la massima quota (3 punti);
c) la quota massima raggiunta (3 punti);
d) il lavoro fatto dalla forza di attrito viscosa nella fase di salita del punto materiale (2 punti).
Per le domande b) e c) confrontare i valori ottenuti con quelli previsti nel caso in cui il moto avvenga in assenza di attrito.
Dati del problema $m = 10\ g$, $v_0 = 3\ m/s$, $v_l = 8\ m/s$.

Tempo a disposizione un'ora. Usare questo foglio per riportare la soluzione del problema in bella copia.

SOLUZIONE

a)
La velocità limite è quella per la quale l'accelerazione dl punto materiale diventa nulla:

$$mg - bv_l = 0$$

$$b = \frac{mg}{v_l} = 0.012\ kg/s$$

b)
Applicando il II principio della dinamica, l'equazione che descrive il moto in salita verticale del punto materiale è:

$$ma(t) = -mg - bv(t)$$

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -mg - bv(t)$$

Questa equazione differenziale si risolve per separazione di variabili. Omettendo la dipendenza esplicita dal tempo, dopo semplici passaggi algebrici si ha:

$$\frac{dv}{v + mg/b} = -\frac{bdt}{m}$$

detta $\tau = m/b = 0.81\ s$, ed essendo $mg/b = v_l$:

$$\frac{dv}{v + v_l} = -\frac{dt}{\tau}$$

Integrando si ha:

$$\int_{v_o}^{v(t)} \frac{dv'}{v' + v_l} = -\int_0^t \frac{dt'}{\tau}$$

$$\log \frac{v(t) + v_l}{v_o + v_l} = -\frac{t}{\tau}$$

$$v(t) = -v_l + (v_o + v_l)e^{-t/\tau}$$

Quando il punto materiale raggiunge la massima quota $v(t) = 0$. Pertanto, dalla precedente equazione si ha:

$$e^{-t_r/\tau} = \frac{1}{v_o/v_l + 1}$$

$$t_r = \tau \log(v_o/v_l + 1) = 0.26\ s$$

Nelle stesse condizioni del problema, in assenza di attrito il tempo per raggiungere la quota massima sarebbe uguale a

$$t_{sa} = \frac{v_o}{g} = 0.31\ s$$

che, come atteso, è maggiore di t_r.
c)
Il valore della quota massima raggiunta dal punto materiale si ottiene integrando l'equazione della velocità:

$$v(t) = \frac{dz(t)}{dt} = -v_l + (v_o + v_l)e^{-t/\tau}$$

$$\int_0^{z(t)} dz' = \int_0^t \left(-v_l + (v_o + v_l)e^{-t'/\tau}\right) dt'$$

Da cui:

$$z(t) = -v_l t + (v_o + v_l)\tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$z(t_r) = -v_l t_r + (v_o + v_l)\tau \left(1 - e^{-t_r/\tau}\right) = 0.37\ m$$

In assenza di attrito la quota massima sarebbe uguale a:

$$h_{sa} = v_o t_{sa} - \frac{1}{2} g t_{sa}^2 = \frac{v_o^2}{2g} = 0.46\ m$$

un valore maggiore di h.

d)

L'energia dissipata per attrito nella fase di salita è pari alla differenza tra l'energia cinetica iniziale

$$E_o = m v_o^2/2$$

e l'energia potenziale riferita alla quota massima raggiunta

$$E_f = mgh$$

.

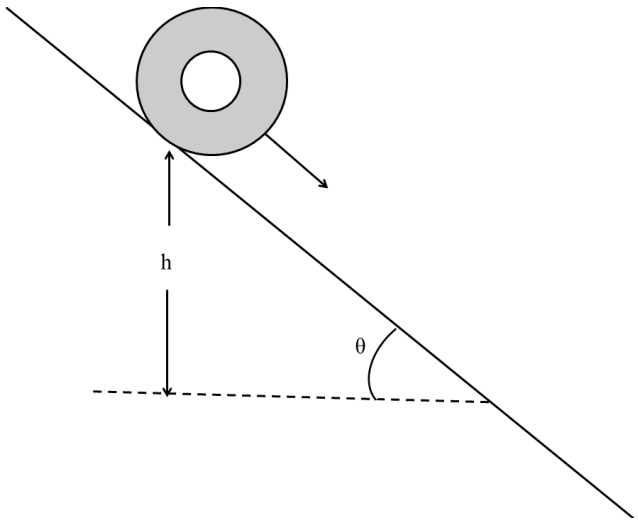
$$DE = E_o - E_f = 8.8\ mJ$$

In alternativa: il lavoro fatto dalla forza di attrito viscosa è semplicemente uguale alla differenza di energia potenziale tra la quota raggiunta h e quella ottenibile in assenza di attrito, h_{sa}. In modulo si ha:

$$W(F_r) = mg(h_s a - h) = 8.8\ mJ$$

Università dell'Aquila - Ingegneria
Prova Scritta di esonero di Fisica Generale I - 20/05/2016

Problema (12 punti)



Una sfera di raggio R_1 con al centro un foro sferico di raggio R_2 rotola lungo un piano inclinato con angolo θ rispetto alla direzione orizzontale. La sfera ha una densità ρ uniforme ed inizia il suo moto da fermo. Il coefficiente di attrito statico tra sfera e piano inclinato è pari a μ_s.
Determinare: a) la massa della sfera (2 punti); b) il momento di inerzia rispetto al centro di massa (2 punti); c) l'accelerazione del centro di massa, dimostrando che il moto è di puro rotolamento (4 punti); d) la velocità del centro di massa della sfera dopo che è scesa di una quota h lungo il piano inclinato (4 punti).
(Dati del problema: $R_1 = 10\ cm$, $R_2 = 5\ cm$, $\rho = 2.7 g/cm^3$, $\mu_s = 0.5$, $\theta = 35^o$, $h = 2m$)

SOLUZIONE

a)
La massa di una sfera piena di raggio R_1 vale:

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi\rho R_1^3 = 11.3\ Kg$$

La massa di una sfera piena di raggio R_2 vale:

$$M_2 = \frac{4}{3}\pi\rho R_2^3 = 1.4\ Kg$$

quindi:

$$M = M_1 - M_2 = 9.9\ kg$$

b)
Il momento di inerzia di una sfera piena di raggio R_1 vale:

$$I_1 = \frac{2}{5}M_1 R_1^2 = 0.045\ kgm^2$$

Il momento di inerzia di una sfera piena di raggio R_2 vale:

$$I_2 = \frac{2}{5} M_2 R_2^2 = 0.0014 \ kgm^2$$

Quindi il momento di inerzia totale vale:

$$I = I_1 - I_2 = 0.044 \ kgm^2$$

c)
L'equazioni cardinali della meccanica sono:

$$Mg \sin\theta - f = Ma$$

$$I\alpha = fR_1$$

Se il moto è di puro rotolamento:

$$\alpha = a/R_1$$

. Quindi eliminando a si ha che:

$$f = \frac{Mg \sin\theta}{1 + MR_1^2/I} = 17 \ N$$

che è inferiore al valore massimo possibile:

$$f_{max} = \mu_s Mg \cos\theta = 39.8 \ N$$

$$a = \frac{fR_1^2}{I} = \frac{g \sin\theta}{1 + I/(MR_1^2)} = 3.9 \ m/s^2$$

d)
Imponendo la conservazione dell'energia che da potenziale diventa cinetica:

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R_1^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + I/R_1^2}} = 5.2 \ m/s$$

Università dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 17/06/2016

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	Docente
.....	.....	.....	....	.....

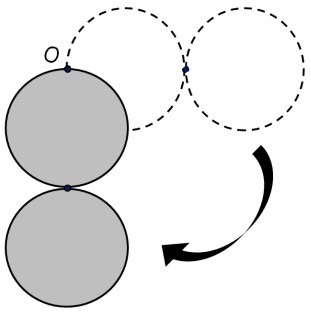
Il compito è su due pagine, Tempo a disposizione: 2 ore e 30'.

Problema 1

Una automobile di massa M, schematizzabile come un punto materiale, è soggetta alla sua forza motrice che compensa la forza d'attrito dovuta alla resistenza dell'aria espressa dalla legge: $-kv^2$. La massima potenza erogabile dal motore vale P_o che produce la massima velocità raggiungibile in pianura pari a v_o. Determinare a) il valore di k dando le opportune unità nel sistema internazionale (3 punti); b) la velocità in pianura e la relativa forza motrice se la potenza erogata dal motore è la metà di quella massima P_o (3 punti); c) l'aumento della forza motrice e percentualmente l'aumento della potenza del motore (consumo di carburante) se viene percorso un tratto in salita con pendenza p alla stessa velocità trovata nel punto precedente (4 punti).
(dati del problema $M = 900\ kg$, $v_o = 170\ km/h$, $P_o = 80\ kW$, $p = 5\%$, la pendenza è la tangente dell'angolo con la direzione orizzontale, per piccoli angoli si confonde con il seno)

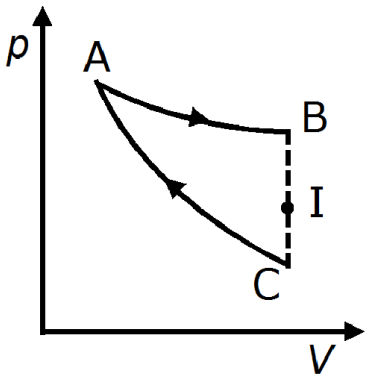
Problema 2

I due dischi pieni indicati in Figura sono uniti sul bordo costituendo così un sistema rigido sospeso all'estremo O attorno a cui può ruotare senza attrito. I due dischi hanno stessa massa m e raggio R tale che il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno al punto O vale T. Determinare a) il raggio dei dischi; b) il momento di inerzia totale del sistema dei due dischi rispetto ad O; c) la velocità massima dell'estremo inferiore se il sistema viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla dalla posizione orizzontale (cioè con il punto di contatto tra i due dischi allineato orizzontalmente con il punto O).
(dati del problema $m = 700\ g$, $T = 1.3\ s$)



Problema 3

Una mole di gas ideale monoatomico esegue il ciclo termodinamico riportato in figura dove: la trasformazione AB è un'espansione isoterma reversibile alla temperatura T_A, BC è un'isocora irreversibile e CA è una compressione adiabatica reversibile. La trasformazione isocora avviene in due stadi, mettendo il gas, inizialmente alla temperatura T_A, a contatto prima con una sorgente alla temperatura T_I fino a raggiungere lo stato di equilibrio I, e poi con una sorgente alla temperatura T_C.



Il valore di T_I è collocato a metà tra quelli di T_A e T_C ed è noto il volume V_A del gas in A. Si calcoli: a) Il lavoro eseguito dal gas in un ciclo e il rendimento della macchina termica (3 punti); b) La variazione dell'entropia dell'universo termodinamico (2 punti); c) La variazione dell'entropia dell'universo termodinamico se si assume che la trasformazione isocora avvenga solo tra le due sorgenti a temperatura T_A e T_C escludendo quella alla temperatura intermedia T_I (2 punti); d) Si giustifichi la differenza tra i valori calcolati della variazione dell'entropia dell'universo termodinamico calcolati per rispondere alle precedenti domande b) e c) (1 punto).
(Dati del problema: $T_A = 500\ K$, $T_C = 240\ K$, $T_I = 370\ K$, $V_A = 7.5 \times 10^{-3}\ m^3$)

SOLUZIONI

Problema 1

a)

$$v_o = 45.3\ m/s$$

Alla massima velocità la potenza del motore deve compensare la potenza resistente dell'attrito:

$$P_o - kv_o^3 = 0$$

$$k = \frac{P_o}{v_o^3} = 0.76\ kg/m$$

b)

$$\frac{1}{2}P_o - kv_1^3 = 0$$

$$v_1 = v_o\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 37.5\ m/s = 135\ km/h$$

La forza motrice vale:

$$F_1 = kv_1^2 = 1067\ N$$

c)
In salita la forza motrice aumenta di:

$$\Delta F = Mgp = 441\ N$$

E diviene:

$$F_2 = F_1 + \Delta F = 1508\ N$$

e quindi la potenza del motore diviene:

$$P_2 = F_2 v_1 = 56kW$$

L'aumento percentuale del consumo di carburante vale:

$$a = 100\left(\frac{P_2}{P_o/2} - 1\right) = 41\%$$

Problema 2

a)
Il momento di inerzia del I disco rispetto ad O (usando il teorema di Huygens-Steiner):

$$I_1 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

Il momento di inerzia del II disco rispetto ad O :

$$I_2 = \frac{1}{2}mR^2 + m(3R)^2 = \frac{19}{4}mR^2$$

Quindi il momento di inerzia totale vale:

$$I = 11mR^2$$

Il sistema costituisce un pendolo fisico con il centro di massa nel punto di contatto tra i dischi quindi $h = 2R$, quindi il periodo delle piccole oscillazioni vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{2mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{11R}{4g}}$$

$$R = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{4g}{11} = 0.15\ m$$

b)
Quindi:

$$I = 11mR^2 = 0.18\ kgm^2$$

c)
Mentre dalla conservazione della energia:

$$2mg2R = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{11}{2}mR^2\omega^2$$

$$8g = 11R\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{16g}{11R}} = 6.8\ rad/s$$

$$v_e = \omega 4R = 4.2\ m/s$$

Problema 3
a)
Dall'equazione dei gas ideali si ha $P_A = nRT_A/V_A = 5.54 \times 10^5\ Pa$ mentre, usando le proprietà delle trasformazioni adiabatiche si ottiene:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \qquad \rightarrow \qquad V_C = V_A \left(\frac{T_A}{T_C}\right)^{1/(\gamma-1)} = 2.24 \times 10^{-2}\ m^3$$

Di conseguenza la pressione dello stato termodinamico C vale:

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 8.9 \times 10^4\ Pa$$

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_A log\frac{V_C}{V_A} = 4548\ J$$

Il lavoro ottenuto è pari alla somma dei lavori eseguiti durante le trasformazioni isoterma ed adiabatica:

$$W_{TOT} = W_{AB} + W_{CA} = nRT_A log\frac{V_C}{V_A} - nc_v(T_A - T_C) = 1.31\ kJ$$

Il rendimento della macchina termica vale:

$$\eta = \frac{W_{TOT}}{Q_{AB}} = \frac{W_{TOT}}{W_{AB}} = 0.288$$

b)
La variazione dell'entropia dell'universo è solo quella delle sorgenti dato che per il ciclo essa è nulla. Nel caso posto dalla domanda b)

$$\Delta S_1 = -\left[\frac{Q_{AB}}{T_A} + \frac{nc_v(T_I - T_A)}{T_I} + \frac{nc_v(T_C - T_I)}{T_C}\right] = 2.03\ J/K$$

c)

$$\Delta S_2 = -\left[\frac{Q_{AB}}{T_A} + \frac{nc_v(T_C - T_A)}{T_C}\right] = 4.4\ J/K$$

d)
Come ci si aspetta, $\Delta S_1 < \Delta S_2$ dato che la presenza della sorgente alla temperatura intermedia TI "attenua" il grado di irreversibilità della trasformazione isocora che tenderebbe a divenire reversibile se il gas potesse scambiare calore con infinite sorgenti di calore che coprano tutto l'intervallo di temperatura T_C-T_A.

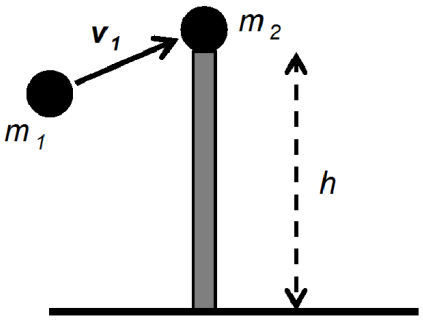
Università dell'Aquila - Ingegneria
Prova Scritta di Fisica Generale I - 04/07/2016

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	Docente
.....	.....	.....	....	.....

Il compito è su due pagine, Tempo a disposizione: 2 ore e 30'.

Problema 1

Un punto materiale di massa m_1 urta un secondo punto materiale di massa m_2 posto a riposo sopra un'asta posta all'altezza h rispetto al piano orizzontale. La velocità della massa m_1 subito prima dell'urto è v_1 e la sua direzione forma un angolo θ rispetto al piano orizzontale. Essendo l'urto tra le due masse completamente anelastico, si chiede di determinare: a) la velocità del sistema fisico dei due punti dopo l'urto in modulo, direzione e verso (3 punti); b) la perdita di energia meccanica derivante dall'urto anelastico (1 punto); c) L'altezza massima rispetto al piano orizzontale raggiunta dal sistema fisico dei due punti dopo l'urto (2 punti); d) il tempo di volo ed il valore della gittata rispetto al punto di impatto sul piano orizzontale (2 punti);

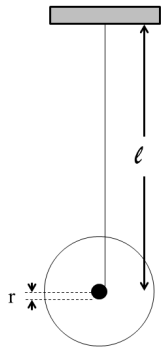


e) La velocità di arrivo del sistema fisico dei due punti materiali sul piano orizzontale in modulo direzione e verso (2 punti)

Dati del problema: $|v_1| = 5\ m/s$, $m_1 = 0.1\ kg$, $m_2 = 0.05\ kg$, $h = 2\ m$, $\theta = 35^o$

Problema 2

Uno yo-yo classico di momento di inerzia I e massa m è schematizzabile come riportato in figura. Attorno all'asse centrale di raggio r è avvolto un filo di lunghezza ℓ che è fissato ad una estremità in modo tale che mentre lo yo-yo scende verticalmente, il filo si svolge. Se lo yo-yo parte da fermo per $\ell = 0$ si determini: a) la accelerazione e la tensione del filo (4 punti); b) l' energia cinetica rotazionale (assumendo che la rotazione avvenga attorno al centro di massa) e quella traslazionale alla fine della discesa (4 punti); c) Al termine della fase di discesa lo yo-yo continua a ruotare nella medesima direzione riavvolgendo il filo. Assumendo che nell'inversione del moto venga dissipata tutta l'energia cinetica traslazionale, determinare l'altezza massima raggiunta) (4 punti).



(Dati del problema $m = 130\ g$, $r = 4.4\ mm$, $\ell = 1.1\ m$, $I = 1 \cdot 10^{-4}\ kgm^2$)

Problema 3

Una pompa di calore è utilizzata per scaldare dell'acqua dalla temperatura ambiente T_1 alla temperatura $T_2 > T_1$. L'energia meccanica utilizzata in un ciclo è W e viene prodotta una massa m_o di acqua calda in un ciclo della macchina.

Determinare a) il coefficiente di prestazione cioè il rapporto tra il calore fornito alla sorgente più calda e il lavoro impiegato (3 punti); b) il calore assorbito da temperatura ambiente (2 punti); c) la quantità di acqua calda che si potrebbe produrre con lo stesso lavoro da una pompa di calore ideale (3 punti).

(Dati del problema $T_1 = 20\ ^oC$, $T_2 = 60\ ^oC$, $W = 20\ kJ$, $m_o = 0.3\ kg$, $c_a = 4174\ J/(Kkg)$)

SOLUZIONI

Problema 1

a)

Nell'urto anelastico si conserva la quantità di moto del sistema:

$$m_1\vec{v}_1 = (m_1 + m_2)\vec{v}_{1f}$$

proiettando sugli assi:

$$m_1 v_{1x} = (m_1 + m_2)v_{1fx}$$
$$m_1 v_{1y} = (m_1 + m_2)v_{1fy}$$

avendo scelto un sistema di riferimento con l'asse delle ascisse parallelo al piano orizzontale. I valori delle componenti x ed y della velocità iniziale valgono: $v_{1x} = v_1 \cos\theta$; $v_{1y} = v_1 \sin\theta$. Dalle precedenti equazioni si ha:

$$v_{fx} = \frac{m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2} = 2.73\ ms^{-1}$$
$$v_{fy} = \frac{m_1 v_{1y}}{m_1 + m_2} = 1.91\ ms^{-1}$$
$$|v_f| = \sqrt{v_{1fx}^2 + v_{1fy}^2} = 3.33\ ms^{-1}$$
$$\theta_f = \tan^{-1}\frac{v_{fy}}{v_{fx}} = 35^o$$

Si noti che la direzione della velocità dopo l'urto è uguale a quella prima dell'urto.

b)

La perdita di energia meccanica dovuta all'urto anelastico è uguale a:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\left[m_1 v_1^2 - (m_1 + m_2)v_f^2\right] = 0.42\ J$$

c)

L'altezza massima rispetto al piano orizzontale raggiunta dal sistema dei due punti materiali dopo l'urto si ricava applicando la conservazione dell'energia meccanica per la sola componente y della velocità v_{fy}:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{fy}^2 = mgh_{max} \rightarrow h_{max} = h + \frac{v_{fy}^2}{2g} = 2.19\ m$$

d)

Le equazioni del moto parabolico scritte scegliendo come sistema di riferimento quello con l'asse delle ascisse parallelo al piano orizzontale e per il quale le coordinate del sistema dei due punti materiali subito dopo l'urto valgano $x(t=0) = 0$ e $y(t=0) = h$, sono:

$$x(t) = v_{fx}t \qquad y(t) = h + v_{fy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Da queste equazioni si ricavano subito il tempo di volo

$$t_g(y=0) = 0.86\ s$$

e il valore della gittata

$$x_g(t_g) = 2.36\ m$$

e)
La componente x della velocità finale rimane costante. Mentre la componente della velocità lungo y, quando raggiunge il suolo, è:

$$v_{fys} = v_{fy} - gt_g = -6.5\ m/s$$

quindi:

$$|v_{fs}| = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fys}^2} = 7.1\ m/s$$

$$\theta_s = \tan^{-1} \frac{v_{fys}}{v_{fx}} = 67.4^o$$

Problema 2
a)
Le equazioni cardinali della meccanica si riducono in questo caso a:

$$ma = mg - T \quad \Rightarrow T = m(g-a)$$

assunta la direzione verso il basso positiva

$$Tr = I\alpha \quad \Rightarrow T = \frac{I\alpha}{r}$$

Dove T è la tensione del filo ed α la accelerazione angolare. Eliminando da queste equazioni T :

$$m(g-a) = \frac{I\alpha}{r}$$

Ma poichè il cordino è fissato $r\alpha = a$, quindi l'ultima equazione diviene:

$$m(g-a) = \frac{Ia}{r^2} \quad \Rightarrow a = \frac{g}{1 + I/mr^2} = 0.24\ m/s^2$$

la tensione del filo è:

$$T = m(g-a) = 1.24\ N$$

b)
Chiamando ℓ la lunghezza del filo, applicando la conservazione dell'energia meccanica tra lo stato iniziale a velocità nulla e lo stato finale di massima elongazione dello yo-yo si ha:

$$mg\ell = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgl}{I + mr^2}} = 165.4\ rad/s$$

Si è utilizzato $\omega = v_{CM}r$, con r il raggio della puleggia attorno alla quale si arrotola il filo. Di conseguenza $v_{CM} = 0.73\ m/s$.
Quindi l'energia rotazionale è:

$$E_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = 1.37\ J$$

Quindi l'energia cinetica traslazionale è:

$$E_t = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 = 0.034\ J$$

La somma delle due energie è pari a quella potenziale iniziale:

$$E_p = mgh = 1.4\ J$$

c)
Viene dissipata tutta l'energia traslazionale e dalla trasformazione della energia rotazionale in energia potenziale:

$$mg\ell' = E_r$$
$$\ell' = E_r/(mg) = 1.07\ m$$

Problema 3
a)
Quindi il calore da fornire all'acqua per portarla da T_1 a T_2 è:

$$Q_2 = c_a m_o (T_2 - T_1) = 50088\ J$$

Quindi il COP è:

$$COP = \frac{Q_2}{W} = 2.50$$

b)
La potenza assorbita da temperatura ambiente è per il I principio della termodinamica:

$$Q_1 = W - Q_2 = -30088\ J$$

c)
Se fosse una macchina ideale il suo coefficiente di prestazione sarebbe:

$$COP_i = \frac{T_2}{T_2 - T_1} = 8.3$$

e quindi il numero di litri di acqua calda prodotta al minuto sarebbe

$$m_i = m_o \frac{COP_1}{COP} = 1\ kg$$

Università dell'Aquila - Ingegneria

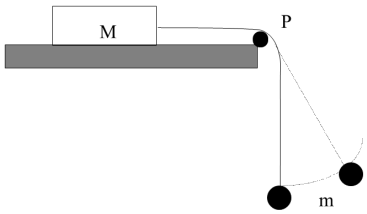
Prova Scritta di Fisica Generale I - 20/07/2016

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	Docente
.....	.....	.....	....	.....

Tempo a disposizione: 2 ore e 30'.

Problema 1 (10 punti)

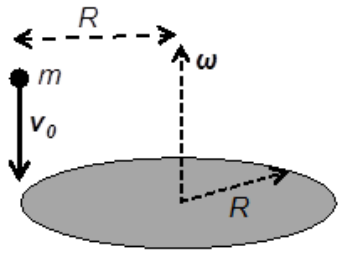
Nel sistema mostrato in figura, la massa M, è appoggiata ad un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito statico μ_s. Un filo inestensibile e di massa trascurabile collega la massa M alla massa m, sospesa nel vuoto attraverso una carrucola che ruota senza attrito e di momento di inerzia trascurabile. L'angolo massimo di oscillazione di m vale θ_o. Si determini: a) la forza minima a cui è soggetta la massa M lungo la direzione parallela al piano orizzontale verificando che la massa M rimanga ferma (3 punti); b) la forza massima cui è soggetta la massa M lungo la direzione parallela al piano orizzontale verificando che anche in questo caso la massa M rimanga ferma (4 punti); c) l'angolo di oscillazione massimo superato il quale la massa M si mette in movimento (3 punti).



(dati del problema $M = 1.3\ kg$, $\mu_s = 0.5$, $m = 0.4\ kg$, $\theta_o = 12^o$)

Problema 2 (12 punti)

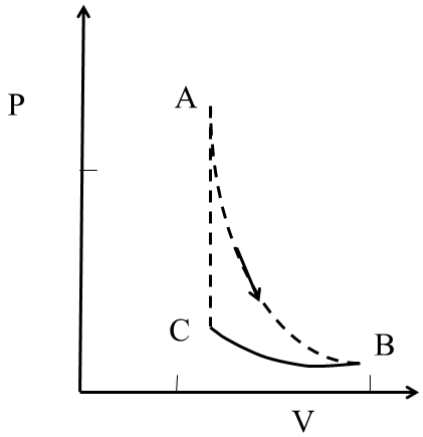
Un disco omogeneo di massa M e raggio R ruota intorno ad un asse passante per il suo centro con velocità angolare iniziale costante ω_i. Un punto materiale di massa m è lanciato lungo una direzione parallela al momento angolare del disco come indicato nella figura. Il punto materiale urta in modo completamente anelastico sul bordo del disco con velocità v_0. Dopo l'urto si misura che la velocità angolare del sistema fisico disco più punto materiale è uguale a ω_f. Subito dopo l'urto, si applica sull'asse di rotazione un momento frenante costante in modulo uguale a M_a che ferma il disco dopo che questo ha compiuto n giri completi. Si chiede di determinare: a) la massa M del disco (4 punti); b) Il raggio R del disco (4 punti); c) La perdita di energia meccanica dovuta al solo processo di urto anelastico (2 punti); d) La posizione del centro di massa del sistema fisico dopo l'urto (2 punti).



(dati del problema $\omega_i = 12\ rad/s$, $\omega_f = 6\ rad/s$, $m = 1\ kg$, $v_0 = 2\ m/s$, $M_a = 0.2\ Nm$, $n = 2.5$ giri)

Problema 3 (8 punti)

Un gas monoatomico compie il ciclo termodinamico riportato in figura: dalla temperatura T_2 il gas si espande in maniera adiabatica e irreversibile riducendo del 10% il lavoro prodotto nella espansione (ma le relazioni tra P,V,T sono quelle di una adiabatica reversibile) e portandosi alla temperatura ambiente T_1 e alla pressione atmosferica P_B con un volume V_B. A questo punto una compressione isoterma reversibile alla temperatura T_1 riporta il sistema al volume iniziale V_A. Infine, il gas posto a contatto con la sorgente a temperatura iniziale si riporta alla temperatura T_2 tramite una trasformazione isocora irreversibile.



Determinare: a) Il volume in A (2 punti); b) la temperatura T_2 (2 punti); c) il lavoro prodotto in un ciclo (2 punti); d) il rendimento (2 punti).

(dati del problema $T_1 = 25\ ^oC$, $p_A = 3.5 \cdot 10^5\ Pa$, $p_B = 1 \cdot 10^5\ Pa$, $V_B = 0.02\ m^3$)

SOLUZIONI

Problema 1

a)

L'equazione del moto della massa m se M è ferma, nella direzione ortogonale alla traiettoria curvilinea vale:

$$m\frac{v^2}{\ell} = T_F - mg\cos\theta \rightarrow T_F = m\frac{v^2}{\ell} + mg\cos\theta$$

Dove θ é l'angolo generico che la massa m forma con la verticale e T_F è la tensione del filo. Quindi nel punto più alto di m si ha che $v = 0$ e quindi la forza di attrito della massa M è minima pari alla tensione del filo:

$$F_{a,min} = T_F = mg\cos\theta_o = 3.84\ N$$

b)

La forza massima che agisce sulla massa M è quella della tensione massima del filo che si ha, dalla precedente relazione, quando la velocità del punto materiale è massima (cioè per $\theta = 0$). Applicando la conservazione dell'energia:

$$mg\ell(1-\cos\theta_o) = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \frac{v^2}{\ell} = 2g(1-\cos\theta_o)$$

$$F_M = mg(3-2\cos\theta_o) = 4.09\ N$$

Che è inferiore alla massimo la forza di attrito statico di M che vale:

$$F_{a,max} = \mu_s Mg = 6.4\ N$$

c)

l'angolo di massima oscillazione si trova imponendo che:

$$F_{a,max} = mg(3-2\cos\theta_x)$$

$$\theta_x = arccos\left(\frac{3}{2} - \frac{F_{a,max}}{2mg}\right) = 46.6^o$$

Problema 2

a)

Il momento angolare dovuto al punto materiale è perpendicolare al momento angolare assiale del disco. Pertanto, il momento angolare assiale (lungo l'asse z) si conserva prima e dopo l'urto e si può porre:

$$I_z\omega_i = I_z\omega_f + mR^2\omega_f$$

Quindi essendo per un disco $I_z = \frac{1}{2}MR^2$:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_i = \frac{1}{2}MR^2\omega_f + mR^2\omega_f \rightarrow M = \frac{2m\omega_f}{\omega_i - \omega_f} = 2\ kg$$

b)

La energia totale persa fino a fermarsi è pari a:

$$\Delta E_r = -\frac{1}{2}(I_z + mR^2)\omega_f^2$$

Una volta applicato sull'asse di rotazione il momento frenante M_a, il disco si ferma dopo aver compiuto $n = 2.5$ *giri* completi. Allora è possibile scrivere che la perdita istantanea di energia rotazionale è pari al momento frenante per l'angolo infinitesimo ΔE_r:

$$dE_r = -M_a d\theta$$

L'integrale del primo temine è pari a:

$$\Delta E_r = \frac{1}{2}(I_z + mR^2)\omega_f^2$$

mentre l'integrale del secondo termine:

$$\int_0^{n2\pi} M_a d\theta = 2M_a \pi n$$

Quindi:

$$\frac{1}{2}(I_z + mR^2)\omega_f = 2M_a\pi n \rightarrow R = 2\sqrt{\frac{M_a \pi n}{\omega_f(M+2m)}} = 0.21\ m$$

c)
La perdita di energia meccanica relativa solo all'urto anelastico tra il punto materiale e il disco vale:

$$\Delta E_a = \frac{1}{2}[I_z\omega_i^2 + mv_o^2 - (I_z + mR^2)\omega_f^2] = 3.57\ J$$

d)
Il centro di massa x_{CM} del sistema fisico dopo l'urto misurato rispetto all'asse di rotazione è uguale a:

$$x_{CM} = \frac{mR}{m+M} = 0.07\ m$$

Problema 3
a)
Essendo il gas monoatomico:

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1.66$$

Essendo la AB trasformazione adiabatica:

$$p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma$$

Quindi

$$V_A = V_B \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{1/\gamma} = 0.0094\ m^3$$

b)
Il numero di moli del gas è pari a :

$$n = \frac{p_B V_B}{RT_1} = 0.81\ mol$$

Quindi la temperatura in A vale:

$$T_2 = \frac{p_A V_A}{nR} = 492\ K$$

Si poteva anche determinare da:

$$T_2 = T_1(p_B/p_A)^{(1-\gamma)/\gamma} = 492\ K$$

c)
Il lavoro da compiere durante la isoterma reversibile è pari a

$$W_{BC} = nRT_1 \log V_C/V_B = -1500\ J$$

Mentre il lavoro compiuto durante la adiabatica è pari a:

$$W_{AB} = 0.9nc_v(T_2 - T_1) = 1760\ J$$

essendo $c_v = 3/2R = 12.5\ J/K$. Quindi il lavoro totale vale:

$$W = W_{BC} + W_{AB} = 260\ J$$

d)
L'unico calore assorbito dalla sorgente a temperatura più alta è quello durante la isocora che vale:

$$Q_{CA} = nc_v(T_2 - T_1) = 1952\ J$$

Quindi il rendimento di un ciclo è pari a:

$$\eta = \frac{W}{Q_{CA}} = 0.13$$

Università dell'Aquila - Ingegneria

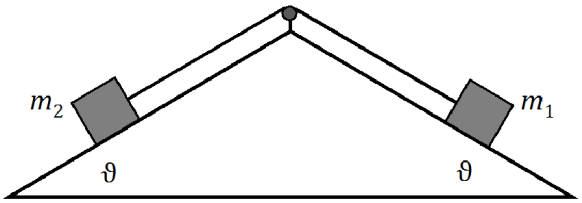
Prova Scritta di Fisica Generale I - 02/09/2016

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	Docente
.....	.....	.....	....	.....

Tempo a disposizione: 2 ore e 30'.

Problema 1

Due punti materiali di massa m_1 e m_2 sono disposti su due piani inclinati adiacenti aventi lo stesso angolo θ rispetto al piano orizzontale (si veda la figura), che può essere variato. Le due masse sono legate tra di loro da un filo che rimane sempre teso durante il moto del sistema e scorre senza attrito su di una carrucola.



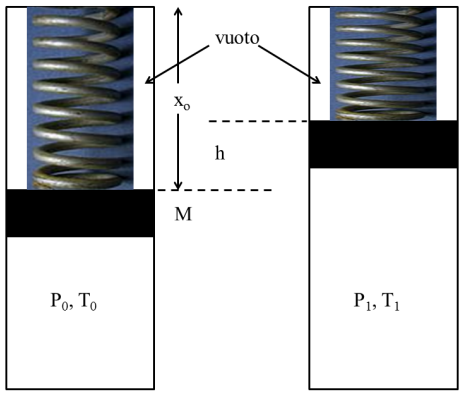
Si supponga che il filo e la carrucola abbiano masse trascurabili. Conoscendo che i coefficienti di attrito dinamico per i punti di massa m_1 e m_2 sono rispettivamente μ_1 e μ_2, si chiede di determinare: a) Il valore dell'accelerazione del sistema dei due punti materiali e il loro verso di percorrenza rispetto ai piani inclinati se $\theta = \theta_o$ (4 punti); b) Il valore del modulo della tensione del filo $T(\theta_o)$ per $\theta = \theta_o$ (2 punti); c) Il valore dell'angolo $\theta = \theta'$ per il quale il moto dei due punti materiali è a velocità costante (2 punti); d) Il valore del modulo della tensione del filo $T(\theta)$ per $\theta = \theta'$ (2 punti);
Dati del problema: $m_1 = 0.9\ kg$, $m_2 = 2.5\ kg$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.15$, $\theta_o = 30^o$.

Problema 2

Una biglia omogenea di massa $m = 0.20$ kg, raggio $r = 2.0$ cm e momento di inerzia $I = \frac{2}{5}mr^2$ viene lanciata, con velocità del centro di massa $v_0 = 1.2$ m/s e moto di puro rotolamento, lungo una pista costituita da un tratto orizzontale, (un breve raccordo arrotondato) e un piano inclinato di un angolo $\theta = 0.2$ rad. In assenza di forze dissipative calcolare: a) L'energia cinetica iniziale totale della biglia e la quota h del centro di massa nel punto di inversione del moto rispetto alla quota iniziale (4 punti); b) La velocità iniziale v_1, se il moto rimane di puro rotolamento, necessaria per raggiungere la stessa quota se l'inclinazione fosse $\theta_2 = 0.4$ rad (2 punti); c) Il lavoro compiuto dalla reazione vincolare N e dalla forza di attrito F_a necessaria a mantenere il moto di rotolamento (2 punti); d) L'angolo massimo di inclinazione θ_M per il quale il moto rimane di puro rotolamento se il coefficiente di attrito statico fra la biglia e la pista è $\mu_s = 0.4$ (4 punti).

Problema 3

Un cilindro chiuso contiene n moli di un gas biatomico a temperatura T_0 e pressione P_0. La sezione del cilindro vale S ed inizialmente solo la forza peso del pistone lo tiene in equilibrio (nel contenitore superiore vi è il vuoto), in quanto la molla di costante di richiamo elastico k è a riposo. Il gas viene scaldato ponendolo su una sorgente a temperatura T_1 ed il pistone di alza di una quota h e allo stesso tempo la molla di contrae di h raggiungendo una nuova posizione di equilibrio. Determinare a) la massa M del pistone (2 punti); b) la pressione P_1, il volume V_1 e la temperatura T_1 finale del gas (2 punti); c) il calore che il sistema assorbe dalla sorgente (2 punti); d) la variazione di entropia dell'universo termodinamico (2 punti). (Dati del problema $T_0 = 20\ ^oC$, $S = 0.01\ m^2$, $P_0 = 4 \cdot 10^5\ Pa$, $n = 0.8\ moli$, $h = 20\ cm$, $k = 5000\ N/m$)



Problema 1 - Soluzione

a)

Con riferimento alla figura, le equazioni del moto del sistema dei due punti materiali sono le seguenti:

$$m_2 a = m_2 g \sin\theta_0 - m_2 g \mu_2 \cos\theta_0 - T$$
$$m_1 a = T - m_1 g \sin\theta_0 - m_1 g \mu_1 \cos\theta_0$$

dove si è tenuto conto che il filo che unisce i due punti materiali rimane sempre teso e che il moto avvenga nel senso della discesa del punto materiale di massa m_2. Sommando membro a membro le precedenti equazioni si ha:

$$a = g\frac{\sin\theta_0(m_2 - m_1) - \cos\theta_0(m_1\mu_1 + m_2\mu_2)}{m_1 + m_2} = 0.7\ ms^{-2}$$

b)

Essendo il valore dell'accelerazione positivo, l'ipotesi implicitamente fatta di discesa del punto di massa m_2 e, quindi, di risalita di quello di massa m_1 è quella corretta. Da una delle due equazioni del moto si trova subito il valore del modulo della tensione del filo:

$$T(\theta_0) = m_2 g \sin\theta_0 - m_2 g \mu_2 \cos\theta_0 - m_2 a = 7.34\ N$$

c)

Il valore dell'angolo θ' per il quale il moto del sistema dei due punti materiali avviene a velocità costante si trova annullando il valore dell'accelerazione precedentemente ottenuta:

$$\sin\theta'(m_2 - m_1) - \cos\theta'(m_1\mu_1 + m_2\mu_2) = 0$$
$$\tan\theta' = \frac{m_1\mu_1 + m_2\mu_2}{m_2 - m_1}$$
$$\theta' = \arctan\left[\frac{m_1\mu_1 + m_2\mu_2}{m_2 - m_1}\right] = 22^o$$

d)

Conseguentemente, il valore del modulo della tensione del filo $T(\theta')$ vale:

$$T(\theta') = m_2 g \sin\theta' - m_2 g \mu_2 \cos\theta' = 5.75\ N$$

Problema 2 - Soluzione

a) Considerando il vincolo cinematico del rotolamento $v_0 = \omega_0 r$, l'energia cinetica totale iniziale della biglia risulta:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)v_0^2 \simeq 0.20\ \text{J}$$

Applicando la conservazione dell'energia meccanica fra la condizione iniziale e il punto di inversione del moto:

$$E_c = mgh \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{E_c}{mg} \simeq 0.102\ \text{m}$$

b) La quota raggiunta è indipendente dall'inclinazione della pista.

c) Entrambe le forze non compiono lavoro.

d) Nel piano inclinato la biglia è soggetta al peso e alla reazione vincolare costituita da una componente normale N e una componente di attrito statico F_a. Indicando con x la coordinata parallela al piano inclinato lungo la salita e y la componente ortogonale le equazioni della dinamica dei sistemi per un moto di rotolamento si riducono a:

$$\begin{cases} ma_x = -mg\sin\theta + F_a \\ ma_y = 0 = N - mg\cos\theta \\ I\alpha = -Ia_x/r = F_a r \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad F_a = \frac{mg\sin\theta}{1 + mr^2/I} = \frac{2}{7}mg\sin\theta$$

Imponendo $|F_a| < \mu_s|N|$ si ottiene

$$\tan\theta < \frac{7}{2}\mu_s = 1.4 \quad \Longrightarrow \quad \theta_M = \arctan 1.4 \simeq 0.95 \text{ rad} \simeq 54.5^\circ$$

Problema 3 - Soluzione

a)

La massa del pistone è tale che la sua pressione è pari alla pressione del gas:

$$\frac{Mg}{S} = P_0$$

quindi:

$$M = \frac{P_0 S}{g} = 407\ kg$$

b)

La pressione finale sarà pari a :

$$P_1 = P_0 + \frac{kh}{S} = 5 \cdot 10^5\ Pa$$

Mentre il volume iniziale era:

$$V_0 = \frac{nRT_0}{P_0} = 0.0049\ m^3$$

Diviene:

$$V_1 = V_0 + Sh = 0.0069\ m^3$$

Quindi la temperatura è:

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = 517\ K$$

c)

Detto $c_v = \frac{5}{2}R = 20.8\ J/(molK)$. La variazione di energia interna del gas vale:

$$\Delta U = nc_v(T_1 - T_0) = 3.72\ kJ$$

mentre il lavoro fatto contro la forza peso è:

$$L_p = Mgh = 800\ J$$

Mentre il lavoro fatto contro la forza elastica vale:

$$L_e = \frac{1}{2}kh^2 = 100\ J$$

In totale quindi:

$$Q = \Delta U + L_p + L_e = 4.62\ kJ$$

d)

La variazione di entropia del gas è data da:

$$\Delta S_g = nc_v \log \frac{T_1}{T_0} + nR \log \frac{V_1}{V_0} = 11.7\ J/K$$

Mentre la sorgente (diminuisce la sua entropia):

$$\Delta S_s = -\frac{Q}{T_1} = -8.94\ J/K$$

quindi in totale:

$$\Delta S_u = \Delta S_g + \Delta S_s = 2.8\ J/K$$

Università dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 07/11/2016

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	Docente
.....	.....	.....	....	.....

Tempo a disposizione: 2 ore e 30'.

Problema 1

Una particella soggetta alla sola forza di richiamo elastico vibra di moto armonico semplice. All'istante iniziale ($t = 0$) l'energia potenziale è due volte l'energia cinetica, l'energia totale (cinetica e potenziale) vale $E_0 = 0.5J$ e la particella si trova a distanza $x_1 = 2\ cm$ dalla posizione di equilibrio. Dopo $t = 0.2\ s$ la velocità si annulla per la prima volta. La costante di richiamo elastica vale $k = 80\ N/m$.
Determinare: a) l'ampiezza massima di oscillazione (4 punti); b) la massa della particella (3 punti); b) la velocità e la accelerazione massima (3 punti).

Problema 2

La ruota di una bicicletta, un anello di raggio R e massa M, rotola con moto di puro rotolamento dalla cima di una discesa mantenendosi in equilibrio partendo da velocità nulla. La discesa è un piano inclinato scabro con un angolo θ rispetto alla direzione orizzontale. Determinare: a) La componente della forza di attrito parallela al piano inclinato durante il moto (3 punti); b) la velocità angolare una volta che abbia percorso sul piano inclinato un tratto ℓ (3 punti); c) L'angolo critico $\theta_c$per cui il moto non è di puro rotolamento (3 punti). d) Superando per un valore trascurabile tale angolo critico $\theta = \theta_c + d\theta$, non essendo più un moto di puro rotolamento, quale sarebbe la accelerazione? (3 punti)
(Dati del problema $\theta = 25^o$, $\mu_s = 0.45$, $\mu_d = 0.4$, $\ell = 4\ m$, $M = 2.5\ kg$, $R = 37\ cm$)

Problema 3

Una macchina, irreversibile, lavora tra T_1 e T_2 assorbendo dalla sorgente a temperatura maggiore la quantità di calore Q_2 in un ora. Il suo rendimento è 1/5 della macchina reversibile operante tra le stesse temperature. Determinare: a) la potenza meccanica prodotta dalla macchina (3 punti); b) la potenza termica che dissipa nella sorgente a temperatura più bassa (2 punti); c) la variazione di entropia dell'universo in un giornata di funzionamento continuo (3 punti);
(dati del problema $T_2 = 300\ C$, $T_1 = 30\ C$, $Q_2 = 52\ MJ$)

Problema 1 - Soluzione

L'equazione del moto sono:

$$x = x_o \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = x_o \omega \cos(\omega t + \varphi) = x_o \sqrt{\frac{k}{m}} \cos(\omega t + \varphi)$$

essendo $\omega = \sqrt{k/m}$.

a)

Dovendo essere all'istante iniziale:

$$\frac{1}{2}kx^2 + 2\frac{1}{2}mv^2 = E_o$$

$$\frac{1}{2}kx_1^2 \sin^2(\varphi) + 2\frac{1}{2}mx_o^2 \frac{k}{m} \cos^2(\varphi) = E_0$$

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + kx_o^2 \cos^2(\varphi) = E_0$$

$$x_o \cos(\varphi) = \sqrt{\frac{E_o - kx_1^2/2}{k}} = 7.8\ cm$$

Quindi essendo:

$$\tan\varphi = \frac{x_o \sin\varphi}{x_o \cos\varphi} = \frac{x_1}{x_o \cos(\varphi)}$$

$$\varphi = tan^{-1} \frac{x_1}{x_o \cos(\varphi)} = 14^o$$

Quindi:

$$x_o = \frac{x_1}{\sin\varphi} = 8\ cm$$

b)

Dovendo essere:

$$\omega t + \varphi = \pi/2$$

$$\omega = 6.6\ rad/s$$

quindi:

$$m = \frac{k}{\omega^2} = 1.8\ kg$$

c)

La velocità massima è pari a:

$$v_{max} = x_o \omega = 0.5\ m/s$$

La accelerazione massima:

$$a_{max} = x_o \omega^2 = 3.5\ m/s^2$$

Problema 2 - Soluzione

a)

L'equazioni cardinali, definita con f la forza di attrito, sono:

$$Ma_{CM} = Mg\sin\theta - f$$

$$-fR = I\alpha$$

con $I = MR^2$ essendo un anello. Inoltre essendo un moto di puro rotolamento:

$$\alpha = -\frac{a_{CM}}{R}$$

sostituendo questa equazione nella seconda equazione cardinale si ha :

$$fR = M^2\frac{a_{CM}}{R}$$

eliminando a_{CM}:

$$f = \frac{Mg}{2}\sin\theta = 5.2\ N$$

b)

La differenza di altezza è pari a:

$$h = \ell\sin\theta = 1.7\ m$$

Utilizzando il teorema di Huygens-Steiner il momento di inerzia rispetto il punto di contatto è:

$$I_o = MR^2 + MR^2 = 2MR^2 = 0.68\ kgm^2$$

Eguagliando l'energia rotazionale alla fine della discesa con quella potenziale all'inizio:

$$\frac{1}{2}I_o\omega^2 = Mgh$$

$$MR^2\omega^2 = Mgh$$

$$\omega = \frac{\sqrt{gh}}{R} = 11\ rad/s$$

Si poteva anche usare la cinematica per ottenere lo stesso risultato.

c)

per avere puro rotolamento:

$$\frac{Mg}{2}\sin\theta \leq \mu_s Mg\cos\theta$$

Quindi il valore critico dell'angolo è quello per cui:

$$\tan\theta_c = 2\mu_s$$

$$\theta_c = 42^o$$

d)

La I equazione cardinale diventa:

$$Ma_{CM} = Mg\sin\theta_c - \mu_d Mg\cos\theta_c$$

$$a_{CM} = g(\sin\theta_c - \mu_d\cos\theta_c) = 3.6\ m/s^2$$

Problema 3 - Soluzione

a)

Detto:

$$T = 3600\ s$$

$$T_1 = 273 + 30 = 303\ K$$

$$T_2 = 273 + 300 = 573\ K$$

La potenza meccanica prodotta è:

$$P_m = \frac{W}{T}$$

dove il lavoro vale per definizione:

$$W = \eta_{irr} Q_2$$

ed

$$\eta_{irr} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = 0.1$$

$$P = \eta_{irr}\frac{Q_2}{T} = 1.36\ kW$$

b)

Essendo:

$$\frac{Q_2 + Q_1}{Q_2} = \eta_{irr}$$

$$Q_1 = (\eta_{irr} - 1)Q_2 = -47\ MJ$$

La potenza da dissipare nella sorgente temperatura più bassa vale:

$$-\frac{Q_1}{T} = 13\ kW$$

c)

La variazione di entropia:

$$\Delta S = 24\left(-\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}\right) = 1.55\ MJ/K$$

Università dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 11/01/2017

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	Docente
.....	.....	.....	....	.....

Tempo a disposizione: 2 ore e 30'.

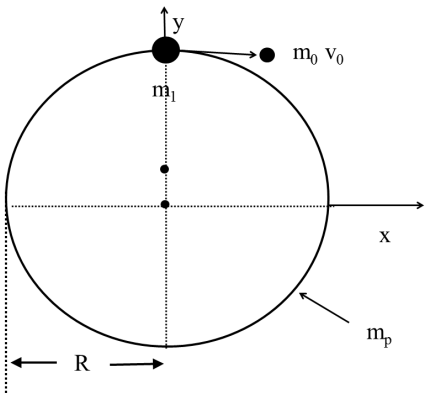
Problema 1

Le equazioni parametriche di un punto materiale che descrive una curva a spirale con partenza nell'origine di un sistema di riferimento (x, y), sono:

$$x = At\sin\omega t \qquad y = At\cos\omega t$$

Determinare: a) la distanza del punto materiale dal centro dopo un giro (2 punti); b) la sua velocità in modulo dopo mezzo giro (2 punti); c) la sua accelerazione in modulo dopo un giro (2 punti); d) la sua accelerazione tangenziale dopo un giro (4 punti).
(dati del problema $A = 0.15\ m/s$, $\omega = 1.2\ rad/s$, un giro corrisponde ad una variazione 2π nella fase delle funzioni trigonometriche).

Problema 2



Una piattaforma (un disco) non vincolata di massa m_p e raggio R è in quiete su di un piano orizzontale liscio quando da un suo bordo un sistema meccanico spara un proiettile (un punto materiale) di massa m_0 con velocità v_0 diretta tangenzialmente al bordo della piattaforma (si veda la figura) parallelamente all'asse delle x. Ipotizzando il sistema meccanico di lancio come un punto materiale di massa m_1 posto sul bordo della piattaforma, si chiede di determinare in assenza di attriti (per il sistema piattaforma piu' lanciatore): a) le coordinate del centro di massa, la distanza del lanciatore dal centro di massa ed il momento di inerzia dall'asse libero di rotazione (3 punti); b) dopo il lancio determinare la velocità di traslazione del centro di massa del sistema e quella angolare in modulo direzione e verso impressa dal lancio del punto materiale (5 punti); c) la velocità angolare della piattaforma nel caso in cui essa fosse vincolata a ruotare intorno al suo centro nelle stesse condizioni dinamiche indicate in precedenza. (4 punti)
(Dati del problema: $R = 5\ m$; $m_p = 20\ kg$; $m_0 = 1\ kg$; $v_0 = 10\ m/s$, $m_1 = 5\ kg$)

Problema 3

Una mole di gas ideale monoatomico inizialmente alla temperatura T_0 è contenuta in un cilindro di volume V_0 e subisce una compressione adiabatica reversibile da portarlo a un volume finale $V_f = V_0/3$ e a una temperatura finale T_f. In queste condizioni, il gas è posto a contatto con una sorgente alla temperatura T_0 alla quale si riporta mantenendo costante il volume del gas V_f. Si riportino nel piano di Clapeyron le trasformazioni termodinamiche subite dal gas (1 punto) e si calcoli:
a) La temperatura T_f del gas e il lavoro da esso subito durante la compressione adiabatica reversibile (2 punti);
b) La variazione totale di energia interna del gas; (1 punto)
c) La variazione di entropia dell'universo termodinamico. (4 punti)
(Dati del problema: $T_0 = 300\ K$)

Problema 1 - Soluzione

a)

Per fare un giro impiega un tempo pari a:

$$t_g = \frac{2\pi}{\omega} = 5.2\ s$$

quindi la distanza dal centro dopo un giro è:

$$d = y(t_g) = \frac{A2\pi}{\omega} = 0.78\ m$$

b)

Le componenti della velocità sono:

$$v_x = A\sin\omega t + At\omega\cos\omega t$$
$$v_y = A\cos\omega t - At\omega\sin\omega t$$

Per fare mezzo giro impiega un tempo pari a:

$$t_m = \frac{\pi}{\omega}$$

Dopo mezzo giro:

$$v_x(t_m) = -At_m\omega = -A\pi \qquad v_y(t_m) = -A$$

Quindi

$$|v(t_m)| = \sqrt{v_x(t_m)^2 + v_y(t_m)^2} = A\sqrt{\pi^2+1} = 0.49\ m/s$$

c)

La accelerazione ha componenti:

$$a_x = 2A\omega\cos\omega t - At\omega^2\sin\omega t$$
$$a_y = -2A\omega\sin\omega t - At\omega^2\cos\omega t$$

Dopo un giro:

$$a_x = 2A\omega$$
$$a_y = -At_g\omega^2 = -A2\pi\omega$$

In modulo:

$$|a(t_g)| = 2A\omega\sqrt{1+\pi^2} = 1.19\ m/s^2$$

d)

Il versore tangenziale dopo un giro è diretto come la velocità:

$$v_x(t_g) = A2\pi$$
$$v_y(t_g) = A$$
$$|v(t_g)| = \sqrt{v_x(t_m)^2 + v_y(t_m)^2} = A\sqrt{4\pi^2+1}$$
$$\hat{u}_x = \frac{2\pi}{\sqrt{4\pi^2+1}}$$
$$\hat{u}_y = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2+1}}$$

$$a_t = a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y = 2A\omega\frac{2\pi}{\sqrt{4\pi^2+1}} - A2\pi\omega\frac{1}{\sqrt{4\pi^2+1}} = \frac{2\pi A\omega}{\sqrt{4\pi^2+1}} = 0.18\ m/s^2$$

La componente centripeta è prevalente e vale:

$$a_c = \sqrt{a(t_g)^2 - a_t^2} = 1.17\ m/s^2$$

Problema 2 - Soluzione

a)

Una volta effettuato il lancio del punto materiale di massa m_0, assumendo come zero dell'asse delle ordinate il centro della piattaforma circolare, la coordinata del centro di massa del sistema vale

$$x_{CM} = 0 \qquad y_{CM} = \frac{m_1 R}{m_p + m_1} = 1\ m$$

la distanza del lanciatore dal centro di massa:

$$d_1 = R - y_{CM} = 4\ m$$

La piattaforna ha un momento di inerzia rispetto all'asse libero di rotazione:

$$I_p = \frac{1}{2}m_p R^2 + m_p y_{CM}^2 = 270\ kgm^2$$

Quindi il sistema ha un momento di inerzia:

$$I_{CM} = I_p + m_1 d_1^2 = 350\ kgm^2$$

b)

Applicando la conservazione della quantità di moto la velocità di trascinamento del sistema:

$$0 = m_0 v_0 + (m_p + m_1)v_p \longrightarrow v_p = -\frac{m_0 v_0}{m_p + m_1} = -0.4 m/s$$

lungo l'asse delle x. Mentre dalla conservazione del momento angolare:

$$0 = I_{CM}\omega_p - m_0 d_1 v_0 \longrightarrow \omega_p = \frac{m_0 d_1 v_0}{I_{CM}} = 0.114\ rad/s$$

Il vettore velocità angolare è perpendicolare al piano del disco e uscente da esso.

c)

Nel caso in cui la piattaforma fosse vincolata a ruotare intorno al suo centro, il momento d'inerzia del sistema vale:

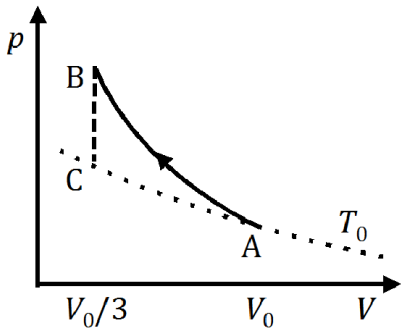
$$I'_{CM} = \frac{1}{2}m_p R^2 + m_1 R^2 = 375\ kgm^2$$

Vale solo la conservazione del momento angolare:

$$0 = I'_{CM}\omega_p - m_0 R v_0 \longrightarrow \omega'_p = \frac{m_0 R v_0}{I'_{CM}} = 0.133\ rad/s$$

Problema 3 - Soluzione

Il gas subisce due trasformazioni termodinamiche: la prima è una compressione adiabatica e la seconda è un'isocora irreversibile che riporta il gas alla temperatura iniziale T_0. Pertanto, nel piano di Clapeyron queste due trasformazioni sono descritte come in figura. Come si vede il gas non ritorna nello stato termodinamico iniziale A (non percorre un ciclo termodinamico completo) ma termina nello stato termodinamico C appartenente all'isoterma T_0.



a)

La temperatura alla quale si porta il gas al termine della compressione adiabatica si ricava da:

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$$

con $\gamma - 1 = 0.66$ essendo il gas monoatomico. Quindi:

$$T_f = T_0 \left(\frac{V_0}{V_f}\right)^{\gamma-1} = 624.5\ K$$

Il lavoro eseguito sul gas per comprimerlo è:

$$W_{AB} = -nc_v(T_f - T_0) = -n\frac{3}{2}R(T_f - T_0) = -4\ kJ$$

b)

La variazione totale di energia interna del gas è nulla ritornando il gas alla stessa temperatura di partenza.

c)

Per il calcolo della variazione di entropia dell'universo termodinamico, bisogna tenere in conto quella relativa al gas e quella relativa alla sorgente di calore alla temperatura T0. Per la prima, durante la isocora, si ha:

$$\Delta S_{gas} = nc_v \log\frac{T_0}{T_f} = -9.13\ J/K$$

Mentre nella sorgente durante la trasformazione BC entra una quantità di calore pari a:

$$Q_{BC} = nc_v(T_f - T_0) = 4\ kJ$$

Quindi:

$$\Delta S_{sorgente} = \frac{Q_{BC}}{T_0} = 13.5\ J/K$$

La variazione di entropia dell'universo termodinamico è:

$$\Delta S_U = \Delta S_{gas} + \Delta S_{sorgente} = 4.34\ J/K$$

Università dell'Aquila - Ingegneria
Prova Scritta di Fisica Generale I - 27/01/2017

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	Docente
.....	.....	.....	....	.....

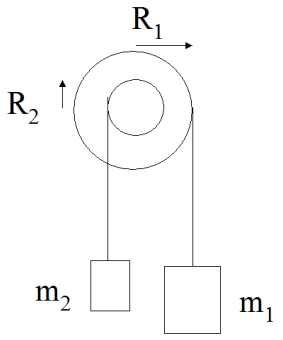
Tempo a disposizione: 2 ore e 30'.

Problema 1

Un punto materiale di massa m_1 è lanciato da una molla di costante elastica K compressa di un tratto Δx_i rispetto alla sua posizione di riposo. Dopo aver percorso un tratto orizzontale, la massa m_1 urta in modo completamente elastico con un secondo punto materiale di massa m_2 inizialmente a riposo. Dopo l'urto, il secondo punto materiale sale un tratto in salita fermandosi a un'altezza h rispetto al piano orizzontale.
Nell'ipotesi di assenza di attriti, si chiede di determinare: a) la velocità v_{2f} della massa m_2 dopo l'urto (2 punti); b) la velocità v_{1f} della massa m_1 dopo l'urto (4 punti); c) il valore della costante K della molla (2 punti); d) il valore della compressione della molla Δx_f una volta che la massa m_1, dopo l'urto, ritorna verso la sua posizione iniziale. (2 punti)
Dati del problema: $m_1 = 1\ kg$; $m_2 = 3\ kg$; $\Delta x_i = 0.2\ m$; $h = 5.1\ cm$

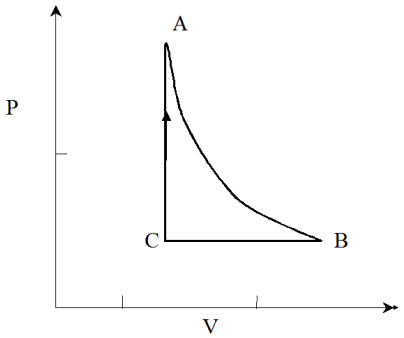
Problema 2

Una carrucola di momento di inerzia I, è poggiata su un asse orizzontale libero di ruotare e passante per il suo centro. Sulle due gole rispettivamente di raggio R_1 ed R_2 vi sono due fili inestensibili, che non strisciano, e portano agli estremi due masse puntiformi m_1 ed m_2. Il sistema è inizialmente fermo e le masse sono allineate. Il sistema viene liberato. Determinare dopo che la carrucola ha percorso un quarto di giro: a) la posizione del baricentro del sistema delle massa m_1 e m_2 rispetto alla posizione inziale del sistema (3 punti); b) la velocità della massa m_1 ed m_2 (4 punti); c) la tensione dei due fili (5 punti).
(dati del problema $I = 0.5\ kgm^2$, $m_1 = 4.5\ kg$, $m_2 = 1.1\ kg$, $R_1 = 40\ cm$, $R_2 = 25\ cm$)



Problema 3

n moli di un gas ideale, monoatomico, eseguono la trasformazione ciclica irreversibile ABC mostrata nella figura. La trasformazione AB è una isoterma reversibile, la BC una isobara e la CA una isocora. . La isocora e la isobara sono irreversibili in quanto eseguite con una sola sorgente di calore alle temperature T_A e T_C rispettivamente. Il rapporto tra il volume in B ed in A è noto come la temperatura della isoterma T_A.
Determinare: a) La temperatura in C (2 punti), b) il lavoro totale eseguito durante il ciclo termodinamico (2 punti); c) il rendimento della macchina termica (2 punti); d) Supponedo di utilizzare una terza sorgente a temperatura T_x incognita intermedia fra T_A e T_C in maniera che in una prima parte dell'isobara il calore viene ceduto a questa sorgente e successivamente la medesima quantità di calore ceduta da questa sorgente al gas (riutilizzandola) nella prima parte dell'isocora fino a T_x, determinare la temperatura T_x e il rendimento del ciclo modificato (2 punti). .
(Dati: $T_A = 500\ K$, $V_B/V_A = 1.6$, $n = 0.5$)



Problema 1 - Soluzione

a)

Dalla conservazione dell'energia meccanica per la massa m_2 si ha:

$$\frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = m_2 g h$$

quindi:

$$v_{2f} = \sqrt{2gh} = 1 \ m/s$$

b)

Nell'urto si conserva la quantità di moto:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \longrightarrow v_{1i} = \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1}$$

Ma essendo elastico si conserva anche anche l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

sostituendo in questa l'espressione di v_{1i} :

$$\frac{(m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f})^2}{m_1} = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2$$

$$v_{1f} = \frac{(m_1 m_2 - m_2^2) v_{2f}}{2 m_1 m_2} = -1 \ m/s$$

c)

La velocità iniziale della massa m_1 è quindi pari a:

$$v_{1i} = \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1} = 2 \ m/s$$

Dovendosi trasformare l'energia potenziale della molla in energia cinetica della massa m_1:

$$\frac{1}{2}K\Delta x_i^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2$$

$$K = \frac{m_1 v_{1i}^2}{\Delta x_i^2} = 100 \ N/m$$

d)

Infine, la massa m_1, tornando indietro dopo l'urto verso la sua posizione iniziale, comprimerà la molla rispetto alla sua posizione di riposo della quantità:

$$\frac{1}{2}K\Delta x_f^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2$$

$$\Delta x_f = v_{1f}\sqrt{\frac{m_1}{K}} = 0.1 \ m$$

Problema 2 - Soluzione

Soluzione:

a)

La differenza di altezza dopo un quarto di giro è pari a:

$$dz = \frac{\pi}{2}(R_1 + R_2) = 1.02\ m$$

In realtà la massa m_1 si porta (in basso) a:

$$z_1 1 = -R_1 \frac{\pi}{2} = 0.61\ m$$

mentre lla massa m_2 si innalza di:

$$z_2 = R_2 \frac{\pi}{2} = 0.39\ m$$

Quindi il baricentro del sistema di abbassa di:

$$h = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} = -0.43\ m$$

b)

Non slittando:

$$\frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2} = \omega$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = -(m_1 + m_2)gh$$

Definendo:

$$I_e = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I = 1.29\ kgm^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{-2(m_1 + m_2)gh}{I_e}} = 6.04\ rad/s$$

$$v_1 = \omega R_1 = 2.4\ m/s$$

$$v_2 = \omega R_2 = 1.5\ m/s$$

c)

Mentre le equazioni cardinali sono:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

$$-m_2 g + T_2 = m_2 a_2$$

$$T_1 R_1 - T_2 R_2 = I\alpha$$

Ma anche:

$$\frac{a_1}{R_1} = \frac{a_2}{R_2} = \alpha$$

$$m_1 g R_1 - T_1 R_1 = m_1 \alpha R_1$$

$$-m_2 g R_2 + T_2 R_2 = m_2 \alpha R_2$$

$$T_1 R_1 - T_2 R_2 = I\alpha$$

Quindi eliminando T_1 e T_2 (sommando le tre equazioni) si ha:

$$\alpha = \frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2)g}{I_e} = 11.6\ rad/s^2$$

Da cui:

$$T_1 = m_1 g - m_1 \alpha R_1 = 23\ N$$
$$T_2 = m_2 g + m_2 \alpha R_2 = 14\ N$$

Problema 3 - Soluzione

a)

Il calore assorbito dalla sorgente T_A durante una isoterma vale:

$$Q_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 976\ J$$

Nella isobara si avrà che:

$$\frac{V_B}{T_A} = \frac{V_C}{T_C}$$

Essendo $V_C = V_A$:

$$T_C = T_A \frac{V_A}{V_B} = 312.5\ K$$

b)

Quindi:

$$Q_{BC} = n\frac{5}{2}R(T_C - T_A) = -1950\ J$$
$$Q_{CA} = n\frac{3}{2}R(T_A - T_C) = 1169\ J$$

Il lavoro totale in un ciclo vale:

$$W = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 197\ J$$

c)

Mentre il calore assorbito dalla sorgente a temperatura maggiore T_A vale:

$$Q_2 = Q_{CA} + Q_{AB} = 2146\ J$$

Quindi:

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = 0.092$$

d)

Imponendo che il calore assorbito dalla sorgente intermedia durante la trasfromazione isocora sia pari a quello ceduto durante la isobara si ha:

$$n\frac{3}{2}R(T_x - T_C) + n\frac{5}{2}R(T_x - T_A) = 0$$

$$T_X = \frac{5T_A + 3T_C}{8} = 430\ K$$

Quindi invece di Q_{CA} il calore da prendere dalla sorgente a temperatura T_A e solo:

$$Q_{XA} = n\frac{3}{2}R(T_A - T_x) = 731\ J$$

Quindi

$$Q_2' = Q_{XA} + Q_{AB} = 1415\ J$$

quindi il rendimento diventa:

$$\eta_x = \frac{W}{Q_2'} = 0.14$$

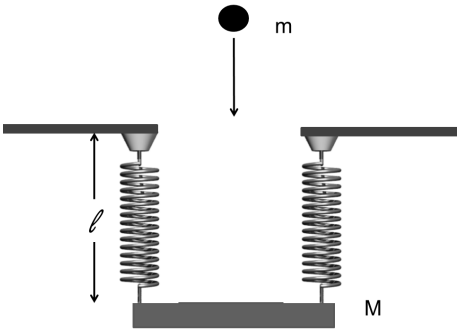
Università dell'Aquila - Ingegneria

Prova Scritta di Fisica Generale I - 17/02/2017

Nome	Cognome	N. Matricola	Corso di Studio	Docente
.....	.....	.....	....	.....

Tempo a disposizione: 2 ore e 30'.

Problema 1



Una sbarretta di massa M è sospesa agli estremi da due molle eguali di costante elastica k che a causa della sospensione della sbarretta sono di lunghezza ℓ. Un piccolo oggetto di massa m cade dall'alto da altezza h e rimbalza in maniera elastica nel centro della sbarretta. Determinare a) la lunghezza a riposo delle due molle (2 punti); b) la velocità di impatto e di rimbalzo dell'oggetto di massa m (3 punti); c) la altezza a cui rimbalza (2 punti); d) la velocità della sbarra subito dopo l'urto e la sua ampiezza di oscillazione (3 punti).
(dati del problema $M = 4\ kg$, $k = 2000\ N/m$, $\ell = 20\ cm$, $m = 300\ g$, $h = 50\ cm$

Problema 2

Due seggiolini opposti rispetto al centro di rotazione di una giostra di massa m (compresi gli occupanti) ruotano attorno all'asse comune di rotazione. Inizialmente il moto circolare lungo la direzione orizzontale è garantito da due funi di lunghezza l che formano un angolo con la direzione verticale di θ_1, cioè il sistema è un pendolo conico con due masse. Determinare a) la tensione iniziale delle due funi (2 punti); b) il modulo della velocità con cui ruotano (3 punti); b) il momento angolare iniziale dei due seggiolini (3 punti). d) Calcolare inoltre come diviene la velocità dei seggiolini se mediante una fune tesa (forza interna) tra i due occupanti l'angolo con la verticale dei seggiolini diviene θ_2 (4 punti).
(Dati del problema $m = 100\ kg$, $l = 12\ m$, $\theta_1 = 40^o$, $\theta_2 = 33^o$)

Problema 3

Una macchina termica ciclica reversibile lavora assorbendo una quantità di calore in un ciclo Q_2 da una sorgente a temperatura T_2 e cedendo il calore Q_1 a una sorgente a temperatura T_1. Il rendimento di questa macchina è η_2. Una seconda macchina termica reversibile con rendimento $\eta_1 = 0.20$ lavora in parallelo assorbendo Q_1 dalla sorgente a temperatura T_1 e cedendo Q_0 a una sorgente a temperatura T_0. Determinare: a) Le temperature delle sorgenti T_1 e T_0 e i calori con esse scambiati (2 punti). b) Le variazioni di entropia delle sorgenti e dei fluidi delle due macchine termiche in un ciclo (3 punti); c) Il rendimento complessivo η della coppia di macchine termiche (considerando che il bilancio della sorgente T_1 è nullo) come valore numerico e come espressione generale in funzione di η_1 e η_2 (3 punti).
(Dati del problema: $Q_2 = 4$ kJ, $T_2 = 800$ K, $\eta_2 = 0.40$, $\eta_1 = 0.20$)

Problema 1 - Soluzione

a)

Imponendo che la sbarra sia inizialmente in equilibrio:

$$2k(\ell - \ell_o) - Mg = 0$$

segue che:

$$\ell_o = \ell - \frac{Mg}{2k} = 0.19\ cm$$

b)

La velocità di impatto si ricava dalla conservazione della energia:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$v_o = \sqrt{2gh} = 3.13\ m/s$$

Nell'urto si conserva la quantità di moto:

$$mv_o = mv_f + MV_f \rightarrow m(v_o - v_f) = MV_f$$

dove v_f e V_f sono la velocità del punto materiale e della sbarra. Ma si conserva anche l'energia:

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV_f^2 \rightarrow m(v_o - v_f)(v_o + v_f) = MV_f^2$$

Combinando le due equazioni:

$$v_o + v_f = V_f$$

Che sostituita nella prima:

$$m(v_o - v_f) = M(v_o + v_f) \rightarrow (M + m)v_f = (m - M)v_o$$

$$v_f = \frac{m - M}{m + M}v_o = -2.7\ m/s$$

c)

Quindi dopo l'urto il punto materiale rimbalza ad una altezza:

$$mgh_f = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$h_f = \frac{v_f^2}{2g} = 0.36\ m$$

d)

Dalla conservazione della quantità di moto:

$$mv_o = MV_f + mv_f$$

$$V_f = \frac{m}{M}(v_o - v_f) = 0.44\ m/s$$

Quindi oscillando tutta la sua energia cinetica diventa energia potenziale (attorno ad ℓ) di ampiezza (le molle sono due):

$$\frac{1}{2}MV_f^2 = kx_a^2$$

$$x_a = V_f\sqrt{\frac{M}{2k}} = 0.014\ m$$

Problema 2 - Soluzione

a)

Inizialmente per ognuna delle due masse posso scrivere, nella direzione verticale (asse z):

$$T\cos\theta_1 = mg$$

quindi:

$$T = 1280\ N$$

b)

La componente della tensione del filo lungo la direzione orizzontale é inizialmente la sola forza centripeta, del moto rotatorio con raggio:

$$r_1 = l\sin\theta_1 = 7.7\ m$$

Quindi:

$$m\frac{v_1^2}{r_1} = T\sin\theta_1$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{Tr_1\sin\theta_1}{m}} = 8\ m/s$$

c)

Inoltre si ha che il momento angolare vale:

$$\vec{L} = 2mr_1v_1\vec{k}$$

L'unica componente del momento angolare esistente è quella attorno all'asse di rotazione, la componente perpendicolare è nulla per ragioni di simmetria:

$$|L| = 1.23\cdot 10^4\ kgm^2s^{-1}$$

d)

Poichè agiscono solo forze interne, $\vec{L}$ si conserva e poichè nella condizione finale la direzione rimane la stessa, dovrò avere che

$$2ml\sin\theta_1 v_1 = 2ml\sin\theta_2 v_2$$

$$v_2 = v_1\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = 9.4\ m/s$$

Problema 3 - Soluzione

a)

Dall'espressione del rendimento per una macchina reversibile:

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2(1-\eta_2) = 480\ \text{K}$$

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_0}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_0 = T_1(1-\eta_1) = T_2(1-\eta_2)(1-\eta_1) = 384\ \text{K}$$

b)

La sorgente a T_2 cede calore Q_2 quindi la sua entropia diminuisce di:

$$\Delta S_2 = -\frac{Q_2}{T_2} = -5 \text{ J/K}$$

La sorgente a T_1 cede ed acquista la stessa quantità di calore per cui la sua entropia non varia. La variazione di entropia del fluido nel ciclo è nulla e quindi essendo il ciclo reversibile la variazione di entropia della sorgente a temperatura inferiore deve essere eguale e contraria alla diminuzione di entropia della sorgente a temperatura inferiore:

$$\Delta S_0 = -\Delta S_2 = 5 \text{ J/K}$$

Si poteva calcolare direttamente, infatti il fluido cede alla sorgente T_1 in un ciclo della macchina 1:

$$Q_1 = Q_2(1 - \eta_2) = -2.4 \text{ kJ}$$

In un ciclo la macchina 2 assorbe un calore $-Q_1$ e cede alla sorgente T_0 il calore:

$$Q_0 = -Q_1(1 - \eta_1) = -1.92 \text{ kJ}$$

e quindi la sorgente 0 aumenta la sua entropia di:

$$\Delta S_0 = -\frac{Q_0}{T_0} = 5 \text{ J/K}$$

c)

Dalle espressioni per i rendimenti delle 2 macchine termiche

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 - \eta_2 \ , \quad \frac{T_0}{T_1} = 1 - \eta_1 \ , \quad \frac{T_0}{T_2} = 1 - \eta$$

moltiplicando le prime due equazioni si ottiene la terza, pertanto vale l'identità:

$$1 - \eta = (1 - \eta_2)(1 - \eta_1) \quad \Rightarrow \quad \eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2 = 0.52$$

Ma anche è possibile calcolare il lavoro della prima macchina:

$$W_2 = \eta_2 Q_2 = 1.6 \text{ kJ}$$

$$W_1 = -\eta_1 Q_1 = 0.48 \text{ kJ}$$

Quindi:

$$\eta = \frac{W_2 + W_1}{Q_2} = 0.52$$

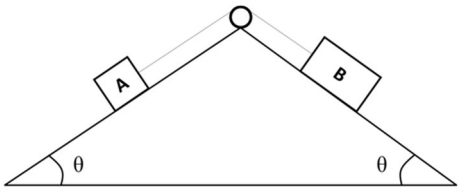
Università degli studi dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Primo parziale di Fisica Generale I - 14/04/2023

Nome	Cognome	N. matricola	Docente

Problema (7 punti)

Due punti materiali A e B, aventi massa rispettivamente pari a m e $2m$, sono posti su due piani inclinati adiacenti, aventi stesso angolo θ rispetto al piano orizzontale. Essi sono legati tra loro da un filo inestensibile e di massa trascurabile passante per una carrucola ideale (ovvero senza attrito e massa trascurabile e su cui il filo resta aderente senza slittare).



Si ipotizzi dapprima che l'attrito tra i piani inclinati e i corpi sia trascurabile. In tali condizioni, determinare:

1. la tensione del filo (1,5 punti);
2. considerando i punti materiali A e B inizialmente fermi, la velocità dei due corpi dopo aver percorso un tratto L sui rispettivi piani inclinati (1,5 punti).

Si ipotizzi poi che tra il piano e il corpo A ci sia attrito, assumendo un coefficiente di attrito sia statico che dinamico pari a μ. In queste nuove condizioni, determinare:

3. se i corpi restino fermi o si muovano (1,5 punti);
4. la tensione del filo (1,5 punti)

Nella soluzione dei diversi punti, si valuterà complessivamente:

5. chiarezza dell'esposizione, ivi inclusa la spiegazione e illustrazione dell'impostazione delle risposte, nonché l'analisi dimensionale sulle equazioni utilizzate (1 punto)

Dati: m = 2.5 kg; θ = 25°; L = 30 cm; μ = 0.60; $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$

.

Soluzione

1. Notiamo che, essendo il filo inestensibile, i due corpi si muovono compiendo spostamenti uguali, quindi anche uguali velocità e accelerazioni. Inoltre, essendo la carrucola e il filo con massa trascurabile e utilizzando il terzo principio della dinamica, le tensioni ai due capi del filo sono uguali in modulo. Utilizzando il secondo principio della dinamica per i due corpi A e B, otteniamo:

$$\begin{matrix} A\text{: } T - mg\sin\theta = ma, \\ B\text{: } 2mg\sin\theta - T = 2ma, \end{matrix} \qquad \textit{per entrambe le equazioni} \;\; [M][L][T]^{-2} = [M][L][T]^{-2}$$

Risolvendo il sistema per a e T, si ottiene il valore della tensione:

$$a = \frac{1}{3}g\sin\theta = 1.4\ \text{m/s}^2 \quad [L][T]^{-2} = [L][T]^{-2}$$
$$T = \frac{4}{3}mg\sin\theta = 14\ \text{N} \qquad [M][L][T]^{-2} = [M][L][T]^{-2}$$

2. La velocità dopo un tratto L può essere ricavata applicando il teorema dell'energia meccanica a uno dei due corpi. Considerando che il dislivello compiuto dai corpi è in modulo pari a:

$h = L\sin\theta \;\; [L] = [L]$

e applicandolo, ad esempio, al corpo A che parte da fermo e sale di una quota h:

$$\Delta E_m = W_{nc} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}mv^2 + mgh = TL = \frac{4}{3}mgL\sin\theta \qquad [M][L]^2[T]^{-2} + [M][L]^2[T]^{-2} = [M][L]^2[T]^{-2}$$

da cui la velocità:

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gL\sin\theta} = 0.91\ \text{m/s},\ [L][T]^{-1} = [L][T]^{-1}$$

Alternativamente, si può ricavare la velocità per via cinematica, osservando che il moto uniformemente accelerato dà come legge oraria ad esempio per il corpo A:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2, \qquad [L] = [L]\,; \quad v(t) = at, [L][T]^{-1} = [L][T]^{-1}$$

con $a = 1/3\ g\sin\theta$ ricavata al primo punto. Imponendo che al tempo t_f si percorre il tratto L, si può ricavare il tempo impiegato:

$$x(t_f) = \frac{1}{6}g\sin\theta\, t_f^2 = L\,,\ [L] = [L] \;\Rightarrow\; t_f = \sqrt{\frac{6L}{g\sin\theta}}, [T] = [T]$$

e da questo ricavare la velocità finale:

$$v(t_f) = at_f = \frac{1}{3}g\sin\theta\sqrt{\frac{6L}{g\sin\theta}} = \sqrt{\frac{2}{3}gL\sin\theta} = 0.91\ \text{m/s}.$$

Comunque si proceda al calcolo, l'espressione finale per la velocità ha le dimensioni corrette:

$$[L][T]^{-1} = ([L][T]^{-2}[L])^{1/2} = [L][T]^{-1}$$

3. Nel caso di presenza di attrito tra il piano inclinato e il corpo A, si può verificare se si è nel caso statico riscrivendo il sistema di equazioni scalari ottenuto dal secondo principio per A e B, ipotizzando che restino fermi, ovvero che l'accelerazione sia nulla:

$$\begin{matrix} A\text{: } T - mg\sin\theta - F_{as} = 0 \\ B\text{: } 2mg\sin\theta - T = 0 \end{matrix} \quad \textit{per entrambe le equazioni} \;\; [M][L][T]^{-2} = [M][L][T]^{-2}$$

dove F_{as} è il modulo della forza di attrito statico. Dal sistema considerato, si può ricavare che:

$F_{as} = mg \sin\theta$, $[M][L][T]^{-2} = [M][L][T]^{-2}$

Confrontando questa forza di attrito necessaria a mantenere il sistema in quiete con la forza di attrito statico massima su A:

$F_{as,max} = \mu N = \mu mg \cos\theta$, $[M][L][T]^{-2} = [M][L][T]^{-2}$

e verificando:

$$F_{as} \leq F_{as,max} \quad \Rightarrow \quad mg \sin\theta \leq \mu mg \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \mu \geq \tan\theta = 0{,}47$$

che risulta quindi essere soddisfatta, dimostrando che il sistema resta in quiete.

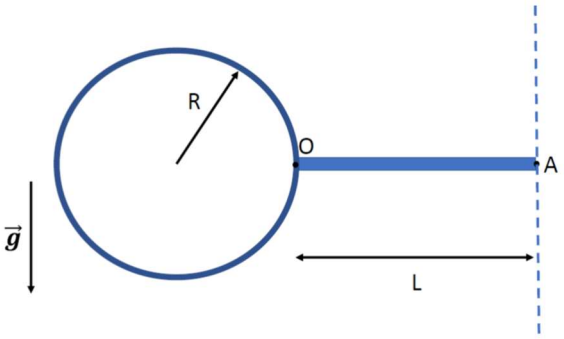
4. Dallo stesso sistema di equazioni del punto 3, si può ricavare la tensione:

$$T = 2mg \sin\theta = 21 \text{ N}.$$

Università degli studi dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Secondo parziale di Fisica Generale I - 26/05/2023

Nome	Cognome	N. matricola	Docente



Problema (15 punti) Un corpo rigido è costituito da un'asta sottile di massa m e lunghezza L e da un anello di raggio R=L/2 e massa M=2m saldati nel punto O (vedi figura). Il sistema può ruotare liberamente (senza attrito) intorno ad un'asse passante per il punto O e perpendicolare al disegno. **1.** Determinare la distanza del centro di massa del corpo dal punto O (*3 punti*); **2.** Verificare che il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto al punto O è $I_O = 0.4\ Kgm^2$ (*3 punti*);
Per mantenere il sistema in equilibrio statico, con l'asta orizzontale, viene applicata una forza $\vec{F}$ nel punto A e lungo la direzione indicata dalla linea tratteggiata (vedi figura). **3.** Dopo aver scelto un sistema di riferimento, indicare tutte le forze che agiscono sul sistema sia graficamente che specificandone le componenti nel sistema di riferimento scelto (*2 punti*); **4.** determinare la forza $\vec{F}$ e la reazione vincolare $\vec{R}_v$ prodotta dal vincolo per mantenere il sistema in equilibrio statico (*4 punti*). Supponendo di eliminare la forza $\vec{F}$, il corpo inizia a ruotare sotto l'azione della forza gravitazionale. **5.** Determinare la velocità angolare del sistema nell'istante in cui l'asta è in posizione verticale (*3 punti*).

Dati: m = 1.2 kg; L = 50 cm; $g = 9.8\frac{m}{s^2}$. Formule utili: $I_{an} = MR^2, I_{as} = \frac{mL^2}{12}$ sono i momenti d'inerzia dell'anello (*an*) e dell'asta (*as*) rispetto al proprio centro di massa, rispettivamente.

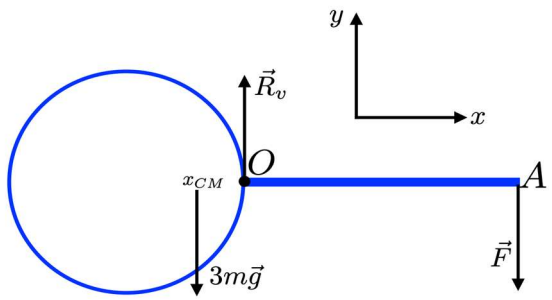
Soluzione:

1. Scegliamo il sistema di riferimento xyz centrato in O, con l'asse x orizzontale orientato verso destra, l'asse y verticale orientato verso l'alto ed asse z ortogonale al piano del foglio e con verso uscente. La posizione x_{CM} del centro di massa è data da:

$$x_{CM} = \frac{-MR + \frac{mL}{2}}{M+m} = -\frac{L}{6} = -8.3cm$$

2. Essendo il momento d'inerzia una quantità additiva, il momento d'inerzia del sistema rispetto al punto O è dato da: $I_O = I_{an,O} + I_{as,O}$, dove $I_{an,O}, I_{as,O}$ sono i momenti d'interzia dell'anello (an) e dell'asta (as), rispetto ad O. Utilizzando Il teorema di Huygens-Steiner, si ha:
$I_{an,O} = I_{an} + MR^2 = 2MR^2$, $I_{as,O} = I_{as} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3}$, quindi: $I_O = \frac{4}{3}mL^2 = 0.4Kgm^2$

3. La risultante delle forze applicate al sistema è:
$\vec{R} = 3m\vec{g} + \vec{R_v} + \vec{F}$, dove la forza peso $3m\vec{g} = -3mg\hat{u_y}$ è applicata nel CM
$\vec{F} = F_y\hat{u_y}$ è applicata nel punto A, $\vec{R_v} = R_{v,y}\hat{u_y}$ è applicata in O



4. Imponendo la condizione di equilibrio statico, la prima equazione cardinale fornisce:
$\vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{R_v} = -3m\vec{g} - \vec{F} = (3mg - F_y)\hat{u_y}$, ovvero $R_{v,y} = 3mg - F_y$.
La seconda equazione cardinale fornisce $\vec{M_O} = x_{CM}\hat{u_x} \times 3m\vec{g} + L\hat{u_x} \times \vec{F}$,
dove $\vec{M_O}$ è il momento delle forze calcolato rispetto al polo O. Imponendo la condizione di equilibrio statico, abbiamo:

$$\vec{M_O} = (-3mgx_{CM} + LF_y)\hat{u_z} = 0 \Rightarrow F_y = \frac{3mgx_{CM}}{L} = -\frac{3mg|x_{CM}|}{L} = -\frac{mg}{2} = -5.9N$$

Andando a sostituire nell'espressione per $R_{v,y}$, otteniamo: $R_{v,y} = \frac{7mg}{2} = 41N$

5. In assenza della forza $\vec{F}$ il sistema comincia ad oscillare attorno al polo O. Applicando la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante in cui il sistema ha velocità angolare nulla e l'asta è in posizione orizzontale e l'istante in cui l'asta è in posizione verticale, abbiamo:

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = 3mg|x_{CM}| \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6mg|x_{CM}|}{I_O}} = \sqrt{\frac{mgL}{I_O}} = 3.8\,rads^{-1}$$

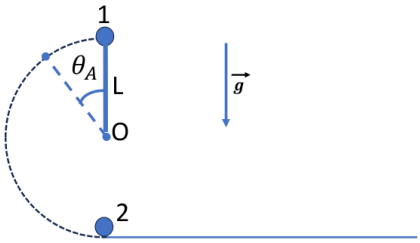
Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Prova scritta di Fisica Generale I - 20/06/2023

Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

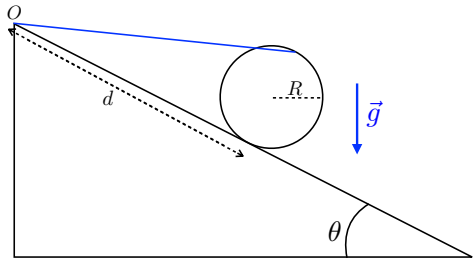
- Tempo a disposizione: 2h 30min; perché il secondo e terzo problema siano valutati è necessario conseguire almeno 3.5 punti nel primo problema.

Problema 1 (7 punti)



Un corpo puntiforme (corpo 1) è legato tramite una sbarra rigida (di massa trascurabile e lunghezza L=1.0 m) a un punto fisso O. Il sistema è disposto su un piano verticale (vedi figura). Si supponga che il corpo 1 inizi a cadere verso sinistra con velocità iniziale nulla. Nel caso ideale (trascurando qualsiasi tipo di possibile attrito), (a) determinare la velocità del corpo 1 nel punto A (individuato dall'angolo $\theta_A = \pi/6$ rad) [2 punti].
(b) Calcolare la componente tangenziale (lungo la traiettoria curvilinea) dell'accelerazione del corpo 1 nel punto A [1 punto]. Successivamente si supponga che il corpo 1 urti un secondo corpo puntiforme di massa $m_2 = 2m_1$ (il corpo 2 posto sul piano orizzontale come mostrato in figura) con velocità $v_1^{(i)} = 6.3$ m/s. Considerando l'urto *elastico* e che la velocità del corpo 2 è nulla prima dell'urto, (c) determinare la velocità del corpo 1 dopo l'urto [3 punti]. (d) È richiesta l'analisi dimensionale su ogni equazione utilizzata per la risoluzione del problema [1 punto].

Problema 2 (15 punti) Un disco di massa $M = 1.2$kg e raggio $R = 50$cm si trova sulla superficie di un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto alla direzione orizzontale, a distanza $d = 2$m dal punto O (come in figura). E' presente attrito tra la superficie del piano ed il disco. Il vertice del disco diametralmente opposto al punto di contatto con il piano è collegato al punto O da un filo inestensibile e di massa trascurabile, che mantiene il sistema in condizioni di equilibrio statico. (a) Dopo aver scelto un sistema di riferimento, indicare tutte le forze che agiscono sul sistema sia graficamente che specificandone le componenti nel sistema di riferimento scelto [2 punti]. (b) Calcolare le componenti della tensione del filo nelle direzioni parallela ed ortogonale al piano [5 punti]. Rimuovendo il filo, si osserva che il disco compie un moto di puro rotolamento. In tale condizione, (c) calcolare l'accelerazione angolare del disco [3 punti] e (d) la velocità angolare del disco dopo che il centro di massa ha percorso un tratto di lunghezza $l = 3.5$m lungo il piano inclinato [5 punti]. NOTA: momento di inerzia del disco $I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2$.



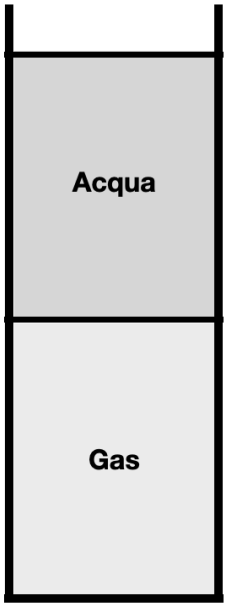
Problema 3 (8 punti) In un recipiente cilindrico (chiuso nella parte superiore da un pistone adiabatico) con pareti adiabatiche, la cui sezione misura $A = 10$ dm^2, sono contenuti una massa $m = 100$ kg di acqua (nella parte superiore) e n moli di un gas ideale biatomico (nella parte inferiore). Tra gas e acqua è presente un pistone adiabatico. Entrambi i pistoni possono scorrere verticalmente e hanno massa e spessore trascurabili. All'inizio, acqua e gas occupano lo stesso volume V_0, e la temperatura del gas è $T_0 = 300$ K. Sapendo che la densità dell'acqua è $\rho = 10^3$ kg m^{-3} e che la pressione atmosferica è $p_{\text{atm}} = 1.013 \cdot 10^5$ Pa, determinare:

- (a) il volume V_0 del gas; [1 punto]
- (b) il numero di moli n del gas. [1 punto]

Successivamente, aggiungendo una massa M (lentamente, in modo che la trasformazione sia adiabatica reversibile) sul pistone superiore, il gas viene compresso fino a che il suo volume non diventa $V_1 = V_0/2$. Determinare, in questa condizione:

- (c) la temperatura T_1 del gas; [2 punti]
- (d) la massa finale M aggiunta sul pistone; [1 punto]

- (e) la quantità di calore da fornire al gas per riportare il suo volume al valore iniziale V_0. NOTA: si assuma che la trasformazione sia isobara. [3 punti]



Problema 1 - Soluzione (a) Imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra la posizione iniziale e il punto A, otteniamo:

$$\frac{1}{2}m_1 v_A^2 = m_1 g h_A \quad [ML^2T^{-2}] \tag{1}$$

dove $h_A = L(1-\cos\theta_A)$ $[L]$ è il dislivello tra la posizione iniziale e il punto A. Di conseguenza, la velocità nel punto A è

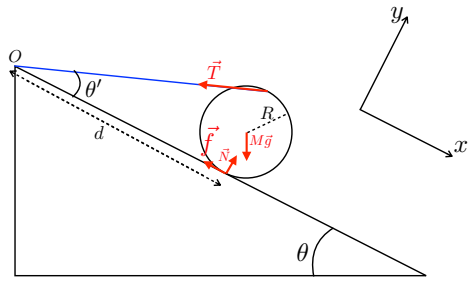
$$v_A = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_A)} = 1.6 \quad m/s \quad [LT^{-1}] \tag{2}$$

(b) L'unica forza che determina un contributo nella direzione tangente alla traiettoria è la forza peso. Utilizzando il secondo principio della dinamica, possiamo determinare la componente tangente della accelerazione, cioè $a_t = g\sin\theta_A = 4.9$ m/s $[LT^{-2}]$. (c) In questo caso si conserva la componente della quantità di moto lungo il piano orizzontale, quindi $m_1 v_1^{(i)} = m_1 v_1^{(f)} + m_2 v_2^{(f)}$ $[MLT^{-1}]$, dove $v_1^{(i)}, v_1^{(f)}$ sono la velocità del corpo 1 prima e dopo l'urto, rispettivamente, mentre $v_2^{(f)}$ è la velocità del corpo 2 dopo l'urto. Considerando anche la conservazione dell'energia cinetica (cioè $m_1 v_1^{(i)2} = m_1 v_1^{(f)2} + m_2 v_2^{(f)2}$ $[ML^2T^{-2}]$), è possibile ottenere la velocità finale del corpo 1 in funzione della velocità $v_1^{(i)}$

$$v_1^{(f)} = -v_1^{(i)}/3 = -2.1 \quad m/s \quad [LT^{-1}]. \tag{3}$$

Problema 2 - Soluzione

Scegliamo il sistema di riferimento xy orientato come in figura, con asse z uscente. La tensione è orientata nella



direzione del filo. L'angolo θ' tra il filo ed il piano inlcinato è tale per cui:

$$\cos\theta' = \frac{d}{d^2+4R^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad , \quad \sin\theta' = \frac{2R}{d^2+4R^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{4}$$

Il diagramma delle forze agenti sul disco è schematizzato in figura, per cui abbiamo:

$$\vec{T} = -T(\cos\theta', \sin\theta', 0) \tag{5}$$
$$M\vec{g} = Mg(\sin\theta, -\cos\theta, 0) \tag{6}$$
$$\vec{N} = N(0,1,0) \tag{7}$$
$$\vec{f} = -f(1,0,0) \tag{8}$$

essendo $\vec{N}$ ed $\vec{f}$ i componenti della reazione vincolare del piano inclinato nelle direzioni ortogonale e parallela al piano, rispettivamente. In condizioni di equilibrio statico, le due equazioni cardinali sono:

$$\vec{T} + M\vec{g} + \vec{f} + \vec{N} = 0, \tag{9}$$
$$R\hat{y} \times \vec{T} - R\vec{y} \times \vec{f} = 0. \tag{10}$$

Proiettando le equazioni (9) sugli assi x, y, z, otteniamo:

$$x: \quad -T\cos\theta' + Mg\sin\theta - f = 0, \tag{11}$$
$$y: \quad -T\sin\theta' - Mg\cos\theta + N = 0, \tag{12}$$
$$z: \quad RT\cos\theta' - Rf = 0. \tag{13}$$

L'Eq. (13) implica: $T\cos\theta' = f$, che, sostituito in (11), fornisce:

$$T = \frac{Mg\sin\theta}{2\cos\theta'} = 3.3\text{N}. \tag{14}$$

Se $\vec{T} = 0$, la condizione di equilibrio statico non è più verificata ed il disco si mette in moto. Proiettando le equazioni cardinali lungo x e z abbiamo pertanto:

$$\begin{aligned} Ma_{CM} &= Mg\sin\theta - f \quad (15)\\ I_{CM}\alpha &= Rf, \quad (16)\end{aligned}$$

dove α è l'accelerazione angolare, $I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$ è il momento d'inerzia del disco calcolato rispetto al centro di massa (CM) ed a_{CM} è l'accelerazione del CM. Dal momento che il moto è di puro rotolamento, abbiamo: $a_{CM} = R\alpha$. Pertanto, sostituendo l'Eq. (16) in (15), abbiamo:

$$\alpha = \frac{Mg\sin\theta}{MR + I_{CM}/R} = \frac{2g\sin\theta}{3R} = 6.5\text{rad s}^{-2}. \quad (17)$$

Per ottenere la velocità angolare dopo che il CM ha percorso il tratto l possiamo utilizzare la cinematica. Chiamando $\bar{t}$ l'istante in cui CM ha percorso l ed $\bar{\omega}$ la corrispondente velocità angolare, abbiamo:

$$\begin{aligned} x_{CM}(\bar{t}) &= l \quad (18)\\ \bar{\omega} &= \alpha\bar{t}, \quad (19)\end{aligned}$$

che implica:

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{2l\alpha}{R}} = 9.5\text{rads}^{-1}. \quad (20)$$

Un metodo alternativo per calcolare $\bar{\omega}$ consiste nell'utilizzare la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{I_{CM}\bar{\omega}^2}{2} + \frac{M\bar{v}_{CM}^2}{2} = Mgh, \quad (21)$$

dove al primo membro abbiamo utilizzato il teorema di Koenig, $\bar{v}_{CM} = R\bar{\omega}$ ed $h = l\sin\theta$ è la differenza di quota del CM tra l'istante iniziale e l'istante $\bar{t}$. Risolvendo per $\bar{\omega}$ abbiamo:

$$\bar{\omega} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{gl\sin\theta}{3}}, \quad (22)$$

che è equivalente alla (20).

Problema 3 - Soluzione

(a) La densità è definita come il rapporto tra massa e volume, quindi il volume dell'acqua, che è uguale a quello del gas, si ricava dall'equazione

$$V_0 = \frac{m}{\rho} = 0.1\,\text{m}^3\,. \quad (23)$$

(b) La pressione sul gas è data dalla somma della pressione atmosferica e della pressione dovuta al peso dell'acqua. Ricordando che la pressione è il rapporto tra forza e superficie, si ottiene

$$p_0 = p_{atm} + \frac{mg}{A} = 1.11\cdot 10^5\,\text{Pa}\,. \quad (24)$$

Il numero di moli si ricava dall'equazione di stato dei gas perfetti

$$n = \frac{p_0 V_0}{RT_0} = 4.45\,\text{moli}\,. \quad (25)$$

(c) In una trasformazione adiabatica vale la relazione $pV^\gamma = \text{cost}$. Da questa relazione, e sapendo che $\gamma = \frac{7}{5}$ per un gas biatomico, si può ricavare la pressione p_1

$$p_1 = p_0\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma = 2.93\cdot 10^5\,\text{Pa}\,. \quad (26)$$

Nota la pressione, si può ricavare la temperatura dalla legge di stato dei gas perfetti applicata allo stato termodinamico 1

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = 395.85\,\text{K}\,. \quad (27)$$

(d) La massa M aggiunta sul pistone si ricava sapendo che la pressione p_1 è la somma di quella iniziale p_0 e della pressione dovuta alla forza peso della massa M

$$p_1 = p_0 + \frac{Mg}{A} \tag{28}$$

$$M = \frac{(p_1 - p_0)A}{g} = 1.86 \cdot 10^3 \,\mathrm{kg} \tag{29}$$

(e) In una trasformazione isobara la pressione rimane costante, cioè $p_2 = p_1$. Il calore scambiato in una isobara si calcola usando la formula $Q = nc_p\Delta T$, dove ΔT è la variazione di temperatura tra stato finale ed iniziale. Per calcolare T_2 si utilizza il fatto che in una trasformazione isobara si ha $\frac{T}{V} = \text{cost}$ (conseguenza della legge di stato dei gas perfetti). Quindi, poichè per far tornare il volume a quello iniziale si deve avere $V_2 = V_0$; $V_1 = V_0/2$ si ottiene

$$\frac{T_2}{V_0} = \frac{T_1}{V_1}; \; T_2 = 2T_1 \tag{30}$$

$$Q = nc_p(T_2 - T_1) = nc_pT_1 = 5.13 \cdot 10^4 \,\mathrm{J} \tag{31}$$

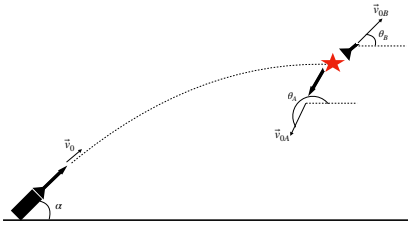
Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Prova scritta di Fisica Generale I - 04/07/2023

Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

- Tempo a disposizione: 2h 30min; perché il secondo e terzo problema siano valutati è necessario conseguire almeno 3.5 punti nel primo problema.

Problema 1 (7 punti)



Un razzo di massa $M = 100$ kg viene sparato da un cannone inclinato di $\alpha = 45°$ rispetto alla direzione orizzontale con una velocità iniziale $v_0 = 80$ m/s. (a) Determinare l'altezza massima raggiunta dal razzo [1 punto] e (b) il raggio di curvatura della traiettoria in tale punto [2 punti]. Quando il razzo raggiunge l'altezza massima, esso esplode spezzandosi in due frammenti. Immediatamente dopo l'esplosione il razzo si divide in due frammenti A e B, che hanno una velocità iniziale pari a v_{0A} e v_{0B}, rispettivamente. La massa del frammento A è $m_A = 70$ kg. Le velocità iniziali dei frammenti formano un angolo $\theta_A = 210°$ e $\theta_B = 10°$ con la direzione orizzontale, dove questi valori si riferiscono alla definizione degli angoli utilizzata in figura. (c) Determinare le velocità di A e B subito dopo l'esplosione [3 punti]. (d) È richiesta l'analisi dimensionale su ogni equazione utilizzata per la risoluzione del problema [1 punto].

Problema 2 (15 punti)

Una sfera di raggio $R = 10$ cm e massa $m = 1$ kg viene lasciata cadere con velocità iniziale nulla. All'istante in cui inizia il moto di caduta il centro di massa si trova ad un'altezza $h = 1$ m dal suolo e la sfera è messa in rotazione da un meccanismo interno che applica un momento $M = 0.20$ N m rispetto al centro di massa. (a) Determinare l'accelerazione del centro di massa e quella angolare rispetto al centro di massa [2 punti]. (b) Considerando h come la distanza percorsa dal centro di massa del sistema, determinare il tempo di volo t_v [2 punti]; (c) determinare, al momento dell'impatto con il suolo, sia la velocità angolare rispetto al centro di massa [3 punti], (d) sia la velocità del centro di massa [2 punti]. Dopo l'urto con il suolo, la sfera non rimbalza e inizia a strisciare lungo un piano orizzontale con velocità del centro di massa nulla ($v_0 = 0$ m/s) e velocità angolare $\omega_0 = 2.0$ rad/s. Noto il coefficiente di attrito dinamico tra suolo e sfera ($\mu_d = 0.20$) e considerando il meccanismo interno ancora agente con un momento $M = 0.20$ N m, (e) determinare il tempo che impiega la sfera, dopo l'urto con il suolo, a muoversi di puro rotolamento [6 punti]. *[Nota: il momento d'inerzia della sfera rispetto al suo centro di massa è $I = 2mR^2/5$.]*

Problema 3 (8 punti)

Una mole di gas perfetto monoatomico compie un ciclo termodinamico costituito dalle seguenti trasformazioni
$A \to B$: compressione isoterma reversibile a contatto con una sorgente a temperatura $T_A = 300$ K; $B \to C$: isocora reversibile a contatto con una sorgente a temperatura $T_C = 500$ K; $C \to D$: espansione adiabatica irreversibile; $D \to A$: isocora reversibile a contatto con una sorgente a temperatura T_A. (a) Disegnare il ciclo nel piano p-V [1 punto]. Conoscendo il volume del gas nello stato A ($V_A = 2 \times 10^{-3}$ m^3), il calore scambiato dal gas nella trasformazione $A \to B$ ($Q_{AB} = -1700$ J) e la variazione di energia interna nella trasformazione $D \to A$ ($\Delta U_{DA} = -500$ J), determinare: (b) il valore di pressione, volume e temperatura del gas negli stati B e D [2 punti]; (c) il rendimento della macchina termica [3 punti]; (d) la variazione di entropia dell'universo nel ciclo [2 punti].

Dati utili: $g = 9.81$ m/s^2, $R = 8.314$ J/(mol $\times$ K)

Problema 1 - Soluzione

(a) L'altezza massima raggiunta dal razzo si ottiene tramite la conservazione dell'energia meccanica

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}Mv_0^2 = Mgh + \frac{1}{2}Mv_0^2\cos^2\alpha \qquad \text{Analisi dimensionale } [ML^2T^{-2}] \\ &\implies h = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = 163.1\,\text{m} \qquad \text{Analisi dimensionale } [L]. \end{aligned} \tag{1}$$

(b) L'accelerazione centripeta è data dalla formula $a_n = \frac{v^2}{R}$, dove R è il raggio di curvatura della traiettoria. Nel punto considerato l'accelerazione centripeta è data da $a_n = g$, quindi risulta $R = v^2/g$. Inoltre, sapendo che nel punto di massima altezza la velocità del razzo è diretta solo lungo l'asse x, e che lungo questo asse la velocità è costante nel moto, si ricava che $v = v_0\cos\alpha$ e quindi che

$$R(t) = (v_0^2\cos^2\alpha)/g = 326.2\,\text{m} \qquad \text{Analisi dimensionale } [L]. \tag{2}$$

(c) Per calcolare le velocità dei frammenti dopo l'esplosione si utilizza la conservazione della quantità di moto. Assumiamo che il verso positivo dell'asse orizzontale sia a destra, mentre quello dell'asse verticale sia in alto. Definiamo $\theta'_A = \theta_A - 180^\circ = 30^\circ$, cioè l'angolo che il frammento A forma con la direzione negativa dell'asse orizzontale.

$$\begin{cases} p_{x,\text{in}} = p_{x,\text{fin}} \\ p_{y,\text{in}} = p_{y,\text{fin}} \end{cases} \implies \begin{cases} Mv_0\cos\alpha = m_Bv_{0B}\cos\theta_B - m_Av_{0A}\cos\theta'_A \\ 0 = m_Bv_{0B}\sin\theta_B - m_Av_{0A}\sin\theta'_A \end{cases} \qquad \text{Analisi dimensionale } [MLT^{-1}] \tag{3}$$

$$\begin{cases} v_{0A} = \frac{Mv_0\cos\alpha}{m_A(\sin\theta_A\cot\theta_B - \cos\theta'_A)} = 41.03\,\text{m/s} \\ v_{0B} = \frac{Mv_0\cos\alpha}{m_B(\cos\theta_B - \sin\theta_B\cot\theta'_A)} = 275.66\,\text{m/s} \end{cases} \qquad \text{Analisi dimensionale } [LT^{-1}]\,. \tag{4}$$

Problema 2 - Soluzione

(a) L'accelerazione angolare della sfera si ricava dalla seconda equazione cardinale, mentre l'accelerazione del centro di massa corrisponde a quella di gravità ($g = 9.81$ m/s^2)

$$M = I\alpha_0 \implies \alpha_0 = \frac{M}{I} = \frac{5M}{2mR^2} = 50\,\text{rad/s}^2\,, \tag{5}$$

dove $I = \frac{2}{5}mR^2$ è il momento di inerzia della sfera rispetto ad un asse qualsiasi passante per il centro di massa.
(b) il tempo di volo t_v è dato dalla legge oraria ottenuta dalla prima equazione cardinale

$$d = \frac{1}{2}gt_v^2 \implies t_v = \sqrt{\frac{2d}{g}} = 0.43\,\text{s}\,, \tag{6}$$

dove $d = h - R = 0.9$ m è la distanza percorsa dal centro di massa prima che la sfera tocchi il suolo.

(c-d) Le equazione per la velocità del centro di massa e per la velocità angolare al momento dell'urto sono quelle di un moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases} \omega(t = t_v) = \alpha_0 t_v \\ v_{\text{CM}}(t = t_v) = gt_v \end{cases} \implies \begin{cases} \omega(t = t_v) = \frac{5M}{2mR^2}\sqrt{\frac{2(h-R)}{g}} = 21.42\,\text{rad/s} \\ v_{\text{CM}}(t = t_v) = \sqrt{2(h-R)g} = 4.2\,\text{m/s} \end{cases}\,. \tag{7}$$

(e) Dopo l'impatto con il suolo la sfera inizia a strisciare e risulta:

$$a_{CM} = \frac{F_a}{m} = \frac{\mu_d mg}{m} = \mu_d g\,, \tag{8}$$

$$M - F_aR = I\alpha \implies \alpha = \frac{M - F_aR}{I} = \frac{M - \mu_d mgR}{\frac{2}{5}mR^2} \tag{9}$$

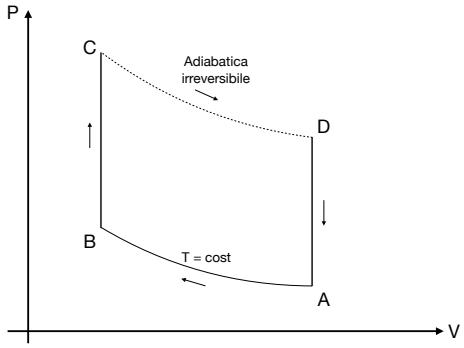
Le equazione di $v_{\rm CM}$ e ω al variare del tempo sono

$$\begin{aligned} v_{\rm CM}(t) =& a_{\rm CM} t = \mu_d g t \\ \omega(t) =& \omega_0 + \alpha t \,, \end{aligned} \tag{10}$$

dove il tempo è misurato a partire dall'istante in cui avviene l'impatto con il suolo. L'istante t_r in cui il moto diventa di puro rotolamento si trova imponendo $v_{\rm CM}(t = t_r) = \omega(t = t_r)R$.

$$t_r = \frac{\omega_0 R}{\mu_d g - \alpha R} = 0.11\,{\rm s}\,. \tag{11}$$

Problema 3 - Soluzione
(a)



(b) Per ricavare V_B si utilizza l'espressione del calore scambiato durante una trasformazione isoterma

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_A \log \frac{V_B}{V_A} \implies V_B = V_A e^{\frac{Q_{AB}}{nRT_A}} = 1.01 \times 10^{-3}\,{\rm m}^3\,. \tag{12}$$

La pressione nello stato B si ricava dalla legge di stato dei gas perfetti

$$P_B V_B = nRT_B \implies P_B = \frac{nRT_A}{V_B} = 2.47 \times 10^6\,{\rm Pa}\,. \tag{13}$$

La temperatura in D si ricava dall'espressione generica della variazione di energia interna applicata alla trasformazione $D \to A$

$$\Delta U_{DA} = nc_V(T_A - T_D) \implies T_D = T_A - \frac{\Delta U_{DA}}{nc_V} = 340.1\,{\rm K}\,. \tag{14}$$

La pressione nello stato D si ricava dalla legge di stato dei gas perfetti

$$P_D V_D = nRT_D \implies P_D = \frac{nRT_D}{V_D} = 1.41 \times 10^6\,{\rm Pa}\,. \tag{15}$$

(c) i calori scambiati nelle varie trasformazioni sono:

$$\begin{aligned} Q_{AB} =& -1700\,{\rm J}\,, \\ Q_{BC} =& nc_V(T_C - T_A) = 2494.2\,{\rm J}\,, \\ Q_{CD} =& 0\,{\rm J}\,, \\ Q_{DA} =& nc_V(T_A - T_D) = \Delta U_{DA} = -500\,{\rm J}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Il calore totale scambiato dal gas in un ciclo è pari a

$$Q_{\rm TOT} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = 294.2\,{\rm J}\,. \tag{17}$$

Essendo $Q_{\rm TOT} > 0$ la macchina è in regime termico. Il corrispondente rendimento è dato da

$$\xi = \frac{W_{\rm TOT}}{Q_{\rm ass}} = 1 + \frac{Q_{\rm ced}}{Q_{\rm ass}} = 1 + \frac{Q_{AB} + Q_{DA}}{Q_{BC}} = 0.12\,, \tag{18}$$

dove $Q_{\rm ass}$ e $Q_{\rm ced}$ indicano il calore assorbito e ceduto in un ciclo, rispettivamente.

(d) La variazione di entropia dell'universo nel ciclo corrisponde a quella dell'ambiente poichè il gas compie un ciclo termodinamico nel quale non si ha variazione di entropia.

$$\Delta S_{\rm univ} = \Delta S_{\rm amb} = -\frac{Q_{AB}}{T_A} - \frac{Q_{BC}}{T_C} - \frac{Q_{DA}}{T_A} = 2.34\,{\rm J/K}\,. \tag{19}$$

Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Prova scritta di Fisica Generale I - 18/07/2023

Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

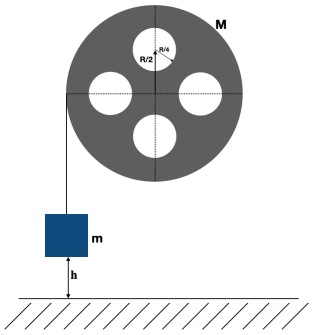
Tempo a disposizione: 2h 30min; perché il secondo e terzo problema siano valutati è necessario conseguire almeno 4 punti nel primo problema.

Problema 1 (7 punti)

Una massa m=9.0 kg è appesa ad un filo inestensibile di lunghezza l=1.6 m.
a) Nel regime di piccole oscillazioni, dimostrare che il periodo è T = 2.5 s [1 punto];
b) calcolare la pulsazione Ω associata a T [1 punto];
c) Nel regime di piccole oscillazioni, sapendo che l'angolo iniziale è $\theta(t=0)=\theta_0$ e la velocità iniziale è nulla [$\theta(t)$ indica l'angolo che il filo del pendolo forma con la verticale al tempo t], scrivere la legge oraria del sistema considerato [2 punti];
d) calcolare la massima energia potenziale durante il moto per $\theta_0 = 7.0°$ [1.5 punti];
e) calcolare la velocità al tempo $t_1=\pi/(7\Omega)$ [1.5 punti].

Problema 2 (15 punti)

Una puleggia di massa M=1.5 kg è costituita da un disco sottile omogeneo (di raggio R=60 cm) dotato di quattro fori circolari di raggio $r = R/4$ e i cui centri distano $d = R/2$ dal centro del disco grande (vedi figura). La puleggia può ruotare intorno ad un asse orizzontale fisso passante per il suo centro. Al disco è avvolta una fune, inestensibile e di massa trascurabile, alla cui estremità è appesa una massa m=100 g. Al tempo t=0 il corpo, inizialmente fermo, viene lasciato libero di muoversi.
Determinare:
a) la superficie della puleggia [1 punti];
b) la densità superficiale della puleggia [2 punti];
c) il momento d'inerzia della puleggia rispetto all'asse di rotazione [4 punti];
d) il valore della tensione della fune e dell'accelerazione angolare della puleggia [5 punti];
e) il valore della velocità angolare della puleggia quando il corpo é sceso di una quota h=1 m [3 punti].



Problema 3 (8 punti)

2 moli di un gas ideale monoatomico subiscono una trasformazione dallo stato termodinamico A (T_A= 200 °K e P_A=2·10^5 Pa) allo stato B venendo a contatto termico con una sorgente a temperatura T_B = 600 °K e mantenendo il volume costante. Il gas subisce poi una trasformazione reversibile descritta dall'equazione $P = aV$ con $a > 0$ che lo porta dallo stato B allo stato C (T_C =1000 °K). Viene poi effettuata una trasformazione adiabatica reversibile da C a D con P_D=P_A ed infine una trasformazione isobara reversibile che lo riporta di nuovo nello stato termodinamico A.
Determinare:
a) il grafico nel piano p-V del ciclo termodinamico descritto [1 punto];
b) il volume V_C [4 punti];
c) la variazione complessiva di entropia subita dalla sorgente a temperatura T_B nella trasfomazione AB [3 punti].

Dati utili: $g = 9.81$ m/s, $R = 8.31$ J/(mol K).

Problema 1 - Soluzione
a) il periodo è pari a:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.6\text{ m}}{9.81\text{ m/s}^2}} = 2.5\text{ s}.$$

da cui
b)

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2.5\text{ rad/s}.$$

c) Nel regime di piccole oscillazioni, la legge oraria è data da: $\theta = A\cos(\Omega t + \phi)$. Considerando le condizioni iniziali $\theta(t=0) = \theta_0$ e $d\theta/dt = 0$, otteniamo $\theta = \theta_0\cos(\Omega t)$.
d) La variazione di energia potenziale è:

$$\Delta E_p = mgl(1 - \cos\theta_0) = 1.05\text{ J}$$

e) L'angolo corrispondente al tempo t_1 è:

$$\theta_1 = \theta_0\cos(\Omega t_1) = 0.11\text{ rad} = 6.3^\circ$$

e considerando la conservazione dell'energia meccanica totale si ha:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgl(1 - \cos\theta_1) = mgl(1 - \cos\theta_0)$$

da cui si ricava v_1:

$$v_1 = \sqrt{2gl(\cos\theta_1 - \cos\theta_0)} = 0.21\text{ m/s}$$

Possiamo risolvare il quesito del punto (e) utilizzando l'approssimazione di piccole oscillazioni. Dalla legge oraria riportata nel punto (c), otteniamo: $\omega(t) = \theta_0\Omega\sin(\Omega t)$ dove ω è la velocità angolare. Considerando che la velocità è data semplicemente dalla formula $v(t) = l\omega(t)$, possiamo scrivere $v(t) = l\theta_0\Omega\sin(\Omega t)$ e quindi $v_1 = l\theta_0\Omega\sin(\Omega t_1) = 0.21$ m/s

---

Problema 2 - Soluzione
a) la superficie della puleggia è data dalla differenza tra la superficie del disco di raggio R e la superficie corrispondente ai quattro dischi vuoti:

$$S_P = \left(\pi R^2 - 4\frac{\pi R^2}{16}\right) = \frac{3\pi R^2}{4} = 0.85\text{ m}^2$$

b) la corrispondente densità superficiale della puleggia è data dal rapporto tra la massa della puleggia e la sua superficie:

$$\rho = \frac{M}{S_P} = \frac{M}{\left(\pi R^2 - 4\frac{\pi R^2}{16}\right)} = \frac{M}{\left(\frac{3\pi R^2}{4}\right)} = 1.8\text{ kg/m}^2$$

c) Il momento d'inerzia della puleggia (I_p) è dato dalla differenza tra il momento d'inerzia del disco di raggio R senza fori (I_D) e quello di quattro dischi di raggio $R/4$ ($4I_d$):

$$I_p = I_D - 4I_d$$

Per il momento di inerzia dei dischi di raggio $R/4$, applicando il teorema di Huygens-Steiner si ottiene:

$$I_d = \frac{m_d}{2}\frac{R^2}{16} + m_d\frac{R^2}{4} = \frac{9m_dR^2}{32}$$

dove m_d è la massa di ciascun disco di raggio $R/4$. Il momento di inerzia del disco di raggio R pieno è:

$$I_D = \frac{m_DR^2}{2}$$

con m_D la massa del disco grande pieno.
Inoltre è possibile scrivere per ciascun foro di raggio $R/4$: $m_d = \rho S = \frac{\rho\pi R^2}{16}$
e per il disco di raggio R: $m_D = \rho\pi R^2$. Tenendo conto dell'espressione della densità della puleggia si ricava $m_d = \frac{M}{12}$ e $m_D = \frac{4}{3}M$.

Pertanto il momento di inerzia totale è dato da: $I_p = \frac{55}{96}MR^2$ =0.3 kg m^2.

d) Le equazioni che descrivono il moto del sistema della puleggia-massa sono le seguenti:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ TR = I_p\alpha \\ a = \alpha R \end{cases}$$

da cui si ricava l'espressione per T e per α:

$$\begin{aligned} T &= \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I_p}} = 0.87 \text{ N} \\ \alpha &= \frac{TR}{I_p} = 1.74 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

d) L'accelerazione angolare risulta costante, cioè il moto è circolare uniformemente accelerato con

$$\omega = \alpha t = \frac{mgR}{I_P + mR^2}t$$

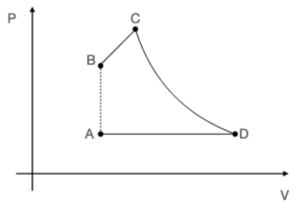
Considerando la conservazione dell'energia meccanica:

$$mgh = \frac{1}{2}m\omega_f^2R^2 + \frac{1}{2}I_p\omega_f^2$$

si ottiene il valore della velocità angolare della puleggia quando il corpo è sceso di una quota $h = 1m$: $\omega_f = \sqrt{\frac{2mgh}{mR^2+I_p}}$ = 2.4 rad/s.

Problema 3 - Soluzione

a)



b) Usando l'equazione di stato si ottiene

$$V_A = nRT_A/P_A$$

da cui V_A=1.66 $\cdot$ 10^{-2} m^3.
Poiché $V_B = V_A$ la pressione nello stato B sara' $P_B = nRT_B/V_B = P_A \cdot \frac{T_B}{T_A}$= 6 $\cdot$10^5 Pa.
Il parametro a della trasformazione BC può essere ricavato dalla relazione

$$a = P_B/V_B = 3.61 \cdot 10^7 \text{ Pa/m}^3.$$

Per il punto C vale $P_C = aV_C$ ma anche l'equazione di stato $P_CV_C = nRT_C$ per cui è possibile ricavare V_C, sostituendo P_C con aV_C nella seconda relazione:

$$V_C = \sqrt{nRT_C/a} = 2.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3.$$

c) La variazione di entropia della sorgente a temperatura T$_B$ è data da:

$$\Delta S_{sorg} = -\frac{Q_{AB}}{T_B}$$

Il calore scambiato nella trasformazione AB sarà pari alla variazione di energia interna in quanto non c'è variazione di volume, pertanto $Q_{AB} = \Delta U_{AB} = nc_V(T_B - T_A)$, quindi si ottiene ΔS_{sorg} =-16 J/°K.

Università degli Studi dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Prova scritta di Fisica Generale I - 01/09/2023

Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

Tempo a disposizione: 2h 30min. Affinché il secondo e terzo problema siano valutati è necessario conseguire almeno 4 punti nel primo problema.

Problema 1 (7 punti)

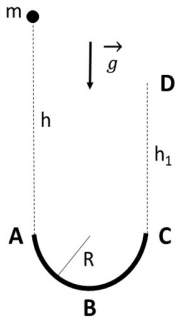
Un corpo puntiforme di massa m viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza h. Nel punto A esso entra in una guida circolare di raggio R. Trascurando tutte le forme di attrito, si determinino:

a) il modulo della velocità del corpo nel punto A [1 punto];
b) il modulo della velocità del corpo nel punto C [1 punto];
c) la reazione vincolare normale della guida nel punto B [2 punti].

Si consideri ora la presenza di attrito a contatto con la guida circolare. Si osserva che il corpo, riemergendo verticalmente dal punto C, riesce ad arrivare ad un'altezza h_1 nel punto D. In queste condizioni, si calcolino:

d) il lavoro totale compiuto dalla forza di attrito [2 punti];

E richiesta l'analisi dimensionale su ogni equazione utilizzata per la risoluzione del problema [1 punto].

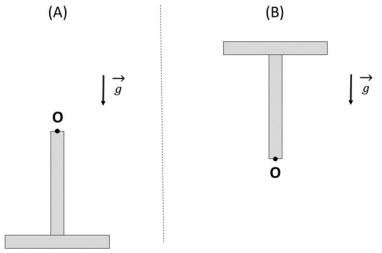


Dati: m = 0.30 kg, h = 1.5 m, R = 0.40 m, h_1 = 1.2 m, g = 9.8 m/s^2.

Problema 2 (15 punti)

Un corpo rigido è formato da due sbarrette omogenee attaccate a formare una T, come in figura. Entrambe hanno massa M e lunghezza L. Il corpo è posto su un piano verticale, vincolato a un perno nel punto O, che permette di ruotare attorno all'asse perpendicolare al foglio. Trascurando tutti gli attriti, si determinino:

a) il momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse passate per il polo O [4 punti];
b) l'energia necessaria a sollevare il corpo dalla posizione di equilibrio stabile in basso (A) a quella di equilibrio instabile in alto (B) [5 punti];



Dalla posizione (B), si ipotizzi di spostare di poco il corpo in modo da farlo cadere verso il basso partendo con velocità nulla. Al passaggio nella posizione (A), calcolare, rispetto al polo O,

c) la velocità angolare del corpo [2 punti];
d) il momento angolare posseduto dal corpo [2 punti],
e) il modulo della velocità del centro di massa [2 punti],

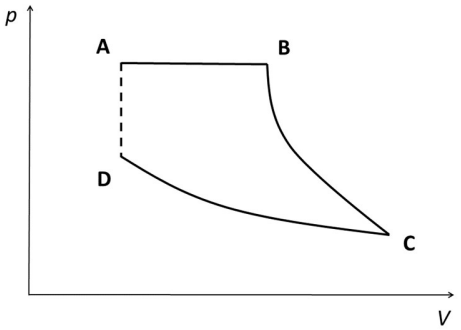
Dati: M = 1.1 kg, L = 0.60 m.

NOTA: momento d'inerzia di una sbarretta omogenea rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$.

Problema 3 (8 punti)

Una quantità pari a n moli di un gas monoatomico compie un ciclo composto dalle trasformazioni riportate nella figura accanto. AB è un'isobara reversibile, BC è un'adiabatica reversibile, CD è un'isoterma reversibile, e infine DA è un'isocora irreversibile effettuata mettendo a contatto il gas con una sorgente a temperature T_A. Si determinino:

a) le temperature T_A,T_B *e* T_C [2 punti];
b) il rendimento della macchina termica [2 punti];
c) la variazione di entropia del gas nella trasformazione AB [2 punti].
d) la variazione di entropia dell'universo termodinamico su un ciclo [2 punti].



Dati: n = 1.50, p_A = 2.00 x 10^6 Pa, V_A = 3.00 x 10^{-3} m^3, V_B = 1.50 V_A, V_C = 6.00 V_A, R = 8.31 J / (mol · K)

Soluzione

Problema 1

a) Nella caduta il corpo è soggetto alla sola forza peso, per cui la velocità in A può essere calcolata dall'applicazione della conservazione dell'energia meccanica tra la quota iniziale e il punto A:
$mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{2gh} = 5.4$ m/s

b) Poiché gli attriti sono trascurabili e non essendoci altre forze che compiono lavoro, il modulo della velocità in C sarà la stessa del punto A, essendo i due punti alla stessa quota.

c) La velocità in B può essere di nuovo calcolata con la conservazione dell'energia meccanica, considerando il dislivello tra il punto di partenza e B pari a *h + R*:
$mg(h+R) = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g(h+R)} = 6.1$ m/s
Nel punto B agiscono sul corpo la forza peso e la reazione vincolare normale della guida, risultando in una accelerazione centripeta proporzionale al quadrato della velocità, per cui:
$\vec{P} + \overrightarrow{N_B} = \vec{F}_{cent} \quad \Rightarrow \quad -mg + N_B = m\frac{v_B^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_B = m\left(g + \frac{v_B^2}{R}\right) = mg\left(1 + \frac{2(h+R)}{R}\right) = 31$ N

d) Considerando l'attrito sulla guida circolare, questa agisce come forza non conservativa durante il moto. Per cui si può applicare il bilancio dell'energia meccanica tra i punti iniziale e D per calcolare il contributo del lavoro della forza non conservativa:
$E_{m,D} - E_{m,iniziale} = W_{nc} \quad \Rightarrow \quad mgh_1 - mgh = mg(h_1 - h) = W_{nc} = -0.88$ J

Problema 2

a) Applicando il teorema di Huygens-Steiner, per la sbarretta imperniata in O ad un estremo il momento di inerzia rispetto ad O è:
$I_{O,1} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 = 0.13$ kg m^2
mentre per la seconda sbarretta:
$I_{O,2} = \frac{1}{12}ML^2 + ML^2 = \frac{13}{12}ML^2 = 0.43$ kg m^2
Per cui il momento d'inerzia totale del corpo rispetto ad O risulta essere $I_O = I_{O,1} + I_{O,2} = 0.56$ kg m^2

b) Per calcolare l'energia necessaria a sollevare il corpo dalla posizione (A) alla (B) è necessario calcolare di quanto si deve alzare il centro di massa del corpo. Per prima cosa, quindi, si calcola la distanza del centro di massa dal perno O:
$d_{CM} = \frac{M\frac{L}{2} + ML}{2M} = \frac{3}{4}L = 0.45$ m
Il dislivello del centro di massa tra le posizioni (A) e (B) è due volte la distanza del CM dal punto O. Per cui l'energia necessaria per sollevare il corpo risulta essere pari a:
$E = 2Mg2d_{CM} = 4Mgd_{CM} = 19$ J

c) Compiendo lavoro solo la forza peso, si può applicare la conservazione dell'energia meccanica tra (B) ed (A):
$E = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2E}{I_O}} = 8.2$ rad/s

d) Il momento angolare può essere calcolato direttamente in funzione del momento d'inerzia:
$L_O = I_O\omega = 4.6$ kg m^2/s

e) La velocità del centro di massa è determinata dalla relazione con la velocità angolare:

$v_{CM} = \omega d_{CM}$ =3.7 m/s

Problema 3

a) Dalla legge di stato dei gas perfetti otteniamo $T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 481$ K. Dall'isobara AB, si può ricavare: $T_B = T_A \frac{V_B}{V_A} = 722$ K. Dall'adiabatica BC, si può ricavare: $T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = 286$ K.

b) Per il calcolo del rendimento, si possono determinare i calori scambiati nelle singole trasformazioni e poi applicare la definizione:
$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = 7.50$ kJ
$Q_{BC} = 0$
Inoltre, Il calore scambiato nell'isoterma CD è dunque: $Q_{CD} = nRT_C \log\frac{V_D}{V_C} = -6.40$ kJ.
Il calore scambiato nell'isocora DA è: $Q_{DA} = nc_V(T_A - T_D) = 3.65$ kJ.
Il calore totale scambiato durante il ciclo è: $Q = Q_{AB} + Q_{CD} + Q_{DA} = 4.75$ kJ.
Infine, il rendimento è calcolabile dunque come:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{Q}{Q_{ass}} = \frac{Q}{Q_{AB} + Q_{DA}} = 0.426$$

c) Per l'isobara reversibile, sono necessarie infinite sorgenti, per cui la variazione di entropia è calcolabile come:
$\Delta S_{AB,gas} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{nc_p dT}{T} = nc_p \int_A^B \frac{dT}{T} = nc_p \log\frac{T_B}{T_A} = 12.6$ J/K.

d) Su un ciclo la variazione di entropia del gas è nulla. Per il calcolo della variazione di entropia dell'universo termodinamico occorre considerare gli scambi di calore con le sorgenti utilizzate. Per la trasformazione AB, la variazione di entropia del gas è stata calcolata nel punto precedente, quella delle sorgenti sarà l'opposto.
Per l'isoterma reversibile CD:
$\Delta S_{CD} = -\frac{Q_{CD}}{T_C} = 22.3$ J/K.
Per l'isocora irreversibile, che avviene a contatto con la sorgente a temperature T_A:
$\Delta S_{DA} = -\frac{Q_{DA}}{T_A} = -7.57$ J/K.

La variazione totale di entropia è dunque: $\Delta S_u = -\Delta S_{AB,gas} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DA} = 2.1$ J/K.

Università degli Studi dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Prova scritta di Fisica Generale I - 01/09/2023

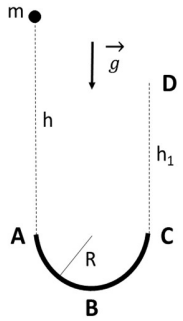
Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

Tempo a disposizione: 2h 30min. Affinché il secondo e terzo problema siano valutati è necessario conseguire almeno 4 punti nel primo problema.

Problema 1 (7 punti)

Un corpo puntiforme di massa m viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza h. Nel punto A esso entra in una guida circolare di raggio R. Trascurando tutte le forme di attrito, si determinino:

a) il modulo della velocità del corpo nel punto A [1 punto];
b) il modulo della velocità del corpo nel punto C [1 punto];
c) la reazione vincolare normale della guida nel punto B [2 punti].



Si consideri ora la presenza di attrito a contatto con la guida circolare. Si osserva che il corpo, riemergendo verticalmente dal punto C, riesce ad arrivare ad un'altezza h_1 nel punto D. In queste condizioni, si calcolino:

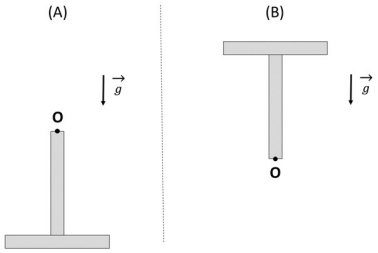
d) il lavoro totale compiuto dalla forza di attrito [2 punti];

E richiesta l'analisi dimensionale su ogni equazione utilizzata per la risoluzione del problema [1 punto].

Dati: m = 0.30 kg, h = 1.5 m, R = 0.40 m, h_1 = 1.2 m, g = 9.8 m/s^2.

Problema 2 (15 punti)

Un corpo rigido è formato da due sbarrette omogenee attaccate a formare una T, come in figura. Entrambe hanno massa M e lunghezza L. Il corpo è posto su un piano verticale, vincolato a un perno nel punto O, che permette di ruotare attorno all'asse perpendicolare al foglio. Trascurando tutti gli attriti, si determinino:



a) il momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse passate per il polo O [4 punti];
b) l'energia necessaria a sollevare il corpo dalla posizione di equilibrio stabile in basso (A) a quella di equilibrio instabile in alto (B) [5 punti];

Dalla posizione (B), si ipotizzi di spostare di poco il corpo in modo da farlo cadere verso il basso partendo con velocità nulla. Al passaggio nella posizione (A), calcolare, rispetto al polo O,

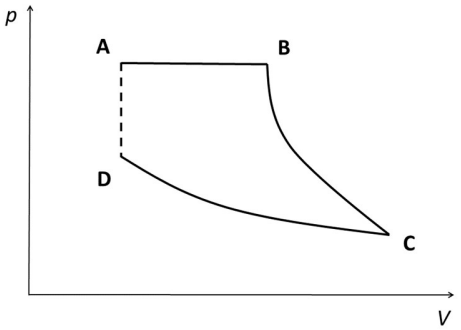
c) la velocità angolare del corpo [2 punti];
d) il momento angolare posseduto dal corpo [2 punti],
e) il modulo della velocità del centro di massa [2 punti],

Dati: M = 1.1 kg, L = 0.60 m.

NOTA: momento d'inerzia di una sbarretta omogenea rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$.

Problema 3 (8 punti)

Una quantità pari a n moli di un gas monoatomico compie un ciclo composto dalle trasformazioni riportate nella figura accanto. AB è un'isobara reversibile, BC è un'adiabatica reversibile, CD è un'isoterma reversibile, e infine DA è un'isocora irreversibile effettuata mettendo a contatto il gas con una sorgente a temperature T_A. Si determinino:



a) le temperature T_A,T_B *e* T_C [2 punti];
b) il rendimento della macchina termica [2 punti];
c) la variazione di entropia del gas nella trasformazione AB [2 punti].
d) la variazione di entropia dell'universo termodinamico su un ciclo [2 punti].

Dati: n = 1.50, p_A = 2.00 x 10^6 Pa, V_A = 3.00 x 10^{-3} m^3, V_B = 1.50 V_A, V_C = 6.00 V_A, R = 8.31 J / (mol · K)

Soluzione

Problema 1

a) Nella caduta il corpo è soggetto alla sola forza peso, per cui la velocità in A può essere calcolata dall'applicazione della conservazione dell'energia meccanica tra la quota iniziale e il punto A:
$mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{2gh} = 5.4$ m/s

b) Poiché gli attriti sono trascurabili e non essendoci altre forze che compiono lavoro, il modulo della velocità in C sarà la stessa del punto A, essendo i due punti alla stessa quota.

c) La velocità in B può essere di nuovo calcolata con la conservazione dell'energia meccanica, considerando il dislivello tra il punto di partenza e B pari a *h + R*:
$mg(h+R) = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g(h+R)} = 6.1$ m/s
Nel punto B agiscono sul corpo la forza peso e la reazione vincolare normale della guida, risultando in una accelerazione centripeta proporzionale al quadrato della velocità, per cui:
$\vec{P} + \overrightarrow{N_B} = \vec{F}_{cent} \quad \Rightarrow \quad -mg + N_B = m\frac{v_B^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_B = m\left(g + \frac{v_B^2}{R}\right) = mg\left(1 + \frac{2(h+R)}{R}\right) = 31$ N

d) Considerando l'attrito sulla guida circolare, questa agisce come forza non conservativa durante il moto. Per cui si può applicare il bilancio dell'energia meccanica tra i punti iniziale e D per calcolare il contributo del lavoro della forza non conservativa:
$E_{m,D} - E_{m,iniziale} = W_{nc} \quad \Rightarrow \quad mgh_1 - mgh = mg(h_1 - h) = W_{nc} = -0.88$ J

Problema 2

a) Applicando il teorema di Huygens-Steiner, per la sbarretta imperniata in O ad un estremo il momento di inerzia rispetto ad O è:
$I_{O,1} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 = 0.13$ kg m^2
mentre per la seconda sbarretta:
$I_{O,2} = \frac{1}{12}ML^2 + ML^2 = \frac{13}{12}ML^2 = 0.43$ kg m^2
Per cui il momento d'inerzia totale del corpo rispetto ad O risulta essere $I_O = I_{O,1} + I_{O,2} = 0.56$ kg m^2

b) Per calcolare l'energia necessaria a sollevare il corpo dalla posizione (A) alla (B) è necessario calcolare di quanto si deve alzare il centro di massa del corpo. Per prima cosa, quindi, si calcola la distanza del centro di massa dal perno O:
$d_{CM} = \frac{M\frac{L}{2} + ML}{2M} = \frac{3}{4}L = 0.45$ m
Il dislivello del centro di massa tra le posizioni (A) e (B) è due volte la distanza del CM dal punto O. Per cui l'energia necessaria per sollevare il corpo risulta essere pari a:
$E = 2Mg2d_{CM} = 4Mgd_{CM} = 19$ J

c) Compiendo lavoro solo la forza peso, si può applicare la conservazione dell'energia meccanica tra (B) ed (A):
$E = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2E}{I_O}} = 8.2$ rad/s

d) Il momento angolare può essere calcolato direttamente in funzione del momento d'inerzia:
$L_O = I_O\omega = 4.6$ kg m^2/s

e) La velocità del centro di massa è determinata dalla relazione con la velocità angolare:

$v_{CM} = \omega d_{CM}$ =3.7 m/s

Problema 3

a) Dalla legge di stato dei gas perfetti otteniamo $T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 481$ K. Dall'isobara AB, si può ricavare: $T_B = T_A \frac{V_B}{V_A} = 722$ K. Dall'adiabatica BC, si può ricavare: $T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = 286$ K.

b) Per il calcolo del rendimento, si possono determinare i calori scambiati nelle singole trasformazioni e poi applicare la definizione:
$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = 7.50$ kJ
$Q_{BC} = 0$
Inoltre, Il calore scambiato nell'isoterma CD è dunque: $Q_{CD} = nRT_C \log\frac{V_D}{V_C} = -6.40$ kJ.
Il calore scambiato nell'isocora DA è: $Q_{DA} = nc_V(T_A - T_D) = 3.65$ kJ.
Il calore totale scambiato durante il ciclo è: $Q = Q_{AB} + Q_{CD} + Q_{DA} = 4.75$ kJ.
Infine, il rendimento è calcolabile dunque come:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{Q}{Q_{ass}} = \frac{Q}{Q_{AB} + Q_{DA}} = 0.426$$

c) Per l'isobara reversibile, sono necessarie infinite sorgenti, per cui la variazione di entropia è calcolabile come:
$\Delta S_{AB,gas} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{nc_p dT}{T} = nc_p \int_A^B \frac{dT}{T} = nc_p \log\frac{T_B}{T_A} = 12.6$ J/K.

d) Su un ciclo la variazione di entropia del gas è nulla. Per il calcolo della variazione di entropia dell'universo termodinamico occorre considerare gli scambi di calore con le sorgenti utilizzate. Per la trasformazione AB, la variazione di entropia del gas è stata calcolata nel punto precedente, quella delle sorgenti sarà l'opposto.
Per l'isoterma reversibile CD:
$\Delta S_{CD} = -\frac{Q_{CD}}{T_C} = 22.3$ J/K.
Per l'isocora irreversibile, che avviene a contatto con la sorgente a temperature T_A:
$\Delta S_{DA} = -\frac{Q_{DA}}{T_A} = -7.57$ J/K.

La variazione totale di entropia è dunque: $\Delta S_u = -\Delta S_{AB,gas} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DA} = 2.1$ J/K.

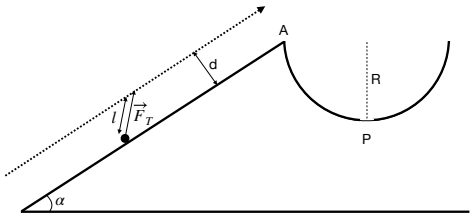
Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Prova scritta di Fisica Generale I - 11/01/2024

Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

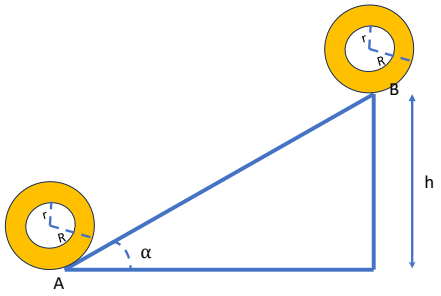
- Tempo a disposizione: 2h 30min.

Problema 1 (7 punti)



Uno sciatore (rappresentato come un punto materiale di massa $m = 60$ kg) è trainato da uno skilift lungo un pendio inclinato di $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale. Lo skilift è schematizzato da un nastro mobile, posto ad una distanza $d = 4.0$ m dal pendio inclinato e ad esso parallelo, che si muove con velocità costante v_0. Lo sciatore è trascinato da un cavo di lunghezza $l = 6.0$ m fissato al nastro mobile. Il coefficiente di attrito dinamico fra neve e sciatore è pari a $\mu_d = 0.10$. Determinare a) la tensione F_T del cavo (3 punti). Una volta raggiunta la sommità del pendio nel punto A, lo sciatore si sgancia dallo skilift ed inizia a scendere in una conca partendo da fermo. La conca è una semisfera di raggio $R = 12$ m ed è ricoperta di ghiaccio. Trascurando l'attrito, b) calcolare il modulo della velocità v_1 dello sciatore nel punto più basso della conca (punto P) (2 punti). Lo sciatore ignora che il ghiaccio in P, che ricopre un piccolo lago, è sottile e in tal punto è capace di sostenere una sollecitazione massima di $F_M = 2.5$ kN. c) Determinare se lo sciatore riuscirà a superare il punto P senza far rompere il ghiaccio o se cadrà in acqua (2 punti).
Dati: $g = 9.8 \quad m/s^2$.

Problema 2 (15 punti)



Un cilindro cavo omogeneo (di massa $M = 1.1$ Kg, raggio esterno $R = 5.0$ cm, raggio interno $r = 3.1$ cm) si muove verso l'alto su un piano inclinato dal punto A al punto B. Nel punto più basso del piano inclinato (punto A), il modulo della velocità del centro di massa è $v_A = 10$ m/s. (a) Calcolare il momento d'inerzia del cilindro cavo rispetto all'asse passante per il centro di massa (2 punti). Considerando che, in ogni istante, il moto è di puro rotolamento e che la sommità del piano inclinato (punto B) è ad una quota $h = 240$ cm, determinare (nel sistema di riferimento solidale con il piano inclinato): b) l'energia cinetica nel punto A (2 punti); c) il modulo della velocità del centro di massa del cilindro nel punto B (5 punti), d) la legge oraria che descrive la rotazione e traslazione del cilindro (4 punti). e) Infine, calcolare il numero di giri che compie il cilindro in tutto il suo moto (2 punti).
Dati e formule utili : $g = 9.8 \quad m/s^2$, $\alpha = \pi/4$ rad, e $I_p = MR_p^2/2$ [dove I_p è il momento d'inerzia (rispetto all'asse passante per il centro di massa) di un cilindro pieno con massa M e raggio R_p].

Problema 3 (8 punti)

Un gas ideale biatomico compie un ciclo composto da due isoterme reversibili e due isocore, scambiando calore soltanto con una miscela in equilibrio di acqua e ghiaccio a temperatura T_1 e con una sorgente a temperatura $T_2 > T_1$. Ad ogni ciclo viene fornito lavoro alla macchina (il lavoro compiuto dalla macchina W è quindi negativo) che complessivamente assorbe calore dalla sorgente più fredda e lo cede a quella più calda (pompa di calore). Il rapporto di compressione del ciclo, cioè il rapporto tra il volume massimo e quello minimo, è pari a ν. Determinare: a) il diagramma del ciclo sul piano di Clapeyron (2 punti); b) il numero di moli del gas (2 punti); c) quanta acqua della miscela a temperatura T_1 si trasforma in ghiaccio in ogni ciclo (2 punti); d) la variazione di entropia dell'universo termodinamico in un ciclo (2 punti).

Dati: $T_1 = 0.0$ °C, $T_2 = 80$ °C, $W = -1.2$ kJ, $\nu = V_{\max}/V_{\min} = 3.0$, $R = 8.31$ J/(K×mol), $\lambda_{\mathrm{fus,H_2O}} = 3.335 \times 10^5$ J/kg.

Problema 1 - Soluzione

(a) Poichè lo sciatore si muove di moto rettilineo uniforme la risultante delle forze su di esso deve essere nulla. Quindi deve risultare

$$\overrightarrow{F_T} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F_a} + \overrightarrow{P} = 0\,, \tag{1}$$

dove $\overrightarrow{F_T}$ è la tensione del cavo dello skilift, $\overrightarrow{N}$ è la reazione vincolare del pendio, $\overrightarrow{F_a}$ è la forza di attrito e $\overrightarrow{P}$ è la forza peso. Scomponendo ora la risultante delle forze lungo la direzione parallela e perpendicolare al pendio, si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F_T \cos\beta - \mu_d N - P\sin\alpha = 0\,, \\ N + F_T \sin\beta - P\cos\alpha = 0\,, \end{cases} \tag{2}$$

dove la prima equazione si riferisce alla direzione parallela al pendio, mentre la seconda si riferisce alla direzione perpendicolare. β è l'angolo che il cavo forma con la direzione del pendio e si può calcolare come

$$\beta = \arcsin\frac{d}{l} = \arcsin\frac{2}{3}\,. \tag{3}$$

Risolvendo il sistema di equazioni si ricava il valore di F_T

$$F_T = \frac{mg(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\beta + \mu_d\sin\beta} = 0.42\,\mathrm{kN}\,. \tag{4}$$

(b) Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica tra il punto A ed il punto P.

$$E_A = E_P \implies mgR = \frac{1}{2}mv_1^2 \implies v_1 = \sqrt{2gR} = 15\,\mathrm{m/s}\,. \tag{5}$$

(c) Nel punto P la risultante delle forze deve essere uguale alla forza centripeta. Quindi

$$N - P = m\frac{v_1^2}{R} \implies N = m\left(\frac{v_1^2}{R} + g\right) = m(2g+g) = 3mg = 1.8\,\mathrm{kN}\,. \tag{6}$$

Quindi $N < N_{\max} = 2.5$ kN e ne consegue che il ghiaccio non si rompe.

Problema 2 - Soluzione

a) E' possibile scrivere il momento d'inerzia del cilindro come

$$I = \frac{m_2R^2}{2} - \frac{m_1r^2}{2}, \tag{7}$$

dove m_2 e m_1 sono le masse dei due cilindri pieni con raggio R e r, rispettivamente. Considerando l'omogeneità del cilindro, risulta

$$m_1 = Mr^2/(R^2 - r^2), \quad m_2 = MR^2/(R^2 - r^2). \tag{8}$$

Sostituendo l'equazioni (8) nell'equazione (9), si ottiene

$$I = M(R^2 + r^2)/2 = 1.9 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2. \tag{9}$$

(b) Utilizzando la condizione di puro rotolamento $\omega = v/R$, l'energia cinetica nel punto A risulta

$$E_A = Mv_A^2/2 + I\omega^2/2 = (M + \frac{I}{R^2})\frac{v_A^2}{2} = 93\,\mathrm{J}, \tag{10}$$

(c) Applicando la conservazione dell'energia meccanica, si ottiene:

$$E_A = E_B + Mgh, \tag{11}$$

dove $E_B = (M + \frac{I}{R^2})\frac{v_B^2}{2}$ è l'energia cinetica del cilindro nel punto B. Sostituendo l'espressione di E_B nell'Eq.(14), si ottiene,

$$v_B = \sqrt{2\frac{E_A - Mgh}{M + I/R^2}} = 8.5\,\mathrm{m/s}. \tag{12}$$

(d) Considerando l'equazioni cardinali della dinamica, risulta:

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -F_A - Mg\sin\alpha, \quad I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = RF_A, \tag{13}$$

dove $x(t)$ è la posizione lungo il piano inclinato, $\theta(t) = x(t)/R$ e F_A è la forza di attrito che causa il moto di puro rotolamento del cilindro. Eliminando F_A dalle equazioni cardinali della dinamica, si ottiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{1+\frac{I}{MR^2}}\sin\alpha, \tag{14}$$

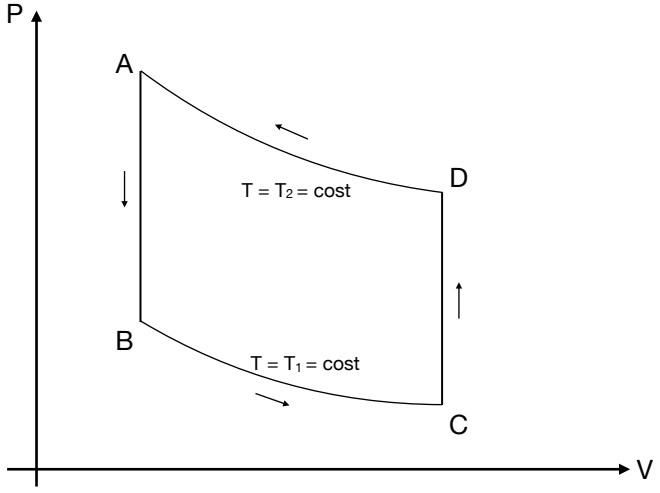
quindi il moto di puro rotolamento è uniformemente accelerato ed è descritto dalle seguenti equazioni orarie:

$$x(t) = v_A t - \frac{a}{2}t^2, \theta(t) = x(t)/R. \tag{15}$$

dove $a = g\sin\alpha/(1+\frac{I}{MR^2})$. (e) Nella salita del piano inclinato (di lunghezza $l = h/\sin\alpha$), il numero di giri fatti dal cilindro è $N = l/(2\pi R) \simeq 11$.

Problema 3 - Soluzione

1) La rappresentazione grafica del ciclo nel piano di Clapeyron è la seguente



2) Il lavoro è compiuto solo durante le isoterme, pertanto

$$W = nRT_1\log\frac{V_C}{V_B} + nRT_2\log\frac{V_A}{V_D} = nR(T_1-T_2)\log\frac{V_C}{V_B} = nR(T_1-T_2)\log\nu\,. \tag{16}$$

Da qui si può ricavare il numero di moli

$$n = \frac{W}{R(T_1-T_2)\log\nu} = 1.64\,. \tag{17}$$

3) La miscela di acqua e ghiaccio in equilibrio scambia la seguente quantità di calore in ogni ciclo:

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BC} = \Delta U_{AB} + W_{BC} = n\frac{5}{2}R(T_1-T_2) + nRT_1\log\nu = 1.37\,\mathrm{kJ}\,. \tag{18}$$

La quantità di acqua della miscela che si trasforma in ghiaccio ad ogni ciclo si ottiene quindi dalla legge della calorimetria per i cambi di fase

$$Q_1 = m\lambda_{\mathrm{fus,H_2O}} \implies m = \frac{Q_1}{\lambda_{\mathrm{fus,H_2O}}} = 4.1\,\mathrm{g}\,. \tag{19}$$

4) La variazione di entropia del sistema su un ciclo è nulla, mentre quella dell'ambiente è legata allo scambio di calore con la sorgente T_2 e la miscela. Il calore scambiato con la miscela Q_1 è già stato calcolato. Il calore scambiato con la sorgente T_2 è dato da

$$Q_2 = \Delta U_{CD} + W_{DA} = nR(T_2 - T_1) - n\frac{5}{2}RT_2 \log \nu = -2.56\,\mathrm{kJ}\,. \tag{20}$$

La variazione di entropia su un ciclo è pertanto

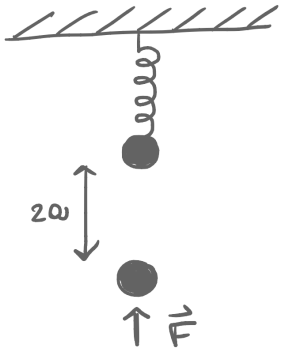
$$\Delta S_u = -\left(\frac{Q_1}{T1} + \frac{Q_2}{T_2}\right) = 2.26\,\mathrm{J/K}\,. \tag{21}$$

Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale
Prova scritta di Fisica Generale I - 29/01/2024

Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

- Tempo a disposizione: 2h 30min.

Problema 1 (7 punti)

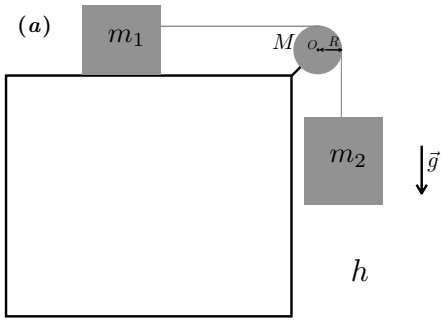


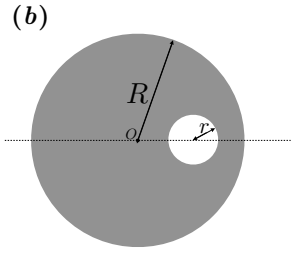
Il punto materiale **1** di massa $m_1 = m = 100$ g è appeso ad una molla ideale di costante elastica $k = 25.0\,\mathrm{N/m}$, e si muove di moto armonico semplice lungo la direzione verticale, con elongazione massima $a = 25.0$ cm. A distanza $2a$ al di sotto del punto di equilibrio del sistema, è posto il punto materiale **2**, con $m_2 = m$, che si trova inizialmente in quiete. Il punto **2** viene quindi sottoposto ad una forza $\vec{F}$ verticale che gli comunica un impulso di intensità $J = 0.65\,\mathrm{Ns}$. Il punto **2** urta in modo completamente anelastico il punto **1**, nel momento in cui **1** si sta muovendo verso il basso con velocità massima. Determinare: **(a)** la velocità di **1** al momento dell'urto (2 punti); **(b)** la velocità di **2** al momento dell'urto (2 punti); **(c)** la velocità del sistema subito dopo l'urto (1 punto); **(d)** di quanto si sposta il punto di equilibrio del sistema dopo l'urto (2 punti).
Dati: $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$

Problema 2 (15 punti)

Un sistema è composto da due blocchi di massa $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg. Il blocco m_1 è poggiato su un piano orizzontale liscio. I due blocchi sono collegati da un filo inestensibile e di massa trascurabile tramite una carrucola composta da un disco omogeneo di raggio $R = 50$ cm e massa $M = 40$ kg, tenuto fisso nel suo centro geometrico O, come rappresentato in figura (a). All'istante iniziale il sistema si trova in stato di quiete. **(a)** calcolare la velocità angolare del disco dopo che il blocco m_2 ha percorso la distanza $h = 1$ m lungo la direzione verticale (4 punti).

Successivamente, sul disco viene praticato un foro di raggio $r = R\sqrt{\frac{2m_2}{M}}$ a distanza $d = R/2$ dal punto O, come indicato in figura (b). Calcolare: **(b)** il momento d'inerzia del disco forato rispetto ad O (3 punti); **(c)** la distanza del centro di massa del disco forato rispetto ad O (3 punti). **(d)** Dimostrare che se il sistema è in quiete e se, contemporaneamente, la retta che congiunge il punto O ed il centro del foro è parallela alla direzione orizzontale (come in figura (b)), allora il sistema permarrà nello stato di quiete (equilibrio statico) (5 punti).
Dati e formule utili: $g = 9.8\,m/s^2$; $I = MR^2/2$ è il momento di inerzia di un disco rispetto ad un asse passante per il centro di massa.





Problema 3 (8 punti)

Una quantità pari a $n = 1.5$ moli di un gas monoatomico si trova inizialmente nello stato 1 con $p_1 = 5 \cdot 10^5$ Pa, $V_1 = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$, e compie un ciclo con traformazioni reversibili, passando nello stato 2 con $p_2 = 2p_1$, $V_2 = V_1$ e nello stato 3 con $p_3 = p_1$, $V_3 = 3V_1$. Nella trasformazione $2 \to 3$ la pressione varia secondo la legge: $p(V) = a + bV^2$. **(a)** Disegnare il diagramma del ciclo sul piano di Clapeyron (1 punto); **(b)** determinare i valori delle costanti a e b (2 punti); **(c)** calcolare il lavoro compiuto dal gas nel ciclo (2 punti); **(d)** determinare la variazione di entropia del gas nella trasformazione $2 \to 3$ (3 punti).
Dati: $R = 8.31\,\mathrm{J/(K \cdot mol)}$

Problema 1 - Soluzione

(a) Il punto materiale **1** è appeso alla molla, e urta il punto **2** nell'istante in cui si sta muovendo verso il basso con velocità massima; pertanto in questo caso abbiamo

$$\frac{1}{2}mv_{1,max}^2 = \frac{1}{2}ka^2 \tag{1}$$

da cui si ottiene $v_{1,max} = -\sqrt{\frac{k}{m}}a = -3.95$ m/s, dove è stato preso il segno negativo poiché il punto **1** si sta muovendo verso il basso.

(b) Il punto materiale **2** riceve un impulso iniziale J, per cui la velocità iniziale risulta essere $v_{2,i} = J/m = 6.5$ m/s. Durante la fase successiva del moto, il punto è soggetto solo alla forza peso, quindi possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica (prendendo come zero il punto di partenza della massa **2**):

$$\frac{1}{2}mv_{2,f}^2 + 2mga = \frac{1}{2}mv_{2,i}^2 \tag{2}$$

da cui si ricava:

$$v_{2,f} = \sqrt{v_{2,i}^2 - 4ga} = 5.7\,\text{m/s} \tag{3}$$

(c) Dopo l'urto, i punti materiali restano attaccati, quindi possiamo ricavare la velocità v del sistema dopo l'urto come segue:

$$2mv = mv_{1,max} + mv_{2,f} \tag{4}$$

ottenendo $v = 0.87$ m/s.

(d) Prima dell'urto, la molla **1** ha elongazione massima data da $\Delta y_i = mg/k$. Quando la seconda massa si attacca, $\Delta y_f = 2mg/k$, per cui il punto di equilibrio si sposta di $\Delta y_f - \Delta y_i = mg/k = 0.0392$ m.

Problema 2 - Soluzione

(a) Si può applicare la conservazione dell'energia meccanica:

$$m_2gh = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 \tag{5}$$

dove $I_O = \frac{MR^2}{2}$ è il momento d'inerzia del disco calcolato rispetto al punto O. Considerando che il filo è inestensibile, si ha: $v_1 = v_2 = \omega R$, quindi sostituendo nell'Eq. (5), otteniamo:

$$\omega = \sqrt{\frac{2m_2gh}{R^2(m_1 + m_2 + M/2)}} = 2.6\text{rad s}^{-1} \tag{6}$$

(b) Come prima cosa calcoliamo la massa m sottratta al disco con l'applicazione del foro. Poiché il disco è omogeneo abbiamo:

$$m = M\left(\frac{r}{R}\right)^2 = 2m_2 \tag{7}$$

Chiamiamo I'_O il momento d'inerzia del disco forato. Dal momento che il momento c'inerzia è una quantità additiva, risulta:

$$I_O = I'_O + \left(\frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{4}mR^2\right) \tag{8}$$

dove la quantità tra parentesi è il momento d'inerzia della porzione di disco rimossa per praticare il foro, calcolata rispetto ad O (si è utilizzato il teorema di Huygens Steiner). Quindi:

$$I'_O = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2 - \frac{1}{4}mR^2 = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - 4\frac{m_2^2}{M^2} - \frac{m_2}{M}\right) = 4.7\text{Kg m}^2 \tag{9}$$

(c) Assumiamo per semplicità il punto O come origine degli assi ed il centro del foro situato lungo l'asse orizzontale. Risulta:

$$0 = M'x'_{CM} + m\frac{R}{2} \tag{10}$$

essendo $M' = M - m$ la massa del disco forato ed x'_{CM} la posizione del suo centro di massa. Quindi:

$$x'_{CM} = -\frac{mR}{2M'} = -\frac{Rm_2}{M - 2m_2} = -2.8\text{cm} \tag{11}$$

Pertanto la distanza del centro di massa del disco forato dal punto O è di 2.8cm.

(d) Affinché sia soddisfatta la condizione di equilibrio statico le equazioni cardinali per i blocchi m_1 ed m_2 si scrivono come:

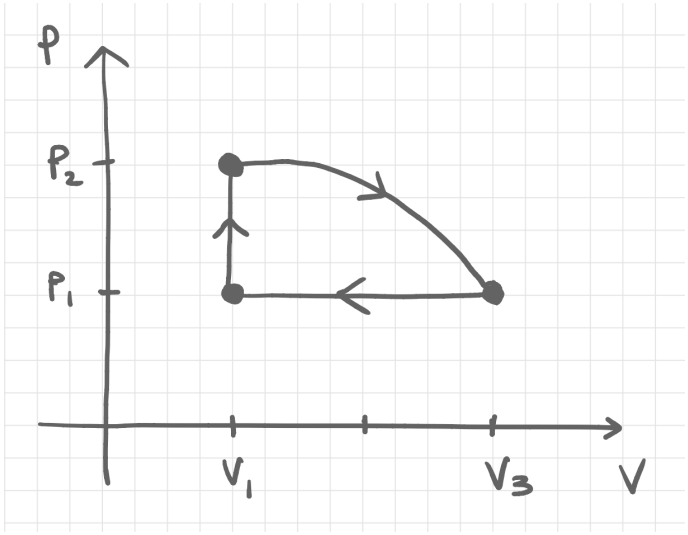
$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ T_2 = m_2 g \end{cases} \tag{12}$$

dove T_1, T_2 sono le tensioni che agiscono sui rispettivi blocchi. La seconda equazione cardinale per il disco forato si scrive invece:

$$M' g \, |x'_{CM}| - T_2 R = 0 \tag{13}$$

che è soddisfatta soltanto se $r = R\sqrt{\frac{2m_2}{M}}$.

Problema 3 - Soluzione
(a)



(b) I valori delle costanti si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} p_2 = a + bV_2^2 \\ p_3 = a + bV_3^2 \end{cases} \tag{14}$$

dove, sostituendo, si ottiene tutto in funzione di p_1 e V_1:

$$\begin{cases} 2p_1 = a + bV_1^2 \\ p_1 = a + 9bV_1^2 \end{cases} \tag{15}$$

e quindi: $a = \frac{17}{8} p_1 = 1.06 \cdot 10^6$ Pa, $b = -\frac{p_1}{8V_1^2} = -2.5 \cdot 10^9$ Pa m^{-6}.

(c) Il lavoro compiuto dal gas nelle diverse trasformazioni risulta:

$$W_{12} = 0, \; W_{23} = \int_{V_2}^{V_3} (a + bV^2) dV = 7.9 \cdot 10^3 \, \text{J}, \; W_{31} = p_1(V_1 - V_3) = -5 \cdot 10^3 \, \text{J} \tag{16}$$

quindi il totale è $W_{tot} = W_{23} + W_{31} = 2.9 \cdot 10^3$ J.
(d) La variazione di entropia risulta essere:

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev} = n c_V \ln \frac{T_3}{T_2} + nR \ln \frac{V_3}{V_1} = 21.3 \, \text{JK}^{-1}, \tag{17}$$

che si ottiene avendo calcolato il valore delle temperature in 2 e 3:

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{2p_1 V_1}{nR} = 400\text{K}, \; T_3 = \frac{p_3 V_3}{nR} = \frac{3p_1 V_1}{nR} = 600\text{K}. \tag{18}$$

Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

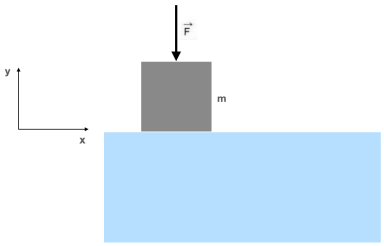
Prova scritta di Fisica Generale I - 12/02/2024

Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

- Tempo a disposizione: 2h 30min.

Problema 1 (7 punti)

Un punto materiale di massa $m = 2.0$ kg si muove su un piano orizzontale. Al tempo t=0 la sua velocità è pari a v_0= 10 m/s diretta nel verso positivo dell'asse x, come in figura. Al tempo $t = 0$ viene applicata al punto materiale una forza verticale F diretta nel verso negativo dell'asse y.



Determinare:

a. la velocità al tempo t_1=10 s nel caso in cui il piano sia liscio; [1 punto]

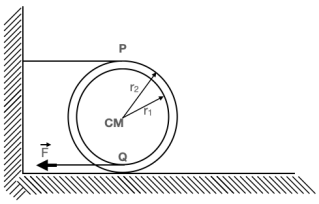
b. nel caso il cui il piano sia scabro con $\mu_d = 0.30$ dopo quanto tempo si ferma il corpo se la forza F ha modulo pari a 5.0 N; [3 punti]

c. nel caso in cui il piano sia scabro con $\mu_d = 0.30$ dopo quanto tempo si ferma il corpo se il modulo della forza F varia nel tempo con la legge $F = kt$, essendo t il tempo e $k = 50$ N/s. [3 punti]

[g =9.8 m/s^2]

Problema 2 (15 punti)

Un rocchetto di massa $m = 5.0$ kg, raggi interno ed esterno $r_1 = 15$ cm e $r_2 = 20$ cm rispettivamente e momento d'inerzia relativo al proprio asse pari a $I = 9.0{\cdot}10^{-2}$ kg m^2 poggia su un piano orizzontale liscio, inizialmente in quiete; sulle superfici cilindriche di raggio r_1 e r_2 sono avvolte due funi ideali di spessore trascurabile: un capo della prima è assicurato a una parete solidale con il piano con punto fisso P, mentre alla seconda è applicata una forza orizzontale $\vec{\mathbf{F}}$ di intensità F = 5.0 N, come mostrato in figura. Si noti che entrambi i tratti distesi (non arrotolati) delle funi si mantengono sempre orizzontali e che, in virtù della presenza del punto fisso P, l'accelerazione del centro di massa è proporzionale all'accelerazione angolare α del rocchetto.

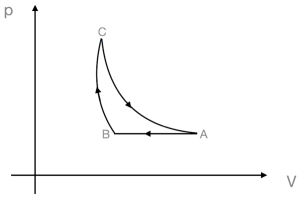


Determinare:

a. l'accelerazione del centro di massa del rocchetto; [3 punti]
b. la tensione a cui è soggetta la fune assicurata alla parete; [4 punti]
c. il lavoro compiuto dalla forza $\vec{\mathbf{F}}$ durante un intervallo di tempo $\Delta t = 2.0$ s; [4 punti]
d. il minimo valore del coefficiente di attrito statico che dovrebbe caratterizzare il piano (qualora scabro) per mantenere il sistema in condizione di quiete. [4 punti]

Problema 3 (8 punti)

Una quantità $n = 2.0$ mol di un gas ideale biatomico segue il ciclo reversibile mostrato in figura, nel quale le trasformazioni AB, BC e CA sono rispettivamente un'isobara, un'adiabatica e un'isoterma. Sapendo che nello stato A la pressione e il volume del gas sono pari a $p_A = 6.1{\cdot}10^5$ Pa e $V_A = 10$ dm^3 e che $p_C = 3p_A$, determinare:



a. la temperatura del gas nello stato A; [1 punto]

b. il volume e la temperatura del gas negli stati B e C; [2 punti]

c. la variazione di entropia del gas nella trasformazione A→B; [2 punti]

d. il rendimento del ciclo. [3 punti]

Problema 1 - Soluzione

(a) Nel caso in cui il piano è liscio non agiscono forze lungo l'asse x, pertanto il moto è rettilineo uniforme con velocità $v_0 = 10$ m/s.
(b) Nel caso in cui il piano è scabro la legge di Newton proiettata lungo l'asse x è data da:

$$-\mu_d N = ma \rightarrow -\mu_d(F + mg) = ma \tag{1}$$

$$a = -\frac{\mu_d(F + mg)}{m} = -3.7 \text{ m/s}^2 \tag{2}$$

Il moto è quindi uniformemente decelerato e si ha allora:

$$t_f = -\frac{v_0}{a} = 2.7 \text{ s}. \tag{3}$$

(c) Nel caso in cui sia $F = kt$ la legge di Newton proiettata lungo l'asse x fa ottenere un'accelerazione pari a $a = -\frac{\mu_d(kt+mg)}{m}$ che non è più costante. Pertanto la velocità sarà data da:

$$v = v_0 - \int_0^t \frac{\mu_d(kt + mg)}{m} dt = v_0 - \frac{\mu_d k}{2m} t^2 - \mu_d g t. \tag{4}$$

Imponendo $v = 0$ si ha l'equazione

$$\frac{\mu_d k}{2m} t^2 + \mu_d g t - v_0 = 0 \tag{5}$$

che ha come soluzione $t_f = 1.3$ s.

Problema 2 - Soluzione

L'accelerazione del centro di massa può essere ricavata scrivendo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F + T = ma \\ r_1 F - r_2 T = I\alpha \\ a = \alpha r_2 \end{cases} \tag{6}$$

in cui l'ultima equazione esprime la correlazione che sussiste tra i due moti in virtù del punto fisso P. La soluzione di tale sistema permette di trovare l'accelerazione del centro di massa:

$$a = \frac{r_2(r_1 + r_2)F}{I + mr_2^2} = 1.2 \text{ m/s}^2 \tag{7}$$

e la tensione a cui è sottoposto il tratto sospeso della fune esterna:

$$T = \frac{mr_1 r_2 - I}{I + mr_2^2} F = 1.0 \text{ N}. \tag{8}$$

Per determinare il lavoro W compiuto dalla forza durante un intervallo di tempo Δt si noti che tale forza è l'unica in grado di compiere lavoro; pertanto è possibile utilizzare il teorema delle forze vive:

$$\begin{aligned} W = W_{tot} = \Delta K &= \frac{1}{2} m(a\Delta t)^2 + \frac{1}{2} I(\alpha \Delta t)^2 = \frac{1}{2} m(\alpha r_2 \Delta t)^2 + \frac{1}{2} I(\alpha \Delta t)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(I + mr_2^2)(\alpha \Delta t)^2 = \left[\frac{1}{2} I_P (\alpha \Delta t)^2\right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{(r_1 + r_2)^2}{I + mr_2^2} (F\Delta t)^2 = 21 \text{ J} \end{aligned} \tag{9}$$

Infine, qualora il piano orizzontale fosse scabro, le equazioni della dinamica devono essere modificate per includere l'azione della forza di attrito statico $\vec{\mathbf{F_a}}$, che, per opporsi al moto del rocchetto, sarà diretta verso destra:

$$\begin{cases} R - mg = 0 \\ (r_1 + r_2)F - 2r_2 F_a = 0 \\ F_a \leq \mu_s R \end{cases} \tag{10}$$

Da queste equazioni si determina direttamente:

$$\mu_s mg = \mu_s R \geq F_a = \frac{r_1 + r_2}{2r_2} F, \tag{11}$$

da cui

$$\mu_s \geq \frac{F}{mg} \frac{r_1 + r_2}{2r_2} = 0.09. \tag{12}$$

Problema 3 - Soluzione

La temperatura in A e C è pari a:

$$T_A = T_C = \frac{p_A V_A}{nR} = 366 \text{ °K} \tag{13}$$

Tenendo presente la natura delle trasformazioni A→B, B→C and C→A, possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$\frac{T_A}{V_A} = \frac{T_B}{V_B}; \qquad T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}; \qquad p_C V_C = 3 p_A V_C = p_A V_A \tag{14}$$

con $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 7/5$ essendo il gas biatomico. Poiché $\mathrm{T}_C = \mathrm{T}_A$, avremo:

$$V_C = \frac{V_A}{3} = 3.33 \text{ dm}^3; \qquad V_B = \frac{V_A}{3^{(\gamma-1)/\gamma}} = 0.731 \cdot V_A = 7.31 \text{ dm}^3 \tag{15}$$

$$T_B = \frac{V_B}{V_A} T_A = \frac{T_A}{3^{(\gamma-1)/\gamma} nR} = 267 \text{ °K} \tag{16}$$

Lungo la trasformazione A→B possiamo scrivere

$$dQ = nc_p dT \implies dS = \frac{dQ}{T} = nc_p \frac{dT}{T} \tag{17}$$

e quindi

$$\Delta S_{AB} = nc_p \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = n\frac{7}{2} R \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = -n\frac{7}{2} R \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln 3 = -18.3 \text{ J/°K} \tag{18}$$

Osservando che nella trasformqazione adiabatica B→C non viene scambiato calore, nel ciclo il gas assorbe calore solo nella trasformazione C→A. Tale calore è pari a:

$$Q_{CA} = W_{CA} = \int_C^A p dV = nRT_A \int_{V_C} \frac{dV}{V} = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_C} = nRT_A \ln 3 = 6.69 \cdot 10^3 \text{ J}. \tag{19}$$

Nell'intero ciclo il lavoro W compiuto dal gas è pari al calore da esso scambiato quindi:

$$\begin{aligned} W = Q = Q_{AB} + Q_{CA} = \int_A^B p dV + W_{CA} = \\ = nc_p(T_B - T_A) + nRT_A \ln 3 = \left[\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3^{(\gamma-1)/\gamma}} - 1\right) + \ln 3\right] nRT_A = 0.948 \cdot 10^3 \text{ J}. \end{aligned} \tag{20}$$

Il rendimento del ciclo sarà pertanto:

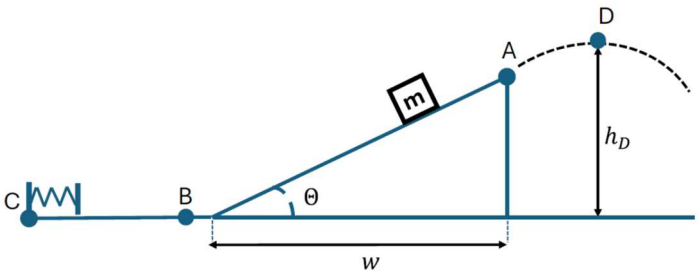
$$\eta = \frac{W}{Q_a} = \frac{W}{Q_{CA}} = \frac{1}{\ln 3}\left[\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3^{(\gamma-1)/\gamma}} - 1\right) + \ln 3\right] = 0.142 \tag{21}$$

Università degli studi dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Primo parziale di Fisica Generale I - 19/04/2024 (**1**) Tempo a disposizione: 1h

Nome	Cognome	N. matricola	Docente di riferimento

Problema (7 punti)



Inizialmente, un corpo di massa m scivola lungo un piano inclinato partendo dall'estremità del piano (A) con velocità $\vec{v}_A$. (**a**) Trascurando l'attrito, determinare il modulo della velocità $\vec{v}_B$ raggiunta dal corpo nel punto B [*1.5 punti*]. Successivamente, tramite una molla, ancorata nel punto C, il corpo è lanciato verso l'alto lungo il piano inclinato e può abbandonare il vincolo nel punto A percorrendo un moto parabolico. Sapendo che la velocità del corpo è $-\vec{v}_B$ subito dopo l'urto con la molla, **(b)** calcolare il modulo della velocità nel punto D corrispondente alla massima altezza h_D raggiunta dal corpo [*1.5 punti*]. (**c**) Calcolare il tempo t_{AD} necessario per percorrere il tratto di parabola AD [*1 punto*]. (**d**) Calcolare il raggio di curvatura R_D nel punto D [*2 punti*]. (**e**) Nella soluzione dei diversi punti, si valuterà complessivamente: chiarezza dell'esposizione, ivi inclusa la spiegazione e illustrazione dell'impostazione delle risposte, nonché l'analisi dimensionale sulle equazioni utilizzate [*1 punto*]. Dati: $v_A=|\vec{v}_A| = 3.0\frac{m}{s}$, $\theta = 35^\circ$, $g = 9.8\frac{m}{s^2}$, $w = 80\ cm$

SOLUZIONE

(a) Utilizzando la conservazione dell'energia (o in modo equivalente il teorema delll'energia cinetica), otteniamo la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh_A} \quad (1)$$

Noto l'angolo θ e la larghezza del piano inclinato w, l'altezza h_A è data dalla formula trigonometrica

$$h_A = w \cdot tg\theta \quad (2)$$

Sostituendo l'equazione (2) nell'equazione (1), è possibile esprimere il modulo della velocità in B rispetto ai parametri noti,

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g \cdot w \cdot tg\theta} = 4.5\ m/s \quad \left[LT^{-1}\right]$$

(b) Sapendo che nel tratto orizzontale la velocità del punto materiale è costante e utilizzando nuovamente la conservazione dell'energia nel tratto B-A, otteniamo:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^{'2} + mgh_A \Rightarrow v_A^{'} = v_A \ \left[LT^{-1}\right]$$

dove $v_A^{'}$ è il modulo della velocità nel punto A dopo l'urto con la molla.

Nel tratto A-D la componente orizzontale (lungo l'asse x) della velocità si conserva e nel punto D la componente verticale (lungo l'asse y) della velocità è 0, quindi

$$\begin{cases} v_{D,x} = v_{A,x}^{'} \\ v_{D,y} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_D = v_{A,x} = v_A \cos\theta = 2.4\ \text{m/s} \left[LT^{-1}\right]$$

(c) Il tempo necessario t_{AD} per percorrere il tratto di parabola AD è determinato utilizzando il secondo principio della dinamica e la definizione di accelerazione

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} \Rightarrow a_y = -g \Rightarrow v_{D,y} = v_{A,y} - gt_{AD} \left[LT^{-1}\right]$$

Imponendo nuovamente che $v_{D,y} = 0 \Rightarrow t_{AD} = \frac{v_{A,y}}{g} = \frac{v_A \sin\theta}{g} = 0.17\ \text{s} \quad \left[T\right]$

(d) Nel punto D l'accelerazione normale è $a_n = g$. Ricordando la relazione che lega il raggio di curvatura all'accelerazione centripeta, risulta:

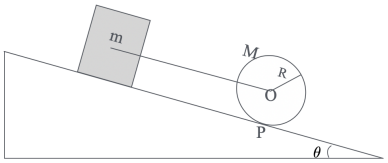
$$a_n = g = \frac{v_D^2}{R_D} \Rightarrow R_D = \frac{v_D^2}{g} = \frac{v_A^2 \cos^2\theta}{g} = 0.62\ m \quad \left[L\right]$$

Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Secondo parziale di Fisica Generale I - v1 - 24/05/2024

Cognome	Nome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

Tempo a disposizione: 1h.



Su uno stesso piano inclinato ci sono una massa $m = 10$ kg e un cilindro omogeneo di raggio $R = 0.10$ m e massa $M = 8.0$ kg. Il centro di massa del cilindro è collegato al corpo di massa m tramite un'asta di massa trascurabile. L'attrito tra il corpo di massa m e il piano inclinato è caratterizzato dal coefficiente di attrito statico μ_s =0.60, mentre per il cilindro si suppone che esso possa ruotare (senza attrito) rispetto al polo O e che non slitti mai rispetto al piano inclinato. Supponendo i corpi inizialmente in quiete e la massa m puntiforme, determinare:

a) l'angolo massimo θ_0 del piano inclinato entro cui il sistema rimane in equilibrio statico; *(5 punti)*

Ponendo l'angolo di inclinazione pari a $\theta_1 = \theta_0 + 10.0°$, il sistema non sarà più in equilibrio e quindi i due corpi scenderanno lungo il piano inclinato. Determinare:

b) il momento di inerzia del cilindro rispetto all'asse passante per il punto P istantaneo di contatto con il piano inclinato; *(1 punto)*

c) l'accelerazione del centro di massa del cilindro, dato il valore della tensione dell'asta pari a 10.3 N, considerando che essa spinge il corpo di massa m verso il basso (*suggerimento: scegliere il punto P come polo per la seconda equazione cardinale*); *(6 punti)*

d) nelle stesse condizioni del punto c), supponendo che il sistema cominci a scendere da fermo, la variazione di energia meccanica totale del sistema composto (cilindro e corpo di massa m) dopo aver percorso un tratto lungo il piano inclinato pari a $L = 1.0$ m.*(3 punti)*

[g = 9.8 m/s^2, I=$\frac{1}{2}$MR^2 momento d'inerzia rispetto l'asse passante per il CM]

Soluzione

a) Le equazioni del moto per il punto materiale sono:

$$\begin{cases} 0 = T + mg\sin\theta - F_{a,s} \\ 0 = N - mg\cos\theta \end{cases}$$

mentre per il cilindro la seconda equazione cardinale, in cui i momenti sono calcolati rispetto al punto di contatto con il piano, è la seguente:

$0 = RMg\sin\theta - RT.$

Dalle tre equazioni quindi si ricava:
$T = Mg\sin\theta$ quindi $F_{a,s} = T + mg\sin\theta = (M+m)g\sin\theta.$

Poiché $F_{a,s} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$ si ha: $(M+m)g\sin\theta \leq \mu_s mg\cos\theta$, cioè:

$$\tan\theta \leq \frac{\mu_s m}{(M+m)}$$

$$\theta = 18.4°.$$

b) Per il teorema di Huygens-Steiner il momento di inerzia del cilindro calcolato rispetto all'asse passante per il punto istantaneo di contatto P con il piano è pari a:

$$I_P = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 = 0.12 \text{ kg m}^2.$$

.

c) $\theta_1 = 28°$. In questo caso si ha: $\begin{cases} ma = T + mg\sin\theta_1 - F_{a,d} \\ 0 = N - mg\cos\theta_1 \end{cases}$ e invece per il cilindro: $I_p\alpha = RMg\sin\theta_1 - RT$

con I_p il momento d'inerzia calcolato al punto b).
Tenendo presente che l'accelerazione a del corpo di massa m coincide con l'accelerazione del centro di massa del cilindro e che il moto del cilindro è di puro rotolamento si ha che $\alpha = a/R$ e quindi dall'equazione dei momenti si ricava:

$I_p\alpha = RMg\sin\theta_1 - RT \Rightarrow \frac{3}{2}Ma = Mg\sin\theta_1 - T$

dalla quale troviamo: $a = \frac{2}{3M}(Mg\sin\theta_1 - T) = 2.2 \text{ m/s}^2.$

d)La variazione di energia meccanica è data dal lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico per la massa m nel tratto L (per il cilindro l'attrito è statico quindi non compie lavoro) e quindi:

$$F_{a,d} = T + mg\sin\theta_1 - ma = 34\text{N}$$

$$W_{\text{attrito}} = -F_{a,d}L = -34 \text{ N·m}$$

.

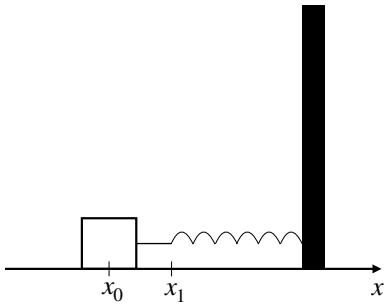
Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Prova scritta di Fisica Generale I - v1 - 18/06/2024

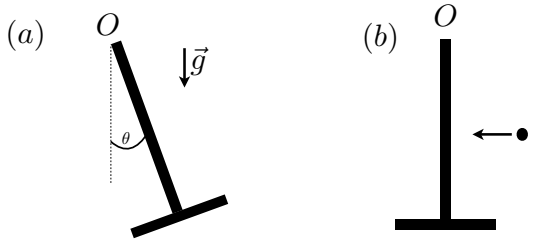
Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

- Tempo a disposizione: 2h 30min.

Problema 1 (7 punti) Un punto materiale di massa $m = 1.2$ kg è attaccato ad una molla di costante elastica $k = 150\ \mathrm{N\,m^{-1}}$ (che a sua volta è fissata ad una parete verticale all'altro estremo) ed è in quiete in $x_0 = 0$. Al tempo $t_0 = 0$ si applica una forza costante $\vec{F} = F\hat{x}$, con $F = 10$ N. a) Calcolare il lavoro compiuto dalla forza F durante lo spostamento del punto materiale da x_0 a $x_1 = 0.10$ m (1 punto). b) Determinare la velocità del punto materiale in x_1 trascurando l'eventuale attrito. (2 punti). c) Determinare quale dovrebbe essere il modulo di una forza $\vec{F}'$ (anch'essa costante, e che agisce al posto di $\vec{F}$) affinchè il corpo si fermi in x_1 (1 punto). d) In assenza della molla, ma assumendo sempre presente la forza $\vec{F}$, se il punto materiale avesse velocità $\vec{v_0} = v_0\hat{x}$ (con $v_0 = 1.0\mathrm{m\,s^{-1}}$) in x_0 e il piano fosse scabro, determinare il valore di μ_d affinché il corpo abbia velocità con modulo $v_1 = 0.90\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ in x_1 (3 punti).
[Nota: $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$]



Problema 2 (15 punti) Un pendolo composto è costituito da 2 aste rigide omogenee di spessori trascurabili. Le aste hanno lunghezze: $L_1 = 50$ cm, $L_2 = 20$ cm, e rispettive masse: $m_1 = 500$ g, $m_2 = 200$ g. L'asta di massa m_1 è fissata per un estremo al punto O, attorno a cui è libera di ruotare senza attrito. All'estremo opposto è attaccata l'asta di massa m_2, nella posizione del suo centro di massa, in modo che le due aste siano disposte ortogonalmente tra di loro (si veda la figura (a)). a) Si calcoli la distanza del centro di massa del pendolo dal punto O (2 punti). b) Si dimostri che il momento d'inerzia del pendolo rispetto ad un asse passante per O è: $I_O = 92\ \mathrm{gm^2}$ (2 punti). Il pendolo viene lasciato libero di ruotare attorno al punto O partendo da fermo dalla posizione in cui il suo asse forma un angolo $\theta = 20°$ con la direzione verticale, come mostrato in figura (a). c) Si calcoli la velocità angolare del pendolo nel momento in cui raggiunge la posizione verticale, $\theta = 0°$ (4 punti). Nel momento in cui il pendolo si trova nella posizione verticale, viene urtato da un punto materiale di massa $m = 50$ g, che si muove orizzontalmente con velocità il cui modulo è: $v_{in} = 3.0\ \mathrm{ms^{-1}}$. Il punto materiale urta il pendolo nella posizione del centro di massa dell'asta di massa m_1 (si veda la figura (b)). Sapendo che il punto materiale rimbalza (tornando indietro) e che la sua velocità dopo l'urto ha modulo: $v_f = v_{in}/2$, calcolare: d) modulo, direzione e verso del momento angolare del pendolo nell'istante successivo all'urto (4 punti); e) la velocità angolare del pendolo nell'istante successivo all'urto (3 punti).
[Nota: $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$; $I_{\mathrm{CM}} = ML^2/12$ dove I_{CM} è il momento d'inerzia di un'asta sottile e omogenea (di lunghezza L e massa M) calcolato rispetto ad un'asse passante per il centro di massa.]



Problema 3 (8 punti) Una mole di gas ideale biatomico viene utilizzata in una macchina termica. Inizialmente il gas si trova in uno stato di equilibrio A ad una pressione $P_A = 8.00 \times 10^5$ Pa e temperatura $T_A = 370$ K. Da A, tramite un'espansione isoterma reversibile a contatto con una sorgente a temperatura T_A, il gas arriva nello stato B. In questa trasformazione il gas scambia una quantità di calore pari a $Q_{AB} = 1500$ J. Successivamente il gas raggiunge lo stato C ($V_C = \frac{3}{2}V_B$) tramite un'espansione adiabatica reversibile. Quindi, per mezzo di una compressione isoterma reversibile a contatto con una sorgente a temperatura T_C, il gas arriva nello stato di equilibrio D, il cui volume è pari a quello dello stato A. Infine, il gas ritorna nello stato iniziale tramite una trasformazione isocora reversibile. a) Disegnare il ciclo nel piano P-V (1 punto). b) Determinare i valori di pressione, volume e temperatura negli stati A, B, C e D (4 punti). c) Calcolare la variazione di entropia del gas nella trasformazione CD (2 punti). d) Calcolare il calore scambiato dal gas nelle trasformazioni CD e DA (1 punto).
[Nota: costante dei gas perfetti $R = 8.31$ J/(K×mol)]

Problema 1 - Soluzione

a) Il lavoro della forza costante F è dato da $W = F(x_1 - x_0) = 1.0$ J.
b) Utilizziamo il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}kx_1^2 + Fx_1 \tag{1}$$

ottenendo quindi per la velocità:

$$v_1 = \sqrt{\frac{x_1}{m}(2F - kx_1)} = 0.64\,\mathrm{m/s} \tag{2}$$

c) Per trovare la condizione per cui il corpo si fermi in x_1, se la forza applicata è F', si può utilizzare l'espressione trovata al punto precedente sostituendo F' a F e imponendo che la velocità sia nulla:

$$v_1 = \sqrt{\frac{x_1}{m}(2F' - kx_1)} = 0, \;\; F' = \frac{kx_1}{2} = 7.5\,\mathrm{N} \tag{3}$$

d) Applichiamo di nuovo il teorema dell'energia cinetica, in questo caso con il lavoro della forza di attrito dinamico al posto della forza elastica (e con la velocità iniziale diversa da zero)

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_d mgx_1 + Fx_1 \tag{4}$$

ottenendo quindi per il coefficiente di attrito dinamico:

$$\mu_d = \frac{Fx_1 - \Delta E_k}{mgx_1} = 0.95 \tag{5}$$

Problema 2 - Soluzione

a) La distanza del centro di massa del sistema dal punto O è data da:

$$d_{cm} = \frac{m_1 L_1/2 + m_2 L_1}{m_1 + m_2} = 32\,\mathrm{cm}. \tag{6}$$

b) Il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per O è la somma dei momenti d'inerzia delle due aste:

$$I_O = I_{O,1} + I_{O,2}, \tag{7}$$

dove $I_{O,1}$ e $I_{O,2}$ si ottengono applicando il teorma di Huygens-Steiner:

$$I_{O,1} = m_1\frac{L_1^2}{12} + m_1\left(\frac{L_1}{2}\right)^2 = m_1\frac{L_1^2}{3} \qquad I_{O,2} = m_2\frac{L_2^2}{12} + m_2 L_1^2. \tag{8}$$

Sommando si ottiene: $I_O = 92\mathrm{gm}^2$.
c) Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{m,i} = (m_1 + m_2)gd_{cm}(1 - \cos\theta) \qquad E_{m,f} = \frac{I_O}{2}\omega^2 \tag{9}$$

$$E_{m,i} = E_{m,f} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)gd_{cm}(1 - \cos\theta)}{I_O}} = 1.70\ \mathrm{rad\ s^{-1}}. \tag{10}$$

d) Applichiamo la conservazione del momento angolare rispetto al polo O. Scegliamo il sistema di coordinate in modo che l'asse z sia entrante.

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f. \tag{11}$$

$$\vec{L}_i = \left(I_O\omega + mv_i\frac{L_1}{2}\right)\hat{z} = 0.19\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}\,\hat{z} \quad , \quad \vec{L}_f = \vec{L}_{pendolo} - mv_f\frac{L_1}{2}\hat{z}, \tag{12}$$

dove $\vec{L}_{pendolo}$ è il momento angolare del pendolo nell'istante successivo all'urto. Quindi:

$$\vec{L}_{pendolo} = \vec{L}_i + mv_f\frac{L_1}{2}\hat{z} = 0.21\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}\,\hat{z}. \tag{13}$$

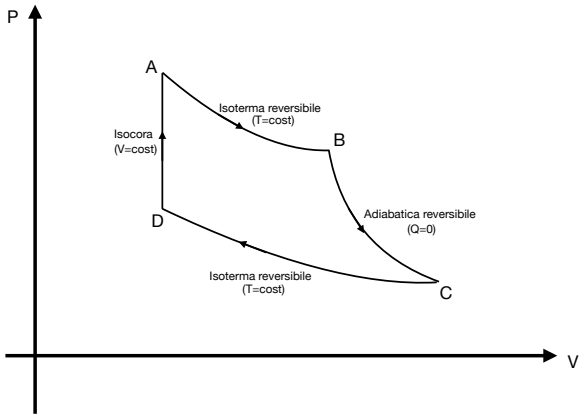
e) Sappiamo che:

$$\left|\vec{L}_{pendolo}\right| = I_O \omega', \tag{14}$$

dove ω' è la velocità angolare dell'asta nell'istante successivo all'urto. Quindi:

$$\omega' = \frac{\left|\vec{L}_{pendolo}\right|}{I_O} = 2.3 \text{ rad s}^{-1}. \tag{15}$$

Problema 3 - Soluzione
a)



b) Il volume dello stato A si ricava tramite l'equazione di stato dei gas perfetti

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 3.8 \times 10^{-3} \,\text{m}^3\,. \tag{16}$$

Poichè DA è una isocora, il volume in D è uguale a quello in A ($V_D = V_A$). Per il primo principio della termodinamica in AB non c'è variazione di energia interna e quindi il lavoro compiuto è uguale al calore scambiato. Dalla formula generale del lavoro compiuto in una trasformazione isoterma reversibile è possibile ricavare V_B

$$W_{AB} = Q_{AB} = nRT_A \log \frac{V_B}{V_A} \implies V_B = V_A e^{\frac{Q_{AB}}{nRT_A}} = 6.2 \times 10^{-3} \,\text{m}^3\,. \tag{17}$$

La temperatura in B è $T_B = T_A$, mentre la pressione si ricava dall'equazione di stato dei gas perfetti

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 4.91 \times 10^5 \,\text{Pa}\,. \tag{18}$$

Sapendo che $V_C = \frac{3}{2} V_B = 0.0094$ m^3 e che per un gas biatomico $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{7}{5}$ ($c_P = \frac{7}{2}R$, $c_V = \frac{5}{2}R$), possiamo calcolare T_C usando le equazioni di Poisson delle adiabatiche reversibili

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \implies T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = T_B \left(\frac{3}{2}\right)^{-\gamma+1} = 315 \,\text{K} \tag{19}$$

La pressione in C e D si trova con la legge di stato dei gas perfetti (sapendo che $T_D = T_C$)

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 2.78 \times 10^5 \,\text{Pa}\,, \tag{20}$$

$$P_D = \frac{nRT_D}{V_D} = 6.80 \times 10^5 \,\text{Pa}\,. \tag{21}$$

c) La variazione di entropia per un gas ideale in una trasformazione generica è data da

$$\Delta S_{\text{gas}} = nc_V \log \frac{T_{\text{fin}}}{T_{\text{in}}} + nR \log \frac{V_{\text{fin}}}{V_{\text{in}}}\,, \tag{22}$$

dove $T_{\rm fin}$ e $V_{\rm fin}$ sono la temperatura ed il volume alla fine della trasformazione, mentre $T_{\rm in}$ e $V_{\rm in}$ sono la temperatura ed il volume iniziali. Applicando questa equazione alla trasformazione CD si ricava

$$\Delta S_{\rm gas,CD} = nc_V \log \frac{T_D}{T_C} + nR \log \frac{V_D}{V_C} = -7.43\,{\rm J/K}\,. \tag{23}$$

d) il calore scambiato in DA è uguale alla variazione di energia interna e quindi

$$Q_{DA} = nc_V(T_A - T_D) = 1150\,{\rm J}\,. \tag{24}$$

Il calore scambiato in CD può essere calcolato usando l'equazione del lavoro scambiato in una isoterma reversibile $W = Q = nRT \log(V_{\rm finale}/V_{\rm iniziale})$.

$$Q_{CD} = nRT_D \log \frac{V_D}{V_C} = -2340\,{\rm J}\,. \tag{25}$$

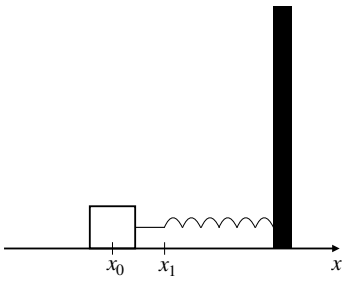
Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Prova scritta di Fisica Generale I - v2 - 18/06/2024

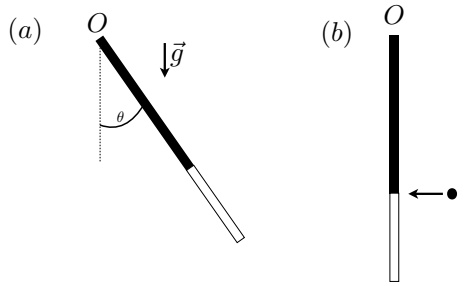
Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

- Tempo a disposizione: 2h 30min.

Problema 1 (7 punti) Un punto materiale di massa $m = 2.0$ kg è attaccato ad una molla di costante elastica $k = 50\ \mathrm{N\,m^{-1}}$ (che a sua volta è fissata ad una parete verticale all'altro estremo) ed è in quiete in $x_0 = 0$. Al tempo $t_0 = 0$ si applica una forza costante $\vec{F} = F\hat{x}$, con $F = 13$ N. a) Determinare il lavoro compiuto dalla forza elastica durante lo spostamento del punto materiale da x_0 a $x_1 = 0.5$ m (1 punto). b) Determinare la velocità del punto materiale in $x_1 = 0.50$ m (2 punti). c) Determinare il valore di x_1' tale che il punto materiale si fermi (1 punto). d) In assenza della molla, ma assumendo sempre presente la forza $\vec{F}$, se il punto materiale avesse velocità $\vec{v_0} = v_0\hat{x}$ (con $v_0 = 1.5\mathrm{m\,s^{-1}}$) in x_0 e il piano fosse scabro, determinare il valore di μ_d affinché il corpo abbia velocità con modulo $v_1 = 0.50\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ in x_1 (3 punti). [Nota: $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$]



Problema 2 (15 punti) Un pendolo composto è costituito da 2 aste rigide omogenee di spessori trascurabili. Le aste hanno lunghezze: $L_1 = 80$ cm, $L_2 = 45$ cm, e rispettive masse: $m_1 = 400$ g, $m_2 = 150$ g. L'asta di massa m_1 è fissata per un estremo al punto O, attorno a cui è libera di ruotare senza attrito. L'asta di massa m_2 è attaccata all'estremo libero dell'asta di massa m_1 per uno dei suoi estremi, in modo che le due aste siano disposte parallelamente tra di loro (si veda la figura (a)). a) Si calcoli la distanza del centro di massa del pendolo dal punto O (2 punti). b) Si dimostri che il momento d'inerzia del pendolo rispetto ad un asse passante per O è: $I_O = 245\ \mathrm{gm^2}$ (2 punti). Il pendolo viene lasciato libero di ruotare attorno al punto O partendo da fermo dalla posizione in cui il suo asse forma un angolo $\theta = 35°$ con la direzione verticale, come mostrato in figura (a). c) Si calcoli la velocità angolare del pendolo nel momento in cui raggiunge la posizione verticale, $\theta = 0°$ (4 punti). Nel momento in cui il pendolo si trova nella posizione verticale, viene urtato da un punto materiale di massa $m = 30$ g, che si muove orizzontalmente con velocità il cui modulo è: $v_{in} = 5.0\ \mathrm{ms^{-1}}$. Il punto materiale urta il pendolo nel punto di giunzione tra le 2 aste (si veda la figura (b)). Sapendo che il punto materiale rimbalza e che la sua velocità dopo l'urto ha modulo: $v_f = v_{in}/3$, calcolare: d) modulo, direzione e verso del momento angolare del pendolo nell'istante successivo all'urto (4 punti); e) la velocità angolare del pendolo nell'istante successivo all'urto (3 punti).
[Nota: $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$; $I_{\mathrm{CM}} = ML^2/12$ dove I_{CM} è il momento d'inerzia di un'asta sottile e omogenea (di lunghezza L e massa M) calcolato rispetto ad un'asse passante per il centro di massa.]



Problema 3 (8 punti) Due moli di gas ideale monoatomico vengono utilizzate in una macchina frigorifera. Inizialmente il gas si trova in uno stato di equilibrio A ad una pressione $P_A = 4.00 \times 10^5$ Pa e temperatura $T_A = 350$ K. Da A, tramite una compressione isoterma reversibile a contatto con una sorgente a temperatura T_A, il gas arriva nello stato B ($V_B = 5.00 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$). Successivamente il gas raggiunge la temperatura T_C nello stato C tramite una trasformazione isocora reversibile. Quindi, per mezzo di un'espansione isoterma reversibile a contatto con una sorgente a temperatura T_C, il gas arriva nello stato di equilibrio D ($P_D = \frac{1}{2}P_A$). Infine, il gas ritorna tramite una trasformazione adiabatica reversibile allo stato iniziale. a) Disegnare il ciclo nel piano P-V (1 punto). b) Determinare i valori di pressione, volume e temperatura negli stati A, B, C e D (4 punti). c) Calcolare la variazione di entropia del gas nella trasformazione AB (2 punti). d) Calcolare il lavoro compiuto dal gas nelle trasformazioni CD e DA (1 punti).
[Nota: costante dei gas perfetti $R = 8.31$ J/(K×mol)]

Problema 1 - Soluzione

a) Il lavoro della forza elastica è dato da $W = -\frac{1}{2}kx_1^2 = -6.3$ J.
b) Utilizziamo il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}kx_1^2 + Fx_1 \tag{26}$$

ottenendo quindi per la velocità:

$$v_1 = \sqrt{\frac{x_1}{m}(2F - kx_1)} = 0.5\,\mathrm{m/s} \tag{27}$$

c) Per trovare la posizione x_1' in cui il corpo si ferma, si può utilizzare l'espressione trovata al punto precedente imponendo che la velocità sia nulla in x_1':

$$v_1 = \sqrt{\frac{x_1}{m}(2F - kx_1')} = 0,\ x_1' = \frac{2F}{k} = 0.52\,\mathrm{m} \tag{28}$$

d) Applichiamo di nuovo il teorema dell'energia cinetica, in questo caso con il lavoro della forza di attrito dinamico al posto della forza elastica (e con la velocità iniziale diversa da zero)

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_d mgx_1 + Fx_1 \tag{29}$$

ottenendo quindi per il coefficiente di attrito dinamico:

$$\mu_d = \frac{Fx_1 - \Delta E_k}{mgx_1} = 0.87 \tag{30}$$

Problema 2 - Soluzione

a) La distanza del centro di massa del sistema dal punto O è data da:

$$d_{cm} = \frac{m_1 L_1/2 + m_2\,(L_1 + L_2/2)}{m_1 + m_2} = 57\,\mathrm{cm}. \tag{31}$$

b) Il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per O è la somma dei momenti d'inerzia delle due aste:

$$I_O = I_{O,1} + I_{O,2}, \tag{32}$$

dove $I_{O,1}$ e $I_{O,2}$ si ottengono applicando il teorma di Huygens-Steiner:

$$I_{O,1} = m_1\frac{L_1^2}{12} + m_1\left(\frac{L_1}{2}\right)^2 = m_1\frac{L_1^2}{3} \qquad I_{O,2} = m_2\frac{L_2^2}{12} + m_2\,(L_1 + L_2/2)^2 = m_2\frac{L_2^2}{3} + m_2 L_1\,(L_1 + L_2)\,. \tag{33}$$

Sommando si ottiene: $I_O = 245$ g m^2.
c) Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{m,i} = (m_1 + m_2)gd_{cm}(1 - \cos\theta) \qquad E_{m,f} = \frac{I_O}{2}\omega^2 \tag{34}$$

$$E_{m,i} = E_{m,f} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)gd_{cm}(1 - \cos\theta)}{I_O}} = 2.1\ \mathrm{rad\ s^{-1}}. \tag{35}$$

d) Applichiamo la conservazione del momento angolare rispetto al polo O. Scegliamo il sistema di coordinate in modo che l'asse z sia entrante.

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f. \tag{36}$$

$$\vec{L}_i = (I_O\omega + mv_i L_1)\,\hat{z} = 0.64\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}\hat{z} \quad , \quad \vec{L}_f = \vec{L}_{pendolo} - mv_f L_1\hat{z}, \tag{37}$$

dove $\vec{L}_{pendolo}$ è il momento angolare del pendolo nell'istante successivo all'urto. Quindi:

$$\vec{L}_{pendolo} = \vec{L}_i + mv_f L_1\hat{z} = 0.68\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}\hat{z}. \tag{38}$$

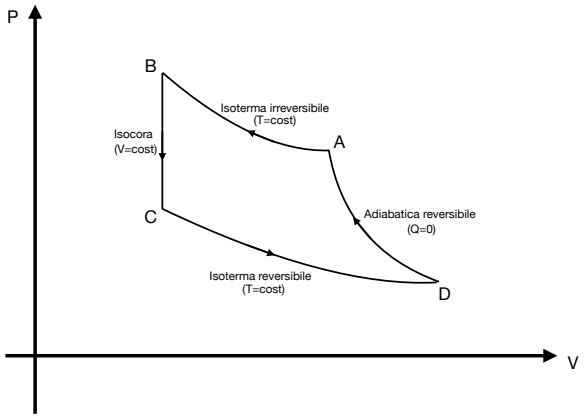
e) Sappiamo che:

$$\left|\vec{L}_{pendolo}\right| = I_O \omega', \tag{39}$$

dove ω' è la velocità angolare dell'asta nell'istante successivo all'urto. Quindi:

$$\omega' = \frac{\left|\vec{L}_{pendolo}\right|}{I_O} = 2.8 \text{ rad}\,\text{s}^{-1}. \tag{40}$$

Problema 3 - Soluzione
a)



b) Il volume dello stato A e la pressione dello stato B si ricavano tramite l'equazione di stato dei gas perfetti (sapendo che $T_B = T_A$)

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 15 \times 10^{-3}\,\text{m}^3\,. \tag{41}$$

Essendo $T_B = T_A$ calcoliamo la pressione dello stato B

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 1.16 \times 10^6\,\text{Pa}\,. \tag{42}$$

Sapendo che $P_D = \frac{1}{2}P_A = 2 \times 10^5$ Pa e che per un gas monoatomico $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{5}{3}$ ($c_P = \frac{5}{2}R$, $c_V = \frac{3}{2}R$), possiamo calcolare $T_C = T_D$ usando le equazioni di Poisson delle adiabatiche reversibili

$$P_A^{1-\gamma} T_A^{\gamma} = P_D^{1-\gamma} T_D^{\gamma} \implies T_D = T_A \left(\frac{P_A}{P_D}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_A\,(2)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 265\,\text{K} \tag{43}$$

La pressione in C e D si trova con la legge di stato dei gas perfetti (sapendo che $T_C = T_D$ e $V_C = V_B$)

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 8.82 \times 10^5\,\text{Pa}\,, \tag{44}$$

$$V_D = \frac{nRT_D}{P_D} = 2.2 \times 10^{-2}\,\text{m}^3\,. \tag{45}$$

c) La variazione di entropia per un gas ideale in una trasformazione generica è data da

$$\Delta S_{\text{gas}} = nc_V \log \frac{T_{\text{fin}}}{T_{\text{in}}} + nR \log \frac{V_{\text{fin}}}{V_{\text{in}}}\,, \tag{46}$$

dove T_{fin} e V_{fin} sono la temperatura ed il volume alla fine della trasformazione, mentre T_{in} e V_{in} sono la temperatura ed il volume iniziali. Applicando questa equazione alla trasformazione AB si ricava

$$\Delta S_{\text{gas,AB}} = nc_V \log \frac{T_B}{T_A} + nR \log \frac{V_B}{V_A} = -17.8\,\text{J/K}\,. \tag{47}$$

d) Il lavoro in DA è uguale all'opposto della variazione di energia interna e quindi

$$W_{DA} = -nc_V(T_A - T_D) = -2110\,\text{J}\,. \tag{48}$$

Il lavoro in CD può essere calcolato usando l'equazione del lavoro in una isoterma reversibile $W = Q = nRT \log(V_{\text{finale}}/V_{\text{iniziale}})$.

$$W_{CD} = nRT_D \log \frac{V_D}{V_C} = 6550\,\text{J}\,. \tag{49}$$

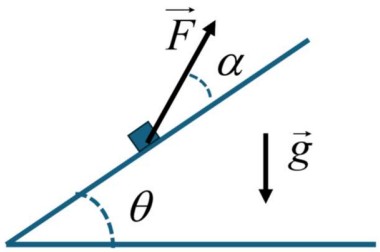
Università degli Studi dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Prova scritta di Fisica Generale I - 02/07/2024

Nome	Cognome	N. Matricola	Docente di riferimento
.....	.....	.....	.....

Tempo a disposizione: 2h 30min. Affinché il secondo e terzo problema siano valutati è necessario conseguire almeno 3.5 punti nel primo problema.

Problema 1 (7 punti)



Un corpo puntiforme di massa *m* poggia su un piano scabro e inclinato di un angolo θ (vedi figura). Al blocco viene applicata verso l'alto una forza $\vec{F}$ (costante nel tempo) che forma un angolo α rispetto al piano inclinato (vedi figura).

(a) Determinare il valore massimo del modulo di $\vec{F}$ (F^*) entro cui il corpo rimane in contatto con il piano inclinato (**2 punti**).

Ponendo $|\vec{F}| = F_0$ e considerando che il corpo inizia a muoversi verso l'alto con velocità iniziale nulla, rispetto al sistema inerziale solidale con il piano inclinato, calcolare:

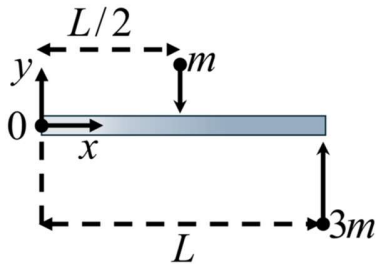
(b) il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ per un tratto lungo il piano inclinato pari a L (**1 punti**);

(c) la velocità raggiunta dal punto materiale dopo aver percorso il tratto L (**3 punti**).

(d) Nella soluzione dei diversi punti, è richiesta l'analisi dimensionale sulle equazioni utilizzate (**1 punto**).

Dati: $\mu_d = 0.15, m = 0.50\ kg, \theta$=30°, α=25°, g = 9.8 m/s^2, F_0 =9.5 N, L=0.40 m

Problema 2 (15 punti)



Una sbarra sottile di lunghezza L e di massa M si trova inizialmente ferma su un piano liscio orizzontale (piano x-y).

(a) Supponendo che la sbarra sia *non omogenea* con una densità lineare di massa data dall'equazione $\lambda(x) = A\,x$, dimostrare che la posizione del centro di massa è $x_{CM,sb.} = \frac{2}{3}L$ rispetto al sistema di riferimento Oxy (vedi figura) e che M= $\frac{A}{2}L^2$ (**4 punti**).

Inoltre, due corpi puntiformi di massa m e 3m si muovono sullo stesso piano con velocità in modulo rispettivamente 3v e v in direzione ortogonale alla sbarra e versi opposti (vedi figura). I due corpi colpiscono contemporaneamente la sbarra rispettivamente alla distanza L/2, L dal punto O e vi rimangono attaccati. Subito dopo l'urto, il sistema composto (da sbarra e due corpi) inizia a ruotare.

(b) Rispetto al sistema Oxy, determinare la velocità del centro di massa del sistema composto subito dopo l'urto (**3 punti**).

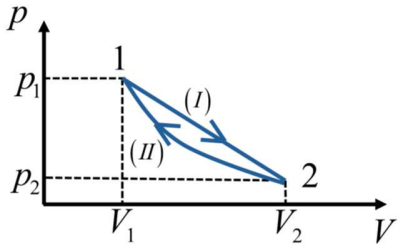
(c) Nota la posizione del centro di massa del sistema composto ($x_{CM,tot} = 0.742 \cdot L$) e il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse passante per $x_{CM,sb.}$ ($I_{CM,sb.} = 2.082$ Kg m^2), calcolare il momento di inerzia del sistema composto rispetto all'asse passante per il suo centro di massa ($x_{CM,tot}$) (**4 punti**).

(d) Rispetto al sistema Oxy, determinare il modulo della velocità del punto materiale con massa m dopo l'urto (**4 punti**).

Dati: A=3.2 kg/ m^2, v=2.0 m/s, L=2.2 m, m = 1.1 Kg.

Note: il sistema Oxy è inerziale e solidale al piano orizzontale che sostiene il sistema meccanico; Il momento d'inerzia della sbarra non omogenea è $I_{CM,sb.}$ rispetto all'asse passante per il suo centro di massa ($x_{CM,sb.}$) e perpendicolare al piano x-y.

Problema 3 (8 punti)



Una quantità pari a *n* moli di un gas ideale biatomico compie un ciclo reversibile tra gli stati di equilibrio 1 e 2 rappresentati in figura. Partendo dallo stato 1, il gas si espande secondo la trasformazione reversibile che nel piano p-V corrisponde al segmento che unisce gli stati 1 e 2 [*trasformazione (I) dove* $p = \alpha\,V + \beta$ con α, β costanti]. Raggiunto lo stato 2, il gas subisce una compressione isoterma reversibile [*trasformazione (II)*].

(a) Determinare il volume V_2 e la temperatura T della trasformazione isoterma (**1 punti**);

(b) il lavoro W compiuto dal gas in un ciclo (**3 punti**);

(c) la variazione di entropia che il gas subisce nell'espansione (I) (**2 punti**);

(d) la variazione di entropia subita dall'universo termodinamico, e la variazione di entropia subita dalle sorgenti coinvolte nella trasformazione (I) (**2 punti**).

Dati: *n=2.00* mol, *R =0.0821* L· atm / (mol · K) =8.31 J/ (mol · K), $p_1 = 30.0\ atm, V_1 = 5.31\ dm^3, p_2 = 8.00\ atm$ [$1atm = 1{,}013 \cdot 10^5\ Pa$]

Soluzioni

Problema 1

a) Dal secondo principio della dinamica e supponendo il corpo vincolato sul piano inclinato è possibile ottenere il valore della componente normale della reazione vincolare (N): $N = mg\cos\theta - F\sin\alpha$. La condizione per avere il corpo vincolato è $N \geq 0$ quindi $F \leq F^* = mg\dfrac{\cos\theta}{\sin\alpha} = 10\ N \quad \left[MLT^{-2}\right]$

b) Il lavoro compiuto dalla forza F è dato da: $W_F = F_0\cos\alpha L = 3.4\ J \quad \left[ML^2T^{-2}\right]$

c) La velocità finale può essere ricavata utilizzando il teorema dell'energia cinetica,
$\dfrac{1}{2}mv^2 = W_F - \mu_d NL - mgh$ dove $N = mg\cos\theta - F_0\sin\alpha$ e $h = L\sin\theta$
quindi la velocità è data da : $v = \sqrt{2\left[\dfrac{W_F}{m} + \dfrac{\mu_d}{m}F_0\sin\alpha L - gL\left(\mu_d\cos\theta + \sin\theta\right)\right]} = 3.1\ m/s\left[LT^{-1}\right]$

Problema 2

a) La posizione del centro di massa è data dalla seguente formula:

$$x_{CM,sb.} = \frac{\int xdm}{\int dm} = \frac{\int dxx\lambda(x)}{\int_0^L dx\lambda(x)} = \frac{\int_0^L dxx\lambda(x)}{\int_0^L dx\lambda(x)} = \frac{A\int_0^L dxx^2}{A\int_0^L dxx} = \frac{2}{3}L$$

Inoltre, la massa della sbarra è data da $M = \int dm = A\int_0^L dxx = \dfrac{AL^2}{2} = 7.7\ Kg$

E' possibile anche calcolare Il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il punto O dato nel testo del problema: $I_0 = \int x^2 dm = A\int_0^L dxx^3 = \dfrac{AL^4}{4} = 19\ kg\cdot m^2$

b) La risultante delle forze esterne è nulla quindi la quantità di moto si conserva. Scrivendo la quantità di moto prima e dopo l'urto, si ottiene
$\begin{cases}\vec{P}^{(in)} = m\vec{v}_1 + 3m\vec{v}_2 \\ \vec{P}^{(f)} = M_{tot}\vec{v}_{CM}\end{cases}$ dove $M_{tot} = M + 4m$. Sostituendo i valori dati risulta $\vec{v}_{CM} = \vec{0}$

c) Il centro di massa del sistema composto è dato da:

$$x_{CM,tot} = \frac{Mx_{CM,sb.} + m\dfrac{L}{2} + 3mL}{M + 4m} = \frac{\dfrac{2}{3}M + \dfrac{7}{2}m}{M + 4m}L = 0.742\cdot L$$

Il momento d'inerzia del sistema composto $I_{tot,CM}$ è dato dalla somma del contributo dei tre corpi:

$$I_{CM,tot} = I'_{CM,sb.} + m\left(x_{CM,tot} - \frac{L}{2}\right)^2 + 3m\left(L - x_{CM,tot}\right)^2$$

E' possibile determinare il momento d'inerzia della sbarra applicando il teorema di Huygens-Steiner

$I_{CM,sb.} = I_0 - Mx_{CM}^2 = 2.08\ kg \cdot m^2$ (come noto dal testo)

$I'_{CM,sb.} = I_{CM,sb.} + M\left(x_{CM,tot} - x_{CM,sb.}\right)^2 = 2.29 kg \cdot m^2$

Sostituendo i dati otteniamo: $I_{CM,tot} = 3.7\ kg \cdot m^2$

d) Dopo l'urto il sistema ruota rispetto al suo centro di massa $x_{CM,tot}$. La velocità angolare finale del sistema composto (ω) si può determinare dalla conservazione del momento angolare (come conseguenza del fatto che il momento risultante delle forze è nullo).
Scegliendo come polo il CM del sistema composto, Il momento angolare inziale in modulo è dato da:

$$L_{in} = m\left(L - x_{CM,tot}\right)3v - 3m\left(x_{CM,tot} - \frac{L}{2}\right)v$$

Dalla conservazione del momento angolare otteniamo

$$L_{fin} = L_{in} \Rightarrow I_{CM,tot}\omega = L_{in} \Rightarrow \omega = \frac{L_{in}}{I_{CM,tot}} = 0.062\ rad/s$$

Infine, la velocità del punto materiale di massa m risulta $v_f = \omega\left(x_{CM,tot} - L/2\right) = 0.033\ m/s$

Problema 3

(a) Noto che il gas è ideale, risulta: $\begin{cases} p_1V_1 = nRT \\ p_2V_2 = nRT \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{p_1V_1}{nR} = 970\ K \\ V_2 = \dfrac{nRT}{p_2} = 19.9\ L \end{cases}$

(b) Il lavoro compiuto dal gas risulta dato da due contributi il lavoro calcolato nella trasformazione I (W_I)e nella trasformazione II (W_{II}). Il lavoro nella trasformazione I è dato da $W_I = \int_{V_1}^{V_2} pdV$.

Considerato che la relazione tra p e V è lineare, risulta: $p = \alpha V + \beta$ con $\alpha = \dfrac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}, \beta = p_1 - \alpha V_1$

quindi: $W_I = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\alpha V + \beta\right)dV = \dfrac{\alpha}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) + \beta\left(V_2 - V_1\right) = 277\ atm \cdot L = 2.86 \cdot 10^4 J$

Il lavoro nella trasformazione II è dato da

$$W_{II} = \int_{V_2}^{V_1} pdV = nRT \log\frac{V_1}{V_2} = \text{-}2.13 \cdot 10^4 J$$

Sommando i due contributi otteniamo il lavoro compiuto dal gas durante un ciclo:

$W = W_I + W_{II} = 7.29 \cdot 10^3 J$

(c) L'entropia dipende solo dalle variabili termodinamiche degli stati 1 e 2. Possiamo calcolare la variazione richiesta percorrendo la trasformazione isoterma II in senso inverso

$$\Delta S_{I,gas} = \int_{\widehat{12}(rev)} \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int_{\widehat{12}(rev)} \delta Q = \frac{1}{T} \int_{\widehat{12}(rev)} \delta W = \frac{1}{T} nRT \log \frac{V_2}{V_1} = -\frac{W_{II}}{T} = 22.0 J/K$$

(d) Le trasformazioni considerate sono tutte reversibili quindi la variazione di entropia dell'universo termodinamico è nulla. Inoltre, sfruttando il fatto che la trasformazione I è reversibile, la variazione di entropia subita dalle sorgenti nella trasformazione I risulta $\Delta S_{I,sorgenti} = -\Delta S_{I,gas} = \frac{W_{II}}{T} = -22.0 J/K$

Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

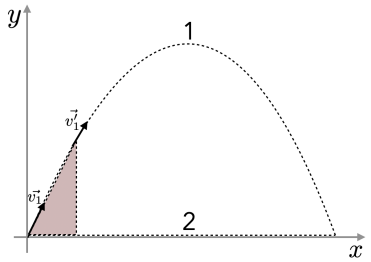
Terzo appello di Fisica Generale I - 16/07/2024

Cognome	Nome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

Tempo a disposizione: 2h30.

Problema n.1 (7 punti)

Due corpi puntiformi uguali di massa $m = 2.0$ kg vengono lanciati, nello stesso istante e dal medesimo punto, l'uno su di un piano inclinato liscio (angolo alla base $\theta = 45°$ e lunghezza $d = 1.2$ m) con velocità iniziale $v_1 = 5.0$ m/s, l'altro su di un piano orizzontale ruvido immediatamente sottostante (coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.30$) con velocità v_2.



Sapendo che i due moti si svolgono nello stesso piano verticale $x - y$, determinare:

a) il tempo t' necessario per il corpo 1 per percorrere il piano inclinato; *(1 punto)*

b) il tempo t'' impiegato dal corpo 1 per tornare sull'asse x partendo dalla sommità del piano inclinato; *(2 punti)*

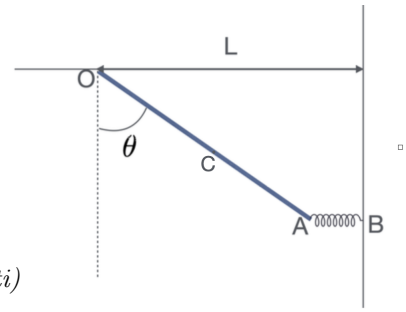
c) la posizione x_f di impatto con l'asse x; *(1 punto)*

d) la velocità iniziale v_2 che dovrebbe avere il corpo 2 affinché incontri nuovamente il corpo 1 sull'asse x nell'istante finale $t_f = t' + t''$. *(3 punti)*

[g = 9.8 m/s^2]

Problema n.2 (15 punti)

Il sistema meccanico in figura è costituito da una sbarra omogenea, di massa M = 5.0 kg e lunghezza L = 1.0 m, vincolata a ruotare senza attrito intorno ad un asse (uscente dal foglio) passante per l'estremo superiore O. All'estremo inferiore dell'asta A vi è attaccata una molla ideale ancorata in B (con massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza a riposo nulla). Il sistema si trova in equilibrio quando l'angolo di inclinazione della sbarretta con la verticale è pari a θ =45°. Considerando che la molla può deformarsi solo orizzontalmente, determinare:



a) le espressioni delle componenti della reazione vincolare $\vec{N}$ applicata in O; *(4 punti)*

b) il valore della costante elastica k; *(5 punti)*

c) supponendo che la molla venga rimossa, determinare il valore del modulo della velocità angolare dell'asta quando raggiunge la posizione verticale con $\theta = 0$. *(6 punti)*

[g = 9.8 m/s^2, momento di inerzia dell'asta rispetto al CM: $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$]

Problema n.3 (8 punti)

Si consideri una quantità di acqua di massa $m_a = 5.00$ kg (corrispondente a un numero di moli pari a $n = 278$ mol) alla temperatura iniziale $T_0 = 20.0$ °C. Alla pressione atmosferica p_0 l'acqua viene portata a 100°C e completamente vaporizzata; Successivamente, tramite un'espansione adiabatica irreversibile, il vapore è portato all'equilibrio termodinamico nello stato 1 con pressione e temperatura date da p_1= 2.00 atm e $T_1 = 500$°K, rispettivamente.
Considerando il vapore come un gas ideale poliatomico, determinare:

a) la quantità di calore totale Q_{tot} fornita al sistema acqua/vapore nell'intero processo; *(2 punti)*

b) il volume V_1 del vapore così ottenuto. *(1 punto)*

Il vapore viene poi compresso lungo un'adiabatica reversibile fino a un volume finale $V_2 = V_1/2$. Calcolare:

c) la temperatura T_2 e la pressione p_2 finali del vapore; *(2 punti)*

d) il lavoro che deve essere fatto per comprimerlo. *(3 punti)*

[1 atm = $1.01 \cdot 10^5$ Pa, calore specifico acqua: $c_a = 4190$ J/(kg °K),
R = 8.31 J/(mol °K), calore latente di evaporazione acqua: $\lambda_{\text{ev}} = 2.26 \cdot 10^6$ J/kg,
c_p,vapore $= 4R$, c_v,vapore $= 3R$, γvapore $= 4/3$]

Soluzione Problema 1

a) Per la conservazione dell'energia meccanica la velocità del corpo 1 alla sommità del piano inclinato deve soddisfare la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_1')^2 + mgd\sin\theta$$

quindi

$$v_1' = \sqrt{v_1^2 - 2gd\sin\theta} = 2.9 \text{ m/s}.$$

Il moto è uniformemente accelerato con accelerazione pari a $-g\sin\theta$, il tempo per raggiungere tale sommità è pari a:

$$v_1' = v_1 - g\sin\theta t' \Rightarrow t' = \frac{v_1 - v_1'}{g\sin\theta} = 0.30 \text{ s}.$$

b) Successivamente il moto è parabolico e quindi descritto dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x_1(t) = d\cos\theta + v_1'\cos\theta \cdot t \\ y_1(t) = d\sin\theta + v_1'\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

con t misurato a partire dall'istante in cui il corpo 1 lascia la sommità del piano inclinato. Per determinare il tempo nel quale il corpo torna sull'asse x si impone $y_1(t'') = 0$ e quindi si ricava:

$$d\sin\theta + v_1'\sin\theta \cdot t'' - \frac{1}{2}g(t'')^2 = 0 \Rightarrow g(t'')^2 - 2v_1'\sin\theta \cdot t'' - 2d\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow t'' = \frac{v_1'\sin\theta + \sqrt{(v_1')^2\sin^2\theta + 2gd\sin\theta}}{g} = 0.67 \text{ s}.$$

c) La posizione di impatto con l'asse x sarà:

$$x_f = x_1(t'') = d\cos\theta + v_1'\cos\theta \cdot t'' = 1.2 \text{ m}.$$

d) Il corpo 2 ha accelerazione costante pari a -$\mu_d g$ lungo l'asse x, per cui l'equazione oraria sarà del tipo:

$$x_2(t) = v_2 t - \frac{1}{2}\mu_d g t^2.$$

Il corpo 2 incontra il corpo 1 quando, all'istante $t = t_f = t' + t'' = 1.0$ s, si avrà $x_2(t_f) = x_f$:

$$x_2(t_f) = v_2 t_f - \frac{1}{2}\mu_d g t_f^2 = x_f$$

quindi:

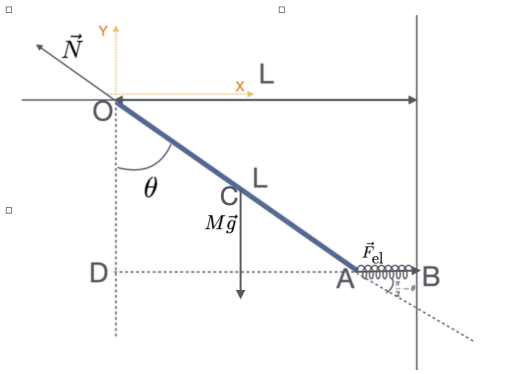
$$v_2 = \frac{2x_f + \mu_d g t_f^2}{2t_f} = 3.7 \text{ m/s}.$$

Soluzione Problema 2

a) Nella posizione di equilibrio la risultante delle forze esesterne $\vec{F}_{\text{tot}}$ e il momento meccanico totale sono nulli.

Le forze agenti sono la forza peso $M\vec{g}$ della sbarretta applicata nel centro di massa C, la forza elastica $\vec{F}_{\text{el}}$ applicata in A e la reazione vincolare $\vec{N}$ applicata in O.

Rispetto al riferimento illustrato in figura possiamo scrivere:



$$M\vec{g} = -Mg\hat{u}_y,\ \vec{F}_{el} = k \cdot \overline{AB} \cdot \hat{u}_x,\ \vec{N} = N_x\hat{u}_x + N_y\hat{u}_y$$

ed inoltre

$$\overline{AB} = \overline{DB} - \overline{DA} = L - L\sin\theta.$$

Calcolando i momenti rispetto ad O ed indicando con C il centro di massa dell'asta, si ha:

$$\begin{cases} M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{\text{tot}} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{el}} = \vec{0} \\ I_{CM}\vec{\alpha} = \vec{M}_{\text{tot}} = \vec{OC} \wedge \vec{g} + \vec{OB} \wedge \vec{F}_{\text{el}} = \vec{0} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si possono ricavare le componenti di $\vec{N}$:

$$\begin{cases} N_x = -k\overline{AB} \\ N_y = Mg. \end{cases}$$

b)Dalla seconda equazione si ricava:

$$\vec{OC} \wedge M\vec{g} + \vec{OA} \wedge \vec{F}_{\text{el}} = -\frac{L}{2}Mg\sin\theta + Lk\overline{AB}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-Mg}{2}\sin\theta + kL\cos\theta(1 - \sin\theta) = 0$$

da cui ricaviamo k:

$$k = \frac{Mg\sin\theta}{2L\cos\theta(1-\sin\theta)} = \frac{Mg}{L\left(2-\sqrt{2}\right)} = 84 \text{ N/m}.$$

c) Dopo che la molla è stata rimossa il moto dell'asta avviene sotto l'azione del peso $M\vec{g}$ (forza conservativa) e della reazione vincolare $\vec{N}$ (che non compie lavoro). Pertanto l'energia meccanica si conserva. Tenendo conto che l'asta parte da ferma si ha:

$$E^i_{\text{tot}} = E^f_{\text{tot}} \Rightarrow 0 + Mgy_i = \frac{1}{2}I_0\omega_f^2 + Mgy_f$$

con $y_i = -\frac{L}{2}\cos\theta$ e $y_f = -\frac{L}{2}$. Pertanto:

$$\frac{1}{2}I_0\omega_f^2 = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta) \Rightarrow \omega_f = 2.9 \text{ rad/s}.$$

con $I_0 = I_{CM} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = M\frac{L^2}{3}$ il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per l'estremo A dell'asta.

Soluzione Problema 3

a) Fino a completa evaporazione a pressione atmosferica all'acqua viene fornita una quantità di calore pari a:

$$Q_1 = m_a c_a(T_e - T_0) + m_a\lambda_{ev}$$

dove $T_e = 100$ °C è la temperatura di ebollizione dell'acqua mentre c_a e λ_{ev} sono, rispettivamente, il calore specifico dell'acqua e il calore latente di evaporazione dell'acqua. Essendo $m_a = 5.00$ kg, si ha $Q_1 = 1.30 \cdot 10^7$ J.

Considerando che $Q_2 = 0$, il calore totale fornito nell'intero processo è:

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 = 1.30 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

b) Per il volume occupato dal vapore acqueo si ha:

$$p_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 5.70 \text{ m}^3.$$

c) Lungo una trasformazione adiabatica reversibile di un gas ideale valgono le relazioni $pV^\gamma =$ costante e $TV^{\gamma-1} =$ costante, dove, dato che trattiamo il vapore acqueo come un gas ideale poliatomico, si ha $\gamma = 4/3$. Quindi possiamo scrivere:

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1 \cdot 2^{1/3} = 1.26 \cdot T_1 = 630^\circ \text{ K}.$$

$$p_2 V_2^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma} \Rightarrow p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = p_1 \cdot 2^{4/3} = 2.52 \cdot p_1 = 5.04 \text{ atm}.$$

d) Dalla prima legge della termodinamica si ha che per una trasformazione adiabatica $\Delta U = -W$. Il lavoro $W_{\text{ext.}}$ che si deve compiere per comprimere il vapore acqueo è esattamente uguale e opposto a quello compiuto dal vapore W, quindi:

$$W_{ext} = -W = \Delta U = nc_v \Delta T = nc_v(T_2 - T_1) = 9.00 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

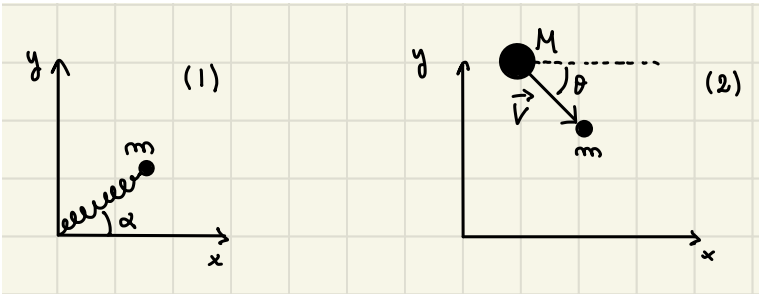
Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Prova scritta di Fisica Generale I - 06/09/2024

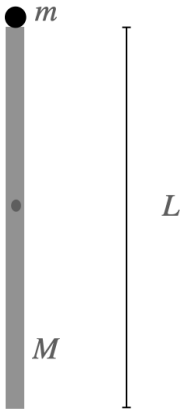
Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

- Tempo a disposizione: 2h 30min. Affinchè il secondo e terzo problema siano valutati è necessario conseguire almeno 3.5 punti nel primo problema.

Problema 1 (7 punti) Un punto materiale di massa $m = 0.50$ kg è fissato ad una molla di costante elastica $K = 100$ N/m, il cui asse forma un angolo $\alpha = 30°$ con la direzione orizzontale, mentre l'estremo opposto della molla è fissato al suolo, come in figura (1). Inizialmente la molla è compressa di una quantità $\Delta l = 50$ cm rispetto alla sua lunghezza a riposo, $l_0 = 1.0$ m, ed il punto materiale è fermo. Si lascia quindi la molla libera di decomprimersi e, nell'istante in cui la molla ha raggiunto la sua lunghezza a riposo, il punto materiale si stacca da essa. a) Determinare il modulo della velocità del punto materiale nell'istante in cui si stacca dalla molla, senza trascurare l'azione della forza di gravità durante la decompressione della molla (3 punti). Dopo essersi staccato dalla molla, il punto materiale compie una traiettoria parabolica soggetta all'accelerazione di gravità. b) Calcolare la massima altezza dal suolo raggiunta dal punto materiale durante la sua traiettoria (2 punti). Raggiunto il punto più alto della traiettoria, il punto materiale urta un secondo punto materiale, di massa $M = 1.0$ kg, la cui velocità, $\vec{V}$, forma l'angolo $\theta = 45°$ con la direzione orizzontale, mentre il suo modulo vale: $V = 5.0$ m/s (si guardi la figura (2)). L'urto è completamente anelastico e dopo di esso i due punti materiali vengono a formare un unico punto materiale. c) Calcolare il vettore velocità (ovvero ogni sua componente) del punto materiale risultante nell'istante immediatamente successivo all'urto (2 punti).
[Nota: $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$]



Problema 2 (15 punti) Un'asta sottile omogenea di massa $M = 5.00$ kg e lunghezza $L = 120$ cm è appoggiata su un piano orizzontale e può ruotare senza attrito attorno ad un asse passante per il suo centro. Ad un suo estremo è attaccato un punto materiale di massa $m = 1.50$ kg. a) Calcolare il momento di inerzia dell'asta rispetto ad un asse passante per il suo centro (1 punto). b) Calcolare il momento di inerzia del sistema (asta+punto materiale) rispetto ad un asse passante per il centro dell'asta (2 punti). Il sistema ruota con velocità angolare $\omega_0 = 100$ rad/s. c) Determinare l'energia cinetica del sistema (2 punti). Ad un certo istante, il punto materiale si stacca dall'asta. d) Tenendo conto della conservazione del momento angolare rispetto al centro dell'asta, determinare il valore della velocità del punto materiale dopo il distacco, nell'ipotesi in cui la velocità angolare dell'asta dopo il distacco sia $\omega_f = 150$ rad/s (6 punti). e) Diversamente dal caso descritto nel punto precedente, nel caso in cui l'asta si fermi subito dopo il distacco, determinare la variazione di energia cinetica del sistema (4 punti).



Problema 3 (8 punti) Si hanno $n = 2.00$ moli di gas ideale biatomico inizialmente a pressione $p_1 = 2.00$ atm e temperatura $T_1 = 300$ K. A partire da tale stato, il sistema subisce una espansione reversibile fino a raggiungere lo stato 2, in cui si hanno $p_2 = p_1/2$ e $V_2 = 3V_1$; tale trasformazione è rappresentata da una retta. a) Disegnare la trasformazione 1-2 nel piano $p - V$ (1 punto). b) Calcolare il volume V_1 e la temperatura T_2 (1 punto). c) Calcolare il calore scambiato nella trasformazione 1-2 (3 punti). d) Calcolare la variazione di entropia del sistema nella trasformazione 1-2 (2 punti). e) Determinare quale sarebbe la pressione finale p_3 se dallo stato 1 il sistema subisse una espansione reversibile isoterma fino a raggiungere lo stato 3 in cui $V_3 = V_2$ (1 punto).
[Nota: costante dei gas perfetti $R = 8.31$ J/(K×mol), 1 atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa]

Problema 1 - Soluzione

a) L'energia meccanica prima e dopo la decompressione della molla vale rispettivamente:

$$E_i = \frac{K}{2}\Delta l^2 \quad , \quad E_f = \frac{m}{2}v_0^2 + mg\Delta l \sin\alpha.$$

Eguagliando le due espressioni otteniamo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{K}{m}\Delta l^2 - 2g\Delta l \sin\alpha} = 6.7 \text{ m/s}.$$

b) La legge oraria della massa m dopo che essa ha lasciato la molla è:

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2,$$

dove: $y_0 = l_0 \sin\alpha$. La massima altezza raggiunta durante la traiettoria parabolica vale pertanto:

$$y_M = y_0 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} = 1.1 \text{ m}.$$

c) Negli istanti immediatamente precedente e successivo all'urto la quantità di moto vale:

$$\vec{p}_i = (mv_0 \cos\alpha + MV\cos\theta)\,\mathbf{u}_x - MV\sin\theta\mathbf{u}_y$$

$$\vec{p}_f = (m+M)\,\vec{V}',$$

dove $\vec{V}'$ è la velocità del punto materiale risultante nell'istante immediatamente successivo all'urto. Dal momento che la quantità di moto si conserva durante l'urto, eguagliando le due espressioni otteniamo:

$$V'_x = \frac{mv_0\cos\alpha + MV\cos\theta}{m+M} = 4.3 \text{ m/s};$$

$$V'_y = -\frac{MV\sin\theta}{m+M} = -2.4 \text{ m/s}.$$

Problema 2 - Soluzione

a) $I_{asta} = (1/12)ML^2 = 0.600\,\text{kg m}^2$

b) $I_{tot} = I_{asta} + md^2$, dove $d = L/2$, per cui $I_{tot} = 1.14\,\text{kg m}^2$

c) L'energia cinetica del sistema è solo rotazionale: $E_k = (1/2)I_{tot}\omega_0^2 = 5.70 \times 10^3$ J

d) Sfruttando la conservazione del momento angolare rispetto al centro dell'asta prima e dopo il distacco, si può scrivere $L_i = L_f$, dove: $L_i = I_{tot}\omega_0$ mentre $L_f = I_{asta}\omega_f + m(L/2)v$. Dunque risolvendo in funzione di v si ha:

$$v = \frac{2(I_{tot}\omega_0 - I_{asta}\omega_f)}{mL} = 26.7\,\text{m/s} \tag{1}$$

e) L'energia cinetica iniziale è solo rotazionale, come già calcolato al punto c): $E_{k,i} = (1/2)I_{tot}\omega_0^2 = 5.7 \times 10^3$ J trovata al punto c); in questo caso, all'energia cinetica finale contribuisce solo il punto materiale, visto che in questo caso l'asta si ferma, e quindi $E_{k,f} = (1/2)mv'^2$. La velocità finale si trova come al punto precedente, dove però $\omega_f = 0$:

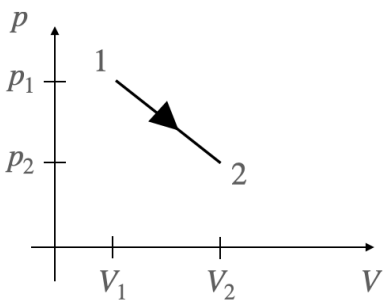
$$v' = \frac{2I_{tot}\omega_0}{mL} = 127\,\text{m/s} \tag{2}$$

e quindi $E_{k,f} = 1.20 \times 10^4$ J. La variazione di energia cinetica è dunque:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = 6.33 \times 10^3\,\text{J} \tag{3}$$

Problema 3 - Soluzione

a)



b)

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 2.46 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^3,\ T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{3}{2}T_1 = 450\,\mathrm{K} \tag{4}$$

c) $Q_{12} = U_{12} + W_{12}$, dove si ha per l'energia interna:

$$U_{12} = nc_V(T_2 - T_1) = 6.23 \times 10^3\,\mathrm{J}, \tag{5}$$

mentre il lavoro si può ottenere dal calcolo dell'area sottesa:

$$W_{12} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{3}{2}p_1 V_1 = 7.46 \times 10^3\,\mathrm{J} \tag{6}$$

e sommando, $Q_{12} = 13.7 \times 10^3$ J.
d) La variazione di entropia si può ottenere considerando una qualsiasi trasformazione tra 1 e 2, per cui:

$$\Delta S_{12} = nc_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 35.1\,\mathrm{J/K} \tag{7}$$

e) Se lo stato finale 3 (in cui $V_3 = V_2 = 3V_1$) fosse raggiunto tramite una isoterma a partire da 1, si avrebbe $T_3 = T_1$ e di conseguenza

$$p_3 = \frac{nRT_1}{V_3} = \frac{nRT_1}{3V_1} = \frac{p_1}{3} \tag{8}$$

Università degli Studi dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

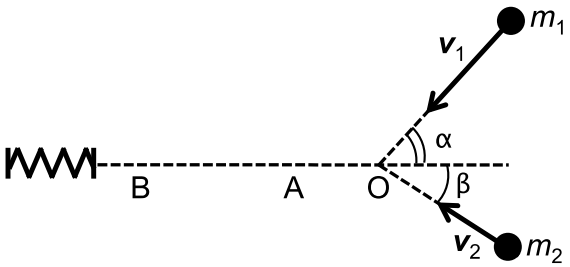
Prova scritta di Fisica Generale I - 07/11/2024

Nome	Cognome	N. Matricola	Docente di riferimento
.....	.....	.....	.....

Tempo a disposizione: 2h 30min. Affinché il secondo e terzo problema siano valutati è necessario conseguire almeno 3.5 punti nel primo problema.

Problema 1 (7 punti)

Due punti materiali di massa m_1 e m_2 si urtano in modo totalmente anelastico nel punto O su di un piano orizzontale. Facendo riferimento alla figura, dopo l'urto la velocità del punto materiale risultante vale v ed è diretta lungo la direzione OB. Il punto materiale alla fine del suo percorso comprime una molla di costante elastica K per un tratto d rispetto alla sua posizione di riposo. Sapendo che nel solo tratto AB è presente una forza d'attrito radente, si chiede di determinare:



a) L'angolo β della direzione della velocità v_2 del punto di massa m_2 prima dell'urto; (**3 *punti***)

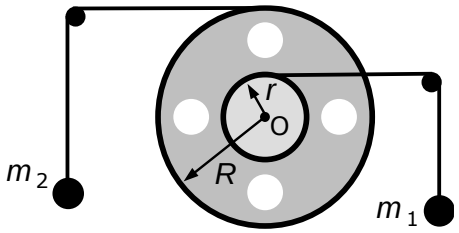
b) la velocità v_2 del punto materiale m_2 prima dell'urto (**2 *punti***)

c) il valore del coefficiente della forza d'attrito che agisce nel tratto AB=L; (**2 *punti***)

Dati del problema: α=40°, m_1=0.10 kg; m_2=0.30 kg; v_1=0.80 m/s; v=0.25m/s; AB=L=2.0 cm; K=30 N/m; d=2.0 mm, g=9.8 m/s^2

Problema 2 (15 punti)

Il disco rappresentato in figura ha raggio R e massa m ed è in posizione verticale libero di ruotare senza attrito intorno al suo asse baricentrale O. Al disco sono collegate mediante due fili identici e di massa trascurabile due masse puntiformi m_1 e m_2. Il filo della massa m_1 passa all'interno di una scanalatura del disco di raggio r concentrica in O. Il filo della massa m_2 passa, invece, attorno alla circonferenza esterna del disco. Nell'ipotesi di assenza di attriti e di velocità iniziale nulla del sistema, si misura che dopo un tempo t_1 il disco ha assunto una velocità angolare $\omega(t_1)$ muovendosi in verso antiorario. Si chiede di determinare:



a) l'accelerazione angolare α del disco (**3 *punti***)
b) le accelerazione a_1 e a_2 dei punti materiali di massa m_1 e m_2 e lo spazio da essi percorso indicando la massa che si è abbassata e quella che si è alzata rispetto alla situazione inziale per t=0; (**4 *punti***)
c) I valori delle tensioni dei due fili. (**4 *punti***)
d) il momento d'inerzia del disco rispetto al suo asse baricentrale O; (**4 *punti***)

Dati del problema: m_1=2.0 kg; m_2=1.0 kg; R=1.0 m; r=0.30 m; t_1=2.0 s; $\omega(t_1)$=2.2 rad/s, g=9.8 m/s^2

Problema 3 (8 punti)

Un gas ideale biatomico, inizialmente all'equilibrio termodinamico, è contenuto in un cilindro alla temperatura T_A, volume V_A e pressione p_A. Il sistema è posto a contatto con una sorgente a temperatura T_B subendo un'espansione contro la pressione esterna p_A fino a raggiungere un nuovo equilibrio termico al volume V_B=2V_A. In questa situazione, il pistone viene bloccato e il sistema messo in contatto con una sorgente a temperatura T_C raggiungendo un nuovo equilibrio termico in C. Il sistema, infine, è sottoposto a una trasformazione adiabatica reversibile che dallo stato C lo riporta in quello iniziale A.

a) Una volta riportato nel piano (p,V) le trasformazioni subite dal gas, determinare la temperatura del gas nello stato iniziale T_A, il suo numero n di moli e la temperatura T_B raggiunta nello stato termodinamico B; (**2 *punti***)
   Inoltre, si chiede di calcolare:
b) le quantità di calore assorbite e cedute dal gas, (**2 *punti***)
c) il rendimento della macchina termica, (***1 punto***)
d) La variazione di entropia dell'universo termodinamico, (**3 *punti***)

Dati del problema: V_A=8.20 l; p_A=3.42×10^{5}Pa; T_C=300K; V_B=2 ×V_A, R = 0,0821 l · atm / (mol K) o R=8,314 J/(mol K); 1 atm =1.01×10^{5}Pa

Soluzione

Problema 1

Dalla conservazione della quantità di moto scomposta lungo le direzioni OB (vedi figura) e quella a essa perpendicolare si ha:

$$m_1 v_1 \sin\alpha = m_2 v_2 \sin\beta \quad ; \quad m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta = (m_1 + m_2) v$$

$$m_2 v_2 = \frac{m_1 v_1 \sin\alpha}{\sin\beta} \quad ; \quad m_1 v_1 \cos\alpha + \frac{m_1 v_1 \sin\alpha}{\tan\beta} = (m_1 + m_2) v$$

$$\beta = \operatorname{atan}\left\{\frac{m_1 v_1 \sin\alpha}{(m_1 + m_2) v - m_1 v_1 \cos\alpha}\right\} = 53° \quad ; \quad v_2 = \frac{m_1 v_1 \sin\alpha}{m_2 \sin\beta} = 0.21\,\mathrm{m/s}.$$

Il coefficiente d'attrito si ricava utilizzando la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}[K d^2 - (m_1 + m_2) v^2] = -(m_1 + m_2) g \mu L \quad \rightarrow \quad \mu = -\frac{K d^2 - (m_1 + m_2) v^2}{2(m_1 + m_2) g L} = 0.16.$$

Problema 2

Il moto di rotazione del disco è uniformemente accelerato e quello delle due masse rettilineo e uniformemente accelerato. Dalle equazioni della cinematica si ottiene:

$$\omega(t_1) = \alpha t_1 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega(t_1)}{t_1} = \frac{1.1\,\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}; \quad a_1 = \alpha r = 0.33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \quad ; \quad a_2 = \alpha R = 1.1\,\mathrm{m/s}^2.$$

Una volta note le accelerazioni dei due punti materiali è possibile calcolare subito lo spazio da essi percorso:

$$h_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 0.66\ \mathrm{m} \quad ; \quad h_2 = \frac{1}{2} a_2 t_1^2 = 2.2\ \mathrm{m}.$$

Rispetto all'istante iniziale, la massa m_2 si abbassa della quota h_2 e la massa m_1 si alza della quota h_1. Per trovare il valore del momento d'inerzia del disco è necessario scrivere le equazioni della dinamica relative ai due punti materiali e al disco: $T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \quad ; \quad m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad ; \quad T_2 R - T_1 r = I\alpha \quad (1)$

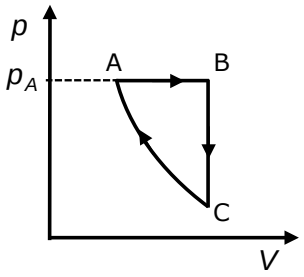
Dalle equazioni (1) si ricavano i valori delle tensioni dei fili T_1=20 N e T_2=8.7 N.

Sostituendo T_1 e T_2 nella terza equazione si ha:

$$I = \frac{T_2 R - T_1 r}{\alpha} = 2.4\ \mathrm{kg\,m}^2.$$

Problema 3

Nel piano (p,V) il ciclo proposto è descritto come in figura:



Essendo il gas biatomico(γ=1.4) e V_C=V_B=2V_A, la trasformazione adiabatica che unisce lo stato C con A permette di scrivere:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \quad \rightarrow \quad T_A = 396\text{K}.$$

Utilizzando l'equazione di stato di un gas ideale e ricordando che V_B=V_C=2V_A, si ha:

$$n = \frac{p_A V_A}{R T_A} = 0.854 \text{ moli} \;\; ; \;\; p_B V_B = 2 p_A V_A = n R T_B \quad \rightarrow \quad T_B = 2T_A = 791.7K.$$

La quantità di calore assorbita dal gas è Q_{ass}=Q_{AB} dell'espansione isobara A→B e quella ceduta è Q_{ced}=Q_{BC} della trasformazione isocora B→C:

$$Q_{ass} = Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = nc_p T_A = 9.84 \text{ kJ} \;\; ; \;\; Q_{ced} = Q_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = -8.73 \text{ kJ}.$$

Il rendimento η della macchina termica proposta è: $\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}} = 0.113$;

La variazione di entropia del ciclo termodinamico è nulla. Pertanto, la variazione dell'entropia dell'universo termodinamico è rappresentata solo da quella delle due sorgenti. Si ha: $\Delta S_U = -\left(\frac{Q_{AB}}{T_B} + \frac{Q_{BC}}{T_C}\right) = 16.7 \text{ J/K}$.

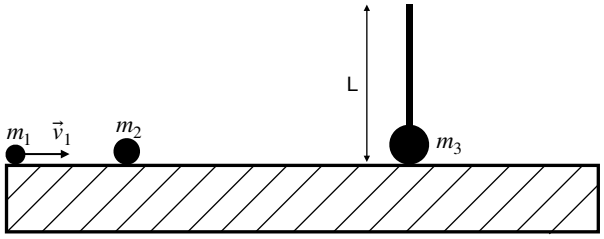
Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

Prova scritta di Fisica Generale I - 09/01/2025

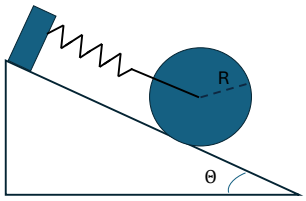
Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

- Tempo a disposizione: 2h 30min. Affinché il secondo e terzo problema siano valutati è necessario conseguire almeno 3.5 punti nel primo problema.

Problema 1 (7 punti) Una sferetta di massa $m_1 = 50$ g si muove orizzontalmente in assenza di attrito verso destra con velocità v_1 e va ad urtare *elasticamente* una sferetta di massa $m_2 = 100$ g inizialmente ferma. Dopo l'urto quest'ultima si muove verso destra andando a conficcarsi in un pendolo balistico (inizialmente fermo e con massa $m_3 = 1.0$ kg) che comincia ad oscillare senza attrito con una massima escursione angolare di $\theta_{\max} = 30°$. (a) Determinare le espressioni delle velocità di m_1 e m_2 subito dopo l'urto elastico (v_1', v_2, rispettivamente) in funzione di m_1, m_2 e v_1 (**3 punti**). Sapendo che l'asta del pendolo (di massa trascurabile) è lunga $L = 1.0$ m, calcolare: b) v_1 (**2 punti**), c) l'accelerazione centripeta del pendolo quando si trova ad una distanza angolare di $\theta_1 = 15°$ dalla sua posizione di riposo (**2 punti**). [Nota: $g = 9.8$ m/s^2]



Problema 2 (15 punti) Una sfera omogenea di massa $M = 30$ Kg e raggio R è appoggiata su un piano inclinato come mostrato in figura. La sfera può ruotare intorno al suo centro di massa agganciato a uno degli estremi di una molla ideale (massa trascurabile) con costante elastica $k = 30$ N/m. L'altro estremo della molla è fissato ad un sostegno rigido vincolato al piano inclinato. Si consideri il caso in cui il piano inclinato presenti un attrito tale da non permettere lo slittamento della sfera. Quando la sfera è in equilibrio statico calcolare (a) il modulo della forza di attrito statico, che agisce tra sfera e piano inclinato (**4 punti**), e (b) l'allungamento della molla che determina la posizione di equilibrio del centro di massa $\vec{r}_{eq}$ (**3 punti**). Supponendo che la sfera sia in movimento rispetto al piano inclinato: (c) si determini il periodo con cui oscilla intorno alla posizione $\vec{r}_{eq}$ (**3 punti**); (d) sapendo che la velocità del centro di massa è nulla quando il centro di massa è in $\vec{r}_{eq}$, determinare la massima estensione della molla (**5 punti**). [Nota: $\theta = \pi/6$, $g = 9.8$ m/s^2; il momento d'inerzia della sfera rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa è $I_{CM} = 2MR^2/5$]



Problema 3 (8 punti). Una mole di gas perfetto monoatomico, inizialmente alla pressione $P_A = 1.00$ atm e temperatura $T_A = 500$ K subisce le seguenti trasformazioni: (i) isoterma reversibile dallo stato iniziale A allo stato finale B caratterizzato da $V_B = 2V_A$. (ii) adiabatica *irreversibile* dallo stato B allo stato C tale che $V_C = 3V_B$ e $T_C = T_A/2$; (iii) isoterma reversibile fino ad un certo stato D; (iv) isocora reversibile dallo stato D allo stato iniziale A. (a) Si disegni il ciclo nel piano di Clapeyron (**1 punti**). Calcolare: (b) i lavori eseguiti dal gas nelle quattro trasformazioni (**2 punti**); (c) il rendimento del ciclo (**3 punti**); (d) la variazione di entropia del gas nella trasformazione adiabatica irreversibile (**2 punti**). [Nota: La costante dei gas perfetti $R = 8.31$ J/(K×mol); 1 atm=$1.013 \cdot 10^5$ Pa]

Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale Soluzione prova scritta di Fisica Generale I - 09/01/2025

Problema 1

L'urto tra m_1 e m_2 è elastico, quindi si conserva sia l'energia meccanica che la quantità di moto. Essendo l'urto unidimensionale si ha

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \,, \tag{1}$$

$$m_1 v_1 = -m_1|v_1'| + m_2 v_2 \,, \tag{2}$$

dove v_1' e v_2 sono le velocità di m_1 e m_2, rispettivamente, dopo l'urto. Scriviamo v_1' e v_2 in funzione di v_1 risolvendo il sistema:

$$|v_1'| = \frac{(m_2 - m_1)v_1}{m_1 + m_2} \,, \tag{3}$$

$$v_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \,. \tag{4}$$

L'urto tra m_2 ed m_3 è invece completamente anaelastico, poichè m_2 va a conficcarsi in m_3. Di conseguenza in questo urto si conserva esclusivamente la quantità di moto. Imponendo questa legge di conservazione possiamo ricavare v_2 in funzione di V, cioè la velocità del pendolo balistico costituito da m_2 ed m_3 dopo l'urto

$$m_2 v_2 = (m_2 + m_3)V \implies v_2 = \frac{(m_2 + m_3)V}{m_2} \,. \tag{5}$$

Il pendolo ha un'escursione angolare massima pari a $\theta_{\max}$. A questo angolo corrisponde un'altezza massima pari a $h_{\max} = L(1 - \cos\theta_{\max}) = 0.13$ m. Poichè il moto del pendolo è senza attrito si conserva l'energia meccanica. Imponendo questa legge di conservazione tra l'istante subito dopo l'urto e l'istante di altezza massima si ottiene

$$\frac{1}{2}(m_2 + m_3)V^2 = (m_2 + m_3)gh_{\max} \implies V = \sqrt{2gh_{\max}} = 1.6\,\mathrm{m/s} \,. \tag{6}$$

Dall'Eq. 5 possiamo ora calcolare v_2

$$v_2 = \frac{(m_2 + m_3)V}{m_2} = 18\,\mathrm{m/s} \,. \tag{7}$$

Usando l'Eq. 4 possiamo calcolare v_1 e v_1'

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)v_2}{2m_1} = 27\,\mathrm{m/s} \tag{8}$$

$$v_1' = \frac{(m_2 - m_1)v_1}{m_1 + m_2} = 8.9\,\mathrm{m/s} \tag{9}$$

v_1' è diretta verso sinistra.

Poichè il pendolo compie un moto circolare, per calcolare l'accelerazione centripeta in un generico punto della traiettoria dobbiamo calcolare la velocità in quel punto. La velocità nel punto corrispondente a $\theta_1 = 15°$ si trova tramite la conservazione dell'energia meccanica, sapendo che l'altezza del pendolo in quel punto è $h_1 = L(1 - \cos\theta_1)$

$$\frac{1}{2}(m_2 + m_3)V^2 = \frac{1}{2}(m_2 + m_3)V_1^2 + (m_2 + m_3)gh_1 \implies V_1 = \sqrt{V^2 - 2gh_1} = 1.4\,m/s \,. \tag{10}$$

L'accelerazione centripeta è quindi data da

$$a_C = \frac{V_1^2}{L} = 2.0\,\mathrm{m/s^2} \,. \tag{11}$$

Problema 2

(a-b) Dalle equazioni cardinali della dinamica, otteniamo:

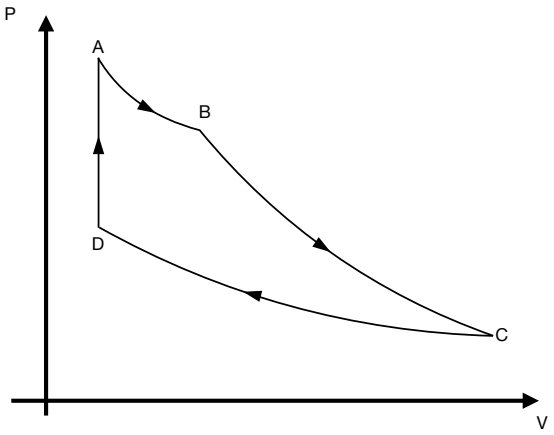
$$\begin{aligned} I_{CM}\alpha &= -AR^2 \\ Ma_{CM} &= A - k\Delta x + Mg\sin\theta \end{aligned} \tag{12}$$

dove α, a_{CM}, A, Δx sono, rispettivamente, l'accelerazione angolare della sfera, l'accelerazione del suo centro di massa, la forza di attrito statico (tra sfera e piano inclinato) e l'allungamento della molla. Imponendo $\alpha = 0$, $a_{CM} = 0$, è possibile scrivere $A = 0$ e $\Delta x = Mgsin\theta/k = x_{eq} = 4.9$ m.
(c) Imponendo la condizione di puro rotolamento ($a_{CM} = \alpha R$) e sostituendo nelle equazioni cardinali, si ottiene la seguente equazione:

$$(M + I/R^2)a_{CM} = -k\Delta x + Mg\sin\theta \tag{13}$$

L'equazione ottenuta è l'equazione di un oscillatore armonico con frequenza di oscillazione $\Omega = \sqrt{5k/(7M)}$ quindi il periodo di oscillazione è dato da $T = 2\pi/\Omega = 7.4$ s.
(d) Utilizzando la conservazione dell'energia meccanica, si ottiene: $kx^2/2 - Mgxsin\theta + 1/2Mv_{CM}^2 + 1/2I_{CM}\omega^2 = 0$
La massima estensione si raggiunge quando l'energia cinetica è nulla, quindi $x = 2Mgsin\theta/k$, quindi l'allungamento massimo è $\Delta x_{max} = Mgsin\theta/k = 9.8$ m.

Problema 3



(a) Il grafico del ciclo termodinamico è dato in figura.
(b) Il volume V_A si ricava dall'equazione di stato dei gas perfetti

$$V_A = nRT_A P_A = 0.041\,\mathrm{m}^3\,. \tag{14}$$

Il lavoro compiuto nella isoterma AB vale

$$W_{AB} = nRT_A \log \frac{V_B}{V_A} = nRT_A \log 2 = 2.88 \cdot 10^3\,\mathrm{J} \tag{15}$$

Il lavoro compiuto nella adiabatica BC è uguale, per il primo principio della termodinamica alla variazione di energia interna nella stessa trasformazione:

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_V(T_C - T_B) = \frac{1}{2}nc_V T_A = 3.12 \cdot 10^3\,\mathrm{J}\,. \tag{16}$$

Il lavoro compiuto nella isoterma CD vale

$$W_{CD} = nRT_C \log \frac{V_D}{V_C} = -3.72 \cdot 10^3\,\mathrm{J}\,. \tag{17}$$

Infine, il lavoro compiuto nella isocora DA è nullo.
(c) Il calore assorbito dal ciclo è dato da

$$Q_{\mathrm{ASS}} = Q_{AB} + Q_{DA} = W_{AB} + \Delta U_{DA} = W_{AB} + nc_V(T_A - T_D) = 6.00 \cdot 10^3\,\mathrm{J}\,. \tag{18}$$

Il rendimento si ottiene dalla seguente formula

$$\eta = \frac{W_{\mathrm{TOT}}}{Q_{\mathrm{ASS}}} = \frac{W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}}{Q_{\mathrm{ASS}}} = 0.379\,. \tag{19}$$

(d) La variazione di entropia nell'adiabatica BC si ottiene dalla seguente formula generale valida per un qualsiasi gas ideale e per una qualsiasi trasformazione termodinamica

$$\Delta S_{\mathrm{gas,\,BC}} = nc_V \log \frac{T_C}{T_B} + nR \log \frac{V_C}{V_B} = 0.489\,\mathrm{J/K}\,. \tag{20}$$

Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

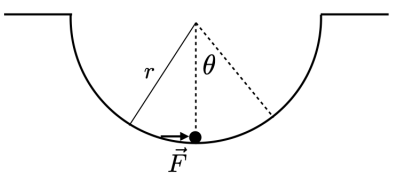
Sesto appello di Fisica Generale I - 27/01/2025

Cognome	Nome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

Tempo a disposizione: 2h30. Affinché il secondo e terzo problema siano valutati è necessario conseguire almeno 3.5 punti nel primo problema.

Problema n.1 (7 punti)

Un punto materiale di massa $m = 200$ g è fermo sul fondo di una buca emisferica liscia di raggio $r = 3.0$ m; una forza orizzontale $\vec{F}(t)$ agisce per un breve intervallo di tempo imprimendo al punto un impulso istantaneo di modulo $J = 7.0 \cdot 10^{-2}$ N s, in conseguenza del quale il punto inizia a muoversi lungo il bordo della buca. Trascurando ogni forma di attrito, determinare:



a) il modulo della velocità del punto materiale dopo l'azione della forza $\vec{F}$; *(1 punto)*

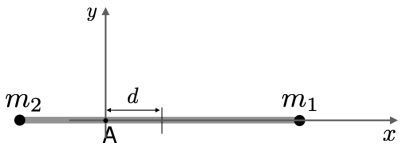
b) la massima elongazione θ_0 del moto; *(3 punti)*

c) il modulo della reazione vincolare R generata dalla superficie su cui si muove il punto materiale quando passa per la posizione corrispondente a $\theta = 0.0°$ rispetto alla verticale. *(3 punti)*

[g = 9.8 m/s^2]

Problema n.2 (15 punti)

Un'asta rigida di massa trascurabile e di lunghezza $l = 3.0$ m è libera di ruotare in un piano verticale (piano x-y in figura) intorno a un asse orizzontale passante per un suo punto A, distante $d = 30$ cm dal centro dell'asta. Agli estremi dell'asta sono fissate due masse $m_1 = 200$ g e $m_2 = 400$ g.



a) Qual è il momento d'inerzia del sistema delle due masse rispetto all'asse passante per A?; *(1 punto)*

b) qual è la posizione x_{CM} del centro di massa?; *(2 punto)*

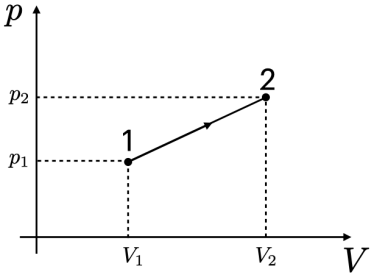
c) se il sistema è inizialmente posto in posizione orizzontale e lasciato libero con velocità iniziale nulla, qual è il modulo della velocità angolare dell'asta quando è in posizione verticale?; *(7 punti)*

d) qual è il modulo dell'accelerazione angolare nella stessa posizione verticale del punto c)? *(5 punti)*

[g = 9.8 m/s^2]

Problema n.3 (8 punti)

3 moli di un gas ideale biatomico si trovano inizialmente alla pressione $p_1 = 4.00$ atm e alla temperatura $T_1 = 350$ K. A partire da tale stato, il gas segue l'espansione reversibile mostrata in figura (rappresentata dal segmento rettilineo che unisce gli stati 1 e 2) fino allo stato 2, in cui $p_2 = 2p_1$ e $V_2 = 3V_1$. Determinare:



a) il volume V_1 e la temperatura T_2; *(1 punto)*

b) la variazione di energia interna del gas $\Delta U_{1,2}$; *(1 punto)*

c) il calore scambiato $Q_{1,2}$ lungo l'espansione reversibile rappresentata in figura; *(2 punti)*

d) la variazione di entropia del gas, delle sorgenti coinvolte nella trasformazione considerata e dell'universo termodinamico. Motivare la risposta data; *(2 punti)*

e) il rendimento η di una macchina di Carnot che operasse tra 2 sorgenti alle temperature T_1 e T_2 precedentemente calcolate. *(2 punti)*

[1 atm = $1.01 \cdot 10^5$ Pa, R = 8.31 J/(mol K)]

Soluzione Problema 1

a) Il teorema dell'impulso permette di ricavare la velocità v_0 con cui il punto materiale, sotto l'azione della forza $\vec{F}$, viene messo in moto sulla guida emisferica:

$$J = \Delta p = mv_0 \Rightarrow v_0 = \frac{J}{m} = 0.35 \text{ m/s}.$$

b) L'energia meccanica totale del punto materiale si conserva poiche' la forza di gravità è una forza conservativa e la reazione vincolare, in assenza di attrito, non compie mai lavoro poichè ortogonale allo spostamento. Si ha quindi:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Conoscendo h si può ricavare l'angolo θ rispetto alla verticale corrispondente alla massima elongazione del moto armonico:

$$\frac{r-h}{r} = \cos\theta_0 \Rightarrow \theta_0 = 3.7°.$$

c) Indicata con N_R la componente radiale (diretta verso il centro di curvatura della buca) della reazione vincolare della superficie emisferica, in ogni istante è soddisfatta l'equazione seguente, in cui il punto materiale è soggetto ad un'accelerazione centripeta:

$$N_R - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{r}.$$

Dall'equazione precedente si ricava:

$$N_R = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{r} \Rightarrow N_R = mg\cos 0° + m\frac{v_0^2}{r} = 2.0 \text{ N}$$

Soluzione Problema 2

a) Il momento di inerzia del sistema delle due masse rispetto all'asse passante per A è dato da:

$$I = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$$

con $l_1 = \frac{l}{2} + d$ e $l_2 = \frac{l}{2} - d$, pertanto:

$$I = (m_1 + m_2)\left(\frac{l^2}{4} + d^2\right) + ld(m_1 - m_2) = 1.2 \text{ kg m}^2.$$

b) Considerando un asse x orizzontale verso destra con origine in A si ha:

$$x_{CM} = \frac{-m_2 l_2 + m_1 l_1}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)d - (m_2 - m_1)\frac{l}{2}}{m_1 + m_2} = -0.2 \text{ m}.$$

Il centro di massa si trova quindi a una distanza da A pari a $l_{CM} = 0.2$ m.

c) Il momento delle forze che agiscono sul sistema è perpendicolare al foglio e uscente da esso, pertanto il sistema ruoterà in senso antiorario. Il suo modulo vale:

$$M = (m_1 + m_2)gl_{CM} = 1.2 \text{ N m}.$$

Nella rotazione si conserva l'energia meccanica, non essendo presenti attriti. Considerando nulla l'energia potenziale alla quota di A si ha:

$$E_m^i = E_m^f \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}I\omega_f^2 + m_1 g l_1 - m_2 g l_2$$

da cui è possibile ricavare la velocità angolare w_f:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{2g(m_2 l_2 - m_1 l_1)}{I}} = 1.4 \text{ rad/s}.$$

d) Applicando la seconda equazione cardinale della dinamica possiamo scrivere:

$$I\alpha = -(m_1 + m_2)gl_{CM}\sin 0° \Rightarrow \alpha = 0.0 \text{ rad/s}^2$$

Soluzione Problema 3

a) Sfruttando la legge dei gas perfetti si ha: $V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 0.0216$ m^3 e $T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{6p_1 V_1}{nR} = 2100$ °K.

b) $\Delta U_{1,2} = nc_V(T_2 - T_1) = 1.09 \cdot 10^5$ J.

c) Per calcolare il lavoro si può procedere per via geometrica:

$$W_{1,2} = p_1(V_2 - V_1) + \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = 3V_1 p_1 = 3nRT_1 = 26200 \text{ J}.$$

da cui possiamo ricavare il calore:

$$Q_{1,2} = \Delta U_{1,2} + W_{1,2} = 1.35 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

d) La variazione di entropia del gas si ottiene dalla relazione:

$$\Delta S_{gas} = nc_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} = 138 \text{ J/K}$$

La variazione di entropia dell'ambiente è pari all'opposto di quella del gas e quindi $\Delta S_{ambiente} = -\Delta S_{gas} = -138$ J/K. La variazione di entropia dell'Universo è complessivamente nulla in quanto la trasformazione è reversibile.

e) Il rendimento di una macchina di Carnot si può scrivere come:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.833.$$

Università dell'Aquila - Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Industriale

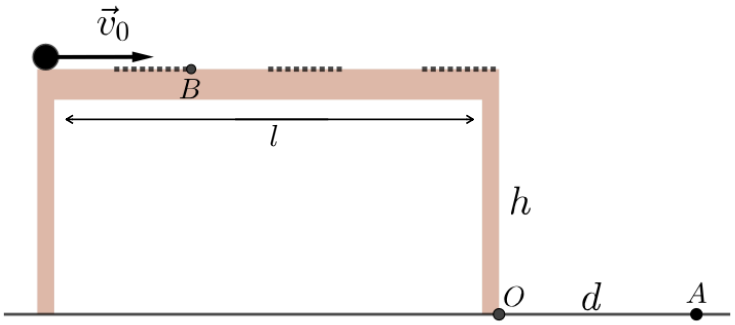
Prova scritta di Fisica Generale I - 10/02/2025

Nome	Cognome	N. Matricola	Docente
.....	.....	.....	.....

- Tempo a disposizione: 2h 30min. Affinchè il secondo e terzo problema siano valutati è necessario conseguire almeno 3.5 punti nel primo problema.

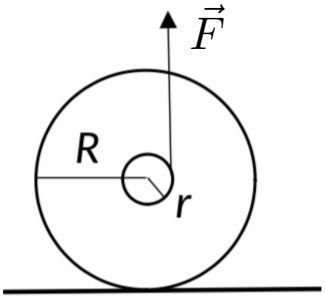
Problema 1 (7 punti)

Un punto materiale di massa m viene lanciato con velocità v_0 su un piano orizzontale di lunghezza l, posto ad altezza h rispetto al suolo. Il piano è diviso in 6 parti di uguale lunghezza, alternativamente lisce e scabre (tratto discontinuo in figura). Il coefficiente di attrito sulle parti scabre è μ_d. Determinare:
a) L'accelerazione del punto materiale sul primo tratto scabro (1 punto). b) La velocità nel punto B, cioè al termine del primo tratto scabro (2 punti). c) La posizione di arresto rispetto al punto di partenza (2 punti). d) Nell'ipotesi di velocità iniziale $v_1 = 3v_0$, determinare la distanza d dalla fine del piano del punto A di impatto col suolo (2 punti).
(Dati: $m = 0.100$ kg, $v_0 = 3.80$ m s^{-1}, $l = 3.00$ m, $h = 1.20$ m, $\mu_d = 0.600$, $g = 9.81$ m s^{-2})



Problema 2 (15 punti)

Un disco omogeneo di massa m e raggio R è inizialmente fermo su un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito statico μ_s. Un filo inestensibile e di massa trascurabile è avvolto intorno a una gola di raggio r, di massa trascurabile. Al filo è applicata una forza $\vec{F}$ costante in direzione verticale, come in figura. Se il filo si svolge senza slittare, si chiede di:
a) Disegnare lo schema delle forze cui è soggetta la ruota (2 punti). b) Determinare il valore del modulo della forza $\vec{F}$ affinché sia nulla la reazione normale del piano sul disco (2 punti). c) Nelle condizioni della domanda 2, stabilire il tipo di moto con cui si muove il disco e calcolare il valore dell'accelerazione angolare (4 punti). d) Ricavare il valore massimo del modulo della forza F per avere moto di puro rotolamento (4 punti). e) Calcolare l'accelerazione traslazionale massima che può essere impressa al centro di massa mantenendo il moto di puro rotolamento (3 punti).
(Dati: $R = 30$ cm, $r = 5.0$ cm, $m = 1.8$ kg, $\mu_s = 0.60$, $g = 9.81$ m s^{-2}; il momento d'inerzia del disco rispetto ad un asse passante per il centro di massa è: $I = \frac{mR^2}{2}$)



Problema 3 (8 punti)

$n = 5$ moli di gas monoatomico compiono un ciclo composto dalle seguenti trasformazioni (reversibili): AB isobara, BC adiabatica, CD isobara, DA adiabatica. Si conoscono le seguenti quantità: $p_A = 2.00 \times 10^6$ Pa, $p_C = 1.00 \times 10^6$ Pa, $V_A = 5.00 \times 10^{-3}$ m^3, $V_B = 1.00 \times 10^{-2}$ m^3.
a) Disegnare il ciclo sul piano $p - V$ (1 punto). b) Determinare le temperature degli stati A e B (2 punti). c) Determinare il calore assorbito dal gas nella trasformazione CD (3 punti). d) Determinare la variazione di entropia $\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC}$ e valutare se sia maggiore o minore rispetto a $\Delta S' = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC'}$ dove la trasformazione adiabatica BC è sostituita da una isoterma BC' alla temperatura T_B (2 punti).
(Nota: costante dei gas perfetti $R = 8.31$ J/(K×mol))

Problema 1 - Soluzione

a) Applichiamo l'equazione del moto:

$$m\vec{a} = \vec{F} = -\mu_d \left|\vec{N}\right| \hat{x}$$

dove $\vec{N} = mg\hat{y}$ è la reazione vincolare del piano. Quindi otteniamo:

$$\vec{a} = -\mu_d g\hat{x} = -5.89\,\mathrm{ms}^{-2}\hat{x}.$$

b) Applicando il teorema dell'energia cinetica lungo il primo tratto scabro abbiamo:

$$\frac{m}{2}v_B^2 - \frac{m}{2}v_0^2 = -\mu_d mg\frac{l}{6}$$

quindi:

$$v_B = \sqrt{v_0^2 - \frac{\mu_d g l}{3}} = 2.92\mathrm{ms}^{-1}$$

c) Applicando sempre il teorema dell'energia cinetica abbiamo:

$$-\frac{m}{2}v_0^2 = -\mu_d mg\Delta x$$

dove Δx è lo spazio percorso nei tratti scabri: $\Delta x = \frac{v_0^2}{2\mu_d g} = 1.22\mathrm{m}$. Dal momento che la frazione $\frac{\Delta x}{l/6} = 2.45$ è compresa tra 2 e 3, concludiamo che il punto materiale si arresta lungo l'ultimo tratto scabro. Quindi la posizione d'arresto sarà:

$$x_1 = \frac{l}{2} + \Delta x = 2.73\mathrm{m}.$$

d) Definiamo v_2 il modulo della velocità con cui il punto materiale giunge alla fine del piano orizzontale (in corrispondenza del punto O), dal teorema dell'energia cinetica abbiamo:

$$\frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2 = -\mu_d mg\frac{l}{2}$$

quindi: $v_2 = \sqrt{v_1^2 - \mu_d g l}$. Giunto alla fine del piano orizzontale, il punto materiale inizia compiere una traiettoria parabolica, descritta dalla legge oraria:

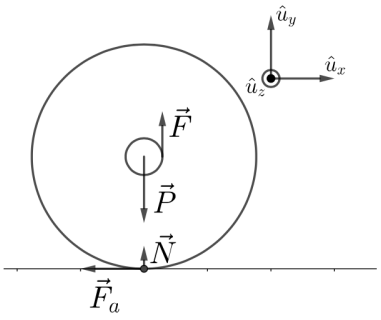
$$x(t) = v_2 t \quad , \quad y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

dove assumiamo che il punto O coincida con l'origine degli assi. La traiettoria è quindi descritta dall'equazione cartesiana: $y(x) = h - \frac{g}{2v_2^2}x^2$. Imponendo $y(d) = 0$ abbiamo:

$$d = \sqrt{\frac{2hv_2^2}{g}} = 5.24\mathrm{m}.$$

Problema 2 - Soluzione

a)



b) Se il disco è in contatto con il suolo, la prima equazione cardinale lungo la direzione verticale è:

$$F + N - mg = 0$$

che è soddisfatta se la reazione normale soddisfa: $N = mg - F \geq 0$. Il valore limite della forza applicata per cui questo si verifica è: $F \leq mg = F_1 = 18\text{N}$.
c) Nella condizione limite $N = 0$, poiché la forza d'attrito è nulla, il moto di pura rotazione la cui accelerazione angolare $\vec{\alpha} = (0, 0, \alpha)$ si può ricavare dall'equazione cardinale:

$$I\alpha = F_1 r$$

dove: $I = \frac{mR^2}{2}$. Quindi: $\alpha = \frac{F_1 r}{I} = 11\text{rad/s}^2$.
d)Le equazioni cardinali per le forze lungo la direzione orizzontale $\hat{u}_x$ e per i momenti lungo la direzione $\hat{u}_z$, sono:

$$Fr - F_a R = I\alpha$$

$$F_a = -ma_{CM}$$

Se la forza applicata è tale da produrre un moto di puro rotolamento risulta verificata l'ulteriore condizione $a_{CM} = -\alpha R$ che permette di risolvere il sistema

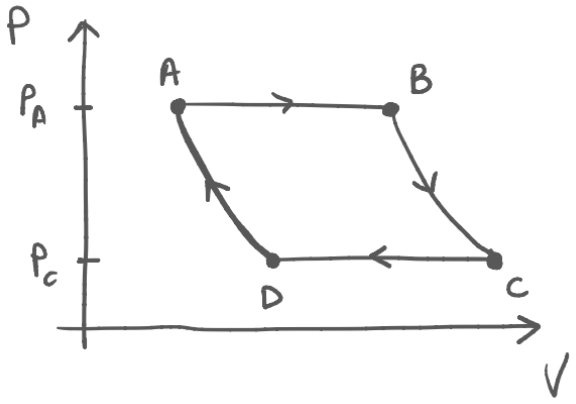
$$F_a = \frac{rF}{R + I/(mR)} = \frac{2r}{3R}F$$

$$\alpha = \frac{F_a}{mR} = \frac{2r}{3mR^2}F$$

Affinché il disco si muova di moto di puro rotolamento deve essere verificata la condizione: $F_a \leq \mu_s N = \mu_s(mg - F)$, quindi: $F \leq \frac{mg}{1+\frac{2r}{3\mu_s R}} = F_2 = 15\text{N}$. Esiste quindi un intervallo $F_2 \leq F \leq F_1$ in cui il disco tocca il suolo ma il moto non è di puro rotolamento.
e) L'accelerazione angolare massima nel moto di puro rotolamento si ottiene quando $F = F_2$, ossia: $|a_{CM,max}| = \frac{2r}{3mR}F_2 = 0.92\ \text{m/s}^2$.

Problema 3 - Soluzione

a)



b)

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 241\text{K};\ \ T_B = \frac{T_A V_B}{V_A} = 480\text{K}$$

c) Per determinare il calore è necessario calcolare le temperature in C e D. Per farlo, si sfruttano le relazioni per le adiabatiche, per esempio trovando V_C con:

$$p_C V_C^\gamma = p_B V_B^\gamma;\ \ V_C = \left(\frac{p_B}{p_C}\right)^{1/\gamma} = 1.52 \times 10^{-2}\text{m}^3$$

e quindi $T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = 365$ K. Con lo stesso procedimento si trovano $V_D = 7.60 \times 10^{-3}$ m^3 e $T_D = 182$ K. Il calore in CD sarà dunque:

$$Q_{CD} = nc_p(T_D - T_C) = -1.89 \times 10^4\ \text{J}.$$

d) La variazione di entropia nella trasformazione isobara risulta essere

$$\Delta S_{AB} = nc_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = 72.0 \text{ J/K}$$

mentre nella trasformazione adiabatica $\Delta S_{BC} = 0$. Di conseguenza si troverà $\Delta S' > \Delta S$, poichè nella trasformazione isoterma si ha:

$$\Delta S'_{BC'} = nR \ln\left(\frac{V'_C}{V_B}\right) = 28.8 \text{ J/K}$$

dove $V'_C = nRT_B/p_C = 2.00 \times 10^{-2}\text{m}^3$ per cui $\Delta S = 72.0$ J/K mentre $\Delta S' = 100.8$ J/K.