19/06/24

Domande di fisica 2023/2024

1 **Moto rettilineo**: ricavare legge oraria nel caso di moto uniformemente accelerato dalle definizioni di accelerazione e velocità istantanee. Ricavare legge oraria in un caso a scelta di moto con accelerazione non costante nel tempo.

- Esso si svolge lungo una retta sulla quale vengono fissati un'origine e un verso.
Nello studio dei moti, per convenzione, si osserva prima il moto del punto materiale (che è assimilabile a quello geometrico e può, quindi, solo muoversi traslando la sua posizione nello spazio senza poter ruotare su se stessi) e successivamente quello di oggetti bi e tri-dimensionali.
Il moto del punto, ad esempio, è descrivibile mediante una sola coordinata $x(t)$, che corrisponde alla legge oraria e in cui è racchiusa tutta la caratterizzazione del moto.
Il diagramma orario è il grafico della funzione $x(t)$ nella quale sulle ascisse poniamo il tempo e sulle ordinate la x che corrisponde alla posizione del punto in un determinato istante.

In tale moto è possibile calcolare grandezze fondamentali come la velocità e l'accelerazione

$V_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ essa esprime un'informazione complessiva sulla rapidità dello spostamento.

$a_{media} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

Il valore puntuale/istantaneo dell'a e V è possibile ricavarlo attraverso il limite del rapporto incrementale.

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

Integrando l'accelerazione istantanea avremo la velocità del punto nel moto unif. acc.

poiché a = costante

$$\int_{V(t_0)}^{V(t')} dV = \int_{t_0}^{t} a\,dt \to \int_{V(t_0)}^{V(t')} dV = a\int_{t_0}^{t} dt \to (V)_{V_0}^{V} = a(t)_{t_0}^{t}$$

NB Guardare i diagrammi orari

$$V(t) - V(t_0) = a(t - t_0) \to V(t) = V(t_0) + a(t - t_0)$$

Sapendo che $V(t) = \frac{dS}{dt} = V(t_0) + a(t - t_0)$

$$dS = V(t_0)dt + a(t - t_0)dt \to \int_{S_0}^{S} dS = V(t_0)\int_{t_0}^{t} dt + a\int_{t_0}^{t} (t - t_0)\,dt \to S(t) = V(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

- Immaginiamo di trovarci in un caso di moto rettilineo con acc. non costante nel tempo Ipotizziamo $a(t) = Kt$ K = costante

ricaviamo • $a(t) = \frac{dV}{dt}$ $\int_{V_0}^{V} dV = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \to V - V_0 = \int_{t_0}^{t} Kt\,dt \to V - V_0 = \frac{K}{2}(t - t_0)^2$

$V = V_0 + \frac{K}{2}(t - t_0)^2$

Created by Notein

• $V(t) = \frac{ds}{dt} = V_0 + \frac{1}{2}k(t-t_0)^2 \int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} V_0\,dt + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}k(t-t_0)^2 dt \rightarrow S - S_0 = V_0(t-t_0) + \frac{1}{6}k(t-t_0)^3$

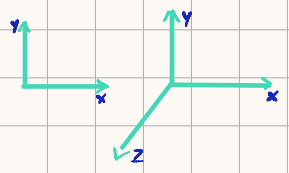
---

2 Vettori: componenti cartesiane e polari. Operazioni tra vettori: somma, sottrazione, prodotto scalare e prodotto vettoriale.

In fisica le coordinate cartesiane e polari sono sistemi di coordinate usati per descrivere la posizione di punti nello spazio

Le **coordinate cartesiane** sono il sistema di coordinate più usato e si basa su assi ortogonali tra loro. Di 2 o 3 dimensioni (x,y) o (x,y,z)

x: Distanza lungo l'asse x
y: Distanza lungo l'asse y
z: Distanza lungo l'asse z ⊥ agli assi x e y (3 dimensioni)



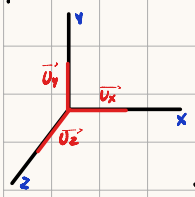
Le **coordinate polari** sono indicate da (ρ, θ):
ρ: indica la distanza dal punto all'origine
θ: l'angolo tra ρ e l'asse x o y

Per convertire le coordinate da cartesiane a polari e viceversa:

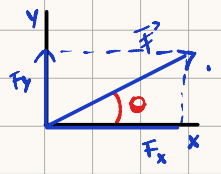
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Vettori:
Alcune grandezze fisiche come la forza sono **Grandezze Vettoriali** che si indicano con $\vec{F}$ e sono individuati da **modulo, direzione e verso.**

modulo: è un numero scalare e indica il valore della grandezza fisica per la **direzione** e il **verso**, generalmente vengono disegnati i versori U_x, U_y, U_z che sono vettori di modulo unitario che individuano direzione e verso degli assi cartesiani del sistema scelto.



Successivamente, disegnato il vettore $\vec{F}$, è possibile scomporlo nelle sue componenti cartesiane



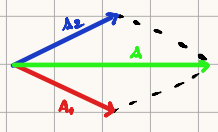
F_x, F_y sono le proiezioni lungo gli assi del vettore $\vec{F}$. le componenti sono **quantità scalari** che moltiplicate per i versori diventano vettori la cui direzione è definita

$$F_x = F\cos\theta \; ; \; F_y = F\sin\theta \qquad \vec{F} = F_x\vec{U_x} + F_y\vec{U_y}$$

Somma di vettori

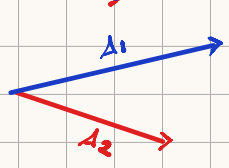


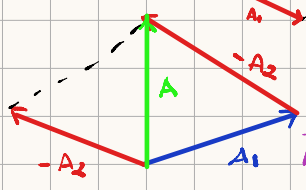
$\vec{A} = \vec{A_1} + \vec{A_2}$



$\vec{A_1} + \vec{A_2} = \vec{A}$

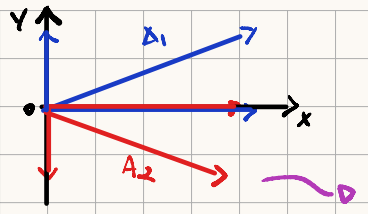
Differenza di vettori →





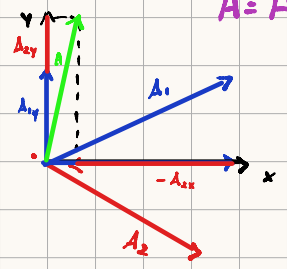
$\vec{A} = \vec{A_1} - \vec{A_2} = \vec{A_1} + (-\vec{A_2})$

Created by Notein



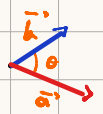
$\vec{A_x} = \vec{A_{1x}} - \vec{A_{2x}}$ $\quad \vec{A_y} = \vec{A_{1y}} - (-\vec{A_{2y}})$

$\vec{A} = \vec{A_1} - \vec{A_2}$



prodo scalare

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$

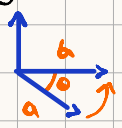


prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$ oppure $\vec{a} \wedge \vec{b}$

modulo $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta$

direzione $\perp$ al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$

verso regola della mano destra



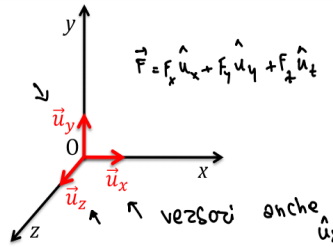
---

3 I tre principi della dinamica, nozione di forza.

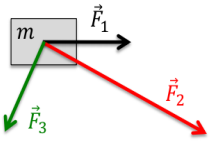
La definizione della grandezza fisica FORZA

In fisica una forza è una qualsiasi azione che modifica lo stato di quiete o di moto di un punto materiale di massa m. In genere una generica forza si indica con la lettera F.

Dato un sistema di riferimento $O(x, y, z)$, una forza può agire lungo una qualsiasi direzione e verso. Le grandezze fisiche che hanno questa proprietà sono GRANDEZZE VETTORIALI e si indicano con una freccia posta in alto al simbolo che le identifica: $\vec{F}$. Nei libri, al posto della freccia si indica in grassetto il simbolo attribuito alla grandezza vettoriale: $\boldsymbol{F}$. Un vettore è individuato nello spazio dalla sua direzione, dal suo verso e modulo. Il modulo è un numero (SCALARE) e indica il valore della grandezza fisica.



Forze applicate ad un corpo di massa m assimilato ad un punto materiale



I vettori $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sono versori, cioè vettori di modulo unitario che individuano la direzione e il verso degli assi cartesiani del sistema di riferimento scelto.

$F = \text{Newton} = Kg \cdot m/s^2$

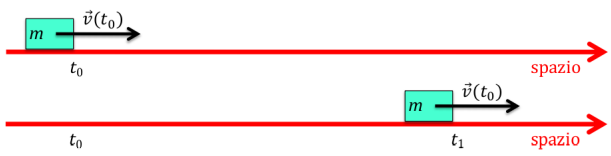
1° principio della dinamica o d'inerzia

In assenza di forze applicate o se la risultante è nulla, il punto materiale permane nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme

Primo principio della dinamica

Si supponga di avere un punto materiale che si muove di moto rettilineo (cioè la sua traiettoria è lungo una retta). Si definisca ora, la grandezza fisica velocità come la variazione dello spazio percorso dal punto materiale in un intervallo di tempo.

La situazione fisica di un moto rettilineo uniforme (velocità costante nel tempo) può essere raffigurata come segue:

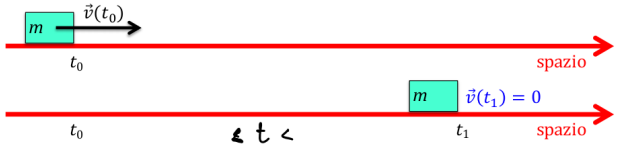


Se per ogni istante temporale $t_0 \le t \le t_1$ si misura che il punto materiale mantiene la inalterata la sua velocità, allora è possibile affermare che sul punto materiale non agisce nessuna forza o, più in generale, che la risultante delle forze applicate è nulla.

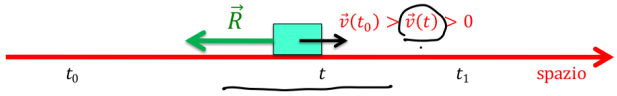
Come si vede nell'esempio qui riportato, è intuitivo identificare la velocità come una grandezza vettoriale. Infatti, il punto materiale può muoversi da sinistra verso destra o da destra verso sinistra. Il simbolo di vettore definisce in modo univoco la direzione e il verso della direzione del moto del punto materiale, nonché il suo modulo.

Un primo passo verso la definizione del secondo principio della dinamica

Prendiamo ora in considerazione una differente situazione fisica. Al tempo $t_0 = 0$ un punto materiale si muove di moto rettilineo con una velocità $\vec{v}(t_0) \neq 0$ che si annulla al tempo $t_1 > t_0$, cioè si misura $\vec{v}(t_1) = 0$.



In questo caso è possibile affermare che sul punto materiale ha agito una forza o che la risultante delle forze applicate non è stata nulla. Dato che il punto materiale si ferma al tempo t_1 e che la velocità al tempo t_0 è diretta verso destra, la situazione dinamica all'istante generico t tale che $t_1 > t > t_0$, deve essere stata la seguente:



Created by Notein

Secondo principio della dinamica

Se su un punto materiale di massa m sono applicate n forze la cui risultante non è nulla, il punto materiale subirà un'accelerazione che si esprime come:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

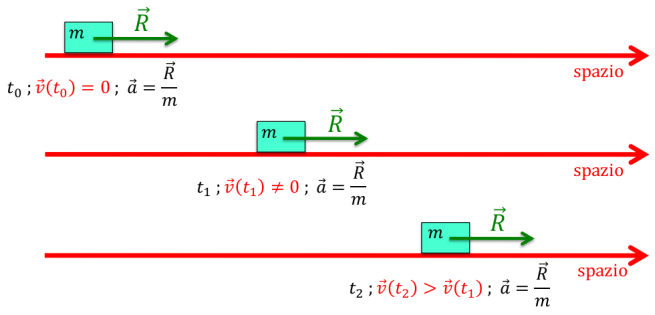
2° principio della dinamica o legge di Newton

Da questa EQUAZIONE VETTORIALE si nota che a sinistra dell'uguale è collocata la somma delle forze che agiscono sul punto materiale, mentre, a destra c'è il prodotto della massa del punto materiale per l'accelerazione che gli viene impressa.

Come detto, la precedente equazione è un'equazione vettoriale. Essendo la massa una quantità scalare sempre positiva (cioè un numero positivo), il vettore accelerazione $\vec{a}$ ha la stessa direzione e verso della risultante $\vec{R}$ delle forze applicate.

Il secondo principio della dinamica può essere interpretato anche nel modo seguente: una volta identificate le forze che agiscono su un punto materiale di massa m, è sempre possibile calcolare il valore dell'accelerazione che gli viene impressa.

Si studi ora la situazione dinamica di un punto materiale che si muove lungo una traiettoria rettilinea sotto l'azione della risultante $\vec{R}$ delle forze applicate, supposta costante nel tempo. Questo è un moto rettilineo uniformemente accelerato.



Dato che la risultante delle forze applicate e la massa del punto materiale rimangono costanti, si ha che il valore dell'accelerazione è costante in modulo direzione e verso. Il vettore velocità non ha modulo costante (la velocità aumenta nel tempo) ed ha la stessa direzione e verso dell'accelerazione.

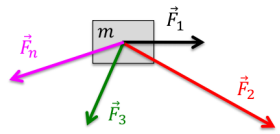
Nella sua formulazione matematica, il secondo principio della dinamica è alla base di tutte le leggi della meccanica classica. Esso, infatti, stabilisce che le forze applicate a un punto materiale ha come effetto la variazione della sua velocità nel tempo cioè, alla presenza di un'accelerazione.

Questa conclusione servirebbe a poco se non fosse possibile calcolare come varia la velocità nel tempo $\vec{v}(t)$ e lo spazio percorso $s(t)$ dal punto materiale usando il 2° principio della dinamica. Se si dimostrasse che questo è possibile, ne deriverebbe che la sola analisi fisica delle forze applicate permette di conoscere/prevedere il moto dei punti materiali e, in seguito, il moto di traslazione, di rotazione e di roto-traslazione di oggetti fisici bi- e tri-dimensionali.

Il passo decisivo che ha portato alla soluzione di questo problema è stato l'utilizzo del calcolo infinitesimale applicato alle grandezze fisiche che fu sviluppato da Newton e, contemporaneamente ma, separatamente, da Gottfried Wilhelm von Leibniz (Lipsia, 1646 – Hannover, 1716).

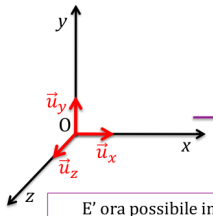
Punto di partenza della nostra analisi è la definizione di velocità e accelerazione media di un punto materiale che si muove su di una traiettoria rettilinea. Si considerano, pertanto, solo i moduli delle due grandezze. Avremo modo, in seguito, di generalizzare il calcolo per le corrispondenti grandezze vettoriali per lo studio dei moti in due dimensioni di punti materiali (cioè lungo traiettorie curvilinee).

Il secondo principio della dinamica: dalla equazione vettoriale alle corrispondenti equazioni scalari



$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Scelto un sistema di riferimento inerziale, è possibile scomporre ciascuna delle forze agenti nelle sue componenti scalari per analizzare la situazione dinamica.



TRE EQUAZIONI SCALARI

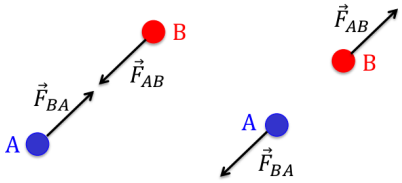
$$F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} + \cdots + F_{n,x} = R_x = ma_x$$
$$F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} + \cdots + F_{n,y} = R_y = ma_y$$
$$F_{1,z} + F_{2,z} + F_{3,z} + \cdots + F_{n,z} = R_z = ma_z$$

E' ora possibile integrare le equazioni numeriche così ottenute per determinare le componenti scalari della velocità e dello spazio percorso.

Il terzo principio della dinamica o terza legge di Newton

Newton enunciò la seguente proprietà generale delle forze di interazione tra due corpi che è alla base della derivazione della legge di gravitazione universale:

Se un corpo A esercita una forza $\vec{F}_{AB}$ su un secondo corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza $\vec{F}_{BA}$ sul corpo A. Le due forze hanno la STESSA RETTA D'AZIONE, lo STESSO MODULO ma VERSO OPPOSTO (PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE).

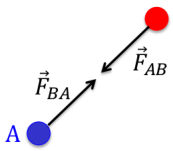


$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$$

Non siamo ora in grado di dimostrare la validità del terzo principio della dinamica perché potremo farlo quando studieremo la dinamica dei sistemi di punti materiali. Mettiamo solo in evidenza che il terzo principio della dinamica implica la contemporaneità dell'azione d'interazione delle due forze generate dai due corpi.

Il terzo principio della dinamica o terza legge di Newton

Relazione reciproca tra l'azione delle forze uguali e contrarie che agiscono tra due corpi di massa m_A e m_B e l'accelerazione che i corpi acquisiscono: il caso in cui m_a è la massa della Terra e m_B quella di un generico punto materiale.



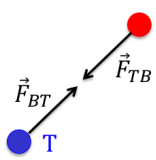
Massa del punto materiale: $m_B = 1$ kg

Massa della Terra: $m_A = 5.97\times10^{24}$ kg

$$|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{BA}|$$

Lasciato libero di muoversi, è il corpo B che vediamo essere attratto verso la superficie della Terra e non il viceversa. Ma se le due forze sono uguali, come si spiega questo fenomeno che siamo abituati a vedere ogni giorno ?

Il terzo principio della dinamica applicato tra un corpo di massa m e la Terra



Massa del corpo: $m_B = 1$ kg

Massa della Terra: $m_T = 5.97\times10^{24}$ kg
Raggio della Terra: $R_T = 6.371\times10^{6}$ m

La legge di gravitazione universale di Newton per un corpo che è in prossimità della superficie terrestre, si scrive nel modo seguente:

$$\vec{F}_{TB} + \vec{F}_{BT} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{TB} - F_{BT} = 0 \quad ; \quad |\vec{F}_{TB}| = |\vec{F}_{BT}| = G\frac{m_T m_B}{R_T^2}$$

Determiniamo le dimensioni fisiche e l'unità di misura della costante di gravitazione universale G:

$$[F] = [G]\frac{[M]^2}{[L]^2} \quad \rightarrow \quad [G] = \frac{[F][L]^2}{[M]^2}$$

$$G = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$$

Si applichi il secondo principio della dinamica al corpo di massa m_B:

$$G\frac{m_T m_B}{R_T^2} = a_B m_B \rightarrow a_B = G\frac{m_T}{R_T^2}$$

$$a_B = 6.67\times10^{-11}\frac{5.97\times10^{24}}{(6.371\times10^{6})^2}\ \mathrm{m/s^2} \cong 9.81\ \mathrm{m/s^2}$$

$$g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$$

Si applichi ora il secondo principio della dinamica alla Terra:

$$G\frac{m_T m_B}{R_T^2} = a_T m_T \rightarrow a_T = G\frac{m_B}{R_T^2}$$

$$a_T = 6.67\times10^{-11}\frac{1}{(6.371\times10^{6})^2}\ \mathrm{m/s^2} \cong 1.64\times10^{-24}\ \mathrm{m/s^2}$$

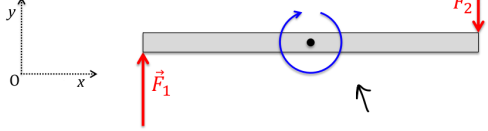
ATTENZIONE: il terzo principio della dinamica pur affermando che le forze di interazione tra due corpi sono uguali in modulo, poste sulla stessa direzione ma con verso opposto, NON stabilisce l'assenza di azione dinamica tra i due corpi.

E' NECESSARIO applicare il secondo principio della dinamica per determinare il valore dell'accelerazione che le forze di interazione generano.

Un esempio di azione dinamica generata da due forze la cui somma è nulla.

Supponiamo ora di avere un'asta poggiata su di un piano orizzontale che può ruotare senza attrito intorno ad un asse perpendicolare al piano.

Created by Notein



Applichiamo alle due estremità dell'asta due forze uguale in modulo che agiscono lungo due direzioni tra loro parallele ma con verso opposto (coppia di forze).

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ $\quad |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$

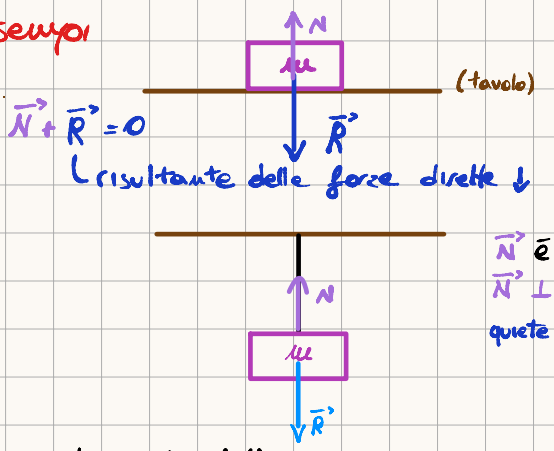
Pur essendo la somma delle due forze nulla, la loro disposizione spaziale permetterà all'asta di ruotare, nell'esempio proposto, in senso orario.

---

4 Reazione vincolare normale. Forza peso, caso dell'ascensore. (pag 56/58)

Se un corpo, soggetto all'azione di una forza o della risultante non nulla di un insieme di forze, rimane fermo, deduciamo che l'azione della forza provoca una **reazione vincolare** dell'ambiente che si esprime tramite una forza **uguale e contraria** alle forze agent., applicate sul corpo in modo che esso rimanga in quete

Esempio:



$\vec{N} + \vec{R} = 0$

L risultante delle forze dirette ↓

Il corpo è soggetto all'azione di attrazione della terra che lo fa premere sulla sup. del tavolo deformandolo. Il tavolo produrrà una forza uguale e contraria N affinché il corpo rimanga fermo.

$\vec{N}$ è la tensione del filo
$\vec{N} \perp$ alla sup. del vincolo
quete $\vec{N} + \vec{R} = 0$

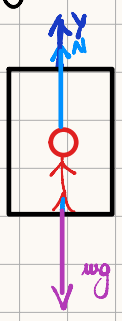
Generalmente tutti i corpi, qualunque sia la loro massa inerziale, sono soggetti all'acc. di gravità diretta verso il basso il cui modulo è $g = 9{,}81\ m/s^2$. Tale acc. è conseguenza della f. di attrazione terrestre, cioè dell'interazione gravitazionale tra la terra e il corpo.

$P = mg$ Si tratta di una forza costante e in presenza di altre forze $a \neq g$. In particolare un corpo che cade nell'aria presenta un'acc. $< g$ a causa dell'attrito.

Considerando il caso di un ascensore che sale o scende ed è quindi soggetto ad una acc. $\neq g$

$P = \text{Newton} = Kg \cdot m/s^2$

salita



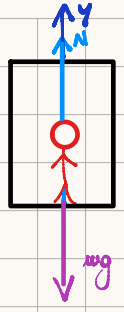
$a > 0 \quad F = ma$

$N - mg = m \cdot a$ (soggetto all'azione della f. peso e della reazione vincolare)

$\vec{N} > \vec{P}$

$N = ma + mg > mg$

Created by Notein

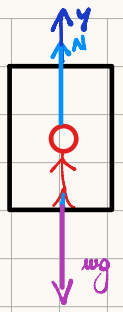


discesa $a<0$

$N - mg = -ma$

$\vec{N} < \vec{P}$

$N = mg - ma < mg$



quiete $v=0 \quad a=0$

$N - mg = 0$

$N = mg$

---

5 Forze d'attrito: schematizzazione attrito statico e dinamico. Illustrare con un esempio.

($\parallel$ al piano orizz.)

Applicando ad un corpo appoggiato su un tavolo una forza $\vec{F}$, si osserva che il corpo non entra in movimento fino a che il modulo di F non supera il valore $\mu_s N$ dove μ_s: coeff. di attrito statico e N è la reazione vincolare.

$F \leq \mu_s N$ quiete — il vincolo, quindi, sviluppa una **f. di attrito radente statico** eguale e contraria a F e ciò avviene finché F non supera il valore max $\mu_s \cdot N$

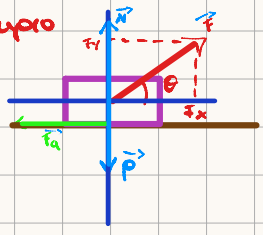
$F \geq \mu_s N$ moto

Nel momento in cui $F > \mu_s \cdot N$ il corpo entra in moto e ad esso si oppone la forza di **attrito radente dinamico** $F_{ad} = \mu_d \cdot N$ $\quad \mu_d < \mu_s$

l'eq. del moto sarà $\begin{cases} F_x - \mu_d N = m \cdot a \\ N - mg = 0 \end{cases}$ $\quad \vec{F}_{ad} = -\mu_d \cdot \vec{N}$

(Tutto ciò se si ha una sup. scabra)

Esempio



$\begin{cases} N + F_y - P = 0 \\ F_x - F_a = 0 \end{cases}$ $\quad F_y = F\sin\theta$ $\quad F_x = F\cos\theta$

$\downarrow$

$\begin{cases} N + F\sin\theta - mg = 0 \\ F\cos\theta - \mu_s N = 0 \end{cases}$ $\quad N = mg - F\sin\theta$ $\quad F\cos\theta - \mu_s \cdot (mg - F\sin\theta) = 0$

$F\cos\theta \leq \mu_s (mg - F\sin\theta)$ condizione di quiete

se invece

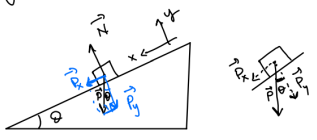
$\begin{cases} N + F_y - P = 0 \\ F_x - F_a = ma \end{cases}$ $\quad [F\cos\theta - \mu_d N = m \cdot a]$ eq. moto.

---

6 Piano inclinato: schematizzazione delle forze. Condizione di non scivolamento in caso di piano scabro.

- PIANO INCLINATO -

Consideriamo un punto materiale di massa m che si muova su una superficie inclinata di un angolo θ rispetto ad un piano orizzontale.



La legge di Newton, in assenza di attrito, sarà

- Se invece esiste l'ATTRITO RADENTE, il corpo non si mette in moto se

$mg\sin\theta \leq \mu_s N$ cioè $mg\sin\theta \leq \mu_s mg\cos\theta$

quindi la condizione di quiete è

$\boxed{tg\theta \leq \mu_s}$

Se il corpo si mette in moto, cioè $tg\theta > \mu_s$:

↑

RIASSUMENDO:

- se il corpo è fermo sul piano inclinato resta fermo fino a quando $\theta \leq \theta_s$ con θ_s tale che $tg\theta_s = \mu_s$

- per $\theta > \theta_s$ il corpo si mette in movimento lungo il piano. Qua c'è μ_d ma $\mu_d < \mu_s$ (potrei avere $\theta < \theta_s$ quando c'è il movimento) quindi il corpo NON si muove per θ compresi tra θ_d e θ_s $\quad \theta_d$ tale che $tg\theta_d = \mu_d$

Created by Notein

$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$

$\vec{P}$ ora ha 2 componenti $\begin{cases} P_x = P\sin\theta = mg\sin\theta \\ P_y = -P\cos\theta = -mg\cos\theta \end{cases}$

Quindi posso scrivere $x: \begin{cases} mg\sin\theta = ma \\ y: N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow N = mg\cos\theta$

$a = g\sin\theta \Rightarrow a = \text{costante}$ MOTO UNIFORM. ACCELERATO

$x: \begin{cases} mg\sin\theta - \mu_s N = ma \\ y: N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$ ←

Ricavo l'accelerazione:

$a = g\sin\theta - \mu_s g\cos\theta = g(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)$ ←

$\sin\theta - \mu_s\cos\theta > 0 \Rightarrow \boxed{\mu_s < \tg\theta}$

Se $\sin\theta = \mu_s\cos\theta \Rightarrow a = 0$ MOTO UNIFORME ($v = \text{cost}$)

- Se il corpo sta scendendo lungo il piano con velocità iniziale v_0, esso si fermerà quando sarà verificata:

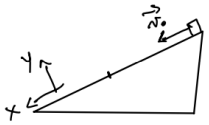
$mg\sin\theta < \mu_s mg\cos\theta$ cioè

$\mu_s > \tg\theta$

- se $\mu_s = \tg\theta$ $a = 0$ $v_0 = \text{costante}$ il corpo continua con $v = \text{cost.}$
- Se $\mu_s < \tg\theta$ $a = \text{cost.}$ MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

ESEMPIO

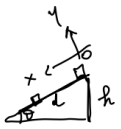
Calcolare, per un piano inclinato di altezza h e angolo θ la velocità con cui arriva alla base un punto lanciato dal vertice con velocità iniziale v_0. Si consideri il caso senza attrito e con attrito.



$a = \text{costante}$

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv = \frac{v^2}{2}\Big|_{v_0}^{v} = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = a(x - x_0)$$ ($x - x_0 = d$)



Esprimo d in funzione di h e θ:

$d = \frac{h}{\sin\theta} \Rightarrow h = d\sin\theta$

$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = g\sin\theta\, d = g\sin\theta\left(\frac{h}{\sin\theta}\right) = gh$ ($d = \frac{h}{\sin\theta}$)

$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2gh}$ velocità finale non dipende dall'angolo θ di inclinazione del piano

IN PRESENZA DI ATTRITO

$a = g(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)$

$v^2 = v_0^2 + 2g(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)\,d$ ($d = h/\sin\theta$)

$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2gh(1 - \mu_s\cot g\theta)}$

In questo caso la velocità dipende dall'inclinazione del piano θ

3 CASI:

- $v > v_0$ (moto accelerato) quando $\sin\theta - \mu_s\cos\theta > 0$ cioè $\tg\theta > \mu_s$
- $v = v_0$ $\tg\theta = \mu_s$
- $v < v_0$ (moto decelerato) se $\tg\theta < \mu_s$

La generica distanza alla quale il corpo si ferma considero $v^2(x) = 0$ cioè

$v_0^2 + 2g(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)x = 0$

$x = \frac{v_0^2}{2g(\mu_s\cos\theta - \sin\theta)}$

$a\,dx = v\,dv$

$a = v\frac{dv}{dx}$

$a = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dv}{dx}$ $\quad a = \frac{dv}{dt}$

NOTE IN Created by Notein

7 Definizione di lavoro e potenza. Dimostrazione del teorema dell'energia cinetica.

Consideriamo un punto materiale soggetto ad una forza $\vec{F}$ che subisca uno spostamento Δs.
Il lavoro W della forza durante lo spostamento è definito come

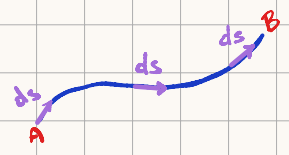
$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s} = F\cdot\Delta s\cdot\cos\theta = F_T\,\Delta s$$

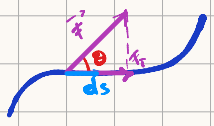
(θ l'angolo tra $\vec{F}$ e $\Delta\vec{s}$; $F_T = F\cos\theta$ è la proiezione della forza lungo Δs.)

Per uno spostamento finito da A a B lungo C il lavoro si ottiene suddividendo il percorso in una serie di n segmenti Δs_i calcolando per ognuno di essi il lavoro e sommando tutti i contributi

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B F\cos\theta\, ds = \int_A^B F_T\, ds$$

(ds: lo spostamento infinitesimo tangente in ogni punto.)





$dW = F_T\,ds$

Il lavoro, quindi, è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali può essere positivo ($\theta < \frac{\pi}{2}$), negativo ($\theta > \frac{\pi}{2}$) o nullo ($\theta = \frac{\pi}{2}$) (il prodotto scalare è massimo!)

La Potenza corrisponde al lavoro per unità di tempo

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = F_T\, v$$

potenza istantanea (caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro)

potenza media: lavoro totale diviso il tempo entro cui il lavoro è stato svolto (a parità di lavoro, potenza maggiore → macchina che eroga in meno tempo)

$$dW = F_T\,ds = m a_T\,ds = m\frac{dv}{dt}\,ds = m v\,dv$$

dalla definizione di lavoro iniziale al legame con la variazione infinitesima della velocità.

per un percorso finito da A a B

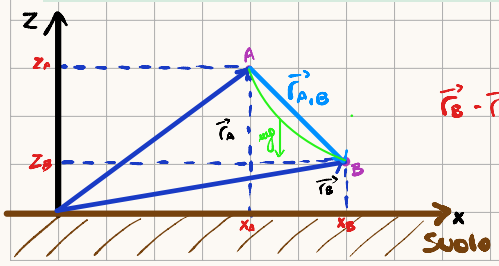
$$W_{AB} = \int_A^B m v\,dv = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = m\left(\frac{1}{2}v_B^2 - \frac{1}{2}v_A^2\right) = E_{c_B} - E_{c_A} = \Delta E_c$$

la quantità $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ prende il nome di Energia Cinetica e il simbolo Δ indica la differenza tra il lavoro nella posizione finale e quello nella posizione iniziale.
Pertanto il lavoro = variazione di energia cinetica
└ Teorema dell'energia Cinetica
(se $W=0$ E_c = costante)

$$[\mathrm{Kg}\cdot\mathrm{m/s^2}\cdot\mathrm{m}]$$

$\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{Joule}$

8 Lavoro della forza peso. Forze conservative ed energia potenziale. Dimostrazione del teorema dell'energia meccanica.



$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_{AB}$

l'asse z è rivolta verso l'alto quindi in verso opposto a $\vec{g}$

$$W_{peso} = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{s} = \vec{F}\int_A^B d\vec{s} = mg\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = m\vec{g}\,\vec{r}_{AB}$$

Created by Notein

la componente verticale di $\vec{r_{AB}}$ vale $z_B - z_A$ quindi $-mg(z_B - z_A) = mg\,r_{AB} = W_{peso}$

$W_{peso} = -mg(z_B - z_A) = -(E_{pB} - E_{pA}) = -\Delta E_p$

$E_p = mgz$ è la funzione della coordinata verticale del punto misurata lungo un asse // e di verso opposto alla f. peso.
Essa indica l'E potenziale della f. peso.

Il lavoro della f peso è uguale e opposta alla variazione di Ep durante lo spostamento AB.

Il lavoro, dunque, dipende solo dal dislivello tra posizione iniziale e finale e non dalla traiettoria per spostarsi da A a B.

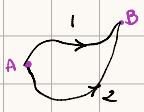
Se $B > 0$ $\Delta E_p < 0$ $W > 0$
Se $B < 0$ $\Delta E_p > 0$ $W < 0$

f. peso è costante.

$E_{p\,gravit.} = mgh$ $E_{p\,elastica} = \frac{1}{2}Kx^2$

Forze conservative: forze per le quali il lavoro non dipende dal percorso scelto per andare da A a B (peso, elastica)

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_B^A \vec{F}\,d\vec{s}$$



per un percorso chiuso ABA

$$\int_A^B (\vec{F}\,d\vec{s})_1 + \int_B^A (\vec{F}\,d\vec{s})_2 = \int_A^B (\vec{F}\,d\vec{s})_1 - \int_A^B (\vec{F}\,d\vec{s})_2 = 0$$

$$\oint_A^B (\vec{F}\cdot d\vec{s}) = 0$$
f. conservative

1 Nel percorso chiuso $\Delta E_p = 0 \Rightarrow E_p^A = E_p^B$

La forza peso è una forza conservativa mentre la forza di attrito è una forza non conservativa.

Se agiscono solo forze conservative



$W = \Delta E_k = E_k^B - E_k^A$

$W = -\Delta E_p = E_p^A - E_p^B$

$E_k^B - E_k^A = E_p^A - E_p^B$

$E_k^B + E_p^B = E_k^A + E_p^A = \text{costante} = E_m^{TOT}$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA:

durante il moto la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale rimane costante. Questa somma consiste nell'energia meccanica totale.

Quando abbiamo FORZE NON CONSERVATIVE il lavoro complessivamente sarà

$W = W_c + W_{nc} = E_k^B - E_k^A$

2 poiché $W_c = -\Delta E_p \Rightarrow W = -\Delta E_p + W_{nc} = E_k^B - E_k^A$ per cui

$W_{nc} = (E_k^B - E_k^A) + \Delta E_p = (E_k^B - E_k^A) + (E_p^B - E_p^A)$

$= (E_k^B + E_p^B) - (E_k^A + E_p^A) = E_m^B - E_m^A$

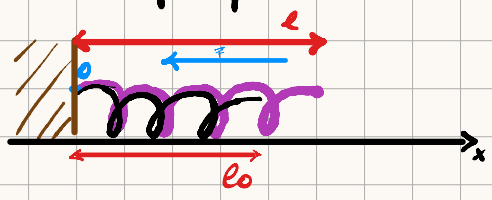
In presenza di forze NON CONSERVATIVE l'energia meccanica totale non resta costante e la sua variazione è pari al lavoro delle forze non conservative.

In particolare se la forza non conservativa è la forza di attrito $W_{nc} < 0$ quindi l'energia meccanica totale diminuisce. ↑ dissipativo

Created by Notein

9 Forza elastica: schematizzazione della forza, calcolo del lavoro, equazione del moto oscillatorio.

La forza elastica è una forza di direzione costante con verso rivolto sempre ad un punto O detto centro e con modulo proporzionale alla distanza da O.



legge di Hooke $\vec{F} = -K x \hat{u}_x$

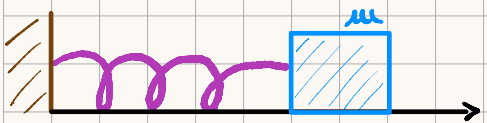
K = costante positiva = costante elastica N/m

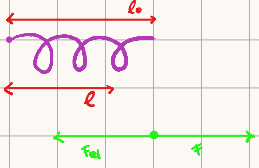
$x = (l - l_0)$ ↳ lunghezza a riposo

$F = -K(l - l_0) = -Kx$

↳ può essere positivo o negativo a seconda che la molla sia estesa o compressa e quindi di conseguenza la forza sarà negativa o positiva rispettivamente.

Se vogliamo mantenere la molla in una certa posizione dobbiamo applicare alla molla una forza uguale e contraria alla f. elastica





$F = -F_{el}$ (la molla è ferma)

$m \cdot a = -Kx$ $\quad a = -\omega^2 x$

$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$ divido per m: $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Kx}{m} = 0}$ eq. oscillatore armonico

$\omega^2 = \frac{K}{m} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ pulsazione

$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$

$\frac{d^2x}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$

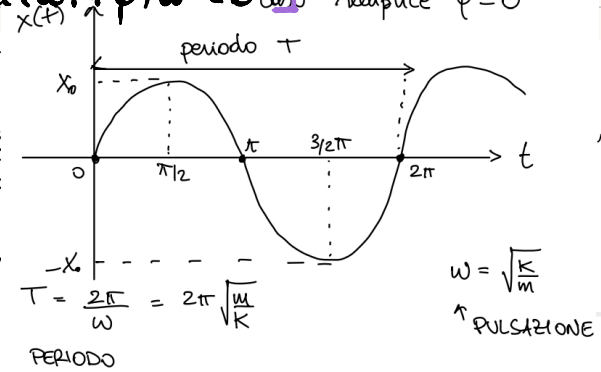
$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + A \sin(\omega t + \varphi)\omega^2 = 0$

Verifica

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ ↓

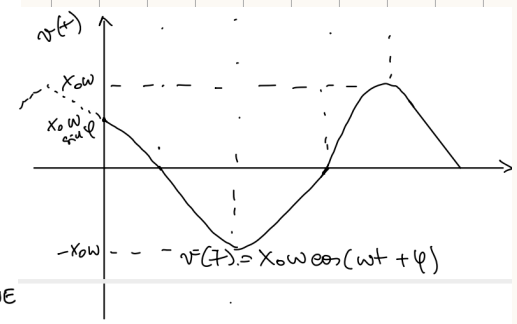
$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Disegniamo la $x(t)$: caso semplice $\varphi = 0$



$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ PERIODO

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ↑ PULSAZIONE



A e φ possono essere determinate dalle condizioni iniziali:

Al tempo $t = 0$

$x_0 = A \sin(0 + \varphi) = A \sin\varphi$ ↖ posizione iniziale

$v_0 = 0 = \omega A \cos\varphi$ ← derivata per la velocità iniziale ($\omega t + \varphi$)

Se φ è compreso tra 0 e 2π sono possibili le condizioni:

$x_0 = A \quad \varphi = \pi/2$

$\rightarrow$

$x_0 = -A \quad \varphi = 3\pi/2$

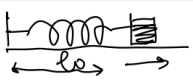
$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

$v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$

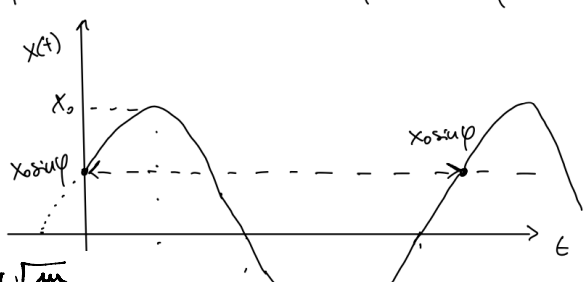
Se le condizioni iniziali sono di ad es. $x(0) = x_0$ $\quad v(0) = v_0$ $\quad \varphi$

$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega}}$ $\quad tg\varphi = \frac{\omega x_0}{v_0}$

Caso $\varphi \neq 0$

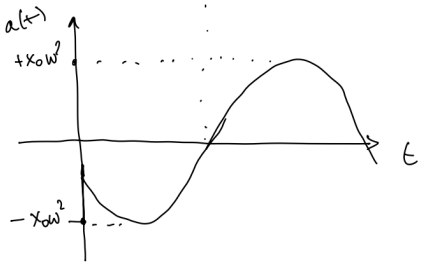


per $t = 0$ $\quad x(0) = A \sin\varphi = x_0 \sin\varphi$



Ricaviamo anche $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} =$

$= -X_0\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$



Periodo: tempo $[T]$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

NOTE IN Created by Notein

pulsazione $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow [T^{-1}]$

unità rad/s

frequenza $= \nu = \frac{1}{T}$ $[T^{-1}]$

unità $1/s = 1\,Hz$

– LAVORO DELLA FORZA ELASTICA –

Il lavoro della forza elastica $\vec{F} = -kx\hat{u}_x$ per uno spostamento lungo l'asse $\vec{x}$ sarà:

$$L_{el.} = \int_A^B -kx\hat{u}_x \cdot dx\hat{u}_x = \int_A^B -kx\,dx = -\Delta E_p^{el}$$

$d\vec{s} = dx\hat{u}_x = d\vec{x}$

$\hat{u}_x \cdot \hat{u}_x = 1 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 1$

$$= \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

ENERGIA POTENZIALE ELASTICA $= E_{el}^p = \frac{1}{2}kx^2$

Il lavoro può essere espresso come variazione di una funzione delle coordinate in A e in B

Le FORZA ELASTICA è una forza conservativa quindi si conserva l'ENERGIA MECCANICA TOTALE

$$E_m^A = E_m^B \Rightarrow E_k^A + E_p^A = E_k^B + E_p^B$$

E^k = en. cinetica, E^p = en. potenziale

$$E^m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\underbrace{m\omega^2}_{k}\underbrace{\cos^2(\omega t+\varphi)}_{v^2(t)} + \frac{1}{2}k\underbrace{X_0^2\sin^2(\omega t+\varphi)}_{x(t)}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m\omega^2 = k$$

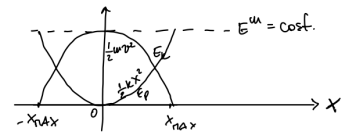
quindi $E^m = \frac{1}{2}X_0^2 k\cos^2(\omega t+\varphi) + \frac{1}{2}X_0^2 k\sin^2(\omega t+\varphi) =$

$$= \frac{1}{2}X_0^2 k\left[\underbrace{\cos^2(\omega t+\varphi) + \sin^2(\omega t+\varphi)}_{1}\right] = \frac{1}{2}X_0^2 k = (cost.)$$

NOTA:

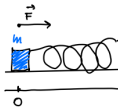
$x(t) = X_0\sin(\omega t+\varphi)$

$v(t) = X_0\omega\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow v^2(t) = X_0^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)$



– ESEMPIO –

Un punto materiale fissato ad una molla di costante elastica k è in quiete nell'origine. Si applica al punto una forza $\vec{F} = F\hat{u}_x$, costante in modulo, direzione e verso e il punto si porta nella posizione di coordinate $x > 0$. Calcolare la velocità del punto in funzione di x e la posizione in cui il punto si ferma.



$x_A = 0$, $x_B = x$

$$W_{el} = -\Delta E_p = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = -\frac{1}{2}k\Delta x^2 = -\frac{1}{2}kx^2$$

essendo $x_A = 0$ e $x_B = x$

$$W_F = Fx$$

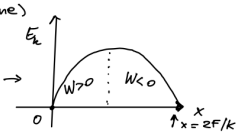
$$Fx - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 2Fx - kx^2 = mv^2$$

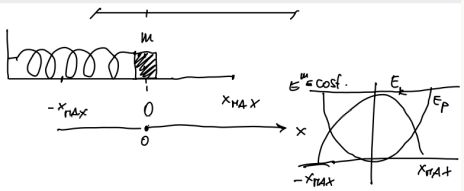
$$v^2 = \frac{x}{m}(2F - kx) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{x}{m}(2F-kx)}$$

Per la posizione in cui il punto si ferma impongo che $v(x) = 0$ quindi trovo x:

$$0 = \sqrt{\frac{x}{m}(2F-kx)} \Rightarrow \frac{x}{m}(2F-kx) = 0$$

2 soluzioni: $x = 0$ (origine), $x = \frac{2F}{k}$





10 Moto armonico: equazione differenziale, pulsazione e periodo. Ricavare, per un caso a scelta, ampiezza e fase in base alle condizioni iniziali.

1.6 MOTO ARMONICO SEMPLICE

Un punto esegue un **moto armonico semplice** quando la legge oraria è definita dalla relazione

Moto armonico semplice

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \phi) \qquad (1.9)$$

A, ω, ϕ sono grandezze costanti: A è detta **ampiezza del moto**, $\omega t + \phi$ **fase del moto**, ϕ **fase iniziale**, ω **pulsazione**. Dunque il moto armonico semplice è un **moto vario**, in cui tutte le grandezze cinematiche che lo descrivono, $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$, variano nel tempo.

Discutiamo le caratteristiche spaziali di questo moto. I valori estremi assunti dalla funzione seno sono +1 e −1: pertanto il punto che obbedisce alla (1.9) percorre un segmento di ampiezza $2A$ con centro nell'origine, figura 1.8; il massimo spostamento dall'origine è pari ad A, donde il nome di ampiezza del moto. Al tempo $t = 0$ il punto occupa la posizione $x(0) = A\,\text{sen}\,\phi$: note le costanti A e ϕ, pos-

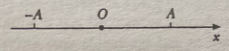


Figura 1.8
Ampiezza dell'oscillazione di un moto armonico semplice.

siamo determinare la posizione iniziale del punto (solo se $\phi = 0$ o $\phi = \pi$ il punto è nell'origine per $t = 0$).

Il moto armonico, considerando che la funzione seno è periodica con periodo 2π, risulta essere *periodico*: in effetti il punto descrive oscillazioni di ampiezza A rispetto al centro O, tutte eguali tra loro e caratterizzate dalla durata, detta **periodo** T del moto armonico. Ciò rientra nella definizione generale: il moto di un punto si dice periodico quando ad intervalli di tempo eguali il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità (e questo avviene per qualsiasi posizione). Si osservi che la realizzazione di moti o più in generale di fenomeni caratterizzati da una periodicità è fondamentale per la misura del tempo.

Per determinare il periodo T consideriamo due tempi t' e t, con $t' - t = T$; per definizione $x(t') = x(t)$ e quindi da (1.9), dovendo le fasi nei due istanti differire di 2π, periodo della funzione seno, abbiamo $\omega t' + \phi = \omega t + \phi + 2\pi$: ne segue che $T = t' - t$ vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ovvero} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}\,. \qquad (1.10)$$

Periodo

pulsazione

Capiamo così il significato di ω: il moto si ripete velocemente (piccoli valori di T) quando la pulsazione è grande mentre il moto è lento (T grande) per bassi valori della pulsazione.

Si definisce **frequenza** ν del moto il numero di oscillazioni in un secondo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\,.$$

Frequenza

È molto importante osservare che *il periodo, e quindi la frequenza, di un moto armonico semplice sono indipendenti dall'ampiezza del moto.*

Fissato il valore della pulsazione abbiamo una classe di moti armonici, caratterizzati dallo stesso periodo, che differiscono tra loro per i diversi valori dell'ampiezza e della fase iniziale, cioè, come vedremo, per le diverse condizioni iniziali.

La velocità del punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando $x(t)$:

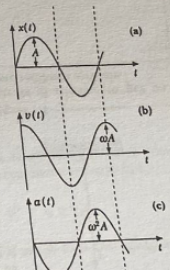
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \phi)\,. \qquad (1.11)$$

Con una ulteriore derivazione si ottiene l'accelerazione del punto:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\,\text{sen}(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)\,. \qquad (1.12)$$

In figura 1.9 sono rappresentate le funzioni $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$; si è posto $\phi = 0$.

La velocità assume il valore massimo nel centro di oscillazione (preso come origine O) dove vale ωA e si annulla agli estremi ($x = A$ e $x = -A$) dove si inverte il



Le costanti A e ϕ individuano le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 = A\,\text{sen}\,\phi \quad , \quad v(0) = v_0 = \omega A\cos\phi\,.$$

Viceversa, note le condizioni iniziali x_0 e v_0, si calcolano A e ϕ:

$$\text{tg}\,\phi = \frac{\omega x_0}{v_0}\,, \qquad A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\,.$$

Dalla legge oraria (1.9) abbiamo ricavato che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento, con segno negativo: $a = -\omega^2 x$. Se invece si trova che in un certo moto l'accelerazione risulta proporzionale allo spostamento con costante di proporzionalità negativa si dimostra che quel moto è armonico semplice.

In altre parole:

la condizione necessaria e sufficiente perché un moto sia armonico è data dall'equazione

Equazione differenziale del moto armonico

$$\frac{d^2x(t)}{dx^2} + \omega^2 x(t) = 0\,, \qquad (1.13)$$

detta del moto armonico.

Le funzioni seno e coseno, e le loro combinazioni lineari, sono *tutte e sole* le funzioni che soddisfano alla condizione (1.13) nel campo reale.

Quest'ultimo fatto ci porta a osservare esplicitamente che le proprietà generali del moto armonico semplice restano eguali se invece della funzione seno utilizziamo la funzione coseno. Le due funzioni differiscono solo per un termine di sfasamento pari a $\pi/2$: $\text{sen}(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \psi)$ con $\psi = \phi - \pi/2$. Ovvero, $x = A\,\text{sen}(\omega t + \phi)$ e $x = A\cos(\omega t + \phi)$ rappresentano lo stesso moto, solo che per esempio il primo è visto a partire dall'istante t_0 e il secondo dall'istante $t_0 + T/4$.

In questo paragrafo abbiamo sempre parlato di moto; però se in un diverso fenomeno fisico si trova una grandezza f che obbedisce a un'equazione con la struttura di (1.13), $\frac{d^2f}{dz^2} + k^2 f = 0$, la soluzione è sempre $f(z) = A\,\text{sen}(kz + \phi)$ cioè f descrive un'oscillazione rispetto alla variabile z, il cui periodo dipende da k. Può trattarsi di oscillazioni elettriche in un circuito o di oscillazioni di pressione in un gas interessato da un fenomeno sonoro, però la base matematica è la stessa. Riprenderemo l'argomento nel capitolo 10 dove trattiamo più in generale l'*oscillatore armonico semplice*, come si chiama un sistema che obbedisce a (1.13).

NOTE

Created by Notein

UNITÀ DI MISURA

senso del moto. L'accelerazione si annulla nel centro di oscillazione e ha valore massimo in modulo ($\omega^2 A$) agli estremi, dove si inverte la velocità; inoltre essa *è sempre proporzionale ed opposta allo spostamento dal centro di oscillazione.*

A parte il valore dell'ampiezza, le tre funzioni $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ mostrano lo stesso andamento temporale: la forma e il periodo sono eguali, c'è solo uno spostamento di una rispetto all'altra lungo l'asse dei tempi. Quest'ultima caratteristica viene indicata dicendo che le funzioni sono sfasate tra di loro. In particolare la velocità è sfasata di $\pi/2$ rispetto allo spostamento (è in *quadratura di fase*), mentre l'accelerazione è sfasata di π sempre rispetto allo spostamento (è in *opposizione di fase*).

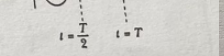


Figura 1.9
Diagramma dello spostamento (*a*), della velocità (*b*) e dell'accelerazione (*c*) di un moto armonico semplice.

Elenchiamo le nuove grandezze introdotte e le loro unità di misura:

ampiezza:	stessa unità di x, metri
periodo:	è un tempo, si esprime in secondi
frequenza:	inverso del tempo, si esprime in s^{-1}; questa unità ha un nome, hertz: $1\ Hz = 1\ s^{-1}$
fase:	argomento del seno o del coseno, dimensionalmente è un angolo e si misura in radianti (rad)
pulsazione:	$2\pi/T$ unità di misura rad/s = rad s^{-1}.

Esempio

Un esempio di moto armonico è la molla.

Massa m di 1 kg attaccata ad una molla di $K = 16\ N/m$. La massa è inizialmente spostata di $0,5\ m$ dalla posizione di equilibrio, $V(0) = 2\ m/s$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{16}{1}} = 4\ rad/s$$

$X(0) = 0,5\ m$

$V(0) = 2\ m/s$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{0,5^2 + \frac{2^2}{4^2}} = 0,7\ m$$

$$tg\,\phi = \frac{\omega x_0}{V_0} \quad \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 1$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}\ rad = \phi$$

al tempo $t = 0$

$$x(t) = A\,sen(\omega t + \phi) = A\,sen(0 + \phi) = 0,7\,sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,49\ m$$

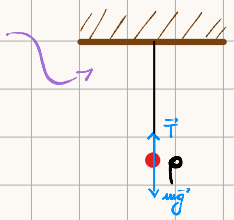
---

11 Pendolo semplice: schematizzazione e equazione del moto oscillatorio. Approssimazione per piccole oscillazioni.

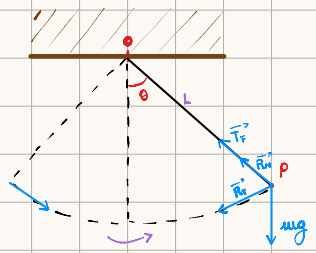
È costituito da un pto. materiale appeso ad un filo inestensibile e di massa trascurabile.

La posizione di equilibrio statico è la posizione verticale.

Se spostiamo P dal pto. di equilibrio, il pto comincia ad oscillare attorno ad esso lungo un arco di circonferenza.



$m\vec{g} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$



L = lunghezza del filo

$$\begin{cases} m\,a_T = -mg\,sen\theta = R_T & \text{forza tg.} \\ m\,a_N = -mg\cos\theta + T = R_N & \text{forza centripeta.} \end{cases}$$

R_T rappresenta una forza di richiamo perché tende a riportare P nel suo punto di equilibrio anche se cambia direzione in ogni punto.

$$a_T = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad a_N = \frac{V^2}{L}$$

Posso scrivere:

$$\begin{cases} m \cdot L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,sen\theta \\ m \cdot \frac{V^2}{L} = T - mg\cos\theta \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\,sen\theta(t) = 0}$$

NOTE IN Created by Notein

Per piccoli valori di θ: sviluppo in serie di Taylor

$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$ ad es. per $\theta < 1°$ l'errore relativo su $\sin\theta$ è $\sim 10^{-3}$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta(t) = 0}$$ Eq. del moto armonico

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

abbiamo trovato che il moto del pendolo è descritto dall'eq. del moto armonico ed è quindi un moto oscillatorio periodico nel limite dell'ampiezza delle oscillazioni abbastanza piccola ($\theta < 10°$)

La legge oraria del moto è $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$ θ_0 e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali

$$S(t) = l\,\theta(t) = \theta_0 l \sin(\omega t + \phi)$$
$$V(t) = \frac{dS(t)}{dt} = l\,\omega_0 \cos(\omega t + \phi)$$

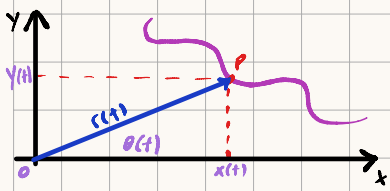
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ (periodo)

$$T_F = mg\cos\theta(t) + m\frac{V^2}{l}$$

è max per $\theta = 0$, che corrisponde alla verticale. Sarà minima nei punti di inversione.

---

12 Moto nel piano: derivata di un vettore in rotazione. Ricavare le espressioni delle componenti tangenziale e normale (centripeta) dell'accelerazione.



Consideriamo il caso generale di moto nel piano in cui la traiettoria del punto materiale sia una linea curva. La posizione del punto P è individuata da 2 coordinate $x(t)$, $Y(t)$.

La posizione del punto P può essere individuata per mezzo del raggio vettore.

$\vec{r}(t)$ = raggio vettore $= x(t)\hat{U}_x + Y(t)\hat{U}_y = (x(t), Y(t))$.

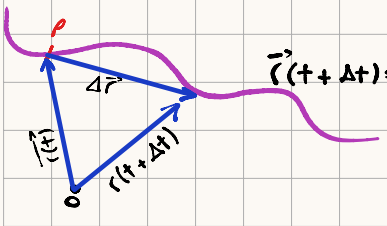
Conoscere il moto del punto P lungo la traiettoria equivale a conoscere $\vec{r}(t)$ in ogni istante.



s = lunghezza traiettoria.

Coordinata curvilinea s lungo la traiettoria

$\frac{ds}{dt}$ → variazione temporale della posizione, rapp. la velocità istantanea lungo la traiettoria



$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}$$

$$\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$ rapporto incrementale

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{t\to 0}\frac{(r(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

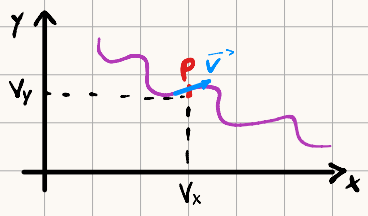
Created by Notein

La velocità vettoriale $\vec{v}$ rapp. la **derivata** del raggio vettore rispetto al tempo.

Al limite $d\vec{r} = ds\,\hat{u}_T$ con $\hat{u}_T$ = versore tg alla traiettoria nel punto P

il modulo di $d\vec{r}$ corrisponde allo spostamento infinitesimo lungo la traiettoria curvilinea. $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_T = v\hat{u}_T$.

La velocità vettoriale $\vec{v}$ individua con la sua direzione e verso, la direzione e verso del moto, con il suo modulo la velocità istantanea lungo la traiettoria.

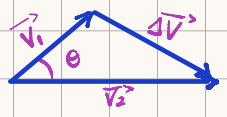


$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y = v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ $\quad tg\theta = \frac{v_y}{v_x}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$



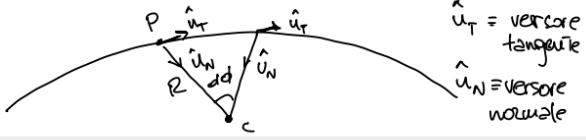
$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\hat{u}_T)$ $\quad \hat{u}_T$ = Versore tg alla traiettoria $\quad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d}{dt}\hat{u}_T = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\hat{u}_N$

($\frac{d}{dt}v\hat{u}_T$: $\hat{u}_T$ // a $\hat{u}_T$; $\frac{d\phi}{dt}\hat{u}_N$: $\hat{u}_N$ $\perp$ a $\hat{u}_T$)

$\vec{a}$ = 2 termini, uno parallelo a $\hat{u}_T$ e l'altro perpendicolare a $\hat{u}_T$

- termine parallelo $\frac{dv}{dt}\hat{u}_T$ rappresenta la variazione in modulo della velocità
- termine perpendicolare $v\frac{d\phi}{dt}\hat{u}_N$ rappresenta la variazione della direzione della velocità

$\frac{d\phi}{dt}$ = velocità angolare con cui $\vec{v}$ sta ruotando



$= \vec{a}_T + \vec{a}_N$

comp. tangenziale — comp. normale o centripeta

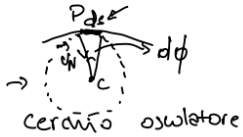
$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$

Se il MOTO è CURVILINEO ma UNIFORME c'è solo $\vec{a}_N$ e $\vec{a}_T = 0$

Se il MOTO è RETTILINEO c'è solo $\vec{a}_T$ e $\vec{a}_N = 0$ poiché $\frac{d\phi}{dt} = 0$

Possiamo esprimere l'arco di traiettoria ds come $ds = Rd\phi$

R ≡ raggio di curvatura

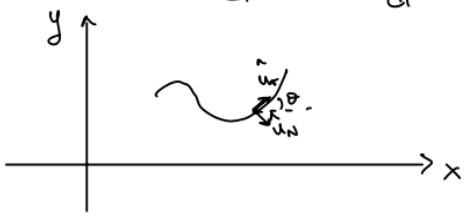




$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$ ($\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{R}$, $\frac{ds}{dt} = v$)

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\cdot\frac{v}{R}\hat{u}_N = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N =$

$\vec{a} = a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y$



$a_x = \frac{dv}{dt}\cos\theta - \frac{v^2}{R}\sin\theta$

$a_y = \frac{dv}{dt}\sin\theta - \frac{v^2}{R}\cos\theta$

Per un versore o un qualunque vettore di modulo costante $\vec{b}(t)$

$\frac{|\Delta\hat{u}_T|}{\Delta t} = \frac{|\Delta\hat{u}_T|}{\Delta\phi}\cdot\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{2\sin\frac{\Delta\phi}{2}}{\Delta\phi}\cdot\frac{1}{\Delta t}\cdot\Delta\phi$

Created by Notein

il modulo di $\vec{f}(t)$ è costante

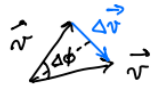
$|\vec{f}(t)|$ = costante $\quad \vec{f}(t)\cdot\vec{f}(t) = f^2(t)$ = costante

$\frac{d(\vec{f}(t)\cdot\vec{f}(t))}{dt} = 0$ deve essere pari a 0 perché' $\vec{f}(t)\cdot\vec{f}(t)$ = costante

$$\frac{d(\vec{f}(t)\cdot\vec{f}(t))}{dt} = \frac{d\vec{f}(t)}{dt}\cdot\vec{f}(t) + \vec{f}(t)\frac{d\vec{f}(t)}{dt} = 2\frac{d\vec{f}(t)}{dt}\cdot\vec{f}(t) = 0$$

ma quindi necessariamente $\frac{d\vec{f}(t)}{dt}$ deve essere perpendicolare a $\vec{f}(t)$.

Ciò sarà quindi valido anche per il versore tangente alla traiettoria $\hat{u}_T$, quindi $\frac{d\hat{u}_T}{dt}$ sarà diretta lungo $\hat{u}_N$, cioè il versore ortogonale a $\hat{u}_T$.



$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta\phi}{2}}{\Delta\phi}\cdot\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}$$

velocità di rotazione di $\hat{u}_T$ (o velocità angolare)

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\hat{u}_N$$

Per un qualsiasi vettore generico che può essere scritto $\vec{v} = v\hat{u}_T \Rightarrow \frac{d(v\hat{u}_T)}{dt} =$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\hat{u}_N$$

Avremmo potuto scrivere

$$\boxed{\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \vec{\omega}\wedge\hat{u}_T}$$

RELAZIONE DI POISSON

dove $\vec{\omega}$ rappresenta la velocità angolare diretta sull'asse attorno a cui ruota il versore $\hat{u}_T$



⊙ orientazione di $\vec{\omega}$

$\vec{\omega}\wedge\hat{u}_T = \omega\hat{u}_N = \frac{d\phi}{dt}\hat{u}_N$

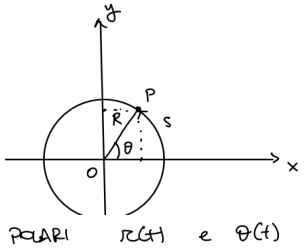
13 Moto circolare: variabili cinematiche angolari e loro relazione con quelle lineari. Ricavare legge oraria nel caso di moto circolare uniformemente accelerato dalle definizioni di accelerazione e velocità angolari.

1 MOTO CIRCOLARE

Un moto circolare è un moto nel piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza.

MOTO CIRCOLARE UNIFORME: la velocità è costante in modulo quindi l'accelerazione tangenziale è nulla, $\vec{a} = \vec{a}_N$

Se invece il modulo della velocità cambia nel tempo, il moto circolare non è uniforme e $\vec{a}_T$ sarà diversa da zero. Quindi in generale ci sarà sia una forza centripeta che una forza tangenziale.



COORDINATE POLARI $R(t)$ e $\theta(t)$
nel nostro caso $R(t) = R$ = costante e $\theta = \theta(t)$

RELAZIONE CON LE COORDINATE CARTESIANE

$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\sin\theta(t) \end{cases}$ R = distanza OP

$\boxed{s(t) = R\theta(t)}$

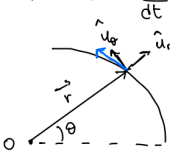
VELOCITÀ ANGOLARE $\boxed{\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}}$ $\frac{rad}{s}$

2 $\omega(t) = \frac{ds(t)}{dt}\cdot\frac{1}{R} = \frac{1}{R}\frac{ds(t)}{dt} = \frac{v}{R}$

Se v = costante ω è costante

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{u}_r}{dt}$ essendo $\vec{r} = r\hat{u}_r$

$\vec{v}$ è espresso nelle 2 componenti:
- la componente radiale, diretta lungo $\hat{u}_r$
- la componente trasversa, diretta ortogonalmente a $\hat{u}_r$ e di modulo $r\frac{d\theta}{dt}$



MOTO CIRCOLARE: la velocità radiale è nulla poiché r = costante $\Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0$

quindi $v = v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = R\omega \Rightarrow \boxed{v = R\omega}$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME: v e ω sono costanti

$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ con $\theta = \theta_0$ per $t = 0$

$s(t) = s_0 + vt$ con $s = s_0$ per $t = 0$

$\begin{cases} x(t) = R\cos(\theta_0 + \omega t) \\ y(t) = R\sin(\theta_0 + \omega t) \end{cases}$ 2 moti armonici di uguale ampiezza e sfasati di $\pi/2$

L'accelerazione, per il moto circolare uniforme, sarà

$a = a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = \omega^2 R$



$\boxed{a_N = \omega^2 R}$

Il MOTO CIRCOLARE è un moto periodico e il periodo vale $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Nel caso di MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME

$a_T = \frac{dv}{dt}$ sarà non nulla poiché v non è costante

oltre all'accelerazione centripeta c'è anche la componente tangenziale dell'accelerazione.
La velocità angolare non sarà costante:

ACCELERAZIONE ANGOLARE
$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$ $\left(\frac{rad}{s^2}\right)$

Se conosciamo $\theta(t)$, deriviamo e troviamo $\omega(t)$ e $\alpha(t)$. Al contrario:

$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t}\alpha(t)\,dt$

$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t}\omega(t)\,dt$

$\alpha\,d\theta = \omega(t)\,d\omega$ e integrando ambo i membri ho:

$\int_{\theta_0}^{\theta}\alpha\,d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega}\omega\,d\omega = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2$

Un caso particolare di MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME è il MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACCELERATO

α = costante $\Rightarrow a_T$ = costante

Integrando α otteniamo:

$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$

$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Created by Notein

4

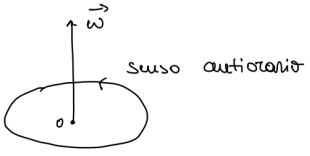
$$a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$$

L'accelerazione totale sarà la somma vettoriale di $\vec{a}_N$ e $\vec{a}_T$

$$\vec{a}_N = \omega^2 R \hat{u}_N \quad e \quad \vec{a}_T = \alpha R \hat{u}_T$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$\omega \to \vec{\omega}$



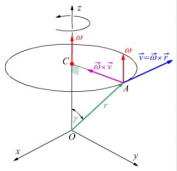
$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ se O coincide con il centro della circonferenza $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

5

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) = \quad (\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt})$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

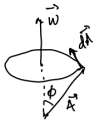
$\frac{d\vec{\omega}}{dt}$: tangent. — $\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$: centripeta



MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$\vec{\alpha}$ è nulla $\vec{a} = \vec{a}_N = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$

In generale un vettore di modulo costante $\vec{A}$



$$\frac{dA}{dt} = |\vec{\omega} \wedge \vec{A}|$$

$$dA = A \sin\phi \, d\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = A \sin\phi \frac{d\phi}{dt} =$$

$$= \omega A \sin\phi = |\vec{\omega} \wedge \vec{A}|$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

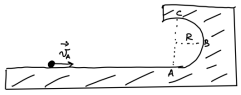
$$ds = R \, d\theta$$

$$d\theta = \frac{ds}{R}$$

14

Guida circolare: descrizione delle forze e condizione di non distacco.

GUIDA CIRCOLARE

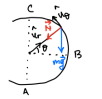


Un corpo di massa $m = 200$ kg entra con velocità $v_A = 20$ m/s in una guida circolare liscia di raggio $R = 5$ m. Calcolare:

1. la velocità nei punti B e C
2. la reazione vincolare della guida nei punti A, B e C
3. il valore minimo di v_A affinché il corpo arrivi nel punto C mantenendo il contatto con la guida.

Forze che agiscono sul punto materiale:

a. forza peso $m\vec{g}$ diretta verticalmente $P = mg$
b. reazione vincolare $\vec{N} = -N\hat{u}_r$ con $\hat{u}_r \equiv$ versore radiale



In ogni punto la forza totale sarà la somma della forza peso e della reazione vincolare $\vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$

La guida forza il punto materiale a seguire una traiettoria circolare dunque $\vec{F}$ è la forza totale per un moto circolare.

$$W_N = \int \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$$

$\vec{N}$ è sempre diretta perpendicolarmente alla spostamento infinitesimo $d\vec{r}$.

Energia meccanica totale $E^m = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$

$$\Delta E_k = \underbrace{W_{peso}}_{-\Delta E_p} + \underbrace{W_N}_{0} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_k = -\Delta E_p \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k^B - E_k^A = -(E_p^B - E_p^A) \quad \Rightarrow \quad E_k^B + E_p^B = E_k^A + E_p^A$$

Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica totale nei punti A e B: troviamo v_B

$$E_A^m = E_B^m \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR \quad (h_B = R)$$

$$v_B^2 = v_A^2 - 2gR \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gR}$$

con i nostri valori numerici $v_B = \sqrt{(20\,m/s)^2 - 2 \cdot 9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot 5m} = 17.4$ m/s

Per i punti A e C: $E_m^A = E_m^C$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg2R$$

$$v_C = \sqrt{v_A^2 - 4gR}$$

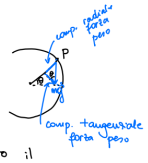
$$v_C = \sqrt{(20\,m/s)^2 - 4 \cdot 9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot 5m} = 14.3 \text{ m/s}$$

2. Calcoliamo la reazione vincolare:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$$

$$\vec{F} = F_r \hat{u}_r + F_\theta \hat{u}_\theta$$

$$\begin{cases} F_r = -N - mg\sin\theta \\ F_\theta = -mg\cos\theta \end{cases}$$



L'accelerazione a cui è soggetto il punto materiale sarà:

$\vec{a} = a_r \hat{u}_r + a_\theta \hat{u}_\theta$ e il moto è CIRCOLARE

La componente radiale di $\vec{a}$ sarà pari a $a_r = -\frac{v^2}{R}$ (c'è il segno meno perché è un'accelerazione centripeta quindi opposta a $\hat{u}_r$)

Per la 2ª legge della dinamica possiamo scrivere:

$$\begin{cases} F_r = ma_r \\ F_\theta = ma_\theta \end{cases}$$

per la componente radiale abbiamo:

$$F_r = ma_r = -m\frac{v^2}{R} = -N - mg\sin\theta$$

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg\sin\theta = m\left(\frac{v^2}{R} - g\sin\theta\right)$$

in A: $\begin{cases} \theta_A = -\frac{\pi}{2}, & v = v_A \\ N = m\frac{v_A^2}{R} + mg \end{cases}$

Numericamente: $N = 200\,kg\left[(20\,\frac{m}{s})^2 \cdot \frac{1}{5m} + 9.81\,m/s^2\right] =$

$= 17960$ N (Newton)

in B: $\begin{cases} \theta_B, & v = v_B \\ N = m\frac{v_B^2}{R} \end{cases}$

Numericamente $N = 200\,kg \cdot (17.4\,\frac{m}{s})^2 \cdot \frac{1}{5m} = 12110$ N

in C: $\begin{cases} \theta_C = +\pi/2, & v = v_C \\ N = m\frac{v_C^2}{R} - mg \end{cases}$

$$N = 200\,kg\left[(14.3\,\frac{m}{s})^2 \cdot \frac{1}{5m} - 9.81\,m/s^2\right] = 62.19 \text{ N}$$

3. La condizione che assicura che il corpo sia attaccato alla guida implica che

$$N(\theta) = m\left(\frac{v^2}{R} - g\sin\theta\right) > 0$$

Per trovare v_{min} impongo $N(\theta) = 0$ per cui

$$m\frac{v_{min}^2}{R} - mg\sin\theta = 0 \quad \text{nel punto C}$$

$$\frac{m v_{min(C)}^2}{R} - mg\sin\theta_C = 0$$

$$\theta_C = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{min(C)}^2}{R} - g = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{min(C)} = \sqrt{gR}}$$

Dalla conservazione dell'energia troviamo $v_{min(A)}$:

$$\frac{1}{2}mv_{min(A)}^2 = \frac{1}{2}mv_{min(C)}^2 + mg \cdot 2R$$

$$\Rightarrow \quad v_{min(A)}^2 = v_{min(C)}^2 + 4gR$$

$$v_{min(A)} = \sqrt{\underbrace{v_{min(C)}^2}_{gR} + 4gR} = \sqrt{gR + 4gR} = \sqrt{5gR}$$

$$v_{min(A)} = \sqrt{5 \cdot 9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot 5m} = 15.7 \text{ m/s}$$

Guida circolare: condizioni dinamiche e condizione di non distacco.

La componente della forza peso tangenziale alla traiettoria (Psenδ) è una forza resistente per tutto il tratto che va da A a C. Le componenti lungo la direzione del raggio della forza peso e della reazione vincolare non sono costanti perché dipendenti dal valore dell'angolo. Scriviamo ora il bilancio energetico quando il punto materiale si trova in una generica posizione sulla guida circolare ad un'altezza h rispetto al piano orizzontale che si raccorda con la guida in A; si prenda come zero per l'energia potenziale il piano orizzontale

$$E_{mi} = E_{mf} \to \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \to v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

La velocità del generico stato finale dipende solo dall'altezza alla quale si trova il punto materiale.

Il punto C è il punto più critico: la forza peso va a sommarsi con la componente normale alla reazione vincolare:

$$N_C + mg = m\frac{v^2}{R}$$

$$v_C = \sqrt{v_0^2 - 4Rg} \to N_C = m\frac{v_0^2}{R} - 5mg$$

Per trovare la velocità minima v_0 si deve porre nulla la componente la componente normale. Infatti, la condizione sul vincolo impone che $N_C \geq 0$ quindi, la condizione minima è quella che sia ha ponendo $N_C = 0$:

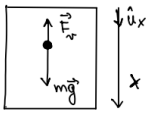
$$N_C = m\frac{v_{0min}^2}{R} - 5mg = 0 \to v_0 = \sqrt{5Rg}$$

$F_{centripeta} \geq F_{peso}$

NOTE Created by Notein

15 Forza di attrito viscoso. Soluzione dell'equazione per la velocità e per la posizione e studio del suo andamento nel tempo.

– ATTRITO VISCOSO –



$$\vec{F}_v = -\beta\vec{v} = -\beta v\hat{u}_x$$

β = costante $= mk$ con

m = massa del corpo in movimento

k = parametro che dipende sia dalla forma del corpo sia dalla viscosità del mezzo in cui esso si muove

$$\vec{F}_v = -mkv\hat{u}_x = -mkv\hat{u}_v$$

↑ versore velocità

Le dimensioni di k sono:

$$[k] = \frac{[F]}{[M][v]} = \frac{[M][L][T]^{-2}}{[M][L][T]^{-1}} = [T]^{-1}$$

Unità di misura di k: s^{-1}

Le dimensioni di β sono:

$$[\beta] = [M][T^{-1}]$$ Unità di misura: kg/s

Per il 2° principio della dinamica:

$$\vec{F}_{TOT} = m\vec{a} \quad \text{cioè} \quad \vec{P} + \vec{F}_v = m\vec{a}$$

$$mg - mkv = ma$$

$$g - kv = a \Rightarrow g - kv = \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + kv - g = 0}$$ EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER v

Condizioni iniziali $t=0$ $v=0$

Separazione di variabili:

$$\frac{dv}{g-kv} = dt \Rightarrow \int_0^v \frac{dv'}{g-kv'} = \int_0^t dt'$$

$$t = -\frac{1}{k}\ln(g-kv)\Big|_0^v = -\frac{1}{k}\ln(g-kv) + \frac{1}{k}\ln(g)$$

$$= -\frac{1}{k}\left[\ln(g-kv) - \ln(g)\right] =$$

$$= -\frac{1}{k}\left[\ln\left(\frac{g-kv}{g}\right)\right]$$

È una forza che agisce su un oggetto in movimento attraverso un fluido e si oppone al suo moto.

Moltiplico per $-k$:

$$-kt = \ln\left(\frac{g-kv}{g}\right)$$

$$e^{-kt} = \frac{g-kv}{g}$$

$$ge^{-kt} - g = -kv$$

$$\boxed{v(t) = \frac{g}{k}\left(1-e^{-kt}\right)}$$ SOLUZIONE PER LA VELOCITÀ

$$v(t=0) = \frac{g}{k}(1-1) = 0$$

$$v(t\to\infty) = \frac{g}{k}$$ poiché $e^{-\infty} = 0$

Definiamo la costante di tempo $\boxed{\tau = \frac{1}{k}}$ [ha le dimensioni di un tempo poiché k ha le dimensioni di un tempo^{-1}]

e riscriviamo

$$\boxed{v(t) = \frac{g}{k}\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$

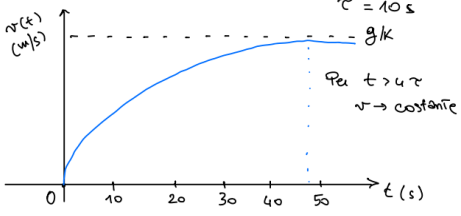
Per $t = n\tau$ sufficiente grande la velocità tende al valore limite costante $\frac{g}{k}$.

Pertanto il moto sarà RETTILINEO UNIFORME, pertanto la risultante delle forze sarà nulla:

$$v(t\to\infty) = \frac{g}{k} \Rightarrow \vec{F}_v + \vec{P} = 0$$

$$-mkv + mg = 0 \Rightarrow v = \frac{g}{k}$$

L'andamento della velocità in funzione del tempo sarà:



Per conoscere il moto del punto materiale in funzione del tempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v(t)\,dt$$

Integrando:

$$\int_0^x dx' = \int_0^t v(t')\,dt'$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{g}{k}\left(1-e^{-kt'}\right)dt' = \int_0^t \frac{g}{k}\left(1-e^{-t'/\tau}\right)dt'$$

$$= \int_0^t \frac{g}{k}\,dt' - \int_0^t e^{-t/\tau}\,dt' =$$

$$= \frac{g}{k}t - \frac{g}{k}\left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^t =$$

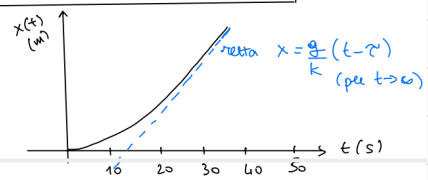
$$= \frac{g}{k}t - \frac{g}{k}\left(-\tau e^{-t/\tau} + \tau\right) =$$

$$= \frac{g}{k}t - \frac{g}{k}\tau + \frac{g}{k}\tau e^{-t/\tau} =$$

$$= \frac{g}{k}\left[t - \tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)\right]$$

quindi

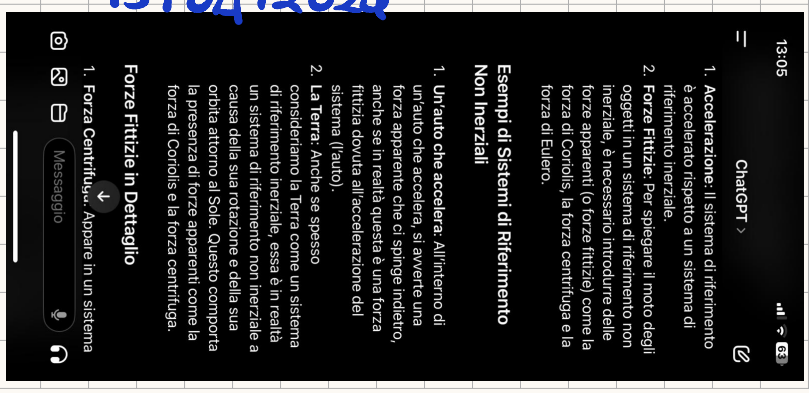
$$\boxed{x(t) = \frac{g}{k}\left[t - \tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)\right]}$$



$$x(t\to\infty) = \frac{g}{k}\left[t-\tau\right]$$

16 Moti relativi: sistemi di riferimento inerziali, principio di relatività e trasformazioni di Galileo. Sistemi di riferimento non inerziali, accelerazione di trascinamento e forze apparenti per sistemi non inerziali in moto traslatorio e in moto generico.

15/04/2024



Pag 113

STUDIARE.

Created by Notein

17 Sistemi di punti materiali. Forze interne ed esterne. Definizione di centro di massa. Dimostrazione teorema del centro di massa.

N PUNTI MATERIALI

Consideriamo un sistema di n punti materiali ($n>1$) interagenti tra loro e con il resto dell'universo.

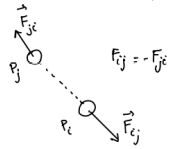
Per ogni punto i-esimo di questo sistema

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

$\vec{F}_i^{(e)}$ = forza risultante dall'esterno del sistema

$\vec{F}_i^{(I)}$ = forza risultante esercitata dagli altri $n-1$ punti del sistema

Per quanto riguarda le forze interne, esiste la 3a legge di Newton (o principio di azione e reazione)



$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ — le 2 forze hanno stessa direzione e modulo ma verso opposto

Le forze possono essere attrattive o repulsive ma in generale la risultante $\vec{F}_i^{(I)}$ di tutte le FORZE INTERNE agenti sull'intero sistema è nulla (nota: su ciascun punto è $\neq 0$ ma la somma è nulla)

$$\vec{R}^{(I)} = \sum_i \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i,j} \vec{F}_{i,j} = 0 \quad i \neq j$$

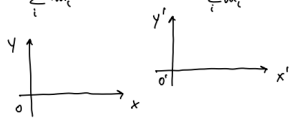
CENTRO DI MASSA

Quel punto geometrico la cui posizione è individuata da $\vec{r}_{CM}$ definito come:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \qquad i = 1, \dots, n \text{ con } n = \text{numero di punti del sistema}$$

$$= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \quad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$



$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{OO'} \qquad \vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{O'O}$$

La posizione del CM sarà

$$\vec{r}_{CM}' = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\vec{r}_i + \vec{OO'})}{\sum_i m_i} = \underbrace{\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}}_{\vec{r}_{CM}} + \vec{OO'}$$

$$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM}' + \vec{OO'}$$

Se i punti del sistema sono in movimento, anche la posizione del centro di massa varia nel tempo e quindi possiamo definire la velocità del centro di massa:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i m_i}$$

$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ = quantità di moto totale del sistema

$M = \sum_i m_i$ = massa totale del sistema

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}}{M}$$

$\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$ cioè la quantità di moto totale del sistema coincide con la quantità di moto del CENTRO DI MASSA e quindi possiamo considerare quest'ultimo come un punto materiale che ha massa pari a $M = \sum_i m_i$ posizione pari a $\vec{r}_{CM}$, velocità $\vec{v}_{CM}$ e $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_{CM}$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i (\vec{F}_i^{(e)} + \underbrace{\vec{F}_i^{(I)}}_{\sum_i = 0}) = M\vec{a}_{CM}$$

$$\boxed{\vec{R}^{(e)} = M\vec{a}_{CM}}$$

risultante di tutte le forze esterne agenti sull'intero sistema di punti

TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA

$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ somma delle masse dei singoli punti del sistema

$\vec{a}_{CM}$ = accelerazione del CM

Il CM si muove come un singolo punto materiale avente $M = \sum_i m_i$ e sul quale agisce la risultante di tutte le forze esterne.

$$\vec{R}^{(e)} = M\vec{a}_{CM} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_{CM}) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

($\vec{P}$: quantità di moto totale del sistema)

Consideriamo un sistema di n punti materiali ISOLATO, cioè non soggetto a forze esterne oppure tale che la risultante $\vec{R}^{(e)}$ delle forze esterne sia nulla, allora deve essere

$\vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \text{costante} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = \text{costante}} \quad \left(\frac{d\vec{P}}{dt} = 0\right)$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO PER UN SISTEMA DI n PUNTI MATERIALI

(Il centro di massa quindi rimarrà o in quiete oppure si muoverà di moto rettilineo uniforme).

$\vec{R}^{(e)} = 0$

quantità di moto $m_i\vec{v}_i$ varia nel tempo per ciascun punto materiale del sistema ma $\sum_i m_i\vec{v}_i = \text{costante}$

Deriviamo rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0 \quad \text{quindi}$$

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0 \iff \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

le 2 forze esercitate tra i 2 punti sono uguali in modulo ma di verso opposto

Consideriamo il caso più semplice di 2 punti materiali isolati:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{costante}$$

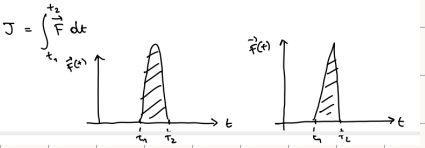
18 Fenomeni d'urto. Teorema dell'impulso e forze impulsive. Conservazione della quantità di moto del sistema. Tipi di urto tra punti materiali e grandezze conservate.

– URTI TRA 2 PUNTI MATERIALI –

1

Si definisce URTO tra 2 punti materiali la situazione in cui i punti vengono a contatto per un tempo molto breve, che può essere trascurato rispetto al tempo di osservazione del sistema. Negli urti possono svilupparsi forze molto intense sebbene in un breve intervallo di tempo: FORZE IMPULSIVE

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$$



2

$\Delta t = t_2 - t_1$ molto piccolo

Le forze impulsive durante l'urto sono forze interne al sistema pertanto si conserva la QUANTITÀ DI MOTO TOTALE

$$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{finale} \iff \boxed{m_1\vec{v}_1^{(i)} + m_2\vec{v}_2^{(i)} = m_1\vec{v}_1^{(f)} + m_2\vec{v}_2^{(f)}}$$

$\vec{P} = (m_1+m_2)\vec{v}_{CM} = \text{costante}$ nel tempo

La quantità di moto del centro di massa rimane costante nel tempo.

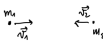
$$m_1\vec{v}_1^{(f)} - m_1\vec{v}_1^{(i)} = \vec{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2,1}\,dt$$ ← IMPULSO dovuto alla forza $\vec{F}_{2,1}$ che il punto 2 esercita sul punto 1

$$m_2\vec{v}_2^{(f)} - m_2\vec{v}_2^{(i)} = \vec{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{1,2}\,dt$$ ← IMPULSO dovuto alla forza $\vec{F}_{1,2}$ che il punto 1 esercita sul punto 2

$\vec{J}_{1,2} = -\vec{J}_{2,1}$ e $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$

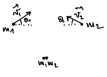
3

- URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO dopo l'urto i 2 punti rimangono attaccati
- URTO PARZIALMENTE ANELASTICO dopo l'urto i 2 punti sono separati
- URTO COMPLETAMENTE ELASTICO si conserva anche l'energia



Ricordiamo che $\vec{J} = \Delta\vec{p}$

- URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO



Conservazione della quantità di moto:

$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}'$ quindi $\vec{v}' = \vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$

$$E_{in} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$E_{fin} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{CM}^2 < E_{in}$$

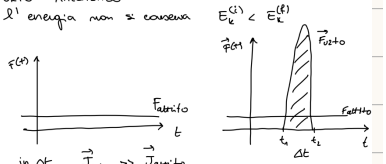
NOTE Created by Notein

Nell'urto elastico si conservano:
- quantità di moto totale $\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin}$
- energia cinetica $E_k^{(i)} = E_k^{(f)}$

$m_1\vec{v}_1^{(i)} + m_2\vec{v}_2^{(i)} = m_1\vec{v}_1^{(f)} + m_2\vec{v}_2^{(f)}$

$\frac{1}{2}m_1 v_1^{(i)2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{(i)2} = \frac{1}{2}m_1 v_1^{(f)2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{(f)2}$

- URTO ANELASTICO -
l'energia non si conserva $E_k^{(i)} < E_k^{(f)}$



in Δt $\vec{J}_{urto} >> \vec{J}_{attrito}$
possiamo considerare il sistema isolato

- URTI TRA PUNTO MATERIALE E CORPO RIGIDO O TRA CORPI RIGIDI -

- L'energia cinetica del sistema rimane costante solo quando l'urto è ELASTICO
- Si conserva la quantità di moto totale se agiscono solo forze interne oppure se quelle esterne non sono di tipo impulsivo
- Si conserva il momento angolare se il momento delle forze esterne è nullo rispetto ad un certo polo.

Se il corpo rigido è vincolato $\vec{R}^{(e)} \neq 0, \vec{M}^{(e)}_{\vec{v}} \neq 0$

$\Delta\vec{P} = \vec{J} = \int \vec{R}\,dt$ e $\Delta\vec{L} = \int \vec{M}\,dt$

Tra tipi diversi di urto:

Dopo l'urto i 2 punti, che vengono a formare un unico corpo di massa m_1+m_2, si muoveranno con una velocità pari a quella del CM prima dell'urto.

3 princ.

$J_1 = F_{2,1}\,\Delta t$ $\quad F_{2,1} = -F_{1,2}$

$J_2 = -F_{1,2}\,\Delta t$ $\quad J_1 + J_2 = F_{2,1} + F_{1,2} = 0$

$J_1 = -J_2$

19 Corpi rigidi: densità e posizione del centro di massa. Dimostrazione teorema del centro di massa (prima equazione cardinale).

- DINAMICA DEL CORPO RIGIDO -

CORPO RIGIDO: insieme di n punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti i e j rimane fissa

Questo insieme di punti può essere discreto o continuo, in quest'ultimo caso il singolo punto è rappresentato dall'elemento infinitesimo di volume dV che contiene la massa dm_i

Per calcolare la distribuzione della massa all'interno del corpo rigido:

DENSITÀ $\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho\,dV$

In generale il corpo esteso non è OMOGENEO quindi $\rho = \rho(x,y,z)$
OMOGENEO: ρ = costante

$m = \int dm = \int_V \rho\,dV$ integrale su tutto il volume del corpo

Se il corpo è omogeneo $m = \rho \int_V dV = \rho V$

$dV = dx\,dy\,dz \Rightarrow \int_V$ integrale triplo

$\sigma_s \equiv$ densità superficiale $= \frac{dm}{dS} \Rightarrow m = \int_S \sigma_s\,dS$

$\lambda_\ell \equiv$ densità lineare $= \frac{dm}{d\ell} \Rightarrow m = \int_\ell \lambda_\ell\,d\ell$

Unità di misura: ρ kg/m³ $\quad \sigma$ kg/m² $\quad \lambda$ kg/m

La posizione dei punti che costituiscono il corpo rigido sarà individuata dal RAGGIO VETTORE $\vec{r}$.
La posizione del CM:

$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}\,\rho\,dV}{m}$

Se il corpo è OMOGENEO $\vec{r}_{CM} = \frac{\rho\int \vec{r}\,dV}{m} = \frac{\int \vec{r}\,dV}{V}$

20 Momento di un vettore. Teorema del momento angolare. Conservazione del momento angolare.

- MOMENTO ANGOLARE di un SISTEMA di PUNTI MATERIALI -

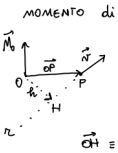
MOMENTO ANGOLARE TOTALE

$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i\vec{v}_i$

- MOMENTO DI UN VETTORE -
Sia $\vec{v}$ un vettore generico applicato nel punto P e un altro generico punto che chiamiamo O:

MOMENTO DEL VETTORE $\vec{v}$ rispetto al punto O, detto POLO,

$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{v}$ MOMENTO di $\vec{v}$ rispetto ad O



$|\vec{M}_O| = |\vec{OP}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta$

$\theta \equiv$ angolo formato da $\vec{OP}$ e $\vec{v}$

$\vec{OH} \equiv$ vettore da O e perpendicolare alla retta r individuata dalla direzione di $\vec{v}$

Per qualunque punto P su r $\vec{M}_O$ è lo stesso
Il momento cambia se cambia la scelta del polo



$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{v}$

$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$ $\quad \vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{v} = (\vec{OO'} + \vec{O'P}) \wedge \vec{v} =$

$= \vec{OO'} \wedge \vec{v} + \underbrace{\vec{O'P} \wedge \vec{v}}_{\vec{M}_{O'}}$

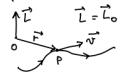
$\vec{M}_O = \vec{OO'} \wedge \vec{v} + \vec{M}_{O'}$

Entrante nel foglio ⊗
Uscente dal foglio ⊙

- MOMENTO ANGOLARE E MOMENTO DELLA FORZA -

Il momento angolare (o della quantità di moto) è il momento del vettore quantità di moto:

$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$



$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \vec{OO'} \wedge m\vec{v}$

In generale $\vec{L}$ è dipendente dal tempo: $\vec{L}(t)$

Per esempio nel moto curvilineo:

$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m(\vec{v}_{radiale} + \vec{v}_{tangenziale}) =$

$= \vec{r} \wedge m\vec{v}_{tangenziale}$ perché $\vec{v}_{radiale}$ è diretta secondo $\vec{r}$ ($\vec{r} \wedge \vec{v}_{radiale} = 0$)

Se il polo O sta nel piano in cui avviene il moto, $\vec{L}$ sarà perpendicolare a questo piano e il suo modulo sarà:

$L = m\,r\,v_{tangenziale}$ $\quad (\sin\theta = \sin 90° = 1)$

quindi $L = mr\cdot\omega r = mr^2\frac{d\theta}{dt}$ e r = raggio circonferenza

(ω = velocità angolare $\omega = \frac{d\theta}{dt}$)

Unità di misura: N·m|s

MOMENTO DELLA FORZA
È il momento del vettore forza $\vec{F}$

$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F}$

$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{OO'} \wedge \vec{F}$

Se ci sono più forze che agiscono il momento totale

$\vec{M} = \vec{r} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n) = \vec{r} \wedge \vec{R}$ con $\vec{R}$ = risultante delle forze

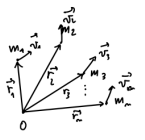
Il momento totale è pari al momento calcolato per il vettore risultante delle forze.

Unità di misura: N·m

NOTE Created by Notein

ogni addendo è un prodotto vett. di

MOMENTO ANGOLARE per un sistema di punti materiali:



$i = 1, \dots, n$

Il momento angolare totale

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

Se O non coincide con l'origine degli assi anche O non è fisso ma si muove.

Derivo rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_0$ dove $\vec{v}_i$ = velocità di ciascun punto del sistema i

$\vec{v}_0$ = velocità di O

NOTA:

2 punti P_1 e P_2 con $\vec{r}_1 = \vec{OP_1}$, $\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$; $\vec{r}_i = \vec{OP_i}$, $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

e $\vec{P_1P_i} = \vec{r}_i - \vec{r}_1 = \vec{r}_{i,1}$

Considero un secondo sistema di rif. con origine O' che coincide con la posizione di P_1 e considero che gli assi del nuovo sistema non ruotino rispetto al sistema centrato in O ($\omega = 0$)

La velocità di P_2 vista nel sistema in cui l'origine è O' (cioè la posizione di P_1) sarà:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2,1} + \vec{v}_1 \quad \text{con} \quad \vec{v}_1 = \text{velocità di trascinamento di O' quindi di } P_1$$

$$\boxed{\vec{v}_{2,1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1}$$

$$\frac{d\vec{r}_{2,1}}{dt} = \frac{d\vec{r}_2}{dt} - \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_{2,1}$$

nel mostro caso $\vec{v}_i$ sarebbe ciascun punto i e $\vec{v}_2$ la velocità di O.

Stiamo considerando un sistema di riferimento inerziale

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$$

Segue:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_0) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \wedge (\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}) =$$

$$= \sum_i \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i - \sum_i \vec{v}_0 \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \wedge (\vec{F}_i^{(e)}) + \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(i)} =$$

($\sum_i \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i = 0$)

$$= -\sum_i \vec{v}_0 \wedge m_i \vec{v}_i + \vec{M}^{(e)} + \vec{M}^{(i)}$$

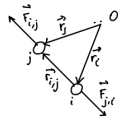
($\vec{M}^{(i)}$ = momento totale forze interne; $\vec{M}^{(e)}$ = momento totale forze esterne)

$$-\vec{v}_0 \wedge \sum_i m_i \vec{v}_i = -\vec{v}_0 \wedge m\vec{v}_{CM}$$

$$= -\vec{v}_0 \wedge m\vec{v}_{CM} + \vec{M}^{(e)} + \vec{M}^{(i)}$$

Vogliamo ora dimostrare che $\vec{M}^{(i)} = 0$

Consideriamo 2 punti del sistema:



Le forze interne sono $\vec{F}_{i,j}$ e $\vec{F}_{j,i}$

$$\vec{M}_{i,j}^{(i)} = \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{i,j} + \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{j,i} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \wedge \vec{F}_{i,j} = \vec{r}_{i,j} \wedge \vec{F}_{i,j}$$

poiché $\vec{r}_{i,j}$ è parallelo a $\vec{F}_{i,j}$ e $\vec{F}_{j,i}$ il prodotto vettoriale sarà nullo.

$$\vec{M}^{(i)} = \sum_i \sum_j \vec{M}_{i,j} = 0$$ sempre nullo e non dipende dalla scelta di O

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)} - \vec{v}_0 \wedge m\vec{v}_{CM}}$$ 2ª eq. cardinale oppure TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

Il termine $\vec{v}_0 \wedge m\vec{v}_{CM}$ è nullo in questi casi:

- il polo O è fisso quindi $\vec{v}_0 = 0$
- il polo O coincide con il CM per cui $\vec{v}_0 = \vec{v}_{CM}$
- il CM è in quiete quindi $\vec{v}_{CM} = 0$
- $\vec{v}_0$ è parallelo a $\vec{v}_{CM}$

In questi casi: $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)}}$ ←

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

In una situazione in cui $\vec{v}_0 \wedge m\vec{v}_{CM} = 0$, se il momento totale delle forze esterne è nullo, il MOMENTO ANGOLARE si CONSERVA, cioè resta costante nel tempo.

Ciò si verifica se:

- Non ci sono forze esterne $\vec{R}^{(e)} = 0$ quindi si conserva sia $\vec{L}$ che $\vec{P}$ (quantità di moto).
- Il momento $\vec{M}^{(e)}$ è nullo rispetto a un polo scelto O anche in presenza di forze esterne.

1ª equazione cardinale $\vec{R}^{(e)} = m\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ traslazionale del CM

2ª equazione cardinale $\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ rotazioni attorno al CM

ENERGIA CINETICA

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = (\vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i) + (\vec{F}_i^{(i)} \cdot d\vec{r}_i) = dW^{(e)} + dW^{(i)}$$

($dW^{(e)}$: lavoro dato alle forze esterne; $dW^{(i)}$: lavoro dato alle forze interne)

$dW^{(i)} = ?$

Per 2 punti i e j:

$$\vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_j + \vec{F}_{j,i} \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_{i,j} \cdot (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) = \vec{F}_{i,j} \cdot d(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

($\vec{r}_j - \vec{r}_i = \vec{r}_{j,i}$ = distanza fra i punti)

$$\sum_i \sum_j \neq 0$$

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i \vec{v}_i \, d\vec{v}_i$$

Integro e somo:

$$W = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = E_{k,B} - E_{k,A}$$

$$W = W^{(e)} + W^{(i)} = \Delta E_k$$ TEOREMA ENERGIA SISTEMA DI PUNTI

Se le forze interne ed esterne sono conservative $W = \Delta E_k = -\Delta E_p$ quindi

$$\boxed{(E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B = \text{costante}}$$ CONS. ENERGIA MECCANICA

altrimenti

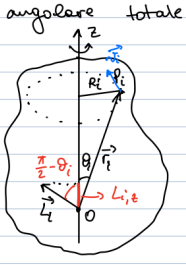
$$\boxed{(E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = W_{mc}}$$

21 Momento angolare nei corpi rigidi: definizione del momento d'inerzia. Illustrare con un esempio il calcolo del momento d'inerzia di un corpo rigido composto da più corpi di geometria semplice.

23 Componenti del momento angolare parallela e perpendicolare all'asse di rotazione e loro significato fisico. Illustrare con un esempio a scelta.

1

Vediamo come calcolare il momento angolare totale di un corpo rigido.



Ciascun punto P_i ruota attorno all'asse z e descrive una circonferenza che giace su un piano ortogonale all'asse di rotazione

La velocità di P_i sarà $v_i = \omega R_i$ e l'accelerazione ai con le sue due componenti:

- componente normale o radiale $a_n = \omega^2 R_i$
- componente tangenziale $a_t = \alpha R_i = \frac{d\omega}{dt} R_i$ accelerazione

2

La relazione tra $\vec{R}_i$ e $\vec{r}_i$ è $\boxed{R_i = r_i \sin\theta_i}$

Il momento angolare di P_i rispetto al polo O sull'asse di rotazione:

$$\boxed{\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i}$$

$\vec{L}_i$ è ortogonale al piano individuato da $\vec{r}_i$ e $\vec{v}_i$ e forma un angolo $\frac{\pi}{2} - \theta_i$ con l'asse z.

Il suo modulo vale: $L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega$ ($v_i = R_i \omega$)

La proiezione di L_i lungo l'asse z sarà:

$$L_{i,z} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin\theta_i = m_i r_i R_i \omega \sin\theta_i =$$

($L_i = m_i r_i R_i \omega$; $\sin\theta_i = \frac{R_i}{r_i}$)

$$= m_i R_i^2 \omega$$

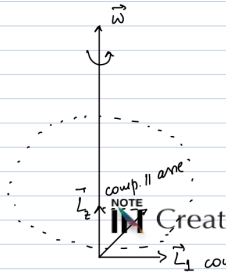
$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \quad \text{e} \quad \vec{L}_z = \vec{L}_{i,z}$$

3

$$\boxed{L_z = I_z \omega}$$

La componente del momento angolare rispetto all'asse di rotazione z è proporzionale alla velocità angolare $\vec{\omega}$ e dipende da essa tramite il MOMENTO DI INERZIA I_z

21



Quando il corpo non è simmetrico rispetto all'asse di rotazione

NOTE

Created by Notem

= α accelerazione angolare

Vediamo come calcolare il momento angolare:
$\vec{w}$ è parallelo all'asse di rotazione

ϑ_i è l'angolo formato da $\vec{r}_i$ con l'asse z di rotazione

L'angolo formato da $\vec{v}_i$ (tangente alla traiettoria circolare) ed $\vec{r}_i$ è di $\pi/2$



PRECESSIONE UNIFORME w = costante 4

$L_z = 2m(r\sin\theta)^2 w = 2mR^2 w$

$L_\perp = 2mr R\cos\theta\, w$

$M^{(E)} = L_\perp w = 2mrR\cos\theta w^2$ variabile in direzione

Coppia di braccio $2r\cos\theta$

Quando le masse sono distribuite in modo che $\vec{L}$ e $\vec{w}$ non sono paralleli, esiste un momento esterno non nullo che è responsabile della variazione nel tempo del momento angolare.

Se invece $\vec{L} = \vec{L}_z$ in generale:

$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\vec{w}) = I_z\frac{d\vec{w}}{dt} = I_z\vec{\alpha}$

$\boxed{\vec{M}^{(E)} = I_z\vec{\alpha}}$ $\vec{\alpha}$ = accelerazione angolare

EQUAZIONE DEL MOTO DI ROTAZIONE

Calcolando $\vec{M}$ ricavo $\vec{\alpha}$ e poi posso ricavare la legge oraria, conoscendo le condizioni iniziali:

dato $\alpha(t)$ ricavo

$w(t) = w_0 + \int_0^t \alpha(t)\,dt$ e anche

$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_0^t w(t)\,dt$

Nel caso in cui $M^{(E)} = 0$ e' nulla la sua accelerazione angolare:
il corpo rigido o è in quiete oppure si muove di moto circolare uniforme

$\alpha = 0$ $w = w_0 = \text{costante}$ $\vartheta = \vartheta_0 + w_0 t$

NOTA: Se l'asse di rotazione z è anche un ASSE DI SIMMETRIA del corpo, allora le componenti $\vec{L}_{i,\perp}$ di $\vec{L}$ (componente normale rispetto all'asse) si annullano a due a due perché per ogni punto i c'è un punto j simmetrico tali che $\vec{L}_{i,\perp} + \vec{L}_{j,\perp} = 0$. In questo caso $\boxed{\vec{L} = \vec{L}_z}$

mentre in generale, se l'asse di rotazione non è un asse di simmetria avremo entrambe le componenti di $\vec{L}$ e quindi $\vec{L}$ non è parallelo all'asse di rotazione

$L_z = \sum_i L_{i,z} = \underbrace{\left(\sum_i m_i R_i^2\right)}_{I_z} w$

$I_z \equiv$ momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione $z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$

I_z dipende sia dalle masse m_i che dalla loro posizione rispetto all'asse di rotazione specificato (in questo caso l'asse z).

$\boxed{L_{i,\perp} = L_i\cos\vartheta_i = m_i r_i R_i w\cos\vartheta_i}$

Se l'asse di rotazione è asse di simmetria

$\vec{L} = \vec{L}_z = I_z\vec{w}$ e $\vec{L}_\perp = 0$

ovvero $\vec{L}$ intorno a $\vec{w}$

il moto viene chiamato MOTO DI PRECESSIONE (uniforme se $\vec{w}$ = costante).

$\boxed{\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{w}\wedge\vec{L}}$

$d\vec{L}$ è perpendicolare a $\vec{L}$, e quindi è parallelo a $\vec{M}$

$M = \frac{dL}{dt} = L_\perp\frac{d\phi}{dt} = L_\perp w$

Nel caso in cui $M^{(E)}$ = costante il corpo si muove di moto circolare uniformemente accelerato 5

α = costante $w = w_0 + \alpha t$ $\vartheta = \vartheta_0 + w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Nel caso generico M generico e $\alpha = \alpha(t)$
MOTO CIRCOLARE VARIO

- Quando $\vec{L}$ non è parallelo a $\vec{w}$

$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\vec{w}) = I_z\vec{\alpha}$

$\boxed{\vec{M}_z = I_z\vec{\alpha}}$

$\vec{M}_\perp = \frac{d\vec{L}_\perp}{dt}$

PUNTO MATERIALE MOTO CIRCOLARE

$\vec{F} = m\vec{a}$ proiettata sulla tangente alla traiettoria → acc. tangenziale → legge oraria

acc. centripeta → non influenza la legge oraria ma ci permette di calcolare quale è la forza necessaria affinché avvenga il moto circolare.

Momento di inerzia misura l'inerzia del corpo al variare della velocità angolare

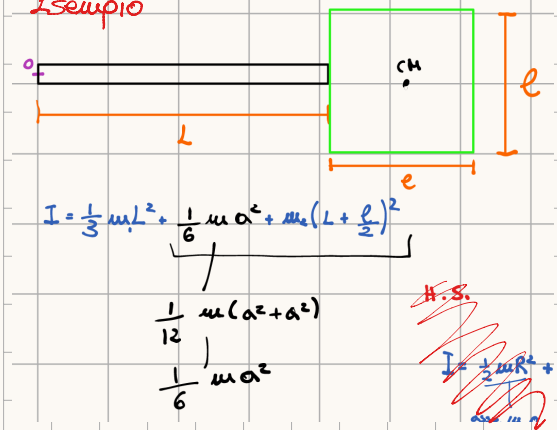
CALCOLO DEL MOMENTO DI INERZIA 6

$I_z = \sum_i m_i R_i^2 \rightarrow \int R^2\,dm$

$R \equiv$ distanza elemento infinitesimo dm dall'asse di rotazione

dm = elemento infinitesimo di massa

Esempio



$I = \frac{1}{3}m_1L^2 + \frac{1}{6}ma^2 + m_2\left(L + \frac{e}{2}\right)^2$

$\frac{1}{12}m(a^2+a^2)$

$\frac{1}{6}ma^2$

H.S.

$I = \frac{1}{2}mR^2 +$

capire l'origine di M_0 con un semplice esempio.

Consideriamo un corpo rigido formato da due masse uguali m collegate da un'asta rigida di massa trascurabile che forma l'angolo θ con l'asse di rotazione, figura 7.15a. Esso ruota con velocità angolare ω attorno all'asse segnato e questo moto è dovuto ad un momento M_0, eventualmente nullo se ω è costante. D'altra parte le due masse descrivono un moto circolare e per questo sono necessarie due forze centripete F_c, disegnate nella figura 7.15b, esercitate dall'asta di collegamento. Queste due forze costituiscono una coppia e si dimostra che il loro momento è proprio eguale a dL_0/dt. Le due forze peso, anch'esse disegnate nella figura, hanno momento nullo rispetto al polo O. Un effetto del momento delle forze centripete è quello di far cambiare direzione all'asse di rotazione (nella figura 7.15a l'asse tenderebbe a ruotare in senso antiorario) e quindi occorrono opportuni supporti, disegnati in figura 7.15b, per mantenere l'asse nella posizione verticale, supporti che vengono sollecitati durante il moto e devono essere costruiti in modo tale da resistere alle sollecitazioni (che sono proporzionali a ω^2). Se fosse $\theta = \pi/2$ L sarebbe parallelo a ω, $L_\perp$ sarebbe nullo e questi effetti non si verificherebbero.

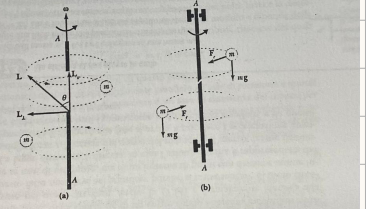


Figura 7.15
Sistema di due sferette in rotazione intorno ad un asse non parallelo al momento angolare (a) e analisi delle reazioni vincolari sull'asse di rotazione (b).

La conclusione è la seguente:

quando un corpo rigido ruota attorno ad un asse è conveniente mettersi in una situazione tale che $\mathbf{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$ siano paralleli.

Le situazioni in cui $\mathbf{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$ non sono paralleli andrebbero evitate perché nascono sollecitazioni sui supporti dell'asse che possono portare a vibrazioni e anche a rottura dell'asse.

NOTE IN Created by Notein

22 Sistema di riferimento del centro di massa. Teoremi di Koenig

(24) 25. **Sistema di riferimento del centro di massa. Teoremi di Koenig per l'energia cinetica e il momento angolare.**

Il sistema di riferimento del centro di massa ha le seguenti caratteristiche:
-l'origine è nel centro di massa;
-gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema inerziale;
-si tratta in generale di un sistema non inerziale (il moto del sistema del CM è traslatorio ma non necessariamente rettilineo e uniforme); ciò avviene solo se $\mathbf{R}^{(E)} = 0$ e $\mathbf{a}_{CM} = 0$.

Per il punto P_i si ha:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r'}_i + \boldsymbol{r}_{CM}$$

Dal teorema delle velocità relative con $\omega = 0$ si ha:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v'}_i + \boldsymbol{v}_{CM}$$

PAG 138/139 ...

Avendo assunto il CM come riferimento, evidentemente la posizione e la velocità del CM rispetto a sé stesso sono nulle: $\mathbf{r'}_{CM} = 0$, $\mathbf{v'}_{CM} = 0$. Ne segue che:

$$\sum m_i \boldsymbol{r'}_i = 0$$

$$\sum m_i \boldsymbol{v'}_i = 0$$

Essendo il sistema del CM non inerziale, sui singoli punti sembra agire anche la forza di inerzia $-m_i \boldsymbol{a}_t = -m_i \boldsymbol{a}_{CM}$ in quanto l'accelerazione di trascinamento è pari a quella dell'origine. Per ogni punto abbiamo quindi:

$$\boldsymbol{F}_i^{(E)} + \boldsymbol{F}_i^{(I)} - m_i \boldsymbol{a}_{CM} = m_i \boldsymbol{a'}_i \rightarrow \boldsymbol{R}^{(E)} - \sum m_i \boldsymbol{a}_{CM} = \boldsymbol{R}^{(E)} - m\boldsymbol{a}_{CM} = \sum m_i \boldsymbol{a'}_i = 0$$

Per quanto riguarda i momenti si ha che il momento risultante rispetto al CM nel sistema del CM, delle forze interne e delle forze di inerzia è uguale al solo momento delle forze esterne:

$$\boldsymbol{M'}^{(E)} = \sum \boldsymbol{r'}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(E)}$$

TEOREMA DI KOENIG PER L'ENERGIA CINETICA:
L'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del CM e di quella del sistema rispetto al centro di massa:

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E'_k + E_{k,CM} = \frac{1}{2} m V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

TEOREMA DI KOENIG PER IL MOMENTO ANGOLARE:
Il momento angolare del sistema si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del CM e di quello del sistema rispetto al centro di massa:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L'} + \boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{v}_{CM} = \boldsymbol{L'} + \boldsymbol{L}_{CM}$$

24 Dimostrazione del teorema di Huygens-Steiner. Illustrare applicazione con un esempio a scelta.

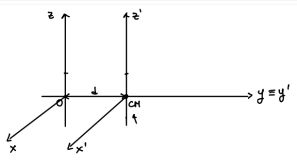
TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

Il momento di inerzia di un corpo rigido di massa m rispetto ad un asse che si trova ad una distanza d dal centro di massa si può scrivere come:

$$\boxed{I = I_{cm} + md^2}$$

I_{cm} = asse di rotazione passante per il centro di massa
d = distanza asse dal centro di massa.

Consideriamo due assi z e z' tra loro paralleli e distanti d, e z' passa per il centro di massa:



$x = x'$ $\quad z = z'$ $\quad y = y' + d$

Il momento di inerzia di un punto generico P_i rispetto all'asse z:

$$m_i R_i^2 = m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Sommando su tutti i punti:

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i [x_i'^2 + (y_i' + d)^2] =$$

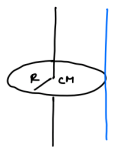
$$= \sum_i m_i x_i'^2 + \sum_i m_i y_i'^2 + \sum_i m_i d^2 + \sum_i m_i 2d y_i' =$$

$$= \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \sum m_i d^2 + \sum m_i 2d y_i'$$

- il 1° termine $\sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) = I_{cm}$
- il 2° termine $\left(\sum_i m_i\right) d^2 = md^2$ (m è la massa totale del corpo rigido)
- il 3° termine $2d \sum_i m_i y_i' = 2d m y'_{CM}$ ma $y'_{CM} = 0$ quindi questo termine è nullo

=> vale il teorema per cui $I = I_{cm} + md^2$

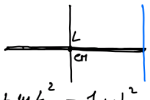
ESEMPIO:
DISCO OMOGENEO che ruota attorno ad un asse passante per il suo centro:



$I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$

$$I = I_{cm} + mR^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

ESEMPIO
Asta sottile omogenea



$I_{cm} = \frac{1}{12} mL^2$

$$I = I_{cm} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m = \frac{1}{12} mL^2 + m\frac{L^2}{4} = \frac{1}{3} mL^2$$

— TEOREMA DI KÖNIG —

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{cm} + md^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} md^2 \omega^2 =$$

NOTE Created by Notein

- il 1° termine $\sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2)$ è il momento di inerzia calcolato rispetto all'asse z' (in cui passa il CM)

$= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$ TEOREMA DI KÖNIG

6) **27: Dimostrazione teorema di Huygens-Steiner. Illustrare applicazione con due esempi a scelta.**

TEOREMA DI HUYGENS-STEINER:
Il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che si trova a una distanza d dal centro di massa del corpo è dato da:

$I_{z'} = I_{z'CM} + md^2$ $\quad I_{z'} = I_{CM} + md^2$ $\quad d = R$

dove $I_{z'}$ è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

Consideriamo due assi z e z' paralleli e distanti d; l'asse z' passa per il CM. La relazione tra le coordinate nei due sistemi, con centro in O e nel centro di massa, è dato da: $x = x'$, $y = y' + d$, $z = z'$. Il momento d'inerzia del generico punto P_i rispetto al sistema di riferimento O è $m_i(x_i^2 + y_i^2)$.

$I_z = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i(x'^2_i + (y'_i + d)^2) = \sum m_i(x'^2_i + y'^2_i + d^2 + 2y'd)$

$= \sum m_i(x'^2_i + y'^2_i) + \sum m_i d^2 + 2d\sum m_i y'_i$

$\sum m_i(x'^2_i + y'^2_i) = I_z$

$\sum m_i d^2 = md^2$

$2a\sum m_i y'_i = m y'_{CM} = 0$ (poiché O è la posizione per cui CM rispetto a sé stesso)

ESEMPI: asta e disco omogeneo

25 Equilibrio statico di un corpo rigido: illustrare con un esempio

28) **32. Equilibrio statico di un corpo rigido: illustrare con un esempio.**

Per un corpo rigido inizialmente in quiete si ha l'equilibrio statico se:

$$\begin{cases} \boldsymbol{R} = 0 \\ \boldsymbol{M} = 0 \end{cases}$$

Con **R** = 0 (risultante delle forze applicate al corpo) si realizza l'equilibrio statico del centro di massa: $v_{CM} = 0$. Con **M** = 0 (momento delle forze) non si ha moto rotatorio: $\omega = 0$. Se **R** = 0, **M** è indipendente dal polo: se è nullo rispetto ad un polo lo è rispetto a qualsiasi altro.

ESEMPIO:
Un'asta di massa m, orizzontale in quiete, è appoggiata su due supporti P_1 e P_2 che esercitano le reazioni F_1 e F_2 sull'asta. La condizione **R** = 0 comporta che:

$F_1 + F_2 = mg$

Mentre **M** = 0 impone, avendo scelto il centro di massa come polo:

$x_1 F_1 = x_2 F_2$

Pertanto, si ha:

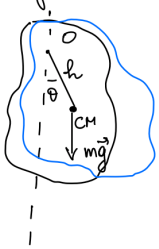
$$\begin{cases} F_1 + F_2 = mg \\ x_1 F_1 = x_2 F_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_2 F_2}{x_1} + F_2 = mg \\ F_1 = \frac{x_2}{x_1} F_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2 = \frac{x_1}{x_2 + x_1} mg \end{cases}$$

STESSA COSA PER F_1 $\quad F_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} mg$

26 Il pendolo fisico: equazione del moto per piccole oscillazioni e lunghezza ridotta

PENDOLO COMPOSTO
(o pendolo fisico)

corpo rigido



$M = -mgh\sin\theta$

$\frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha = I_z \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$

Piccole oscillazioni $\sin\theta \simeq \theta$

$\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \varphi)$

$T = \frac{2\pi}{\Omega}$



poniamo

$h' = \frac{I_{CM}}{mh}$ $\quad I_{CM} = mhh'$

$l = \frac{I_z}{mh} = \frac{I_{CM} + mh^2}{mh} = \underbrace{\frac{I_{CM}}{mh}}_{h'} + h = h' + h > h$

il periodo di oscillazione attorno ai 2 assi è lo stesso

NOTE Created by Notein

$$I_z \frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = -mgh\sin\vartheta$$

$$\boxed{\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\sin\vartheta = 0}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}} = \sqrt{\frac{g}{l_{rid}}}$$

l_{rid} = lunghezza ridotta del pendolo composto $= \frac{I_z}{mh}$

29. Il pendolo composto: condizioni dinamiche e equazione del moto per piccole oscillazioni.

Si chiama pendolo composto ogni corpo rigido che possa oscillare per azione del suo peso in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il centro di massa.

$$\begin{cases} M = I_x\alpha \\ I_x = I_{CM} + mh^2 \end{cases}$$

$$hu_h \times mg = -mghsen\vartheta = I_x\alpha$$

Il momento delle forze è preso con il segno negativo perché esso tende sempre a riportare il pendolo fisico nella sua posizione di riposo.

$$-mghsen\vartheta = I_x\frac{d^2\vartheta}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_x}sen\vartheta = 0$$

Per un'ampiezza di oscillazione piccola si ha $\vartheta \leq 5° \rightarrow sen\vartheta \approx \vartheta$

$$\rightarrow \frac{d^2\vartheta}{dt} + \frac{mgh}{I_x}\vartheta = 0$$

Questa è l'equazione differenziale di un moto armonico che ha per soluzioni:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 sen(\omega t + \varphi)$$

Dove:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_x}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_x}{mgh}}$$

$L' = \frac{I_x}{mh}$ è la lunghezza di un pendolo semplice che avrebbe lo stesso periodo del pendolo fisico.

27 Moto di puro rotolamento. Illustrare con un esempio a scelta.

30. Condizioni del moto di puro rotolamento. Illustrare con un esempio a scelta.

Un corpo rigido cilindrico o sferico si trova sopra un piano e si muove rispetto ad esso. Se le velocità di tutti i punti del corpo sono uguali e parallele tra loro il corpo striscia sul piano. Se il punto C di contatto tra il corpo e il piano ha velocità non nulla rispetto al piano il corpo rotola e striscia. Se invece la velocità di C è nulla si ha un moto di puro rotolamento. In ogni intervallo di tempo dt il corpo può essere considerato come se ruotasse rispetto ad un asse, fisso durante dt, passante per il punto di contatto e ortogonale al piano, con velocità angolare ω. La velocità di ogni punto del corpo di conseguenza è ortogonale alla linea che congiunge il punto con C ed è in modulo proporzionale alla distanza da C: $v_P = \omega PC$. Quando abbiamo puro rot. allora è $V_{CM} = \omega R$

Per tenere fermo nell'intervallo dt il punto C deve agire una forza: si tratta di una forza di attrito statico tra piano e corpo. Per assicurare che il punto C sia fermo e, di conseguenza, che il moto sia di puro rotolamento, la forza d'attrito di contatto deve soddisfare la seguente condizione:

$$F_a \leq \mu_s N = \mu_s mg$$

La velocità del punto C distante r dal CM può essere scritta come:

$$v_C = v_{CM} + \omega \times r = 0 \rightarrow v_{CM} = -\omega \times r$$

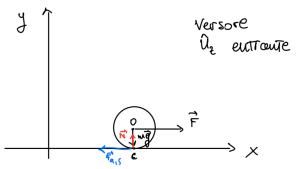
In modulo:

$$v_{CM} = \omega r \rightarrow a_{CM} = \alpha r$$

Se il moto è di puro rotolamento la velocità variabile traslatoria (V_{CM}) è di rotazione (ω) vale anche per $\begin{cases} s = \vartheta R \\ a_{CM} = \alpha R \end{cases}$

+ esempio

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO



La legge del moto del centro di massa

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}_{CM}$$

$\vec{R}$ è la reazione vincolare in C data dalla componente normale $\vec{N}$ e dalla componente tangenziale $\vec{F}_{a,s}$.

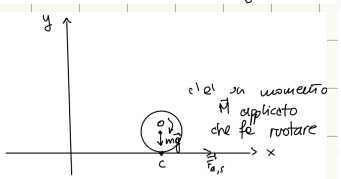
Proiettando lungo gli assi:

$$\begin{cases} x: F - F_{a,s} = ma_{CM} \\ y: N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \end{cases}$$

Per la 2ª equazione cardinale, scelto O come polo:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}_{a,s}$$

per il teorema del momento angolare



c'è un momento $\vec{M}$ applicato che fa ruotare

$\vec{F}_{a,s}$ è orientata verso destra e $\vec{M}$ tende a far slittare il punto di contatto C verso sinistra.

1ª eq. cardinale

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$rF_{a,s} = I\alpha$$

$a_{CM} = \alpha r$ sostituisco $\alpha = \frac{a_{CM}}{r}$

$rF_{a,s} = I\frac{a_{CM}}{r}$ 2ª equazione

Ho 2 equazioni:

$$\begin{cases} F - F_{a,s} = ma_{CM} \\ rF_{a,s} = I\frac{a_{CM}}{r} \end{cases}$$

Dalla prima: $F_{a,s} = F - ma_{CM}$

e sostituendo nella seconda

$$r(F - ma_{CM}) = I\frac{a_{CM}}{r}$$

$$rF - ma_{CM}r = I\frac{a_{CM}}{r}$$

$$a_{CM}\left(\frac{I}{r} + mr\right) = rF$$

$$a_{CM} = \frac{rF}{mr + \frac{I}{r}} = \frac{F}{m + \frac{I}{r^2}} = \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$$

$$F_{a,s} = F - ma_{CM} = F - \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} =$$

$$= F - \frac{F}{\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} = \frac{F + F\left(\frac{I}{mr^2}\right) - F}{1 + \frac{I}{mr^2}} =$$

$$= \frac{F\frac{I}{mr^2}}{\frac{mr^2 + I}{mr^2}} = \frac{FI}{I + mr^2} = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}}$$

Riassumendo, trovo:

$$a_{CM} = \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$$

$$F_{a,s} = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}}$$

Deve essere

$$F_{a,s} \leq F_{a,s}^{max} \Rightarrow F_{a,s} \leq \mu_s mg$$

$$\frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}} \leq \mu_s mg$$

$$F \leq \mu_s mg\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)$$

Oltre questo valore (che rappresenta il valore limite per F) il corpo comincierà a strisciare oltre che a rotolare.

$$F_{a,s} = ma_{CM} = \frac{mrM}{mr\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} = \frac{M}{r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$$

$$F_{a,s} \leq \mu_s N = \mu_s mg \Rightarrow F_{a,s} \leq \mu_s mg$$

$$\frac{M}{r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \leq \mu_s mg$$

$$M \leq \mu_s mgr\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) = M_{lim}$$



Ci possono avere tre situazioni:

- il corpo sia rotola che striscia
- il corpo rotola (MOTO DI PURO ROTOLAMENTO)
- il corpo striscia



Created by Notein

$\vec{M} + \vec{r} \wedge \vec{F}_{a,s} = I\vec{\alpha}$ 2° eq. cardinale

Dalla 1ª eq. $N = mg$ e $F_{a,s} = ma_{cm}$

Dalla 2ª eq. $M - rF_{a,s} = I\alpha = I\frac{a_{cm}}{r}$

$M - rma_{cm} = I\frac{a_{cm}}{r}$

$a_{cm}\left(\frac{I}{r} + rm\right) = M \Rightarrow a_{cm} = \frac{M}{\frac{I}{r} + rm} =$

$a_{cm} = \frac{M}{mr\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$

C punto di contatto

Se ω è la velocità angolare la velocità del punto P è ortogonale alla linea che congiunge P a C

$v_P = \omega |PC|$

La velocità del punto di contatto C è

$\vec{v}_c = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$\vec{v}_c = 0$ condizione di puro rotolamento

$\vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{cm} = -\vec{\omega} \wedge \vec{r}$

in modulo avremo $v_{cm} = \omega r$

$a_{cm} = \alpha r$

Nel caso di PURO ROTOLAMENTO

a_{cm} e α sono dipendenti mediante

$a_{cm} = \alpha r$

28 Il primo principio della termodinamica. Breve descrizione degli esperimenti di Joule e definizione della funzione di stato energia interna.

(33) **36. Il primo principio della termodinamica. Breve descrizione degli esperimenti di Joule e definizione della funzione di stato energia interna.**

$Q = W + \Delta U$

Se un sistema compie una trasformazione dallo stato A allo stato B, scambiando calore e lavoro con l'ambiente esterno, Q e W dipendono dalla trasformazione che congiunge i 2 stati termodinamici mentre la loro differenza (energia interna) risulta indipendente dalla trasformazione.

ESPERIMENTI DI JOULE: aumentare la temperatura di una certa quantità d'acqua spendendo lavoro in modi diversi:
- un mulinello collegato attraverso un filo e ad una carrucola viene messo in rotazione dal movimento della massa in un contenitore pieno d'acqua spendendo il lavoro W; l'acqua, agitata dal mulinello, si riscalda per via dell'attrito;
- un conduttore di resistenza R percorso da corrente viene immerso nell'acqua; W è il lavoro speso per far circolare la corrente;
- una certa quantità di gas, contenuta in un recipiente diatermico immerso nell'acqua, viene compressa; il processo di compressione richiede un lavoro W;
- due blocchi di metallo immersi nell'acqua vengono strofinati tra di loro; il lavoro speso con le forze d'attrito è W.

ENERGIA INTERNA: funzione delle coordinate termodinamiche del sistema le cui variazioni danno gli scambi energetici del sistema con l'ambiente durante una trasformazione.

- ESPERIMENTI DI JOULE -

Aumento della temperatura di un sistema termodinamico attraverso diversi esperimenti:

- Riscaldamento acqua tramite l'azione di un mulinello → lavoro W_1
- Riscaldamento acqua tramite un conduttore di resistenza R percorso da corrente → lavoro W_2
- Riscaldamento acqua tramite pressione esercitata su un gas in un contenitore con pareti diatermiche nell'acqua. → lavoro W_3
- Riscaldamento acqua tramite blocchi di metallo strofinati tra loro (attrito) → lavoro W_4

$\boxed{W_{ad.} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}}$

dove U è una funzione solo dello stato del sistema (finale ed iniziale) e non dipende dalla trasformazione, purché il sistema sia ADIABATICO.

Per un sistema termodinamico che subisce una trasformazione dallo stato A allo stato B, Q e W (cioè calore e lavoro scambiati con l'ambiente) dipendono dalla trasformazione subita, ma

$\boxed{Q - W = \Delta U = U_B - U_A}$, Q - W è indipendente dalla trasformazione quindi pari alla variazione dell'

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

ENERGIA INTERNA U

- ENERGIA INTERNA U è funzione delle variabili termodinamiche ma è una funzione di stato, cioè dipende solo dallo stato finale e dallo stato iniziale del sistema.
Se $\Delta U = 0$ cioè U = costante allora Q = W

- Fornendo calore o lavoro al sistema, questi vengono "immagazzinati" dal sistema sotto forma di energia interna, che poi può essere riutilizzata

- Si chiama ENERGIA INTERNA in quanto non associata a energia cinetica o potenziale dei componenti del sistema ma a proprietà interne del sistema descritte dalle variabili termodinamiche (es. temperatura, volume, ...).

- Scambio di energia non associato a lavoro meccanico

Se il sistema subisce lavoro, $W < 0$ e $\Delta U > 0$ (l'energia aumenta)
Se il sistema fornisce lavoro all'esterno, $W > 0$ e $\Delta U < 0$ (l'energia diminuisce)

Potendo ottenere l'aumento di temperatura dell'acqua per contatto diretto con un corpo più caldo nel contenitore adiabatico, si avrà scambio di calore Q, quindi

$\boxed{Q = \Delta U}$

Q = calore scambiato, senza lavoro esterno, per far variare la temperatura dell'acqua

W = lavoro che deve essere speso, in condizioni adiabatiche, per ottenere la stessa variazione di temperatura

$\boxed{-W = Q}$ EQUIVALENZA TRA LAVORO E CALORE

Created by Notein

29 Calorimetria di liquidi e solidi: calore specifico e calore latente. Portare un esempio di utilizzo di ciascuno

29. Calorimetria di liquidi e solidi: calore specifico e calore latente. Portare un esempio di utilizzo di ciascuno. C è TABULATO

CALORE SPECIFICO:

$Q = mc\Delta T$ $\quad c = \frac{1}{m}\frac{dq}{dT}\left(\frac{J}{kg\,°C}\right)$

c è una grandezza caratteristica della sostanza di cui è costituito il corpo detta calore specifico. Il calore specifico rappresenta il calore che occorre scambiare con 1 kg di una sostanza per far variare la sua temperatura di 1 K.

CALORE LATENTE DI FUSIONE E DI EVAPORAZIONE:

$Q_f = m\lambda_f$ $\quad Q_e = m\lambda_e$

δ_f è il calore latente di fusione che è definito come la quantità di calore necessaria per fondere 1 kg della sostanza in esame. δ_e è il calore latente di evaporazione che è definito come la quantità di calore necessaria per far evaporare 1 kg della sostanza in esame.

CALORE LATENTE: calore scambiato per far avvenire la trasformazione di fase di una massa unitaria (λ)

$Q = m\lambda$ $\quad$ Q può essere ceduto alla sostanza o sottratto alla sostanza

λ unità di misura $\frac{J}{kg}$

Calore latente di fusione dell'acqua
0°C = 273°k $\quad \lambda = 3.3 \times 10^5 \frac{J}{kg}$

Calore latente di ebollizione acqua
373.15°k $\quad \lambda = 22.6 \times 10^5 \frac{J}{kg}$

Sono trasformazioni reversibili

m = massa
λ = calore specifico sostanza

Sperimentalmente troviamo che il calore necessario per ottenere una certa variazione di temperatura ΔT è proporzionale a ΔT e la costante di proporzionalità è data dal prodotto della massa e di una costante c caratteristica della sostanza considerata:

$Q = cm\Delta T$ $\quad Q = cm(T_{fin} - T_{in})$

m = massa
c = calore specifico = calore necessario per far variare di 1°k la massa unitaria (1kg) della sostanza considerata.

$C = mc$ = CAPACITÀ TERMICA = calore che occorre scambiare con quel corpo per far innalzare la sua temperatura di 1°k

In termini infinitesimi:
$dQ = c_m dT$ $\quad dQ = C\,dT$ $\quad \Rightarrow C = \frac{dQ}{dT}$ $\quad c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}$

$[C] = J/k$ $\quad [c] = \frac{J}{kg\,°k}$

$Q = mc(T_2 - T_1)$ $\quad$ se $T_2 < T_1$ $Q<0$ calore ceduto; se $T_2 > T_1$ $Q>0$ calore assorbito
fin in

In generale c non è costante ma dipende dalla temperatura $c = c(T)$

$dQ = m\,c(T)\,dT \Rightarrow Q = m\int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dT$

se c = costante $\quad Q = mc\int_{T_1}^{T_2} dT = mc\,\Delta T$

CALORE SPECIFICO MOLARE $\quad c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}$ $\quad [c] = \frac{J}{mol\,°k}$

$dQ = mc\,dT = mc(T_2 - T_1)$
↑ calore specifico molare

$Q = \int_{T_1}^{T_2} mc(T)\,dT = m\int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dT$

MOLE: quantità di materia che contiene un numero di entità elementari (atomi o molecole) pari al numero di Avogadro $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ $\frac{\text{molecole}}{\text{moli}}$

- NUMERO DI MOLECOLE in una massa m:
$N = \frac{m}{m_{molecola}} = \frac{m}{m_{molecola} \times 1\,uma}$

- numero di moli $n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{\text{massa molare} \cdot g \text{ o peso in } g}$

es. 1 mole di ^{12}C: 12 g
1 mole di H_2O: 18 g

Acqua: $c = 4180 \frac{J}{kg\,°k}$

la massa di 1 mole di acqua è 18 g/mole
il calore specifico molare 75.24 $\frac{J}{mol\,°k}$

Avendo la trasformazione avviene senza scambio di lavoro:
$c = \frac{1}{m}\frac{dU}{dT}$ $\quad c = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT}$

ESEMPIO 1
Un pezzo di solido di massa m = 0.378 kg viene riscaldato a 95°C e poi immerso in un contenitore di 2l di acqua con pareti adiabatiche a 20°C. Se la temperatura finale del sistema è di 21.3°C determinare il calore specifico del solido assumendo che i calori specifici siano indipendenti dalla temperatura.

$\underbrace{m_a c_a (21.3°C - 20°C)}_{Q_1 > 0} + \underbrace{m_s c_s (21.3°C - 95°C)}_{Q_2 < 0} = 0$

$m_s c_s (95°C - 21.3°C) = m_a c_a (21.3°C - 20°C)$

$c_s = \frac{m_a c_a}{m_s}\frac{(21.3°C - 20°C)}{(95°C - 21.3°C)} = \frac{2\,kg \cdot 4186.8 \frac{J}{kg\,°k}}{0.378\,kg} \cdot \frac{1.3°C}{73.7°C}$

$[c_a = 4186.8 \frac{J}{kg\,°k}] = 390.7 \frac{J}{kg\,°k}$ RAME

NOTA: ΔT in °C equivale a ΔT in °k

$Q = m_s c_s \Delta T = 0.378\,kg \cdot 390.7 \frac{J}{°k\,kg}(273.7°k) =$
$= -10884\,J$ calore ceduto dal solido all'acqua

30 Equazione dei gas perfetti. Calcolo del lavoro in trasformazioni di un gas perfetto. Rappresentazione grafica sul piano di Clapeyron

LEGGE DEI GAS IDEALI O PERFETTI
n moli di un gas ideale

$P_T = P_0 \alpha T$ moltiplicato per V_0

$P_T V_0 = P_0 V_0 \alpha T = P_0 V_T$ perché pV = costante se a T=cost. (V_T)

$pV = P_0 V_0 \alpha T = nP_0 V_m \alpha T$ (R)

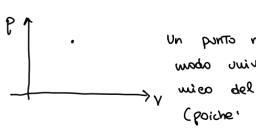
P_0, V_m e α sono costanti quindi il loro prodotto è costante

$P_0 V_m \alpha = R$ = costante dei gas perfetti = 8.314 $\frac{J}{mol\,°k}$

$R = 1.01 \times 10^5 Pa \cdot 0.0224\,m^3 \cdot \frac{1}{273.15\,k} =$

$pV = nRT$ eq. di stato dei gas perfetti
n = numero di moli

GAS IDEALE: solo 2 variabili indipendenti, la terza è determinata dalla legge dei gas perfetti.



Un punto nel piano PV determina in modo univoco lo stato termodinamico del gas perfetto (poiché vale la $pV = nRT$).

$n = \frac{N}{N_A}$ = # molecole

- EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI -

$pV = nRT$

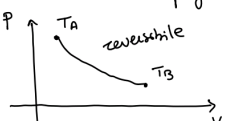
R = costante dei gas perfetti =
$= 8.314 \frac{J}{mol\,°k} = \alpha P_0 V_m$

Consideriamo un gas che passa attraverso 2 diversi stati di equilibrio con T_A e T_B rispettivamente:

per la legge dei gas perfetti:

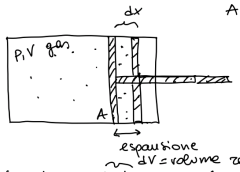
$T_A = \frac{P_A V_A}{nR}$ $\quad T_B = \frac{P_B V_B}{nR}$

Piano di Clapeyron:





$dW = Fdx$



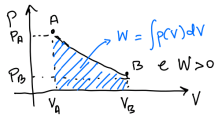
dV = volume regione espansa di gas

$dW = Fdx = pA\,dx = pdV$ ($F = pA$)

$dW = pdV$

Per una trasformazione finita reversibile (o quasi statica)

$W = \int_A^B p(V)\,dV$ LAVORO



Se p = costante $W = p(V_B - V_A) = p\Delta V$ ISOBARA

ISOCORA: V = costante $W = 0$

se il gas si espande cioè $V_B > V_A$, $W > 0$
se il gas si comprime cioè $V_B < V_A$, $W < 0$

NOTE Created by Notein

N_A = n° di Avogadro

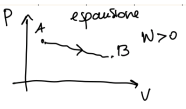
$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{N}{N_A}RT$ ma $\frac{R}{N_A} = k_B$ = costante di Boltzmann

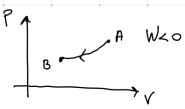
$\boxed{pV = Nk_BT}$

Densità $\rho = \frac{M}{V}$ e $M = Am$ (↑ massa molecolare)

$\boxed{\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{A}}$

Consideriamo una espansione del gas in una trasformazione reversibile:





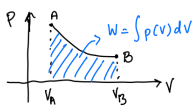
38. Equazione dei gas perfetti. Calcolo del lavoro in trasformazioni di un gas perfetto. Rappresentazione grafica sul piano di Clapeyron.

Un gas perfetto è un gas per il quale:
1) non ci sia interazione tra gli atomi o le molecole che formano il gas;
2) gli atomi o le molecole che formano il gas non occupano volume (il loro volume è molto inferiore del volume occupato dal gas).
Per un gas perfetto si ha:

$pV = nRT$

p = PRESSIONE → F/SUPERFICIE
V = VOLUME
R = COSTANTE DEI GAS → 8,314 J/(mol·K)
T = TEMPERATURA
N = NUM. MOLI

TRASFORMAZIONE ISOTERMA T = costante



$W = \int p(V)\,dV$

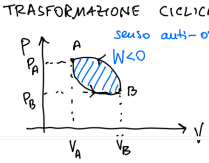
$pV = mRT$ = costante ⇒ pV = cost.

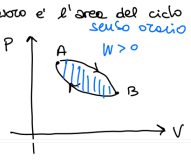
$p(V) = \frac{mRT}{V}$

$W = \int_A^B p(V)\,dV = \int_A^B \frac{mRT}{V}\,dV = \underbrace{mRT}_{\text{cost.}} \int_A^B \frac{dV}{V} = mRT \ln V \Big|_A^B =$

$= mRT(\ln V_B - \ln V_A) = mRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

TRASFORMAZIONE CICLICA: il lavoro è l'area del ciclo





Legge isobara di volta-Gay Lussac $V = V_0(1+\alpha t)$
$\therefore p = p_0(1+\beta t)$
isocora

$\alpha = \beta = \frac{1}{273.15\ °C}$ più ci si avvicina alle condizioni di gas ideale (bassa P e alta T)

$V = V_0\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = p_0\alpha T$

$p = p_0\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = V_0\alpha T$

$T = \frac{1}{\alpha} + t = 273{,}15 + t$ °K

$dp = 0$ (trasformazione isobara) → $pdV = nRdT$

→ $nc_pdT = nc_vdT + nRdT$

Otteniamo così la relazione di Meyer: $c_p - c_v = R$

Il rapporto tra calori specifici $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ risulta in un gas ideale sempre maggiore di 1.

Sperimentalmente per i gas ideali monoatomici si trovano questi risultati per i calori specifici:

$c_v = \frac{3}{2}R$

$c_p = \frac{5}{2}R$

$\gamma = \frac{5}{3}$

BIATOMICI: $c_p = \frac{7}{2}R$, $c_V = \frac{5}{2}R$, $\gamma = \frac{7}{5}$

31 Calori specifici molari, esperimento di espansione libera di Joule, energia interna di un gas perfetto. Enunciato della relazione di Mayer, rapporto γ (gamma) e calori specifici per gas monoatomici e biatomici.

39. Calori specifici molari, esperimento di espansione libera di Joule, energia interna di un gas perfetto.

Per una trasformazione infinitesima isocora si ha $dQ = nc_vdT$; per una isobara si ha $dQ = nc_pdT$. Le quantità

$c_v = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_v$

$c_p = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$

si chiamano calore specifico molare a volume costante e a pressione costante. Se questi possono essere ritenuti costanti, il calore scambiato per una variazione di temperatura ΔT sarà:

$Q_v = nc_v\Delta T$

$Q_p = nc_p\Delta T$

ESPERIMENTO ESPANSIONE LIBERA DI JOULE:
Consideriamo un contenitore con pareti diatermiche diviso in due parti uguali separate tra di loro. In una parte si trova un gas e nell'altra è stata realizzata una condizione di vuoto. Il contenitore è immerso in un calorimetro. La temperatura di equilibrio è T. Comunque si operi, rimuovendo rapidamente o lentamente ciò che separa le due parti, con gas inizialmente ad alta o a bassa pressione, la temperatura del liquido calorimetrico alla fine del processo è sempre pari a T.

La funzione di stato ΔU è possibile calcolarla sempre con la seguente relazione:

$\Delta U = nc_v\Delta T$

40. Dimostrazione della relazione di Meyer, rapporto γ (gamma) e calori specifici per gas monoatomici e biatomici.

Consideriamo una trasformazione isobara infinitesima:

$dQ = nc_pdT$

$dW = p\Delta V$

→ $nc_pdT = nc_vdT + pdV$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti otteniamo che:

$pV = nRT \rightarrow pdV + Vdp = nRdT$

$p_AV_A = p_BV_B \rightarrow pV = costante$

Se la trasformazione è reversibile si ha:

$W = \int_A^B pdV = \int_A^B \frac{nRT}{V}dV = nRT\int_A^B \frac{dV}{V} = nRT\ln\frac{V_B}{V_A} = nRT\ln\frac{p_A}{p_B} = Q$

Una trasformazione isoterma reversibile comporta sempre uno scambio di calore.

CALORE SPECIFICO MOLARE $c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}$ $[c] = \frac{J}{mol\,K}$

$dQ = mc\,dT = mc(T_2 - T_1)$
↑ calore specifico molare

$Q = \int_{T_1}^{T_2} mc(T)\,dT = m\int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dT$

MOLE: quantità di materia che contiene un numero di entità elementari (atomi o molecole) pari al numero di Avogadro $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ molecole/mole

- NUMERO DI MOLECOLE in una massa m:

$N = \frac{m}{m_{molecola}} = \frac{m}{m_{mol} \times 1\,uma}$

- Numero di moli $n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{m_{mol} \cdot g}$ = peso in g

es. 1 mole di ^{12}C: 12 g
1 mole di H_2O: 18 g

Acqua: $c = 4180\ \frac{J}{kg\,K}$

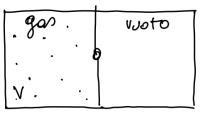
La massa di 1 mole di zolfo è 18 g/mol
il calore specifico molare 75.24 $\frac{J}{mol\,K}$

Quando la trasformazione avviene senza scambio di lavoro:

$c = \frac{1}{m}\frac{dU}{dT}$ $\quad c = \frac{1}{m}\frac{dU}{dT}$

Espansione libera di Joule

contenitore con pareti rigide diatermiche diviso in 2 parti uguali separate da un rubinetto:



contenitore all'interno di un calorimetro e la temperatura di equilibrio è T.

Aprendo il rubinetto il gas occuperà anche la parte destra del contenitore per un totale di volume pari a 2V

Joule osservò che dopo l'espansione la temperatura T rimane invariata

Il gas non scambia calore con il calorimetro ⇒ Q=0

ma anche W=0 (pareti del contenitore sono rigide)

⇒ per il 1° principio $\Delta U = Q - W = 0$

Per un gas ideale l'energia interna del gas dipende solo dalla temperatura $U = U(T)$

$\boxed{\Delta U = Q - W}$ per qualsiasi trasformazione

$\boxed{dU = dQ - pdV}$ 1° principio per trasformazioni quasi-statiche

Consideriamo ora una trasformazione generica in cui un gas scambia calore con l'ambiente

$dQ = mc\,dT$

TRASFORMAZIONE ISOCORA
$dQ = mc_vdT$ $\quad c_v$ = calore specifico molare a V = costante

TRASFORMAZIONE ISOBARA
$dQ = mc_pdT$ $\quad c_p$ = calore specifico molare a pressione costante

$c_v = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_v$ $\quad c_p = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$

Unità di misura:

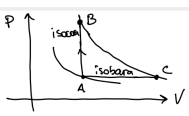
$\boxed{Q_v = mc_v\Delta T}$ isocora

$\boxed{Q_p = mc_p\Delta T}$ isobara

In generale

$Q_v = m\int_{T_A}^{T_B} c_v(T)\,dT$ $\quad Q_p = m\int_{T_A}^{T_B} c_p(T)\,dT$

Consideriamo ora 2 trasformazioni, una isocora e una isobara, durante le quali abbiamo lo stesso ΔT



Dal 1° principio

$Q = \Delta U + W$

isocora AB: $Q_v = \Delta U = mc_v\Delta T$

isobara AC: $Q_p = \Delta U + p\Delta V = mc_p\Delta T$

Created by Notein

$V \to 2V$
$T \to T$ $\Rightarrow$ $\Delta U = 0 \Rightarrow U$ è sola funzione della temperatura

$U_i(V, T) = U_f(2V, T)$
V varia (quindi awiene p) e T rimane costante

$\frac{J}{mol\,°K}$

Se c_p e c_v non variano con la temperatura:

dQ è proporzionale a dT

ΔT è la stessa e U è sola funzione della temperatura quindi ΔU è la stessa nei 2 casi quindi necessariamente
$Q_v < Q_p$ (in quanto $Q_p = Q_v + p\Delta V$) e quindi

$c_v < c_p$

$Q_v = Q_p - p\Delta V$ 5

$mc_v\Delta T = mc_p\Delta T - p\Delta V$ ma $p\Delta V = mR\Delta T$

$mc_v\Delta T = mc_p\Delta T - mR\Delta T$

$c_v = c_p - R$ o $c_p = c_v + R$ RELAZIONE DI MAYER

c_p e c_v non sono indipendenti tra loro ma legati dalla relazione di Mayer.

$$R = c_p - c_v = \gamma - 1$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$$

Rel. di Mayer $c_p = c_v + R$ 6

1 mole e $\Delta T = 1°K \Rightarrow Q = c_v + W$
a $p = cost$ $Q = c_p \Rightarrow c_p = c_v + W$

$\Rightarrow$ R è il lavoro che compie il gas (una mole) per avere un aumento di temperatura pari a 1°K.

$\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$ sempre per i gas ideali ed è o costante o f(x) della temperatura

- gas ideali monoatomici
$c_v = \frac{3}{2}R = 12{,}47\ \frac{J}{mol\,°K}$ $c_p = c_v + R = \frac{5}{2}R = 20{,}79\ \frac{J}{mol\,°K}$
$\gamma = \frac{5}{3}$

- gas ideali biatomici
$c_v = \frac{5}{2}R$ e $c_p = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R$
$\gamma = \frac{7}{5}$

32 Trasformazioni adiabatiche: calcolo del lavoro e relazioni notevoli in caso di reversibilità

#1 Trasformazioni adiabatiche: calcolo del lavoro e relazioni notevoli in caso di reversibilità.

Nelle trasformazioni adiabatiche il gas è racchiuso in un contenitore adiabatico: può scambiare solo lavoro con l'esterno. Per il primo principio della termodinamica si ha:

$Q = W + \Delta U = 0 \to W = -\Delta U = -nc_v\Delta T$

Se la trasformazione è reversibile l'espressione infinitesima del primo principio diviene:

$dU + dW = nc_v dT + pdV$

Per l'equazione di stato dei gas perfetti si ha che:

$p = \frac{nRT}{V} \to nc_v dT + \frac{nRT}{V}dV = 0$

Separiamo le variabili e utilizziamo la relazione di Meyer:

$\frac{c_p - c_v}{c_v}\cdot\frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T} \to (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T} \to (\gamma - 1)ln\frac{V_B}{V_A} = ln\frac{T_A}{T_B} \to T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$

Tramite l'equazione dei gas perfetti si può trasformare tale relazione tra T e V in una tra p e V o tra p e T; otteniamo così tre espressioni equivalenti:

$TV^{\gamma-1} = costante$

$pV^{\gamma} = costante$

$Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = costante$

$$R = c_p - c_v = \gamma - 1$$

$$\frac{c_v}{c_p - c_v} \qquad \frac{c_v}{c_v\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)}, \quad \frac{c_p}{c_v} = \gamma$$

TRASFORMAZIONI ADIABATICHE

Il calore scambiato è nullo $\Rightarrow Q = 0$

Per il 1° principio $\Delta U = 0 - W = -W$
2 stati A e B

$\Delta U_{AB} = -W_{AB} \Rightarrow W_{AB} = -\Delta U = -nc_v(T_B - T_A)$

ma $T_B = \frac{p_B V_B}{nR}$ e $T_A = \frac{p_A V_A}{nR}$ sostituisco:

$W_{AB} = -nc_v\left(\frac{p_B V_B}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR}\right)$ e $R = c_p - c_v = \gamma - 1$

$= \frac{1}{\gamma - 1}(p_A V_A - p_B V_B)$

ESPANSIONE ADIABATICA
$W_{AB} > 0$ $\Delta U < 0$ e $T_B < T_A$ il gas si raffredda

COMPRESSIONE ADIABATICA
$W_{AB} < 0$ $\Delta U > 0$ e $T_B > T_A$ il gas si riscalda

Se la trasformazione adiabatica è reversibile

$dU + dW = nc_v dT + pdV = dQ = 0$

$$(\gamma - 1)\ln V\Big|_A^B = -\ln T\Big|_A^B$$

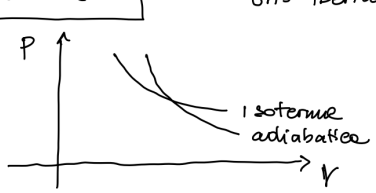
$$(\gamma - 1)\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right)$$

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_A}{T_B} \Rightarrow T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

Tramite l'equazione di stato:

$TV^{\gamma-1} = costante$
$pV^{\gamma} = costante$
$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = costante$

← EQUAZIONI DI UNA TRASFORMAZIONE ADIABATICA REVERSIBILE DI UN GAS IDEALE



NOTE Created by Notein

$nC_v dT + \frac{nRT}{V} dV = 0$ separazione di variabili:

$\frac{nR}{V} dV = -\frac{nC_v dT}{T}$

$\int \frac{c_p - c_v}{c_v} \frac{dV}{V} = \int -\frac{dT}{T} \Rightarrow \gamma - 1 \int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dT}{T}$

$\gamma - 1$

33 Trasformazioni isoterme: calcolo di lavoro e calore scambiati, relazioni notevoli in caso di reversibilitá.

33. Trasformazioni isoterme: calcolo di lavoro e calore scambiati, relazioni notevoli in caso di reversibilità.

Si consideri un gas racchiuso in un recipiente che è in contatto termico con una sorgente di calore alla temperatura T. Durante la trasformazione la temperatura del gas resta costante al valore T e, quindi, per il primo principio della termodinamica abbiamo:

$\Delta U = nc_v \Delta T = 0 \rightarrow Q = W$

Inoltre, dall'equazione dei gas perfetti risulta:

Dove R è una costante universale detta costante dei gas.

Quando un gas si espande o viene compresso avviene uno scambio di lavoro che in termini infinitesimi si può scrivere:

$dW = pdV \rightarrow W = \int_A^B pdV$

Nel piano di Claperyon (piano pV) il lavoro è rappresentato dall'area sottostante la curva che descrive la trasformazione termodinamica. L'integrale si può risolvere se si conosce la dipendenza della pressione dal volume utilizzando l'equazione dei gas perfetti.

- TRASFORMAZIONI ISOTERME -

T = costante $\Rightarrow$ $P_A V_A = P_B V_B$

$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$

Se la trasf. isoterma e' un' espansione $W_{AB} > 0$, $Q_{AB} > 0$ il gas assorbe calore e compie lavoro verso l'esterno

Se la trasf. isoterma e' una compressione $W_{AB} < 0$, $Q_{AB} < 0$ subisce lavoro dall' esterno e cede calore all' esterno

Per una trasf. reversibile:

$W_{AB} = \int_A^B pdV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = Q_{AB}$

$Q \neq 0$ una trasf. isoterma reversibile comporta sempre uno scambio di calore

Trasf. isoterma irreversibile: espansione libera di Joule

↑ corema 31

34 Trasformazioni isocore e isobare: calcolo di lavoro e calore scambiati, condizioni di reversibilita

34. Trasformazioni isocore e isobare: calcolo di lavoro e calore scambiati, condizioni di reversibilità.

TRASFORMAZIONI ISOCORE:

Il gas è contenuto in un recipiente diatermico di volume fisso V = costante; essendo quindi dV = 0 si ha W = 0: il gas può scambiare solo calore e per il primo principio della termodinamica si ha:

$Q = \Delta U = nc_v \Delta T$

Essendo il volume costante, dall'equazione dei gas perfetti si ha:

$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B}$

Una trasformazione isocora reversibile si realizza mettendo il gas alla temperatura T_0 in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura $T_1 = T_0 + dT$, poi con una sorgente a temperatura $T_2 = T_1 + dT$ e così via, utilizzando una serie infinita di sorgenti.

TRASFORMAZIONI ISOBARE:

Il gas è contenuto in un recipiente diatermico con una parete mobile su cui agisce una pressione p costante. Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ha:

$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$

Il gas può scambiare sia calore che lavoro dati da:

$Q = nc_p \Delta T$

$W = p\Delta V = nR\Delta T$

Dal primo principio della termodinamica si ha

$Q - W = \Delta U = nc_v \Delta T$

Come per le trasformazioni isocore, bisogna disporre di una serie infinita di sorgenti affinché la trasformazione sia reversibile.

TRASFORMAZIONI ISOCORE

V = costante $\Rightarrow$ $W_{AB} = 0$

$\Delta U_{AB} = Q_{AB} = nC_v (T_B - T_A)$ con C_v = costante

Dall' eq. di stato $pV = nRT \Rightarrow \frac{V}{nR} = \text{costante} = \frac{T}{p}$

$\boxed{\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B}}$ oppure $\frac{P_A}{P_B} = \frac{T_A}{T_B}$

Se il gas assorbe calore ($Q > 0$) la pressione e la temperatura aumentano

Se il gas cede calore ($Q < 0$) la pressione e la temperatura diminuiscono

TRASFORMAZIONI ISOBARE

p = costante

Dall' eq. di stato $pV = nRT$ $\frac{p}{nR} = \frac{T}{V} = \text{costante}$

$\boxed{\frac{T_A}{V_A} = \frac{T_B}{V_B}}$ oppure $\boxed{\frac{T_A}{T_B} = \frac{V_A}{V_B}}$

$W_{AB} = p\Delta V = p(V_B - V_A) = p\left(\frac{nRT_B}{p} - \frac{nRT_A}{p}\right) = nR(T_B - T_A)$

$\Delta U_{AB} = nC_p (T_B - T_A)$

Per il 1° principio:

$\boxed{Q = \Delta U + W}$

Se il gas assorbe calore, la sua temperatura ed il suo volume aumentano e il lavoro e' positivo

Se il gas cede calore, la sua temperatura ed il suo volume diminuiscono ed il gas subisce lavoro ($W < 0$)

Created by Notein

35 Rendimento delle macchine termiche. Ciclo di Carnot per una macchina termica.

44. Rendimento delle macchine termiche. Ciclo di Carnot per una macchina termica.

Se durante il ciclo viene prodotto lavoro assorbendo calore da un determinato numero di sorgenti, il ciclo è detto termico. Il dispositivo che opera è detto macchina termica. Si ha:

$Q = Q_a + Q_c > 0$

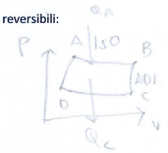
$W = W_F + W_S > 0$
DISCORSO SVOLTO

Dal momento che è stato compiuto un ciclo $\Delta U = 0$ e quindi, per il primo principio della termodinamica, $Q = W$.
Il rendimento di una macchina termica è definito come il rapporto tra il lavoro fornito e la quantità di calore assorbito:

$\eta = \frac{W}{Q_a} = \frac{Q_a + Q_c}{Q_a} = 1 + \frac{Q_c}{Q_a}$ → Q_{ASS}

Esso rappresenta la percentuale di calore assorbito trasformato in lavoro.

Il ciclo di Carnot è costituito da quattro trasformazioni reversibili:
1) espansione isoterma alla temperatura T_2;
2) espansione adiabatica;
3) compressione isoterma alla temperatura T_1;
4) compressione adiabatica.



Nelle trasformazioni adiabatiche Q = 0 si ha:

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q_1 + Q_3 = Q_a + Q_c$

Il rendimento del ciclo è:

$\eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_a} = 1 + \frac{nRT_1 \ln(\frac{V_D}{V_C})}{nRT_2 \ln(\frac{V_B}{V_A})} = 1 - \frac{T_1 \ln(\frac{V_D}{V_C})}{T_2 \ln(\frac{V_B}{V_A})}$

Dividendo membro a membro i termini delle relazioni $T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$ e $T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$ si ottiene:

$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

MACCHINA : sistema termodinamico che compie trasformazioni cicliche

MACCHINA TERMICA : assorbe calore ($Q>0$) e produce lavoro ($W>0$)

MACCHINA FRIGORIFERA : assorbe lavoro fornito dall'esterno ($W<0$) e cede calore ($Q<0$)

In generale possiamo scrivere che complessivamente $Q = Q_A + Q_C$
Q_A = somma dei calori assorbiti
Q_C = somma dei calori ceduti

$W = W_F + W_S$
W_F = somma dei lavori forniti dal gas ($W_F > 0$)
W_S = somma dei lavori subiti ($W_S < 0$)

Definiamo, per un ciclo termico, il RENDIMENTO del ciclo:
$\Delta U = Q - W = 0 \Rightarrow Q = W$

$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$

$0 \le \eta < 1$ cioè $W < Q_A$, $|Q_C| < Q_A$, $Q_C \neq 0$

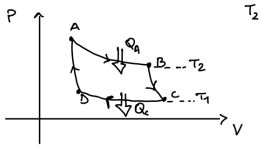
RENDIMENTO : percentuale di calore assorbito che viene convertita in lavoro

$Q_C \neq 0$ → non tutto il calore assorbito viene trasformato in lavoro ma una parte di esso viene ceduto all'esterno.

- CICLO DI CARNOT -
Ciclo termico costituito da 4 trasformazioni reversibili:

1) AB trasf. isoterma reversibile (espansione)
2) BC trasf. adiabatica reversibile (espansione)
3) CD trasf. isoterma reversibile (compressione)
4) DA trasf. adiabatica reversibile (compressione)

$T_2 > T_1$



AB: espansione isoterma
$Q_A = nRT_2 \ln(\frac{V_B}{V_A}) = W_{AB}$ → lavoro compiuto dal gas
>0

BC: adiabatica
$Q = 0$ $W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_v(T_1 - T_2) = nc_v(T_2 - T_1)$

CD: compressione isoterma
$Q_c = nRT_1 \ln(\frac{V_D}{V_C}) = W_{CD} < 0$ ($V_D < V_C$ il gas subisce lavoro)

DA: compressione adiabatica
$W_{DA} = -\Delta U_{DA} = nc_v(T_1 - T_2) = -W_{BC}$ lavoro subito
<0

Sommiamo tutti i contributi:

$Q = Q_a + Q_c = Q_A + 0 + Q_c + 0 = W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} =$

$= W_{AB} + W_{CD}$

Il rendimento sarà

$\eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_A} = 1 + \frac{nRT_1 \ln(V_D/V_C)}{nRT_2 \ln(V_B/V_A)} = 1 + \frac{T_1 \ln(V_D/V_C)}{T_2 \ln(V_B/V_A)}$

Per le trasform. adiabatiche $TV^{\gamma-1} = \text{costante}$
quindi

$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$
$T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$
} trasf. adiabatiche

Divido membro a membro le 2 espressioni:

$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$

Sostituendo nell'espressione di η:

$\eta = 1 + \frac{T_1 \ln(V_D/V_C)}{T_2 \ln(V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1 \ln(V_C/V_D)}{T_2 \ln(V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}}$

il rendimento del ciclo di Carnot dipende solo dalle 2 temperature delle 2 isoterme per le quali avviene lo scambio di calore.

$T_1 < T_2 \rightarrow \eta < 1$ sempre

$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \rightarrow Q_A > |Q_C|$

il gas complessivamente assorbe calore Q_A, produce lavoro W e parte del calore viene ceduto all'esterno.

36 Efficienza delle macchine frigorifere. Ciclo di Carnot per una macchina frigorifera

45. Coefficiente di prestazione delle macchine frigorifere. Ciclo di Carnot per una macchina frigorifera.

Se il ciclo è tale che venga richiesto un lavoro esterno estraendo calore da una o più sorgenti fredde per cederlo a sorgenti calde si parla di ciclo frigorifero e il dispositivo corrispondente è la macchina frigorifera. Si ha:

$Q = Q_a + Q_c < 0$

- CICLI FRIGORIFERI -
In un ciclo frigorifero il sistema assorbe lavoro e cede calore ($Q = W < 0$).

esempio : ciclo di Carnot percorso in senso inverso

Created by Notein

$W = W_F + W_S < 0$
Risultato subito

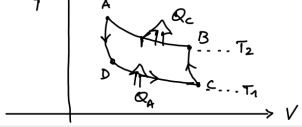
Dal momento che è stato compiuto un ciclo $\Delta U = 0$ e quindi, per il primo principio della termodinamica, $Q = W$.

Si definisce coefficiente di prestazione di un ciclo frigorifero il rapporto:

$$\xi = \frac{Q_a}{|W|}$$

tanto maggiore quanto minore è il modulo del lavoro speso nel ciclo.

Un ciclo di Carnot percorso in senso inverso è un esempio di ciclo frigorifero reversibile:
1) espansione adiabatica;



Nella trasf. DC il calore assorbito sarà:
$Q_A = nRT_1 \ln(V_C/V_D)$ calore assorbito dalla sorgente fredda ($a\ T_1 < T_2$)

$Q_c = nRT_2 \ln(V_A/V_B)$ calore ceduto alla sorgente calda ($a\ T_2 > T_1$)

EFFICIENZA del ciclo frigorifero:
$$\xi = \frac{Q_a}{|W|} = \frac{Q_A}{|Q_c + Q_A|} = \frac{nRT_1 \ln(V_C/V_D)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) + nRT_1 \ln(V_C/V_D)}$$

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \Rightarrow \xi = \frac{nRT_1 \ln(V_C/V_D)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) - nRT_1 \ln(V_C/V_D)}$$

$|Q_c| = |W| + Q_A$
calore ceduto è sempre maggiore di quello assorbito (in modulo)

2) espansione isoterma alla temperatura T_1;
3) compressione adiabatica;
4) compressione isoterma alla temperatura T_2.
Il coefficiente di prestazione è:

$$\xi = \frac{Q_a}{|Q_c + Q_a|} = \frac{nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) - nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

Per i cicli frigoriferi sono verificati alcuni fatti di carattere generale:
- il calore ceduto dal sistema alle sorgenti calde è sempre maggiore in modulo di quello assorbito, cioè sottratto alla sorgente fredda;
- il processo avviene sempre in presenza di lavoro fornito dall'ambiente al sistema: $Q_a + |W| = |Q_c|$.

37 I due enunciati del secondo principio della termodinamica e loro autoconsistenza

46. I due enunciati del secondo principio della termodinamica. Autoconsistenza dei due enunciati e considerazioni sulla reversibilità delle trasformazioni.

ENUNCIATO DI KELVIN-PLANK:
è impossibile realizzare un processo termodinamico che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura costante.

ENUNCIATO DI CLAUSIUS:
è impossibile realizzare un processo termodinamico che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo più freddo a uno più caldo

I due enunciati devono essere auto-consistenti: la negazione di uno dei due principi deve contraddire l'affermazione contenuta nell'altro.
Supponiamo che l'enunciato di Kelvin-Plank non sia vero: esiste un sistema che ha come unico scopo quello di trasferire una certa quantità di calore da una sorgente a temperatura minore ad una a temperatura maggiore. Questa conclusione contraddice quanto affermato dall'enunciato di Clausius.
Supponiamo che l'enunciato di Clausius non sia vero: esiste un sistema che ha come unico risultato quello di trasformare in lavoro tutto il calore fornito dalla sorgente a temperatura T. Questa conclusione contraddice quanto affermato nell'enunciato di Kelvin-Plank.

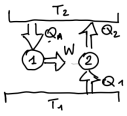
Quando viene compiuta una trasformazione reversibile da uno stato A a uno stato B, con scambio delle quantità Q_{AB} e W_{AB} tra sistema e ambiente è sempre possibile ripercorrerla in senso inverso scambiando le quantità $-Q_{AB}$ e $-W_{AB}$: alla fine sistema e ambiente sono tornati ai loro stati iniziali. Ciò si estende anche ai cicli reversibili. Quindi, una trasformazione reversibile non comporta alterazioni permanenti: è sempre possibile riportare allo stato iniziale sistema e ambiente.

- ENUNCIATO DI KELVIN-PLANCK:
E' impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a T uniforme.

- ENUNCIATO DI CLAUSIUS:
E' impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di calore da un corpo a temperatura minore ad uno a temperatura maggiore.

Consideriamo un processo monotermo (una sola sorgente che scambia calore):
$Q \le 0$, $W \le 0$ oppure $Q = 0$ e $W = 0$
Se il ciclo è reversibile possiamo avere $Q \ge 0$ e $W \ge 0$ ma per il 2° principio $Q > 0$ e $W > 0$ quindi le 2 cose saranno compatibili solo se $Q = 0$ e $W = 0$.

- Supponiamo di violare l'enunciato di Kelvin-Planck cioè di poter trasformare tutto il calore assorbito in lavoro come unico risultato:



1 sola sorgente

Il lavoro mette in funzione una macchina frig. che porta calore da T_1 a T_2

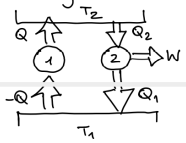
Per la 1ª macchina $Q_A = W$ ←
Per la 2ª macchina $W' = -W$

Complessivamente $Q_A + Q_2 = W + Q_2 = -W' + Q_2 =$
$= -Q_1 - Q_2 + Q_2 = -Q_1$
($Q_A = Q_1 - Q_2$)

Q_1 è positivo cioè >0 (assorbito dalla macchina 2) quindi $-Q_1$ è negativo (calore ceduto).
Complessivamente il lavoro totale è nullo in quanto non c'è scambio di lavoro con l'ambiente e quindi l'unico risultato è il passaggio di calore dalla sorgente T_1 (fredda) alla sorgente T_2 (calda) => violazione dell'enunciato di Clausius.

Questo lavoro è pari al calore complessivamente scambiato con la sorgente a temperatura T_2 => complessivamente tutto il calore scambiato ($Q + Q_2$) viene trasformato integralmente in lavoro => violazione dell'enunciato di Kelvin-Planck.

- Supponiamo ora di violare l'enunciato di Clausius cioè di poter realizzare una macchina che come unico risultato possa far passare il calore Q da una sorgente fredda (T_1) ad una sorgente calda (T_2)



Dimensioniamo la macchina 2 in modo che sia $Q_1 = Q$
Alla fine di un ciclo la sorgente T_1 non avrà scambiato calore perché $Q_1 - Q_1 = 0$ e il lavoro prodotto sarà pari a:
$W = Q_1 + Q_2 = Q + Q_2$ ed è positivo perché $Q_2 > |Q_1| = |Q|$

NOTE IN Created by Notein

38 Dimostrazione del teorema di Carnot

47. Enunciato e dimostrazione del teorema di Carnot. Lavoro massimo e calore minimo.

TEOREMA DI CARNOT:
tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse sorgenti alle temperature T_1 e T_2 hanno rendimento uguale; qualsiasi altra macchina che lavori tra le stesse sorgenti non può avere rendimento maggiore; il risultato è indipendente dal sistema che compie il ciclo; ogni altra macchina non reversibile che opera tra le stesse sorgenti ha un rendimento inferiore.

$\sum \frac{Q_j}{T_j} < 0 \rightarrow \oint \frac{dQ}{T} < 0$

Consideriamo un ciclo reversibile di un gas ideale di forma qualunque. Suddividiamo il ciclo in una serie di cicli di Carnot contigui. Tenuto conto che i tratti di adiabatica interni al ciclo vengono percorsi in versi opposti in due cicli contigui, per cui il loro contributo si elide, si definisce una macchina che compie un ciclo di forma qualunque costituito da una serie alternata di trasformazioni isoterme e adiabatiche operante con N = 2n (n è il numero di cicli) sorgenti alle temperature $T_1, T_2, \dots T_{i-1}, T_{2n}$, per ciascuno di questi cicli vale:

$\frac{Q_{2i}}{T_{2i}} + \frac{Q_{2i-1}}{T_{2i-1}} = 0$ con $i = (1, 2 \dots n)$

Sommando gli n cicli si ottiene:

$\sum \frac{Q_{2i}}{T_{2i}} + \frac{Q_{2i-1}}{T_{2i-1}} = 0 \rightarrow \sum \frac{Q_j}{T_j} = 0$ con $j = (1, 2 \dots N)$

Se gli scambi avvengono in forma irreversibile ipotizziamo per assurdo che per questo generico ciclo valga:

$\sum \frac{Q_j}{T_j} \geq 0$

per una macchina che opera tra due temperature T_1 e T_2 con $T_2 > T_1$ risulterebbe:

$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} \geq 0 \rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} \leq \frac{T_1}{T_2}$

Allora il rendimento della macchina risulterebbe maggiore o uguale a quello di una macchina reversibile che opera alle stesse temperature, in contrasto con il teorema di Carnot. Per le macchine irreversibili si verifica dunque:

$\sum \frac{Q_j}{T_j} < 0$

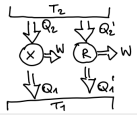
ENTROPIA:

l'entropia è una misura dello stato di disordine del sistema.

- TEOREMA DI CARNOT -

Voglio esprimere il massimo rendimento di una macchina termica che opera tra 2 sorgenti.

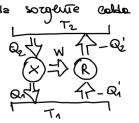
Supponendo di avere 2 macchine che lavorano utilizzando le stesse sorgenti a T_1 e T_2 dimensionate in modo tale che producano lo stesso lavoro W:



Supponiamo la macchina R reversibile, mentre per X non sappiamo.
I rendimenti delle 2 macchine saranno:

$\eta_x = \frac{W}{Q_2} \qquad \eta_R = \frac{W}{Q_2'}$

Per il 1° principio: $W = Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$
Supponiamo che $\eta_x > \eta_R$ e che R funzioni come macchina frigorifera, quindi subirà lavoro $-W$ e assorbirà calore $-Q_1'$ dalla sorgente fredda e cederà calore $-Q_2'$ alla sorgente calda:



Dall'ipotesi $\eta_x > \eta_R$ segue che:

$\frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q_2'} \Rightarrow Q_2 < Q_2' \Rightarrow \underline{Q_2 - Q_2' < 0}$ calore ceduto

ma poiché $W = Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$ ←

$-Q_2 + Q_2' = Q_1 - Q_1' > 0$ calore assorbito

Abbiamo ottenuto:
a) la macchina assorbe $Q_1 - Q_1'$ dalla sorg. fredda a T_1
b) complessivamente non viene scambiato lavoro con l'esterno
c) il calore ceduto è pari a $Q_2 - Q_2' = -Q < 0$ (ceduto alla sorg. calda a T_2)

Complessivamente si ha passaggio di calore dalla sorg. fredda a quella calda → violazione di Clausius
=> è sbagliata l'ipotesi $\eta_x > \eta_R$
Deve essere necessariamente $\eta_x \leq \eta_R$

Suppongo quindi $\eta_R > \eta_x$ (ex reversibile) faccio funzionare X come macchina frigorifera → anche questa ipotesi è sbagliata
=> avrei $\eta_x \neq \eta_R$ → le 2 relazioni sono compatibili se (reversibili) $\eta_x = \eta_R$

Tutte le macchine reversibili che operano tra 2 sorgenti hanno lo stesso rendimento. Qualsiasi altra macchina non può avere rendimento maggiore.

$\eta_R = \eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

$\eta_x \leq \eta_{R\,(Carnot)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

Per qualsiasi macchina termica reversibile $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{W_{max}}{Q_A} \Rightarrow$

$W_{max} = Q_A \eta = Q_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = Q_A - \frac{T_1}{T_2} Q_A = T_1 \left(\frac{Q_A}{T_1} - \frac{Q_B}{T_2}\right)$

Se consideriamo più sorgenti?

Vale il teorema di Carnot:

$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A}$

$1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} \Rightarrow \frac{Q_C}{T_1} + \frac{Q_A}{T_2} = 0$

Nella schematizzazione del teorema di Carnot:

$\frac{Q_1''}{T_1} + \frac{Q_2''}{T_2} = 0$ ($Q_1'' = Q_C$, $Q_2'' = Q_A$)

39 Teorema di Clausius. Definizione della funzione di stato entropia

- TEOREMA DI CLAUSIUS -

Data una macchina M qualsiasi che scambia calore con n sorgenti è valida la relazione:

$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$ con

Q_i = calori scambiati con la i-esima sorgente a temperatura T_i

Suddivido n macchine reversibili che operano tra le sorgenti a temperature $T_1, \dots, T_n$ e una sorgente a temperatura T_0.



R_i scambia con la sorgente a temperatura T_i il calore $-Q_i$ opposto a quello scambiato dalla macchina M. Ciascuna macchina R_i opera tra 2 sorgenti a temperature T_i e T_0 e quindi:

per R_1: $-\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_{01}}{T_0} = 0 \Rightarrow \frac{Q_{01}}{T_0} = \frac{Q_1}{T_1}$

per R_2: $-\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_{02}}{T_0} = 0 \qquad \frac{Q_{02}}{T_0} = \frac{Q_2}{T_2}$

per R_n: $-\frac{Q_n}{T_n} + \frac{Q_{0n}}{T_0} = 0 \qquad \frac{Q_{0n}}{T_0} = \frac{Q_n}{T_n}$

Sommando su tutte le macchine R_i:

$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{0i}}{T_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \Rightarrow \frac{1}{T_0} \sum_{i=1}^{n} Q_{0i} = \sum_{i=1}^{n} Q_i$

Alla fine di un ciclo le sorgenti a temperature $T_1, \dots, T_n$ sono rimaste invariate (il calore scambiato con M e R_i è uguale ed opposto quindi complessivamente nullo) pertanto la macchina complessiva scambia calore solo con la sorgente a temperatura T_0 → CICLO MONOTERMO ma quindi deve essere $\sum_{i=1}^{n} Q_{0i} \leq 0$ e $T_0 > 0$ $\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{0i}}{T_0} \leq 0}$ perciò

$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0}$ in generale

se M è una macchina reversibile:

$\sum_i \left(-Q_{0i}\right) \leq 0 \Rightarrow \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \geq 0$ compatibile solo se

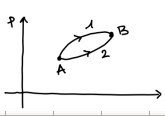
$\boxed{\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0}$ per macchine reversibili

$\boxed{\sum_i \frac{Q_i}{T_i} < 0}$ per macchine irreversibili

Generalizzando a $n \rightarrow \infty$ sorgenti:

$\boxed{\oint \frac{dQ}{T} = 0}$ macchine reversib. oppure $\boxed{\oint \frac{dQ}{T} < 0}$ irreversibili — TEOREMA DI CLAUSIUS

Consideriamo ora un sistema termodinamico che passi dallo stato A allo stato B:



Percorro la trasf. 2 in senso inverso e ritorno nello stato A → CICLO TERMODINAMICO REVERSIBILE
Vale il teorema di Clausius:

$\oint_B \frac{dQ}{T} = 0 =$

$= \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T}\right)_{-2} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_2 = 0$

$\Rightarrow \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_2 = \dots = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_i$ vale per ogni i (qualunque trasformazione reversibile)

Il valore dell'integrale $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev.}$ NON DIPENDE dalla scelta della trasformazione per portare dallo stato A allo stato B ma solo dallo stato iniziale e dallo finale.
Possiamo quindi definire la funzione ENTROPIA S che è quindi FUNZIONE DI STATO tale che:

$\boxed{\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev.} = S_B - S_A = \Delta S_{AB}}$

$S_A = S_0 + \int_0^A \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev.}$

$S_B = S_0 + \int_0^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev.}$

$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev.} = S_B - S_A$

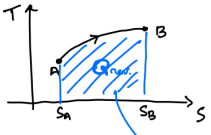
NOTE IN Created by Notein

In forma infinitesima $dS = \frac{dQ}{T}$ e $\frac{dQ}{T}$ è un differenziale esatto se calcolato lungo una trasformazione reversibile.

S è una quantità additiva (grandezza estensiva)
Unità di misura: J/K

- Se ho una trasformazione irreversibile? Calcolo il $\frac{dQ}{T}$ lungo una trasformazione reversibile tra gli stati termodinamici.

- Il diagramma TS -



$$dS = \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev.}$$

$$dQ = TdS$$

$$Q_{rev} = \int TdS$$

→ area sottesa della curva

40 Principio di aumento dell'entropia.

3. Principio di aumento dell'entropia. ESISTE UNA FUNZIONE CHIAMATA ENTROPIA S, CHE È UNA PROPRIETÀ INTRINSECA DI OGNI SISTEMA, NONCHÉ UNA GRANDEZZA MISURABILE CHE CAMBIA QUANDO IL SISTEMA UN PROCESSO REVERSIBILE. LE VARIAZIONI DI QUESTA FUNZIONE SONO DATE DALLA FORMULA: $\Delta S = \frac{Q}{T}$

Siano A e B due stati qualunque di un sistema termodinamico e passiamo da uno all'altro tramite 2 diverse trasformazioni: la trasformazione 1 irreversibile e la trasformazione 2 reversibile. Se percorriamo in senso inverso la trasformazione 2 abbiamo composto un ciclo irreversibile. Per il teorema di Clausius si ha:

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 + \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_2 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} < 0$$

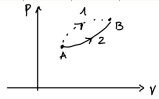
$$\rightarrow S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR}$$

L'integrale di dQ/T calcolato lungo una generica trasformazione AB dipende dalla trasformazione e non ha un particolare significato fisico (salvo obbedire alla precedente relazione) ed è quindi sempre minore dello stesso integrale ma per una trasformazione reversibile che è invece indipendente dalla trasformazione e definisce la variazione di entropia. Quindi, se per una generica trasformazione AB siamo in grado di calcolare $\int_A^B \frac{dQ}{T}$, in generale il risultato non è uguale alla variazione di entropia $S_B - S_A$ ma minore; se vogliamo calcolare la variazione di entropia per quella trasformazione dobbiamo servirci di un'altra trasformazione AB reversibile.

Se il sistema che descrive la trasformazione AB è isolato termicamente si ha dQ = 0 e quindi:

$$S_B - S_A \geq 0 \rightarrow S_B \geq S_A$$

L'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire: essa aumenta se la trasformazione è irreversibile, resta costante solo se la trasformazione è reversibile. La precedente relazione esprime il principio di aumento dell'entropia.



Per il teorema di Clausius:

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0$$

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T}\right)_2 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr.} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev.} < 0$$

$\Delta S = S_B - S_A$

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev.} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr.}$$

Variaz. di entropia dipende solo dagli stati iniziale e finale — dipende dalla particolare trasformazione

$$dS = \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} > \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr.}$$

Se il sistema è isolato termicamente $dQ = 0$

$S_B - S_A = \Delta S \geq 0$ => $S_B \geq S_A$

$dS \geq 0$ SISTEMA ISOLATO

L'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire: aumenta se la trasf. è irreversibile oppure resta costante se la trasf. è reversibile.

FORMULAZIONE MATEMATICA DEL 2° PRINCIPIO

FORMULAZIONE MATEMATICA DEL 2° PRINCIPIO

UNIVERSO TERMODINAMICO = SISTEMA TERMODINAMICO + AMBIENTE TERMODINAMICO

L'universo termodinamico è necessariamente ISOLATO

$\Delta S_{Univ.} \geq 0$ e $\Delta S_{Univ.} = \Delta S_{sistema} + \Delta S_{ambiente}$

Se si compie una trasf. reversibile

$\Delta S_{Univ.} = 0 \iff \Delta S_{sistema} = -\Delta S_{ambiente}$

Se si compie una trasf. irreversibile

$\Delta S_{Univ.} > 0 \Rightarrow \Delta S_{sistema} \neq -\Delta S_{ambiente}$

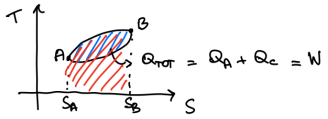
Se la trasf. è ciclica:
- se il ciclo è REVERSIBILE $\Delta S_{Univ} = \Delta S_{amb.} = 0$
- se il ciclo è IRREVERSIBILE $\Delta S_{Univ} = \Delta S_{amb.} > 0$ } $\Delta S = 0$ per

L'IRREVERSIBILITÀ è SEMPRE ASSOCIATA AD UN AUMENTO DELL'ENTROPIA

Tutti i processi naturali sono irreversibili quindi l'Universo aumenta la sua entropia.

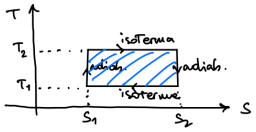
41 Il piano T-S per un ciclo reversibile

Ciclo reversibile



Il rendimento di un ciclo termico sarà dato dal rapporto tra l'area racchiusa dalle 2 curve (W) e l'area sottesa dalla prima curva (Q_A), quindi sarà < 1

- Ciclo di Carnot -



$$dS = \frac{dQ}{T}$$

$Q_A = T_2 (S_2 - S_1)$ ←
$Q_C = T_1 (S_1 - S_2)$ ←

NOTE IN Created by Notein

$Q = Q_A + Q_c = (S_2 - S_1)(T_2 - T_1) = W$

$\eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

$S_2 - S_1 = \frac{Q_A}{T_2} = -\frac{Q_c}{T_1}$ e $W = (T_2 - T_1)\frac{Q_A}{T_2}$

Trasf. isoterma reversibile $\Delta S = \frac{Q}{T}$ = calore totale scambiato

Adiabatica reversibile $\Delta S = 0$

Trasf. ciclica complessivamente : $\Delta S = 0$ (S è una funzione di stato).

42 Variazione di entropia per una trasformazione di un gas perfetto.

- ENTROPIA DEL GAS IDEALE -

n moli di un gas che passano da uno stato A (p_A, V_A, T_A) a uno stato B (p_B, V_B, T_B)

$$dQ = nC_v dT + dW$$

Scelgo AB trasformazione reversibile :

$dW = pdV$, $pV = nRT$ $\Rightarrow$ $dW = \frac{nRT}{V}dV$ ←

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev.} = \int_A^B \frac{nC_v dT}{T} + \int_A^B \frac{nR}{V}dV =$$

$$\boxed{\Delta S_{AB} = nC_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

Relazione di Mayer : $C_p = C_v + R$

$R = c_p - c_v$

$$\Delta S_{AB} = nC_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nC_p \ln\frac{V_B}{V_A} - nC_v \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$pV = nRT$ $\quad T = \frac{pV}{nR}$ sostituisco nel 1° termine

$$nC_v \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) + nC_v \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nC_p \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) - nC_v \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) =$$

$$\boxed{\Delta S_{AB} = nC_v \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) + nC_p \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

$$\boxed{\Delta S_{AB} = nC_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - nR \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)}$$

TRASFORMAZIONE ISOTERMA

$$\Delta S_{AB} = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -nR \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)$$

TRASFORMAZIONE ISOCORA

$$\Delta S_{AB} = nC_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = nC_v \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)$$

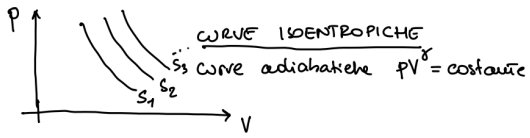
TRASFORMAZIONE ISOBARA

$$\Delta S_{AB} = nC_v \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nC_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

TRASFORMAZIONE ADIABATICA

Se la trasf. è adiabatica reversibile

$\Delta S_{AB} = 0$ $\Rightarrow$ $S_A = S_B$ = costante



Es. trasf. adiabatica ma irrev. e isoterma

$\Delta S_{AB} = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ e quindi $S_B > S_A$ $(\Delta S_{AB} > 0)$ poiché $V_B > V_A$

$\Delta S_{univ.} = \Delta S_{sistema} > 0$

NOTE IN Created by Notein

- TRASFORMAZIONI REVERSIBILI E IRREVERSIBILI:

Gli stati intermedi tra uno stato termodinamico A ed uno stato termodinamico B possono non essere necessariamente di equilibrio. Ad esempio:

- corpi solidi a contatto tra loro con $T_1 \neq T_2$
- contenitore con una parete che divide vuoto e gas a bassa pressione

REVERSIBILE: la trasformazione avviene attraverso stati di equilibrio termodinamico

IRREVERSIBILE: passa attraverso stati di non equilibrio

REVERSIBILE: si può invertire il verso della trasformazione, cioè si inverte il segno degli scambi energetici

$A \to B$ rev. $\quad \Delta U = U_B - U_A$, Q e W

$B \to A$ rev. $\quad -\Delta U = U_A - U_B$ e $Q_{AB} = -Q_{BA}$ e $W_{AB} = -W_{BA}$

Created by Notein