

DOMANDA 2

• LEGGI ORARIE (MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATA):

DEFINIZIONE DI VELOCITÀ ED ACCELERAZIONE MEDIA:

$$\bar{Q} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_f) - v(t_i)}{t_f - t_i} \quad \bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i}$$

PER OTTENERE IL VALORE ISTANTANEO (CUI È PUNTUALE) DI Q E V , FACCIO TENDERE A ZERO IL RAPPO Δt

$$Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} \quad V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

RISOLVO LE EQ. DIFFERENZIALI:

$$Q = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow Q dt = dv(t) \Rightarrow \int_{t_0}^{t} Q dt = \int_{t_0}^{t} dv(t)$$

NEL CASO DI MOTI RETILINEI UNIFORMEMENTE ACCELERATO, $Q = \text{cost}$, E POSSO PORTARE FUORI DALL'INTEGRALE

$$\Rightarrow Q \int_{t_0}^{t} dt' = \int_{t_0}^{t} dv(t') \Rightarrow Q(t - t_0) = v(t) - v(t_0)$$

$$\Rightarrow v(t) = v(t_0) + a(t - t_0)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v(t) dt = dx \Rightarrow \int_{t_0}^t (v(t_0) + a(t' - t_0)) dt' = \int_{x_0}^x dx'$$

$$\Rightarrow x - x_0 = v(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

QUINDI LE LEGGI ORARIE SARANNO:

$$x = x_0 + v(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

$$v = v(t_0) + a(t - t_0)$$

$$a = \text{costante}$$

• CASO ACCELERAZIONE NON COSTANTE:

IPOTIZZO $t_0 = 0$ E $a(t) = kt$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a(t) dt = dv \Rightarrow \int_0^t kt' dt' = \int_{v_0}^{v(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} kt^2 = v(t) - v_0 \Rightarrow v(t) = v_0 + \frac{1}{2} kt^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v(t) dt = dx \Rightarrow \int_0^t (v_0 + \frac{1}{2} kt'^2) dt' = \int_{x_0}^x dx'$$

$$\Rightarrow v_0 t + \frac{1}{6} kt^3 = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6} kt^3$$

LE LEGGI ORIZZONTALI:

$$a(t) = kt, \quad k = \text{cost.}$$

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{2} kt^2$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6} kt^3$$

DOMANDA 3

• NOZIONE DI FORZA:

VIENE DEFINITA FORZA UNA QUALSIASI AZIONE CHE MODIFICA LO STATO DI QUIETE O DI MOTO DI UN PUNTO MATERIALE DI MASSA m . SI INDICA CON $\vec{F}$, SI ESPRIME IN NEWTON [N] ED È UNA GRANDEZZA VETTORIALE IN QUANTO IL VETTORE $\vec{F}$ VIENE INDIVIDUATO DA UNA DIREZIONE, DA UN VERSO E DA UN'INTENSITÀ.

• I PRINCIPIO DELLA DINAMICA:

IN ASSENZA DI FORZE APPLICATE AD UN PUNTO MATERIALE DI MASSA m O SE LA RISULTANTE DI TALI FORZE APPLICATE AD ESSO È NULLA, IL PUNTO MATERIALE PERMANE NEL SUO STATO DI QUIETE O DI MOTO RETTILINEO UNIFORME.

CONSIDERO UN PUNTO MATERIALE DI MASSA m CHE SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME E, ALL'ISTANTE $t = t_0$, SI MISURA $v(t_1) = v(t_0)$



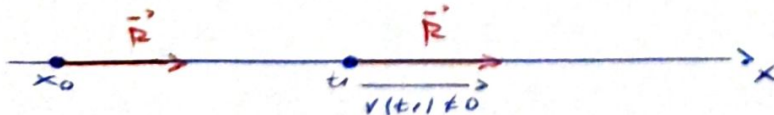
SE SI MISURA CHE $\forall t \in [t_0, t_1] \quad v(t_1) = v(t_0)$, ALLORA SI PUÒ DIRE CHE LA RISULTANTE DELLE FORZE APPLICATE AD m NELL'INTERVALLO TEMPORALE $[t_0, t_1]$ È SEMPRE NULLA.

• II PRINCIPIO DELLA DINAMICA:

SE SU UN PUNTO MATERIALE DI MASSA m SONO APPLICATE n FORZE LA CUI RISULTANTE NON È NULLA, IL PUNTO MATERIALE SUBIRÀ UN'ACCELERAZIONE ESPRESSA DALLA SEGUENTE LEGGE:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}$$

CONSIDERO UN PUNTO MATERIALE DI MASSA m SOTTO L'AZIONE DI UNA RISULTANTE $\vec{R} \neq 0$ CON $v_0 = 0$



SUPPONENDO $\vec{R}$ COSTANTE NEL TEMPO, IL PUNTO MATERIALE SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO.

• III LEGGE DELLA DINAMICA:

SE UN CORPO A ESERCE UNA FORZA $\vec{F}_{AB}$ SU UN CORPO B, IL CORPO B REAGISCE ESERCITANDO UNA FORZA $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ SUL CORPO A.



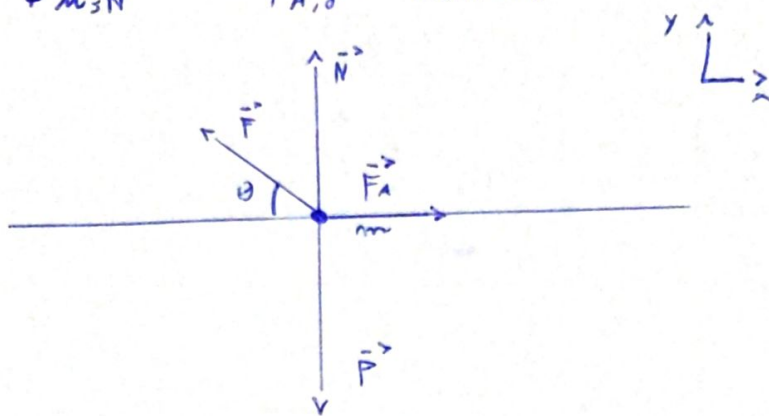
$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$$

DOMANDA 5

ATTRITO STATICO E DINAMICO:

$$F_{A,S}^{\max} = +\mu_s N$$

$$F_{A,d} = -\mu_d N \hat{u}_v$$



$$y: N + F \sin \theta - mg = 0$$

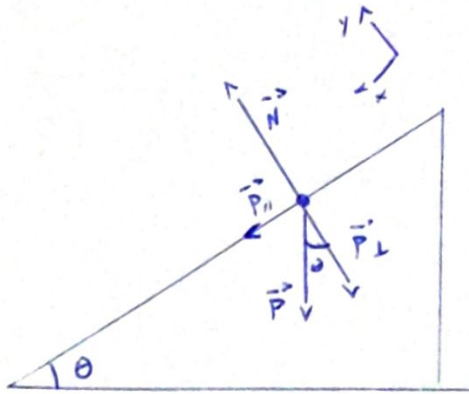
$$x: F_A - F \cos \theta = 0$$

$$F_{A,S}^{\max} = \mu_s N = \mu_s (mg - F \sin \theta)$$

$$F_{A,d} = -\mu_d N = -\mu_d (mg - F \sin \theta)$$

DOMANDA 6

PIANO INCLINATO E CONDIZIONE DI NON SCIVOLAMENTO:

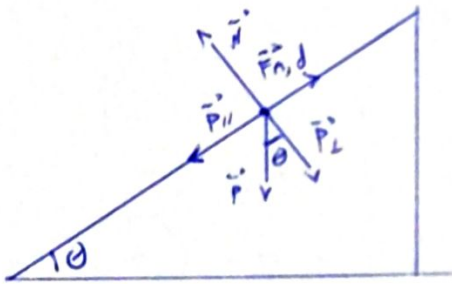


NEL CASO IN CUI IL PIANO SIA PRIVO DI ATTRITO

$$\begin{aligned} y: N - P_{\perp} &= 0 \\ x: P_{\parallel} &= ma \end{aligned} \quad \begin{cases} N = mg \cos \theta \\ mg \sin \theta = ma \end{cases} \quad \begin{cases} N = mg \cos \theta \\ a = g \sin \theta \end{cases}$$

SE IL PIANO È PRIVO DI ATTRITO, IL PUNTO MATERIALE SCIVOLERÀ INEVITABILMENTE LUNGO IL PIANO CON UN MUOV. RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$a = g \sin \theta = \text{cost.}$$



~~$$\begin{aligned} y: N - P_{\perp} &= 0 \\ x: P_{\parallel} - F_A &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} N = mg \cos \theta \\ mg \sin \theta = F_A \end{cases}$$~~

$$\begin{aligned} y: N - P_{\perp} &= 0 \\ x: P_{\parallel} - \vec{F}_{A,d} &= ma \end{aligned} \quad \begin{cases} N = mg \cos \theta \\ mg \sin \theta - M mg \cos \theta = ma \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = mg \cos \theta \\ a = g (\sin \theta - M \cos \theta) \end{cases}$$

$$\sin \theta - M \cos \theta > 0 \Leftrightarrow \tan \theta > \mu$$

IL CORPO SCIVOLA LUNGO IL PIANO SE E SOLO SE

$$\theta > \arctan \mu$$

• SE $\theta = \arctan \mu$, IL CORPO SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME O
RIMANE FERMO IN QUANTO $Q = 0 \iff \vec{R} = 0$

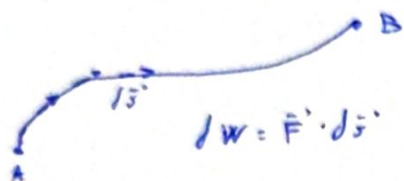
• SE $\theta < \arctan \mu$, IL CORPO NON SLIVOLA LUNGO IL PIANO

DOMANDA 7

• DEFINIZIONE DI LAVORO DI UNA FORZA:

DATO UN PUNTO MATERIALE DI MASSA m CHE SOTTO L'AZIONE DI UNA GENERICA FORZA $\vec{F}$ COMPIE UNA DETERMINATA TRAIETTORIA, DIREMO W IL LAVORO DELLA FORZA $\vec{F}$ COMPIUTO DURANTE LO SPOSTAMENTO DALLA POSIZIONE A ALLA POSIZIONE B LA SEGUENTE QUANTITÀ SCALARE:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B |\vec{F}| |d\vec{s}| \cos\theta = \int_A^B F_p ds$$



DOVE $|\vec{F}| \cos\theta = F_p$ È LA PROIEZIONE DI $\vec{F}$ LUNGO LA DIREZIONE INDIVIDUATA DA $d\vec{s}$

- $W > 0 \Rightarrow$ LAVORO MOTORE
- $W < 0 \Rightarrow$ LAVORO RESISTENTE

• DEFINIZIONE DI POTENZA:

• POTENZA ISTANTANEA:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}_p| |\vec{v}|$$

• POTENZA MEDIA:

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$$

• TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA:

$$dW = F_p ds = m a_p ds = m \frac{dv}{dt} ds = m dv \frac{ds}{dt} = m v dv$$

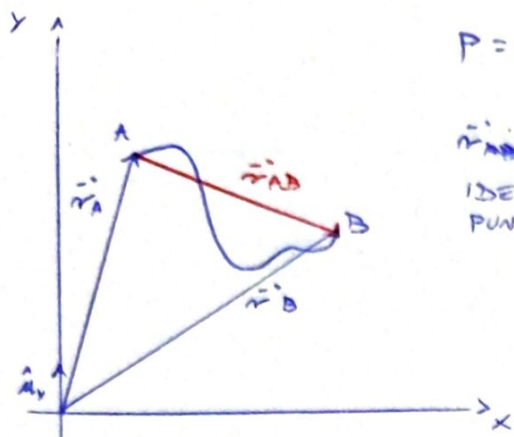
$$\Rightarrow dW = m v dv \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B m v dv \Rightarrow W_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{AB} = \Delta E_k^{AB}}$$

SITUAZIONE DI UNA LEGGE GENERALE CHE NON DIPENDE DAL TIPO DI FORZA

DOMANDA 3:

• LAVORO DELLA FORZA PESO:



$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{u}_y$$

$\vec{r}_{AB}$ È IL RAGGIO VETTORE, OVVERO IL VETTORE CHE IDENTIFICA ~~UNIFORMEMENTE~~ LA POSIZIONE DEL PUNTO MATERIALE

$$W = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -mg\hat{u}_y \cdot d\vec{s} = -mg \int_A^B \hat{u}_y \cdot d\vec{s} =$$

$$= -mg\hat{u}_y \cdot \vec{r}_{AB} = -mg(y_B - y_A) = mg(y_A - y_B)$$

$$\Rightarrow \boxed{W_P^{AB} = mg(y_A - y_B)}$$

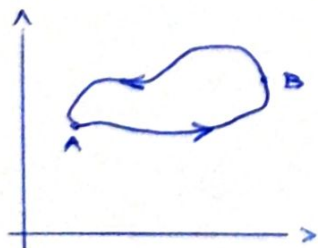
• FORZA CONSERVATIVA E LAVORO:

IL LAVORO DI UNA FORZA CONSERVATIVA NON DIPENDE DALLA TRAIETTORIA SCELTA PER SPOSTARSI DA UN PUNTO A A UN PUNTO B MA SOLO DALLA POSIZIONE INIZIALE E DALLA POSIZIONE FINALE.

$$\boxed{W_{F_c}^{AB} = -\Delta U^{AB}}$$

DOVE $\Delta U = mg\Delta y$ È L'ENERGIA POTENZIALE

PER UN GENERICO PERCORSO CHIUSO ABA:



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\boxed{W_{F_c} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0}$$

• PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA:

POICHÉ PER UNA FORZA CONSERVATIVA $W = -\Delta U$ E, INOLTRE, PER IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA, $W = \Delta E_K$ SI HA CHE:

$$W_{F_c} = -\Delta U = \Delta E_K \Rightarrow U_i - U_f = E_K^i - E_K^f$$

$$\Rightarrow \cancel{E_P^i} + \cancel{E_K^i} = \cancel{E_P^f} + E_K^f$$

$$\Rightarrow E_m^i = E_m^f \Rightarrow \boxed{\Delta E_m = 0}$$

DOVE $\Delta E_m = \Delta E_K + \Delta U$

• LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO:

$$W = \int_A^B \vec{F}_{A,d} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_d N \hat{u}_v \cdot d\vec{s} = -\mu_d N \int_A^B |\hat{u}_v| \cdot ds \cdot \cos 90^\circ = -\mu_d N \int_A^B ds$$

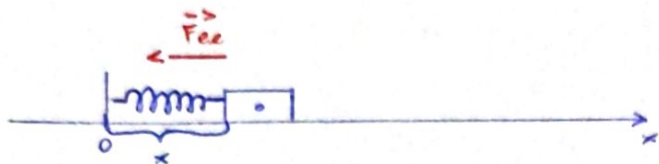
$$\Rightarrow \boxed{W^{AB} = -\mu_d N \Delta S^{AB}}$$

NEL CASO DELLA FORZA DI ATTRITO, IL LAVORO DIPENDE DALLA TRAIETTORIA SCELTA IN QUANTO COMPARE IL TERMINE $\int_A^B ds$, OVVERO IL PERCORSO EFFETTIVO CAPIUTO DAL PUNTO INIZIALE PER SPOSTARSI DAL PUNTO A AL PUNTO B.

DOMANDA 9

DEFINIZIONE DI FORZA ELASTICA:

DEFINIAMO FORZA ELASTICA UNA FORZA UNIDIMENSIONALE CON DIREZIONE COSTANTE E VERSO RIVOLTO AD UN PUNTO O, CHIAMATO CENTRO, E IL CUI MODULO È DIRETTAMENTE PROPORZIONALE ALLA DISTANZA DEL PUNTO MATERIALE DA O.



$$\vec{F}_{el} = -kx\hat{u}_x$$

LAVORO DELLA FORZA ELASTICA:

$$W = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -kx\hat{u}_x \cdot d\vec{s} = -k \int_A^B x dx = -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_A^B = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W^{AB} = -\Delta U^{AB}} \quad \text{con } U = \frac{1}{2}kx^2$$

$\Rightarrow$ LA FORZA ELASTICA È UNA FORZA CONSERVATIVA.

OSCILLATORE ARMONICO:

DAL II PRINCIPIO DELLA DINAMICA:

$$\vec{F}_{el} = m\vec{a} \Rightarrow -kx = ma \Rightarrow a = -\frac{kx}{m} \Rightarrow a + \frac{kx}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2x(t) = 0}$$

DOMANDA 10

MOTO ARMONICO E LEGGE ORBITALE:

RISOLVENDO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL SECONDO ORDINE DELL'OSCILLATORE ARMONICO,

$$\begin{aligned}x(t) &= A \sin(\omega t + \varphi) \\v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\a(t) &= \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

A = AMPIEZZA

φ = FASE

T = PERIODO = $\frac{2\pi}{\omega}$

$$\cancel{\frac{d^2x(t)}{dt^2}} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = 0 \quad (\checkmark)$$

IN REALTÀ POSSO ANCHE CONSIDERARE UN'ULTERIORE SOLUZIONE:

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -a\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + a\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad (\checkmark)$$

$$\text{SIA } A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad c = \frac{a}{A}, \quad s = -\frac{b}{A} \quad \text{CON } 0 \leq c \leq 1 \text{ E } 0 \leq s \leq 1$$

$$c^2 + s^2 = \frac{a^2 + b^2}{A^2} = \frac{A^2}{A^2} = 1$$

$$\text{QUINDI, } a = A \cos \varphi \quad b = -A \sin \varphi \Rightarrow \varphi = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right)$$

UTILIZZO LE FORMULE DI ADDIZIONE:

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t) \cos(\varphi) - A \sin(\omega t) \sin(\varphi) = \\&= a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)} \Rightarrow \text{SOLUZIONE PIÙ GENERALE}$$

• RICAVO AMPIEZZA E FASE;

CONDIZIONI INIZIALI :
$$\begin{cases} x(0) = A \sin \varphi & (1) \\ v(0) = A \omega \cos \varphi & (2) \end{cases}$$

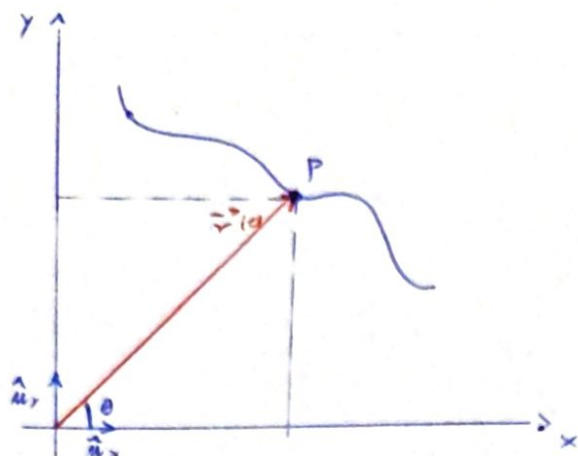
DALLA (1) : $A = \frac{x_0}{\sin \varphi}$

DALLA (2) : $v_0 = \frac{x_0}{\sin \varphi} \omega \cos \varphi \Rightarrow \tan(\varphi) \cdot v_0 = x_0 \omega$

$$\Rightarrow \tan(\varphi) = \frac{x_0 \omega}{v_0} \Rightarrow \boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{x_0 \omega}{v_0}\right), A = \frac{x_0}{\sin \varphi}}$$

DOMANDA 11

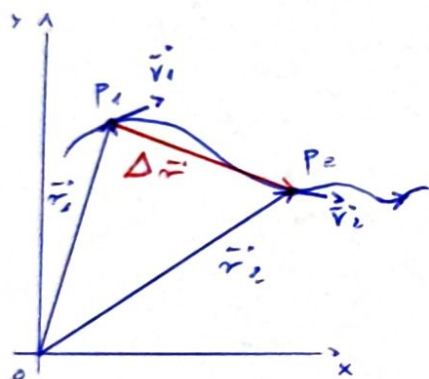
CASO GENERALE DEL MOTO NEL PIANO:



IN QUESTO CASO, LA TRAIETTORIA COMPIUTA DA UN PUNTO MATERIALE È UNA LINEA CURVA E, QUINDI, PER DETERMINARE $\vec{r}(t)$ SERO CONOSCERE $x(t)$ E $y(t)$ AD OGNI ISTANTE

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{m}_x + y(t)\hat{m}_y \Rightarrow \begin{cases} x(t) = r \cos \theta \\ y(t) = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \tan \theta = \frac{y(t)}{x(t)}$$

- COORDINATA CURVILINEA (O ASCISSA CURVILINEA) S:



S = LUNGHEZZA DELLA TRAIETTORIA

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) \quad \text{OVVERO LA VELOCITÀ VETTORIALE}$$

$d\vec{r} = ds \hat{m}_T$, CON $\hat{m}_T$ VETTORE TANGENTE ALLA CURVA S CHE DERIVA LA TRAIETTORIA CURVILINEA E ds SPOSTAMENTO INFINITESIMO LUNGO LA TRAIETTORIA STESSA

NEL CASO DEL MOTO GENERALE NEL PIANO, ESISTONO INFINITI SPOSTAMENTI INFINITESIMI LUNGO LA TRAIETTORIA DI DIREZIONE VARIABILE

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{m}_T = v \hat{m}_T}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{u}_x + \frac{dy}{dt} \hat{u}_y = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{con} \quad \tan(\varphi) = \frac{v_y}{v_x} \quad \text{dove } \varphi \text{ È L'ANGOLO COMPRESO TRA I VETTORI } v_x \hat{u}_x \text{ E } v_y \hat{u}_y$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} (v \hat{u}_T)$$

POICHÉ SIA $v = v(t)$ SIA $\hat{u}_T$ VARIANO NEL TEMPO,

$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv(t)}{dt} + v \frac{d\hat{u}_T}{dt} = \underbrace{\frac{dv(t)}{dt} \cdot \hat{u}_T}_{1^{\text{o}} \text{ TERMINE}} + \underbrace{\frac{d\hat{u}_T}{dt} v(t)}_{2^{\text{o}} \text{ TERMINE}}$$

IL VETTORE $\hat{u}_T$ HA SEMPRE MODULO 1 PER DEFINIZIONE. LA SUA DERIVATA, QUINDI, DIPENDE SOLO DALLA SUA ROTAZIONE IN FUNZIONE DEL TEMPO.

PER UN GENERICO VETTORE $\vec{w}$ DI MODULO COSTANTE SI HA CHE:

$$w^2 = w \cdot w = \vec{w} \cdot \vec{w}$$

$$\frac{d(\vec{w} \cdot \vec{w})}{dt} = 0 = \frac{d\vec{w}}{dt} \cdot \vec{w} + \frac{d\vec{w}}{dt} \cdot \vec{w} = 2 \vec{w} \cdot \frac{d\vec{w}}{dt} = 2 \frac{d\vec{w}}{dt} \cdot \vec{w} = 0$$

UN PRODOTTO SCALARE È NULLO SE $\frac{d\vec{w}}{dt} \perp \vec{w}$. APPLICANDO GLI STESSI PASSAGGI ALLA DERIVATA DI $\hat{u}_T$, DEVIAMO CHE QUESTA SIA UGUALE AL VETTORE NORMALE ALLA TRAIETTORIA CURVILINEA $\hat{u}_N$.

$$\frac{\Delta \hat{u}_T}{\Delta t} = \frac{\Delta \hat{u}_T}{\Delta \theta} \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$



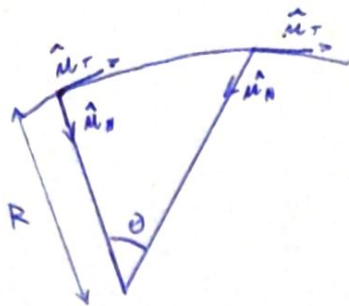
$$= \frac{2 \sin \left| \frac{\Delta \theta}{2} \right|}{\Delta \theta} \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \left| \frac{\Delta \theta(t)}{2} \right|}{\Delta \theta(t)} \cdot \frac{\Delta \theta(t)}{\Delta t} = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{u}_N$$

$\frac{d\theta(t)}{dt}$ È LA VELOCITÀ ANGOLARE CON CUI RUOTA IL VETTORE $\hat{u}_T$ O

$$\Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} v(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \cdot v(t) = v \omega \hat{u}_N$$

$$\boxed{\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{u}_T} \Rightarrow \text{RELAZIONE DI POISSON}$$



$$ds = R d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} \cdot \vec{v}(t) = v \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = v \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{1}{R} v \hat{u}_N$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} \cdot \vec{v}(t) = \frac{v^2}{R} \hat{u}_N$$

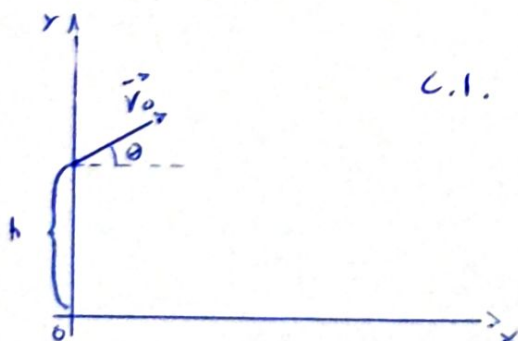
DISCUTTO $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \hat{u}_T \Rightarrow \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \parallel \hat{u}_T$ INFATTI $\vec{v}(t)$ È TANGENTE ALLA TRAIETTORIA
E $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \hat{u}_T$ AVRÀ COME MODULO IL MODULO DELLA DERIVATA

$$\text{DI } \frac{v(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \hat{u}_T + \frac{d\hat{u}_T}{dt} \cdot \vec{v}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \hat{u}_T + \frac{v^2}{R} \hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left| \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right|^2 + \left| \frac{v^2}{R} \right|^2}}$$

• MOTO PARABOLICO:



C.I.

$$x(0) : \begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos \theta \\ v_y(0) = v_0 \sin \theta \end{cases}$$

$$a : \begin{cases} a_x = 0 = \text{costante} \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$x : \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = h \end{cases}$$

$$v_x = \int a_x dx = C_{1x} = \text{costante} \Rightarrow v_x = v_{0x}$$

$$v_y = \int a_y dy = -gt + C_{1y} \Rightarrow \begin{cases} v_y(t) = -gt + C_{1y} \\ v_{0y}(0) = v_0 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow v_y(t) = -gt + v_{0y}$$

$$x(t) = \int v(t) dt = \int v_{0x} dt = v_{0x} t + c_x$$

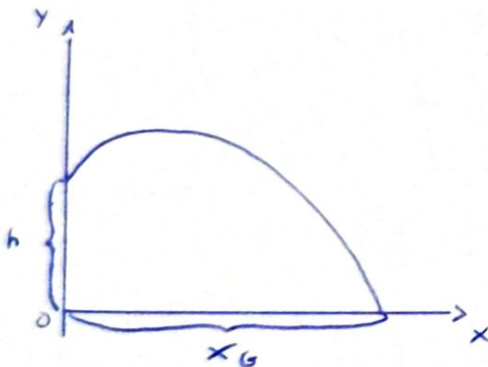
$$\begin{cases} v_{0x} t \quad x = v_{0x} t + c_x \\ x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = v_{0x} t$$

$$y(t) = \int v_y(t) dt = \int (-gt + v_{0y}) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + c_y$$

$$\begin{cases} y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + c_y \\ y(0) = h \end{cases} \Rightarrow c_y = h \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + h$$

$$\Rightarrow x: \begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos \theta \\ a = 0 \end{cases} \quad y: \begin{cases} y(t) = h + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta - gt \\ a = -g \end{cases}$$

• GITTATE:



$$y(x_G) = 0 \Rightarrow h + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$x_G = v_{0x}t \Rightarrow t = \frac{x_G}{v_0 \cos \theta}$$

$$\Rightarrow h + \frac{v_0 \sin \theta}{v_0 \cos \theta} x_G - \frac{1}{2}g \frac{x_G^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} = 0 \Rightarrow h + V_0^2 h \cos^2 \theta + V_0^2 \cos \theta x_G - \frac{1}{2}g x_G^2 = 0$$

$$\Rightarrow (g)x_G^2 - (2V_0^2 \cos \theta)x_G - 2V_0^2 h \cos^2 \theta = 0$$

$$x_{G, \pm} = \frac{V_0^2 \cos \theta \pm \sqrt{V_0^4 \cos^2 \theta + 4V_0^2 g h \cos^2 \theta}}{g} =$$

$$= \frac{V_0^2 \cos \theta \pm \sqrt{V_0^4 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{2gh}{V_0^2 \cos^2 \theta}\right)}}{g} =$$

$$h + V_0 \sin \theta \cdot \frac{x_G}{V_0 \cos \theta} - \frac{g}{2} \frac{x_G^2}{V_0^2 \cos^2 \theta} = 0$$

$$\Rightarrow -2V_0^2 \cos^2 \theta h - 2V_0^2 \cos \theta \sin \theta x_G + g x_G^2 = 0$$

$$\Rightarrow (g) x_G^2 - (2V_0^2 \sin \theta \cos \theta) x_G - 2V_0^2 \cos^2 \theta h = 0$$

$$x_{G1,2} = \frac{V_0^2 \sin \theta \cos \theta \pm \sqrt{V_0^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2V_0^2 \cos^2 \theta h g}}{g}$$

$$= \frac{V_0^2 \sin \theta \cos \theta \pm V_0^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1 + \frac{2gh}{V_0^2 \sin^2 \theta}}}{g}$$

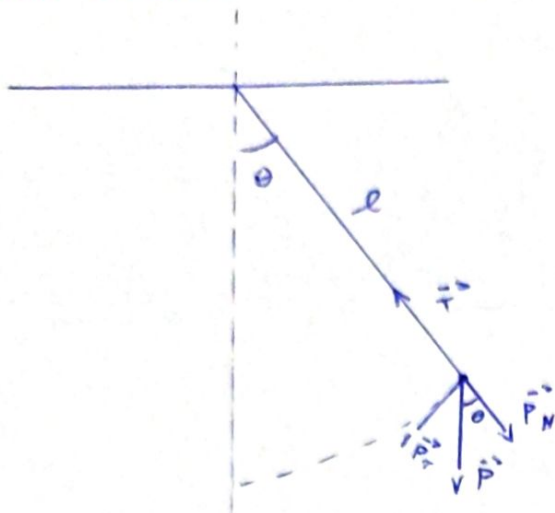
$$= \frac{V_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{V_0^2 \sin^2 \theta}} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_G = \begin{cases} \frac{V_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{V_0^2 \sin^2 \theta}} \right) & \text{if } h \neq 0 \\ \frac{2V_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta & \text{if } h = 0 \end{cases}}$$

$$t_v = \frac{x_G}{V_0 \cos \theta} \Rightarrow \boxed{t_v = \frac{V_0 \sin \theta}{g} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{V_0^2 \sin^2 \theta}} \right)}$$

DOMANDA 12

• PENDOLO SEMPLICE



IN UN PENDOLO SEMPLICE SI VERIFICA UN'OSCUILLAZIONE LUNGO UN ARCO DI CIRCUNFERENZA DI RAGGIO l

DAL II PRINCIPIO DELLA DINAMICA:

$$R_T = -mg \sin \theta = m a_T$$

$$R_N = -mg \cos \theta + T = m a_N$$

$$a_T = -g \sin \theta = l \alpha = l \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}$$

$$a_N = \frac{v^2}{l} = \frac{T - mg \cos \theta}{m}$$

$$\Rightarrow l \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = -g \sin \theta \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin[\theta(t)] = 0}$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\theta^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad \text{SERIE LO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR}$$

TUTTAVIA, PER PICCOLE OSCILLAZIONI (CIOE PER VALORI DI θ DELL'ORDINE DI 10^{-3}), $\sin \theta \approx \theta$

QUINDI, PER UN PENDOLO SEMPLICE CARATTERIZZATO DA PICCOLE OSCILLAZIONI,

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta(t) = 0 \quad \boxed{\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta(t) = 0}$$

$$\text{CON PULSAZIONE } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{E PERIODO } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

LA SOLUZIONE DI TALE EQ. DIFFERENZIALE È:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

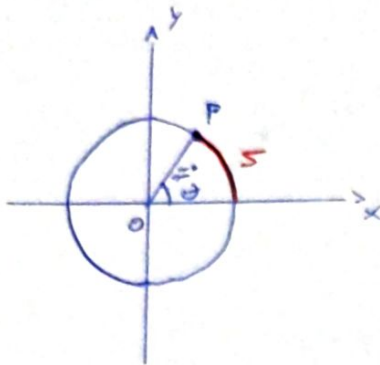
$$x(t) = l \theta(t) = l \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \omega l \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

DOMANDA 13

• MOTO CIRCOLARE E VARIABILI CINEMATICHE:

IL MOTO CIRCOLARE È UN MOTO NEL PIANO IN CUI LA TRAIETTORIA COMPIUTA DAL PUNTO MATERIALE È UNA CIRCONFERENZA. ESISTE SEMPRE UNA FORZA CENTRIFUGA DIRETTA VERSO IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA E UNA CONSEGUENTE ACCELERAZIONE CENTRIFUGA.



$s = s(t) = \text{ASCISSA CURVILINEA}$

$$ds = R d\theta \Rightarrow \boxed{s(t) = R \theta(t)}$$

$$r(t) = R = \text{costante} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = R \cos[\theta(t)] \\ y(t) = R \sin[\theta(t)] \end{cases}$$

• VELOCITÀ ANGOLARE E LINEARE:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{ds(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R} = \frac{v(t)}{R} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{v}{R}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \hat{u}_r + \frac{d\hat{u}_r}{dt} r(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \hat{u}_r + \vec{r}(t) \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \quad \text{CIOÈ VELOCITÀ RADIALE (LUNGO IL RAGGIO) E TRASVERSA (TANGENTE)}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

↑ VARIAZIONE DEL MODULO DEL RAGGIO VETTORE ↑ VARIAZIONE DELLA DIREZIONE DEL RAGGIO VETTORE

IL PRIMO TERMINE, NEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME, È NULO IN QUANTO IL RAGGIO È COSTANTE IN MODULO.

$$r \frac{d\theta(t)}{dt} = R \omega(t) \Rightarrow \boxed{v(t) = R \omega(t)}$$

PER QUANTO RIGUARDA L'ACCELERAZIONE LINEARE, NEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME È SEMPRE DIRETTA VERSO IL CENTRO (ACCELERAZIONE CENTRIFUGA)

$$\boxed{a = a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R}$$

• ACCELERAZIONE ANGOLARE:

$$\alpha(t) = \frac{dw(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{R} a_T$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha(t) = \frac{a_T(t)}{R}}$$

• LEGGI ORARIE MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO:

$$\alpha(t) = \frac{dw(t)}{dt} \Rightarrow \alpha dt = dw(t) \Rightarrow \alpha \int_{t_0}^t dt' = \int_{t_0}^t dw$$

$$\Rightarrow \alpha(t-t_0) = w(t) - w_0 \Rightarrow w(t) = w_0 + \alpha(t-t_0)$$

$$w(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow w dt = d\theta \Rightarrow \int_{t_0}^t (w_0 + \alpha(t'-t_0)) dt' = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta'$$

$$\Rightarrow w_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2 = \theta - \theta_0$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + w_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2$$

QUINDI LE LEGGI ORARIE SEMPLICEMENTE SE $t_0 = 0$

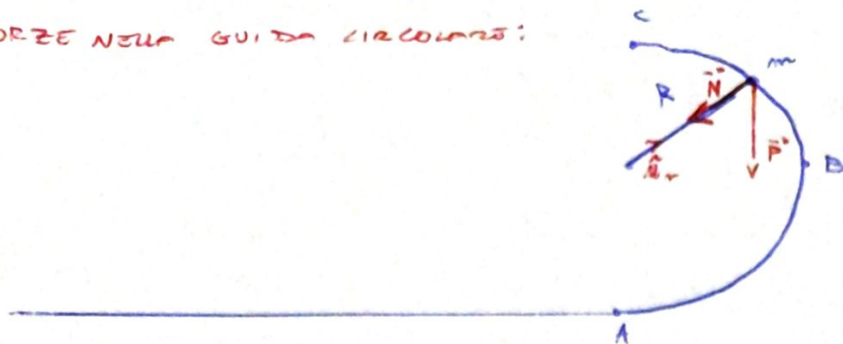
$$\theta(t) = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$w(t) = w_0 + \alpha t$$

$$\alpha(t) = \alpha = \text{costante}$$

DOMANDA 14

• FORZE NELLA GUIDA CIRCOLARE:



IN ASSENZA DI ATTRITO, SU OGNI PUNTO DELLA GUIDA CIRCOLARE AGISCONO SUL PUNTO MATERIALE LE FORZE PESO $\vec{P}$ E $\vec{N}$, RIVOLTA VERSO IL CENTRO

$$\vec{P} = -mg \hat{u}_y \quad \vec{N} = -N \hat{u}_r$$

POICHÉ $\vec{N} \perp d\vec{s}$ IN OGNI PUNTO DELLA GUIDA, $W_{\vec{N}} = \int \vec{N} \cdot d\vec{s} = 0$

PER IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA,

$\Delta E_m = 0$ IN OGNI PUNTO DELLA GUIDA CIRCOLARE.

PER IL II PRINCIPIO DELLA DINAMICA:

$$\vec{R}_r = -mg \sin \theta - N = m a_c \quad (\text{I})$$

$$\vec{R}_t = -mg \cos \theta = m a_t$$

$$\vec{a} = a_c \hat{u}_r + a_t \hat{u}_\theta$$

DOVE $a_c = -\frac{v^2}{R}$ IN QUANTO IL MOTO È CIRCOLARE UNIFORME

$$\text{DALLA (I): } N = m \frac{v^2}{R} - mg \sin \theta \Rightarrow N(\theta) = m \left(\frac{v^2}{R} - g \sin \theta \right)$$

LA VELOCITÀ MINIMA AFFINCHÉ IL PUNTO MATERIALE NON SI STACCHI DALLA GUIDA SI HA IN CORRISPONDENZA DI $C(\theta_c = \pi/2)$ E DI $N(\theta) = 0$

$$\Rightarrow N(\theta_c) = 0 \Rightarrow m \left(\frac{v^2}{R} - g \right) = 0 \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{gR}$$

E PER TROVARE LA VELOCITÀ MINIMA CHE IL PUNTO MATERIALE DEVE AVERE PRIMA DI ENTRARE NELLA GUIDA CIRCOLARE APPLICHIAMO IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

$$E_m^A = E_m^C \Rightarrow \frac{1}{2} m v_i^2 = mg(2R) + \frac{1}{2} m v_{\min}^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_i^2 = 2gR + \frac{1}{2} gR \Rightarrow v_i^2 = 4gR + gR$$

$$\Rightarrow \boxed{v_i^{\min} = \sqrt{5gR}}$$

DOMANDA 15

$$\vec{F} = -\beta v \hat{u}_v, \quad \beta = mk \quad \text{e } k \text{ DIPENDE DALLA VISCOSITÀ DEL MEZZO E DALLA FORMA DEL CORPO}$$

PER IL II PRINCIPIO DELLA DINAMICA,

$$F = + \cancel{F_x} \quad \vec{F} + \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow -\cancel{mk}v + mg = ma$$

$$\Rightarrow -kv + g = a \Rightarrow \boxed{\frac{dv(t)}{dt} + k \cdot v(t) - g = 0}$$

OTTENGO UN'EQU. DIFFERENZIALE A VARIABILI SEPARATE CON $t_0 = 0$ E $v_0 = 0$ CONDIZIONI INIZIALI.

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - kv(t) \Rightarrow \frac{dv(t)}{g - kv(t)} = dt \Rightarrow + \int_0^{v(t)} \frac{+1}{g - kv(t)} dv(t) = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{k} \ln |g - kv(t)| \Big|_0^{v(t)} = t \Rightarrow \ln \left(\frac{g - kv(t)}{g} \right) = -kt$$

$$\Rightarrow \frac{g - kv(t)}{g} = e^{-kt} \Rightarrow g - kv(t) = g e^{-kt}$$

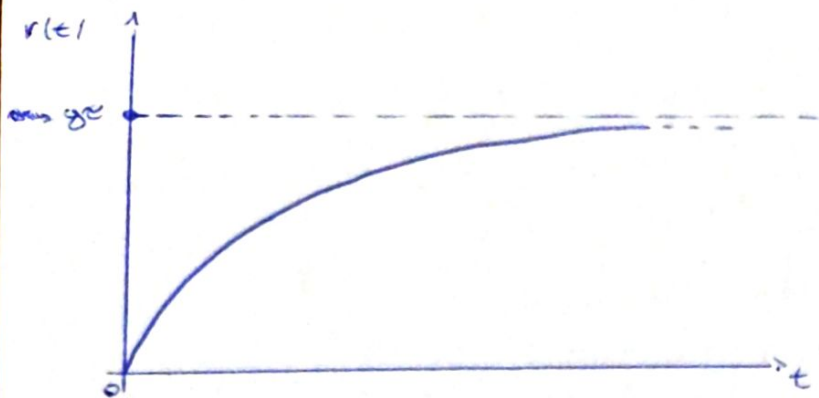
$$\Rightarrow kv(t) = g(1 - e^{-kt}) \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})}$$

$$\text{SIA } \tau = \frac{1}{k} \Rightarrow \boxed{v(t) = g\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

NOTO CHE $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = g\tau = \text{cost.}$

DOPPO UN LUNGO INTERVALLO DI TEMPO, LA VELOCITÀ CHE ASSUME IL PUNTO MATERIALE IN UN MEZZO VISCOSO SI APPROSSIMA A COSTANTE. QUINDI, POICHÉ IL MOTO RISULTA RETTILINEO UNIFORME, $\vec{R}_{\text{TOT}} = 0$

$$-\cancel{mk}v + mg = 0 \Rightarrow v = \frac{g}{k} = g\tau \quad (\checkmark)$$



$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \frac{g}{k} (1 - e^{-tk}) \Rightarrow dx(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-tk}) dt$$

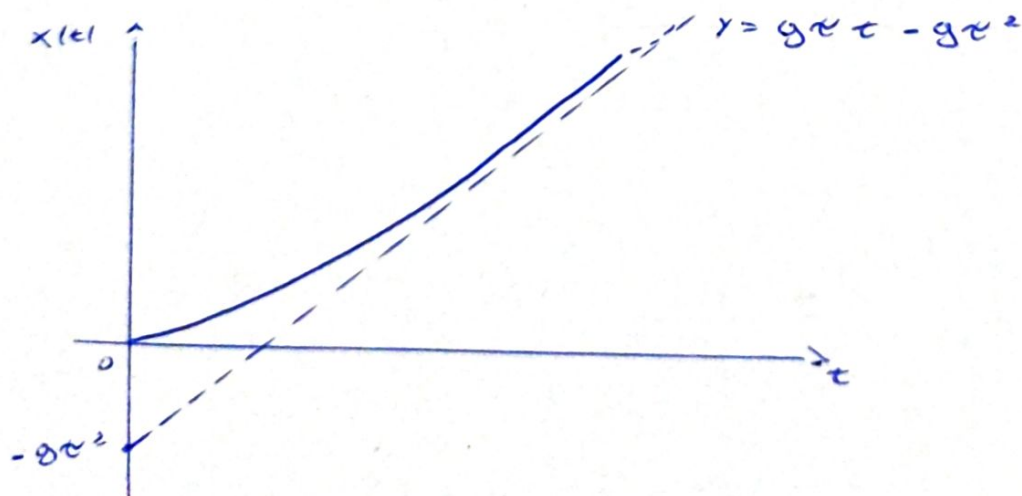
$$\int_0^{x(t)} dx'(t) = \frac{g}{k} \int_0^t (1 - e^{-t'k}) dt' \Rightarrow x(t) = \frac{g}{k} \left[t + \frac{1}{k} e^{-t'k} \right]_0^t$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{g}{k} \left[t + \frac{1}{k} (e^{-tk} - 1) \right]$$

$$\Rightarrow \cancel{x(t) = \frac{g}{k} \left[t + \frac{1}{k} (e^{-tk} - 1) \right]} \quad \boxed{x(t) = g\tau \left[t - \tau (1 - e^{-t/\tau}) \right]}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = g\tau (t - \tau) = (g\tau)t - g\tau^2$$

PER 2 INTERVALLI DI TEMPO SUFFICIENTEMENTE GRANDI, $x(t)$ SI APPROSSIMA AD UN RETTA DI PENDENZA (m) $g\tau$ E INTERCETTA (q) $-g\tau^2$. COERENTE IN QUANTO IL MOV, PER $t \rightarrow +\infty$, È RETTILINEO UNIFORME



DOMANDA 16

IN UN OSCILLATORE ARMONICO SMORZZATO AGISCONO UNA FORZA DI ATTRITO VISCOZO E UNA FORZA ELASTICA

$$-bv - kx = ma \Rightarrow ma + bv + kx = 0$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

SIANO $\gamma = \frac{b}{2m}$ E $\omega_0 = \text{COEFFICIENTE DI SMORZZAMENTO} = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

EQ. DIFFERENZIALE DEL II ORDINE LINEARE OMogenea

IPOTIZZO CHE UNA SOLUZIONE SIA PROPORZIONALE A $e^{\lambda t}$

$$\frac{d^2 [e^{\lambda t}]}{dt^2} + 2\gamma \frac{d[e^{\lambda t}]}{dt} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} [\lambda e^{\lambda t}] + 2\gamma \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{1} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

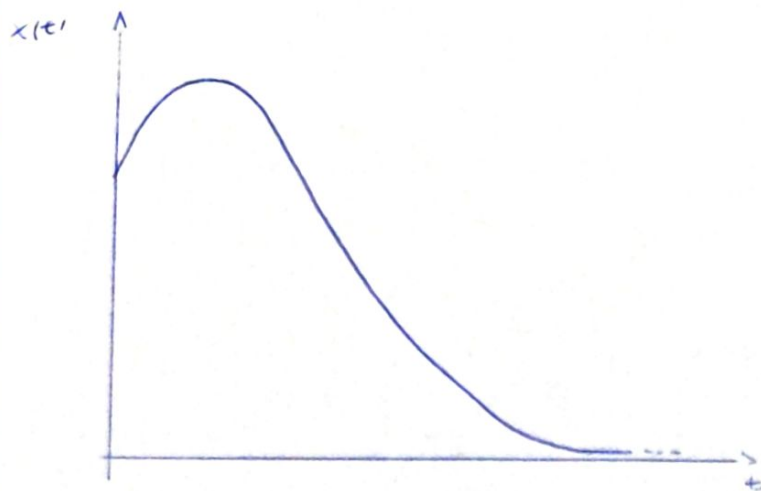
1. CASO: $\gamma^2 > \omega_0^2$ (OSCILLATORE SOVRASMORZZATO O SOVRACRITICO)

POICHÉ $\gamma > 0$, ESISTONO DUE SOLUZIONI REALI E DISTINTE PER λ .

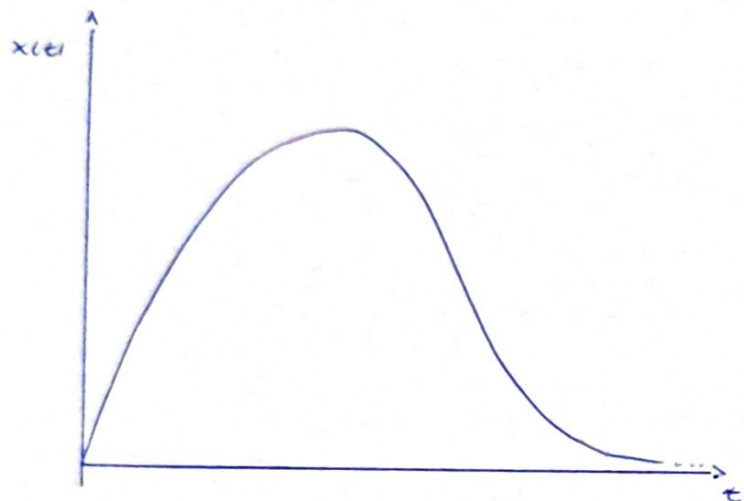
$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} = A e^{-\gamma t} e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} (A e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t})$$



se $x_0 \neq 0$



se $x_0 = 0$

COME SI NOTA DAI GRAFICI, NON CI SONO OSCILLAZIONI NELL'OSCILLATORE ARMONICO SOTTOSMOZZATO.

2. CASO: $\gamma^2 < \omega_0^2$ OSCILLATORE SOTTOSMOZZATO O SOTTOCRITICO

LE SOLUZIONI SONO COMPLESSE E CONIUGATE IN CASO $\gamma < 0$

$$\lambda_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega$$

$$\lambda_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega$$

$$\text{con } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{-\gamma t} e^{i\omega t} + Be^{-\gamma t} e^{-i\omega t}$$

USO LE FORMULE DI EULER: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) =$$

$$= e^{-\gamma t} (A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + B(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))) =$$

$$= e^{-\gamma t} [A\cos(\omega t) + iA\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) - iB\sin(\omega t)]$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} [(A+B) \cos(\omega t) + i(A-B) \sin(\omega t)]$$

SIANO $A = a + ib$
 $B = a - ib \Rightarrow A+B = 2a \quad A-B = 2ib$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} [2a \cos(\omega t) + 2ib \sin(\omega t)] =$$

$$= e^{-\gamma t} [2a \cos(\omega t) - 2b \sin(\omega t)]$$

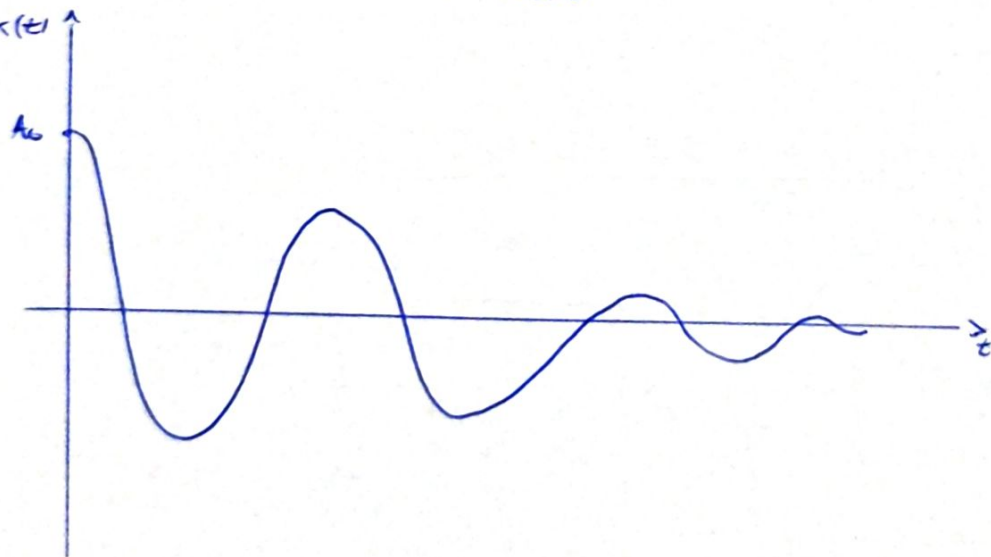
SI $\Rightarrow 2a = A_0 \sin \varphi \quad 2b = -A_0 \cos \varphi$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} [A_0 \sin \varphi \cos(\omega t) + A_0 \cos \varphi \sin(\omega t)]$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)}$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ MA LA FUNZIONE È COMUNQUE OSCILLATORIA A CAUSA DEL $\sin(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow$ MOTO PSEUDO-OSCILLATORIO



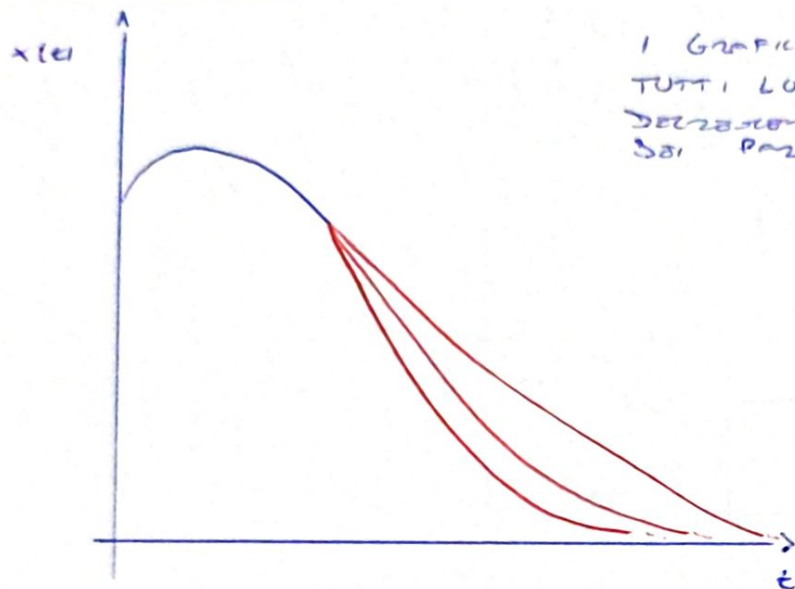
L'AMPIEZZA DEL MOTO SI RIDUCE AD OGNI PERIODO T DI UN FATTORE $e^{-\gamma T}$

3. CASO: $\gamma^2 = \omega_0^2 = 4mk$ OSCILLATORE CRITICO

$\Delta = 0 \Rightarrow 2$ SOLUZIONI REALI E COINCIDENTI

$$\gamma_1 = \gamma_2 = -\gamma$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (At + B)$$



I GRAFICI NEL CASO DELL'OSCILLATORE CRITICO HANNO TUTTI LO STESSO ANDAMENTO INIZIALE PER POI DECADIMENTO PIÙ O MENO VELOCEMENTE AL VARIARE DEI PARAMETRI γ, A E B .

• OSCILLATORE FORZATO:

È IL CASO IN CUI SU UN OSCILLATORE ARMONICO ^{SMOZZATO} VIENE APPLICATA UNA FORZA ESTERNA PERIODICA DEL TIPO $F = F_0 \sin(\omega t)$

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0 \sin(\omega t) \Rightarrow m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = F_0 \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

OTTENGO UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL II ORDINE NON OMogenea.

POTIZZO CHE $A \sin(\omega t + \varphi)$ SIA UNA SOLUZIONE. ~~SE~~ SE ~~NON~~ È UNA SOLUZIONE.

$$\text{ALLORA } x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + a e^{2t} + b e^{2\omega t}$$

$$- \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) + 2\gamma \omega A \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t + \varphi')$$

UTILIZZO LE FORMULE DI ADDIZIONE DEL seno E DEL coseno:

$$- \omega^2 A [\cos(\omega t) \sin \varphi + \sin(\omega t) \cos \varphi] + 2\gamma \omega A [\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi] + \omega_0^2 A [\cos(\omega t) \sin \varphi + \sin(\omega t) \cos \varphi] = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t + \varphi')$$

$$\Rightarrow -\omega^2 A \cos(\omega t) \sin \varphi - \omega^2 A \sin(\omega t) \cos \varphi + 2\gamma \omega A \cos(\omega t) \cos \varphi - 2\gamma \omega A \sin(\omega t) \sin \varphi + \omega_0^2 A \cos(\omega t) \sin \varphi + \omega_0^2 A \sin(\omega t) \cos \varphi = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \sin \varphi' + \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \cos \varphi'$$

$$\Rightarrow \sin(\omega t) [(\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \varphi - 2\gamma \omega A \sin \varphi] + \cos(\omega t) [(\omega_0^2 - \omega^2) A \sin \varphi + 2\gamma \omega A \cos \varphi] = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \sin \varphi' + \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \cos \varphi'$$

~~SENZA~~ SENZA UNA FORZA ESTERNA CON FASE NULLA ($\varphi' = 0$)

$$\Rightarrow [(\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \varphi - 2\gamma \omega A \sin \varphi] \sin(\omega t) + [(\omega_0^2 - \omega^2) A \sin \varphi + 2\gamma \omega A \cos \varphi] \cos(\omega t) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

DEVE ESSERE NECESSARIAMENTE:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \varphi - 2\gamma \omega A \sin \varphi = \frac{F_0}{m} & (1) \\ (\omega_0^2 - \omega^2) A \sin \varphi + 2\gamma \omega A \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

RACCOLGENDO A E SOTTRAENDO AMBOS I MEMBRI AL QUADRATO NELL'EQ (1):

$$A^2 [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\gamma \omega \sin \varphi]^2 = \frac{F_0^2}{m^2}$$

ELEVANDO AL QUADRATO LA (2) E SOMMANDO LA (1) E LA (2) OTTENGO

$$A^2 [(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\gamma \omega \cos \varphi]^2 + A^2 [(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\gamma \omega \cos \varphi]^2 = \frac{F_0^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow A^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \sin^2 \varphi + 4\gamma^2 \omega^2 \sin^2 \varphi + 4\gamma \omega (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi \cos \varphi +$$

$$A^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \cos^2 \varphi + 4\gamma^2 \omega^2 \cos^2 \varphi - 4\gamma \omega (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi \cos \varphi + A^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \sin^2 \varphi + 4\gamma^2 \omega^2 \sin^2 \varphi + 4\gamma \omega (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi \cos \varphi = \frac{F_0^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow A^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2] = \frac{F_0^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

Dalla III (e), l'accelerazione è divisa per $A \sin \varphi$:

$$(w_0^2 - w^2) \sin \varphi = -2\gamma w \cos \varphi$$

$$\Rightarrow (w_0^2 - w^2) \tan(\varphi) = -2\gamma w \Rightarrow \tan(\varphi) = -\frac{2\gamma w}{w_0^2 - w^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(\varphi) = -\frac{2\gamma w}{w_0^2 - w^2}}$$

1° caso: se la forza esterna ha un periodo di oscillazione molto più piccolo del sistema massa-molla,

$$w \ll w_0 \text{ (cioè } w \approx 0)$$

$$\Rightarrow A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{w_0^2} \Rightarrow A \approx \frac{F_0}{k}$$

$$\tan(\varphi) \approx 0 \Rightarrow \varphi \approx 0$$

Poiché $\varphi \approx 0$, la forza è praticamente in fase con il sistema

2° caso: se il periodo di oscillazione della forza esterna coincide con quello del sistema $w_0 \approx w$

$$A = \frac{F_0}{2m\gamma w_0}, \quad \tan(\varphi) = \lim_{w_0 \rightarrow w} \tan\left(-\frac{2\gamma w}{w_0^2 - w^2}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Fenomeno della risonanza

3° caso: $w \gg w_0 \Rightarrow$

$$A \approx \frac{F_0}{mw^2}, \quad \varphi = \pi \quad \text{opposizione di fase con la risonanza}$$

DOMANDA 17

• SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE:

UN PUNTO MATERIALE CHE SI TROVA INIZIALMENTE IN QUIETE RIMANE NEL SUO STATO DI QUIETE, CIÒ OGNI PUNTO DI QUESTO SISTEMA È UN PUNTO DI EQUILIBRIO PER UN PUNTO MATERIALE LIBERO.

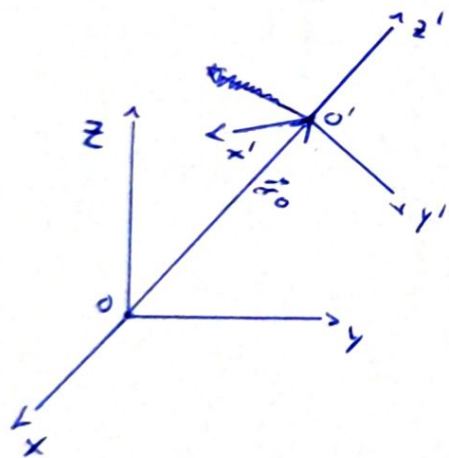
• PRINCIPIO DI RELATIVITÀ:

I RISULTATI DI UN ESPERIMENTO SONO GLI STESSI SE CONSIDERO DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO PER I QUALI, L'UNO SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME RISPETTO ALL'ALTRO, CIÒ I DUE LABORATORI SONO INDISTINGUIBILI

NE CONSEGUO CHE OGNI ALTRO SISTEMA DI RIFERIMENTO CHE SI MUOVE DI MOTO TRAIETTORIALE RETTILINEO UNIFORME RISPETTO A UN SISTEMA INERZIALE, È ANCHE UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

CONSIDERO DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO DI CUI IL SECONDO SI MUOVE CON VELOCITÀ $\vec{v}_0$ COSTANTE RISPETTO AL PRIMO. CHIAMO IL PRIMO SISTEMA FISSO E IL SECONDO MOBILE

VUOLGO VERIFICARE CHE $\vec{F} = m\vec{a}$ SIA COVARIANTE, CIÒ SI TRASFORMA ALLO STESSO MODO TRA I DUE SISTEMI



$$\vec{r}'_0 = \vec{r}' - \vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0}$$

$\vec{r}_0$ È IL VETTORE POSIZIONE DI O' RISPETTO A O , CIÒ IL VETTORE POSIZIONE DELL'ORIGINE DEL SISTEMA MOBILE RISPETTO A QUELLO FISSO.

POICHÉ $\vec{v}_0$ È COSTANTE, $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 t$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t}$$

$x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}' = (x - v_0 t) \hat{i} + (y - v_0 t) \hat{j} + (z - v_0 t) \hat{k}$ SE I VETTORI COINCIDONO

SE I VEZBURI NON COINCIDONO:

$$x' = (x - v_{0x}t) (\hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{i}}) + (y - v_{0y}t) (\hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{j}}) + (z - v_{0z}t) (\hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{k}})$$

$$y' = (x - v_{0x}t) (\hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{i}}) + (y - v_{0y}t) (\hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{j}}) + (z - v_{0z}t) (\hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{k}})$$

$$z' = (x - v_{0x}t) (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{i}}) + (y - v_{0y}t) (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{j}}) + (z - v_{0z}t) (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}})$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix}}_{|R| = \text{MATRICE DELLE ROTAZIONI}} \begin{pmatrix} x - v_{0x}t \\ y - v_{0y}t \\ z - v_{0z}t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} x - v_{0x}t \\ y - v_{0y}t \\ z - v_{0z}t \end{pmatrix}, \quad |R| = \begin{pmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'y) & \cos(x'z) \\ \cos(y'x) & \cos(y'y) & \cos(y'z) \\ \cos(z'x) & \cos(z'y) & \cos(z'z) \end{pmatrix}$$

SE I VEZBURI HANNO LA STESSA ORIENTAZIONE,

$$|R| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• TRASFORMAZIONI DI GALILEO

$$\begin{cases} x' = x - v_{0x}t \\ y' = y - v_{0y}t \\ z' = z - v_{0z}t \end{cases}$$

DERIVANDO MEMBRO A MEMBRO SI OTTIENE

$$v'_x \hat{\mathbf{i}}' + v'_y \hat{\mathbf{j}}' + v'_z \hat{\mathbf{k}}' = (v_x - v_{0x}) \hat{\mathbf{i}}' + (v_y - v_{0y}) \hat{\mathbf{j}}' + (v_z - v_{0z}) \hat{\mathbf{k}}'$$

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} v_x - v_{0x} \\ v_y - v_{0y} \\ v_z - v_{0z} \end{pmatrix} \quad \text{POICHÉ } \vec{v}_0 \text{ È COSTANTE, } \frac{d\vec{v}_0}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{SE L'ORIENTAZIONE È LA STESSA} \quad \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Q$ È INVARIANTE NELLA TRASFORMAZIONE E, QUINDI, SE $m = m'$

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

SE HANNO LA
STESSA ORIENTAZIONE

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\underline{F' = m'a'} \Rightarrow |R| F = m |R| a \Rightarrow \underline{F = ma} \quad (\gamma)$$

• SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI:

NEI SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI, LA VELOCITÀ NON È COSTANTE

NEI SISTEMI MOBILI

$$\begin{cases} x' = x - X \\ y' = y - Y \\ z' = z - Z \end{cases}$$

X, Y, Z NON POSSONO ESSERE ESPRESSE CON V_0 IN QUANTO IL MUOVI DEL SISTEMA
MOBILE NON È RETTILINEO UNIFORME.

$$\begin{cases} v'_x = v_x - V_x \\ v'_y = v_y - V_y \\ v'_z = v_z - V_z \end{cases}$$

DERIVANDO SI
OTTIENE

$$\begin{cases} a'_x = a_x - A_x \\ a'_y = a_y - A_y \\ a'_z = a_z - A_z \end{cases}$$

SE $\vec{a}' \neq \vec{a}$ $\Rightarrow$ $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}$ OPPURE $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m(\vec{a}' + \vec{A}) = m\vec{a}' = -m\vec{A}$$

$-m\vec{A}$ È LA FORZA FITTIZIA O APPARENTE E $\vec{A}$ È L'ACCELERAZIONE
DI TRASLAMENTO

$$x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}' = (x - X) \hat{i}' + (y - Y) \hat{j}' + (z - Z) \hat{k}'$$

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{i}' \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{j}' \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{k}'$$

con $\vec{\omega}$ velocità angolare del sistema $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ rispetto al sistema fisso

$$v_x' \hat{i}' + v_y' \hat{j}' + v_z' \hat{k}' + \vec{\omega} \wedge (x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}') =$$

$$= (v_x - V_x) \hat{i}' + (v_y - V_y) \hat{j}' + (v_z - V_z) \hat{k}'$$

$$\Rightarrow \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{O'P}) = \vec{v} - \vec{V} \Rightarrow \boxed{\vec{v}' = \vec{v} - (\vec{V} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'P})}$$

$\vec{V}$ = velocità di P rispetto al sistema fisso

$\vec{v}'$ = " " " " " " " " modulo

$\vec{V} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'P}$ = velocità del sistema mobile rispetto al sistema fisso = $\vec{V}_t$

derivando ottengo

$$a_x' \hat{i}' + a_y' \hat{j}' + a_z' \hat{k}' + \cancel{\vec{\omega} \wedge (v_x' \hat{i}' + v_y' \hat{j}' + v_z' \hat{k}')} +$$

DOMANDA 18

• SISTEMI DI PUNTI MATERIALI:

UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI È UN SISTEMA IN CUI M PUNTI MATERIALI INTERAGISCONO TRA DI LORO E CON IL RESTO DELL'UNIVERSO

PER OGNI FORZA $\vec{F}_i$ i -ESIMA CHE AGISCE SU UN PUNTO MATERIALE SI HA CHE:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{INT}} + \vec{F}_i^{\text{EXT}}$$

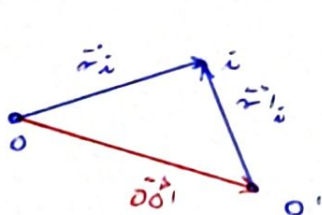


PER OGNI PUNTO i -ESIMO DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI POSSO DERIVARE m_i , $\vec{F}_i$, $\vec{r}_i$, $\vec{a}_i$, $\vec{P}_i = m_i \vec{v}_i$, $E_k = \frac{1}{2} m_i v_i^2$, ...

PER IL SISTEMA DI M PUNTI MATERIALI,

$$\vec{P}_{\text{TOT}} = \sum_{i=1}^M \vec{P}_i = \sum_{i=1}^M m_i \vec{v}_i \quad \text{E} \quad E_{K \text{ TOT}} = \sum_{i=1}^M E_{K_i} = \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

CONSIDERO DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO DI ORIGINI O E O'



$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{OO}' \\ \vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{OO}' \end{cases}$$

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^M m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^M m_i} = \frac{\sum_{i=1}^M m_i (\vec{r}'_i + \vec{OO}')}{\sum_{i=1}^M m_i} = \frac{\sum_{i=1}^M m_i \vec{r}'_i}{\sum_{i=1}^M m_i} + \frac{\vec{OO}' \sum_{i=1}^M m_i}{\sum_{i=1}^M m_i} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^M m_i \vec{r}'_i}{\sum_{i=1}^M m_i} + \vec{OO}' \Rightarrow \boxed{\vec{r}'_{\text{CM}} = \vec{r}_{\text{CM}} - \vec{OO}'}$$

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{r}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^M m_i \frac{d\vec{r}'_i}{dt}}{\sum_{i=1}^M m_i} = \frac{\sum_{i=1}^M m_i \vec{v}'_i}{\sum_{i=1}^M m_i} = \frac{\sum_{i=1}^M \vec{P}'_i}{\sum_{i=1}^M m_i} \quad \text{with } \vec{P}_{\text{TOT}} \text{ crossed out}$$

$$\Rightarrow v_{\text{CM}} = \frac{P_{\text{TOT}}}{m_{\text{TOT}}} \Rightarrow \boxed{\vec{P}_{\text{TOT}} = m_{\text{TOT}} \vec{v}_{\text{CM}}}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = m_{TOT} \vec{a}_{CM}} \quad \Rightarrow \boxed{m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(INT)} + \vec{F}_i^{(EXT)}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^{(INT)} + \vec{F}_i^{(EXT)}) \stackrel{0}{=} \vec{R}_{TOT}^{(INT)} + \vec{R}_{TOT}^{(EXT)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{TOT}^{(EXT)} = m_{TOT} \vec{a}_{CM}} \quad \rightarrow \underline{\text{TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA}}$$

DOMANDA 19

TEOREMA DELL'IMPULSO:

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{FORMA PIÙ GENERALE DELLA II LEGGE DELLA DINAMICA.}$$

$$d\vec{p} = \vec{F} dt$$

$$\text{IMPULSO} = \vec{J} = \int_0^t \vec{F} dt = \int_0^t d\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}_0 = \Delta \vec{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = \Delta \vec{p}} \rightarrow \text{TEOREMA DELL'IMPULSO}$$

SE LA MASSA m È COSTANTE NEL TEMPO, $\Delta \vec{v} = \frac{\vec{J}}{m}$

SE $\vec{F}$ È COSTANTE NEL TEMPO, $\Delta \vec{v} = \frac{\vec{F}t}{m}$

• PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO:

SE UN SISTEMA DI n PUNTI MATERIALI È ISOLATO (CIÒ È NON AGISCONO FORZE ESTERNE SU DI ESSO), ALLORA:

$$\vec{R}_{\text{tot}}^{(ext)} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \text{QUINDI, LA QUANTITÀ DI MOTO SI CONSERVA QUANTO}$$

DURANTE UN URTO TRA DUE PUNTI MATERIALI LE FORZE IMPULSIVE GENERATE DAGLI URTI SONO CONSIDERATE FORZE INTERNE.

1. URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO.



IN UN URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO, I DUE PUNTI MATERIALI RIMANGONO ATTACCATI DOPO L'URTO. VALE IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO (IN QUANTO LA RISULTANTE DELLE FORZE INTERNE È NULLA).

$$\boxed{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f}$$

2. URTO PARZIALMENTE ANELASTICO:

IN UN URTO PARZIALMENTE ANELASTICO, I DUE PUNTI MATERIALI NON RIMANGONO ATTACCATI MA NON SI CONSERVA L'ENERGIA KINETICA

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

3. URTO ELASTICO:

IN UN URTO ELASTICO I DUE PUNTI MATERIALI NON RESTANO ATTACCATI E SI CONSERVA L'ENERGIA KINETICA.

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

DOMANDA 20.

UN CORPO RIGIDO È UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI IN CUI LE DISTANZE TRA TUTTE LE POSSIBILI COPPIE DI PUNTI NON POSSONO VARIARE NEL TEMPO.

1. CASO DELLA DENSITÀ VOLUMICA:

$$\text{SE } \rho = \rho(x, y, z), \quad m_{\text{TOT}} = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

CUN ρ = DENSITÀ VOLUMICA E CHE DIPENDE DALLE COORDINATE SPAZIALI, SE ρ È COSTANTE, ALLORA VALE:

$$d\rho = \frac{dm}{dv} \Rightarrow \rho = \frac{m_{\text{TOT}}}{V}$$

2. CASO DELLA DENSITÀ SUPERFICIALE

$$\sigma = \sigma(x, y), \quad m_{\text{TOT}} = \iint_{\Sigma} \sigma(x, y) dx dy$$

$$\text{SE } \sigma = \text{costante}, \quad d\sigma = \frac{dm}{ds} \Rightarrow \sigma = \frac{m}{s}$$

3. CASO DELLA DENSITÀ LINEARE

$$\lambda = \lambda(x) \Rightarrow m_{\text{TOT}} = \int_L \lambda(x) dx$$

$$\text{SE } \lambda = \text{cost.}, \quad \Rightarrow d\lambda = \frac{dm}{dl} \Rightarrow \lambda = \frac{m}{l}$$

• POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\int \vec{r}' dm}{\int dm} = \frac{\int_V \vec{r}' \rho_v dv}{\int_V \rho_v dv} = \frac{\int_V \vec{r}' \rho_v dv}{m_{\text{TOT}}}$$

SE IL CORPO NON È OMogeneo

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\rho}{m_{\text{TOT}}} \int_V \vec{r}' dv \quad \text{SE IL CORPO È OMogeneo}$$

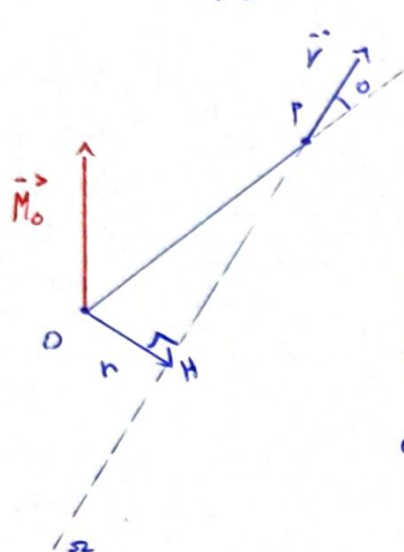
• I LEGGE CARDINALE (TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA):

VEDI DOMANDA 15

DOMANDA 21

• MOMENTO DI UN VETTORE:

CONSIDERO UN VETTORE $\vec{v}$ APPLICATO NEL PUNTO P E UN ALTRO GENERICO PUNTO DEL PIANO O DETTO POLO. SIA α LA RETTA D'AZIONE DI $\vec{v}$ E θ L'ANGOLO CHE FORMA $\vec{v}$ CON $\vec{OP}$. SIA, INOLTRE, $h = |\vec{OH}|$ E $\vec{OH}$ IL VETTORE PERPENDICOLARE AD α E PASSANTE PER O.



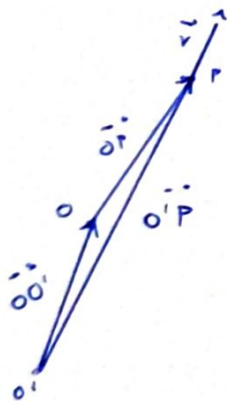
$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{v}$$

$\vec{OP}$ È IL BRACCIO, OVVERO IL VETTORE CHE UNISCE IL POLO O AL PUNTO P DI APPLICAZIONE DI $\vec{v}$. $\vec{OH} \perp \alpha$: $\vec{M}_O$ È ORTOGONALE AL PIANO CONTENUTO DA $\vec{OP}$ E $\vec{v}$.

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{v} = |\vec{OP}| |\vec{v}| \sin \theta = |\vec{OH}| |\vec{v}| = h v$$

QUALUNQUE PUNTO Ω DEL PIANO LO STESSO MOMENTO $\vec{M}_O$, IL QUALE LAPPA SE CAMBIA IL POLO O

SIA $\vec{v}$ UN VETTORE APPLICATO IN P E $\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{v}$. SIA O' UN ULTERIORE PUNTO DEL PIANO E $\vec{M}_{O'} = \vec{O'P} \wedge \vec{v}$



PER LA REGOLA DELLA SOMMA TRE VETTORI,
 ~~$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$~~ $\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{v} = (\vec{OO'} + \vec{O'P}) \wedge \vec{v} =$$

$$= \vec{OO'} \wedge \vec{v} + \vec{O'P} \wedge \vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_O = \vec{OO'} \wedge \vec{v} + \vec{M}_{O'}}$$

• TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE. (II EQ. LAZZINALE):

CONSIDERO UN SISTEMA DI n PUNTI MATERIALI E UN PUNTO Ω DETTO POLO

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

IN GENERALE, Ω NON È UN PUNTO FISSO DEL PIANO MA SI MUOVE CON UNA CERTA VELOCITÀ $\vec{v}$.

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{V}_i - \vec{V}_\Omega \quad \text{OVEVIA LA DIFFERENZA TRA LA VELOCITÀ DELL'1-ESIMO PUNTO MATERIALE E LA VELOCITÀ DI } \Omega.$$

IN GENERALE, SE CONSIDERO DUE PUNTI MATERIALI m_1 E m_2 SI HA CHE:

$$m_1: \quad \vec{r}_1 = \Omega \vec{P}_1 \quad \vec{V}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$$

$$m_2: \quad \vec{r}_2 = \Omega \vec{P}_2 \quad \vec{V}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_1 \vec{P}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{1,2}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_{2,1} + \vec{V}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_{2,1} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

$$\frac{d\vec{r}_{1,2}}{dt} = \frac{d\vec{r}_2}{dt} - \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}_{2,1}$$

GENERALIZZANDO A n PUNTI MATERIALI 1-ESIMI,

$$\frac{d\vec{r}_{i,1}}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \vec{V}_\Omega \quad \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{V}_i - \vec{V}_\Omega$$

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n (\vec{V}_i - \vec{V}_\Omega) \wedge m_i \vec{V}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge \left(\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} \right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{V}_i \wedge m_i \vec{V}_i}_{=0} - \sum_{i=1}^n \vec{V}_\Omega \wedge m_i \vec{V}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(E)} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(I)}$$

$$\vec{V}_i \parallel \vec{V}_i \Rightarrow \vec{V}_i \wedge \vec{V}_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = - \sum_{i=1}^n \vec{V}_\Omega \wedge m_i \vec{V}_i + \vec{M}^{(E)} + \vec{M}^{(I)}$$

$$\vec{M}_{i,5}^{(I)} = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{i,5} + \vec{r}_5 \wedge \vec{F}_{5,i} = (\vec{r}_i - \vec{r}_5) \wedge \vec{F}_{i,5} \quad \text{IN QUANTO } \vec{F}_{i,5} = -\vec{F}_{5,i}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{i,5}^{(I)} = \vec{r}_{i,5} \wedge \vec{F}_{i,5}$$

TUTTAVIA, $\vec{r}_{i,5}$ È LA RETTA CONGIUNGENTE i E 5 E $\vec{F}_{i,5}$ AGISCE PROPRIAMENTE SU TALE RETTA, QUINDI SONO PARALLELI

$$\Rightarrow \vec{M}_{i,5}^{(I)} = 0$$

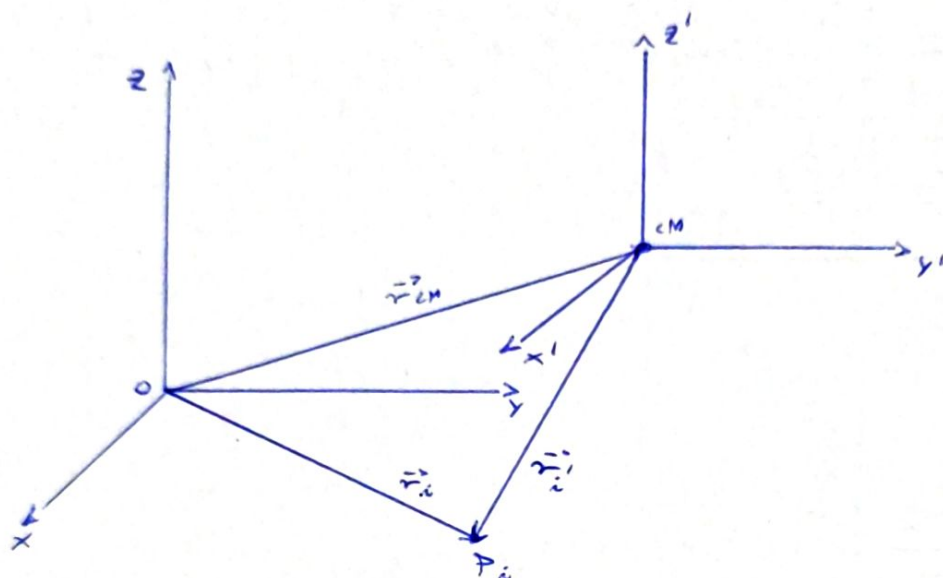
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = - \vec{V}_\Omega \wedge m_{\text{TOT}} \vec{V}_\Omega + \vec{M}_{\Omega}^{(EXT)}} \quad \Rightarrow \text{II eq. LAMBINALE}$$

DOMANDA 22

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CM:

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CM È UN SISTEMA TALE PER CUI:

1. L'ORIGINE SI TROVA IN CORRISPONDENZA DEL CENTRO DI MASSA
2. GLI ASSI NON CAMBIANO DIREZIONE RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO INIZIALE
3. $a_{CM} \neq 0$ GENERALMENTE, QUINDI È UN SISTEMA NON INERZIALE



COMPLESSIVAMENTE, $\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}$ E $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$

PER QUANTO RIGUARDA IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CM, $\vec{r}'_{CM} = \vec{v}'_{CM} = 0$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{P}}' = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{v}}'_i = 0 \quad \text{E, INOLTRE,} \quad \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i = 0$$

$$\ddot{\vec{F}}'_i + \ddot{\vec{F}}'_i{}^{EXT} - m_i \ddot{\vec{a}}_{CM} = m_i \ddot{\vec{a}}'_i \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \ddot{\vec{F}}'_i + \sum_{i=1}^n \ddot{\vec{F}}'_i{}^{EXT} - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{a}}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{a}}'_i$$

$\parallel 0$ $\parallel 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}^{EXT} = m_{TOT} \ddot{\vec{a}}_{CM}} \quad \text{1° LEGGE NEWTONIANA}$$

MOLTIPLICANDO L'EQ. (1) PER $\vec{r}'_i$ OTTENGO

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \wedge \ddot{\vec{F}}'_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \wedge \ddot{\vec{F}}'_i{}^{EXT} - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{a}}_{CM} \wedge \vec{r}'_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{a}}'_i \wedge \vec{r}'_i$$

$\parallel 0$ $\parallel 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}'(CMT) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i'(CMT)}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}' &= \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i') = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \wedge m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i' + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_{cm} = \vec{L}' + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i' \right)}_0 \wedge \vec{v}_{cm} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{L}' = \vec{L}' \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'(CMT)}$$

• TEOREMI DI KÖNIG:

- MOMENTO ANGOLARE:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i' + \vec{r}_{cm}) \wedge m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}) = \\ &= \sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_{cm} + \sum_i \vec{r}_{cm} \wedge m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_{cm} \wedge m_i \vec{v}_{cm} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{cm}}$$

- ENERGIA CINETICA:

$$\begin{aligned} E_K &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm})^2 = \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{cm} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_K = E_K' + E_{K_{cm}}}$$

- LAVORO:

$$dW_{\vec{a}} = \vec{F}_{\vec{a}} \cdot d\vec{r}_{\vec{a}} = \vec{F}_{\vec{a}}^{(I)} \cdot d\vec{r}_{\vec{a}} + \vec{F}_{\vec{a}}^{(II)} \cdot d\vec{r}_{\vec{a}} = dW^{(I)} + dW^{(II)}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = W^{(INT)} + W^{(EXT)}}$$

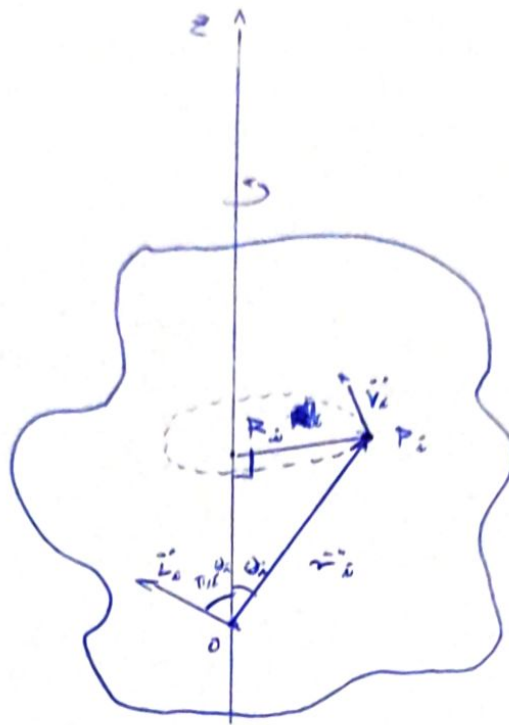
PER OGNI COPPIA DI PUNTI $\vec{a}$ E $\vec{b}$:

$$\vec{F}_{\vec{a},\vec{b}} \cdot d\vec{r}_{\vec{a}} + \vec{F}_{\vec{b},\vec{a}} \cdot d\vec{r}_{\vec{b}} = \vec{F}_{\vec{a},\vec{b}} \cdot (d\vec{r}_{\vec{a}} - d\vec{r}_{\vec{b}}) \quad \text{IN QUANTO } \vec{F}_{\vec{a},\vec{b}} = -\vec{F}_{\vec{b},\vec{a}}$$

$$dW_{\vec{a}} = \vec{F}_{\vec{a}} \cdot d\vec{r}_{\vec{a}} = m_{\vec{a}} \frac{d\vec{v}_{\vec{a}}}{dt} \cdot d\vec{r}_{\vec{a}} = m_{\vec{a}} v_{\vec{a}} dr_{\vec{a}}$$

$$W_{\vec{a}}^{AD} = \int_a^B m_{\vec{a}} v_{\vec{a}} dr_{\vec{a}} = \sum_{\vec{a}} \frac{1}{2} m_{\vec{a}} v_{\vec{a},B}^2 + \sum_{\vec{a}} \frac{1}{2} m_{\vec{a}} v_{\vec{a},A}^2 \Rightarrow \boxed{W_{\vec{a}} = \Delta E_K}$$

DOMANDA 23



LA ROTAZIONE DI P_i DESCRIVE UNA CIRCONFERENZA SU UN PIANO ORTOGONALE ALL'ASSE z . $\vec{v}_i$ FORMA UN ANGOLO DI $\frac{\pi}{2}$ RISPETTO A $\vec{r}_i$.

$$v: v_i = \omega R_i$$

$$a: \begin{cases} a_n = \omega^2 R_i \\ a_t = R_i \frac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

SIA θ_i L'ANGOLO COMPRESO TRA $\vec{v}_i$ E $\vec{R}_i$

~~RAZIONAMENTO~~

$$r_i = R_i \sin \theta$$

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge m \vec{v}_i$$

IL MOMENTO ANGOLARE DI P_i SARA' DUNQUE ORTOGONALE AL PIANO CHE CONTIENE $\vec{r}_i$ E $\vec{v}_i$ E FORMA UN ANGOLO DI $\frac{\pi}{2} - \theta_i$ CON L'ASSE DI ROTAZIONE

$$|\vec{L}_i| = L_i = r_i m_i v_i = m_i r_i \omega R_i$$

LA PROIEZIONE DI $\vec{L}_i$ SU z SARA':

$$|\vec{L}_z| = L_i \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_i) = L_i \sin \theta_i = m_i r_i \omega R_i \sin \theta_i = m_i R_i^2 \sin^2 \theta_i \omega$$

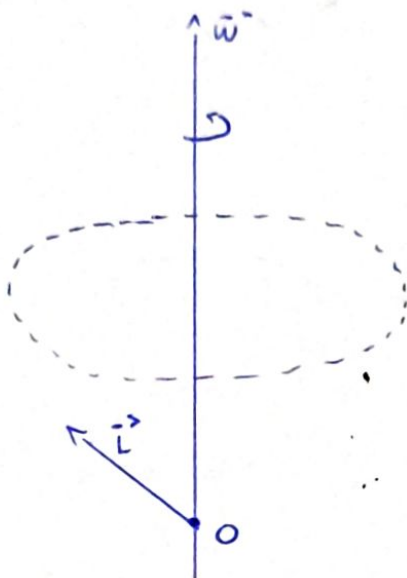
$$\Rightarrow L_{i,z} = m_i \omega R_i^2$$

IL MOMENTO ANGOLARE TOTALE SARÀ: $\sum_i \vec{L}_i = \vec{L}$

$$|\vec{L}| = \sum_i |\vec{L}_i| = \sum_i m_i R_i^2 \omega = \left(\sum_i R_i^2 m_i \right) \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{L_z = I_z \omega}$$

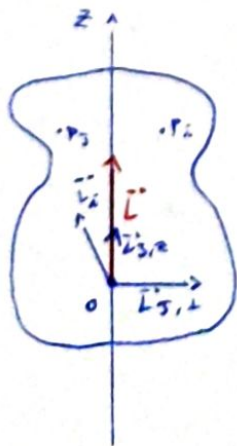
• ESEMPIO NEL CASO DI DUE DIMENSIONI:



DURANTE LA ROTAZIONE LA COMPONENTE PARALLELA ALL'ASSE DI ROTAZIONE DI $\vec{L}$ CAMBIA SOLO IN MODULO. RISULTA ESSERE SEMPRE PROPORZIONALE A $\vec{\omega}$. E NON DIPENDE DALLA SCELTA DEL POLO O. LA COMPONENTE PERPENDICOLARE ALL'ASSE DI ROTAZIONE $\vec{L}_\perp$ VARIERÀ Sia IN MODULO CHE IN DIREZIONE DURANTE LA ROTAZIONE E DIPENDE DALLA SCELTA DEL POLO

$$\boxed{L_{\perp} = L \sin \theta = m_i r_i R_i \omega \sin \theta = m_i r_i v_i \sin \theta}$$

• CASO CORPO SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE DI ROTAZIONE:



PER SIMMETRIA $L_\perp = 0$ PERCHÉ $\vec{L}_{\perp} = -\vec{L}_{\perp}$

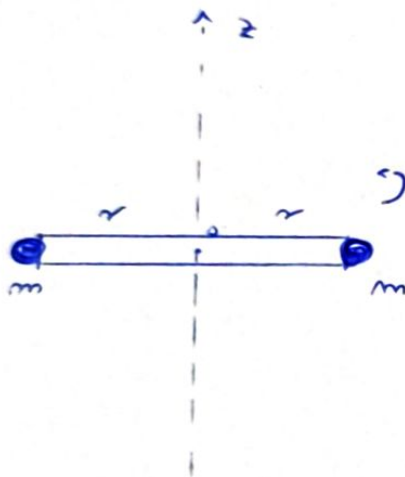
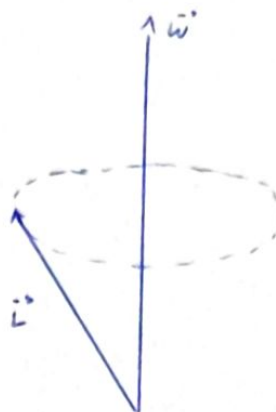
$$\vec{L}_{TOT} = \vec{L}_z = I_z \vec{\omega}$$

• MOTO DI PRESSIONE:

SI PARLA DI MOTO DI PRESSIONE QUANDO $\vec{L}_{TOT}$ RUOTA ATTORNO $\vec{\omega}$. SE $\vec{\omega}$ È COSTANTE, ALLORA IL MOTO È DI PRESSIONE UNIFORME.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L}$$

$$M = \frac{dL}{dt} = L \perp \omega$$



$$L_{TOT} = L_z = 2mr^2\omega = I_z\omega$$

$$L_{\perp} = 0$$

$$\text{SE } \omega \text{ È COSTANTE, } \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{M} = 0$$

NEI MOTI DI PRESSIONE UNIFORME, $L_z = 2m(r \sin\theta)^2 \omega = 2mR^2 \omega = \text{costante}$
 $L_{\perp} = 2mR \cos\theta \omega$ VARIA IN DIREZIONE

$$M^{(tot)} = L_{\perp} \omega = 2mR \cos\theta \omega^2$$

$$\text{SE } \vec{L} \parallel \vec{\omega} ; \vec{M}^{(tot)} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [I_z \vec{\omega}] = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}^{(tot)} = I_z \vec{\alpha}}$$

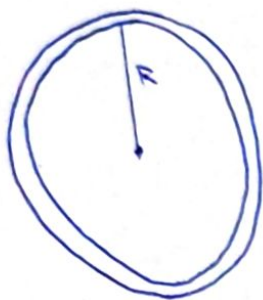
DOMANDA 24

$$I_z = \sum_{i=1}^m m_i R_i^2$$

PER UN CORPO ESTESO E CONTINUO $I_z = \int_V R^2 dm = \int_V R^2 \rho dv$

ESEMPIO:

ANELLO OMOGENEO SOTTILE DI MASSA m E RAGGIO R RISPETTO A UN ASSE PASSANTE PER IL CENTRO DELL'ANELLO E PERPENDICOLARE AD EGO.

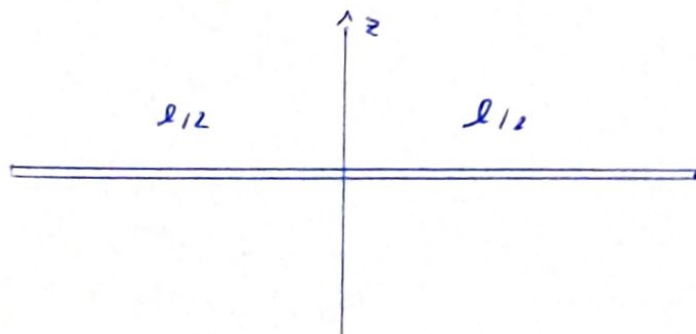


$$I = \int_L R^2 dm = \int_0^L R^2 \lambda dl = R^2 \lambda \int_0^L dl \quad L = 2\pi R = 2\pi \lambda R^3$$

$$\lambda = \frac{m}{2\pi R} \Rightarrow I = \cancel{2\pi R^3} \cdot \frac{m}{\cancel{2\pi R}} \Rightarrow \boxed{I = m R^2}$$

ESEMPIO:

ASTA SOTTILE OMOGENEA DI MASSA m E LUNGHEZZA L RISPETTO A UN ASSE PASSANTE PER IL CENTRO.



S = SEZIONE ASTA

$$dm = \rho S dx$$

$$\rho = \frac{m}{SL}$$

$$I_z = \int_V R^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} R^2 \rho S dx = \rho S \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{1}{3} \rho S x^3 \Big|_{-L/2}^{L/2} =$$

$$= \frac{1}{3} \rho S \left[\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right] = \frac{1}{12} \rho S L^3 = \frac{1}{12} \frac{m}{SL} SL^3$$

$$\Rightarrow \boxed{I_z = \frac{m L^2}{12}}$$

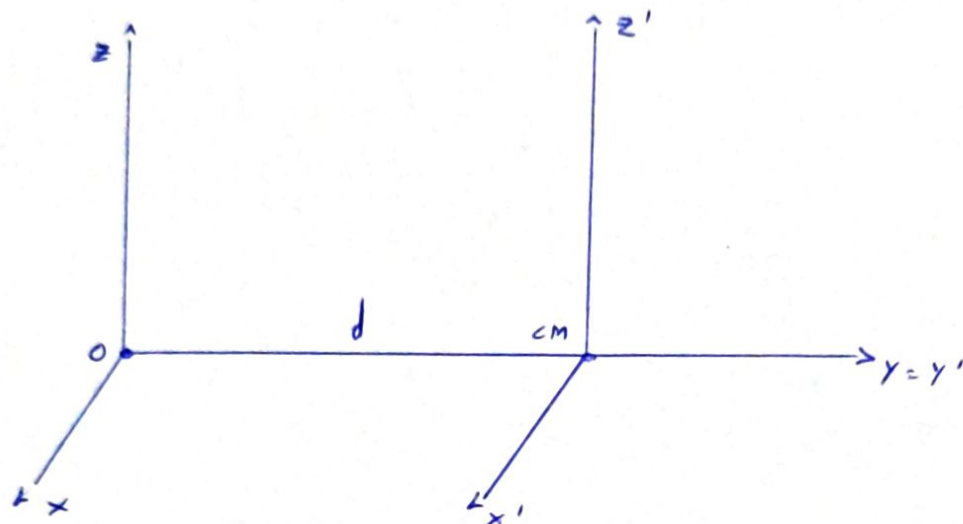
DOMANDA 25

TEOREMA DI HUYGENS - STEINER:

$$I_z = I_{cm} + m d^2$$

I_{cm} = INERZIA DI UN CORPO RISPETTO AD UN ASSE PASSANTE PER IL CENTRO DI MASSA E PARALLELO A z

d = DISTANZA TRA IL CENTRO DI MASSA E L'ASSE PASSANTE PER IL CENTRO DI MASSA E L'ASSE z .



$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' + d \\ z = z' \end{cases}$$

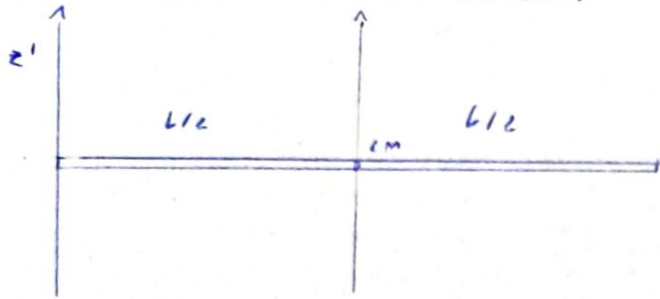
PER UN GENERICO PUNTO P_i , $I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) =$

$$= \sum_i m_i (x_i'^2 + (y_i' + d)^2) = \sum_i m_i x_i'^2 + \sum_i m_i y_i'^2 + \sum_i m_i d^2 +$$

$$+ \sum_i 2m_i d y_i' = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \sum_i m_i d^2$$

$$\Rightarrow I_{z'} = I_{cm} + m_{TOT} d^2$$

ESEMPIO DELL'ASTA OMOGENA:



$$dm = \rho \, ds$$

$$\rho = \frac{m}{L}$$

$$I_{cm} = \int_{-L/2}^{L/2} L^2 \, dm = \rho \int_{-L/2}^{L/2} L^2 \, ds = \rho \int_{-L/2}^{L/2} L^2 \, ds = \rho \left[\frac{1}{3} L^3 \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} \rho L^3 =$$

$$= \frac{1}{12} \frac{m}{L} L^3 = \frac{mL^2}{12}$$

$$I_{z'} = \int_0^L L^2 \, dm = \rho \int_0^L L^2 \, ds = \rho \left[\frac{1}{3} L^3 \right]_0^L = \frac{1}{3} \rho L^3 = \frac{1}{3} \frac{m}{L} L^3 = \frac{mL^2}{3}$$

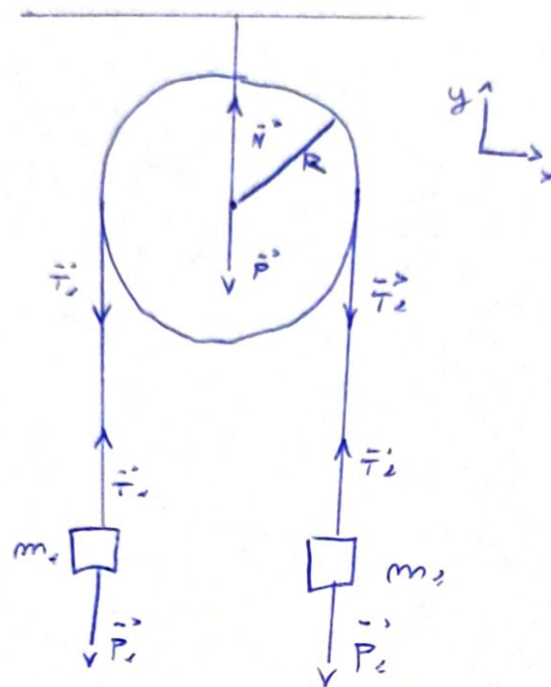
APPLICANDO HUYGENS - STEIGER:

$$I_{z'} = I_{cm} + m d^2 = \frac{mL^2}{12} + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{1}{4} mL^2 =$$

$$= \frac{1}{3} mL^2 \quad \text{C.V.D.}$$

DOMANDA 26

EQUILIBRIO STATICO DI UN CORPO RIGIDO:



UTILIZZO LA 1^a E LA 2^a LEGGE LEONARDI PER LE LAMINELLE

$$1^a: \vec{R}^{(STAT)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x: 0 \\ y: N = P + T_1 + T_2 \Rightarrow N = m_2 g + T_1 + T_2 \quad (1) \end{cases}$$

$$2^a: \vec{M}^{(STAT)} = 0 \Rightarrow R T_2 - R T_1 = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 = T$$

$$\text{DA (1)} \quad N = m_2 g + 2T$$

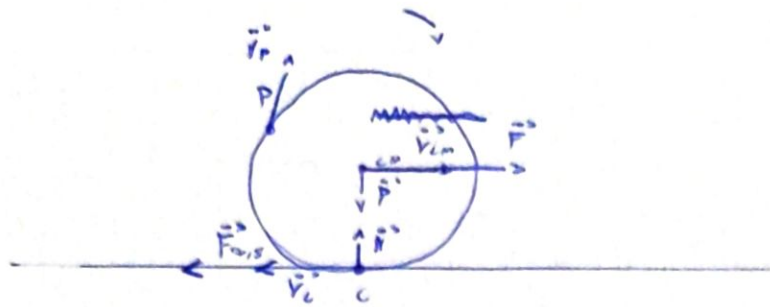
UTILIZZO IL II PRINCIPIO DELLA DINAMICA PER I PUNTI MATERIALI m_1 E m_2

$$m_1: T = P_1 \Rightarrow T = m_1 g$$

$$m_2: T = P_2 \Rightarrow T = m_2 g \quad \text{DA CUI } m_1 g = m_2 g \Rightarrow m_1 = m_2 = m_P$$

$$\Rightarrow N = m g + 2 m_P g \Rightarrow \boxed{N = g (m + 2 m_P)}$$

DOMANDA 27



IL ROTOLOMENTO DI UN CORPO RIGIDO CONSISTE IN UNA ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE GEOMETRICO CHE SI SPOSTA NEL TEMPO INSIEME AL CORPO RIGIDO STESSO

NEL CASO DI PURO ROTOLOMENTO, LA ROTAZIONE DEL CORPO RIGIDO AVVIENE SENZA SLITTARE

IN GENERALE, PER OGNI PUNTO SU UN CORPO RIGIDO CHE STA RUOTANDO SI HA:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{PC} \quad \text{DOVE } \vec{r}_{PC} \text{ È IL VETTORE CHE CONGIUNGE P E C}$$

PER INTERVALLI DI TEMPO INFINITESIMI, IL PUNTO DI CONTATTO CAMBIA DI VOLTA IN VOLTA. ~~ESISTE UN PUNTO~~

NEL CASO DEL MOVIMENTO DI PURO ROTOLOMENTO ESISTE UNA FORZA DI ATTRITO STATICO CHE PERMETTE AL PUNTO DI CONTATTO DI RIMANERE ISTANTANEAMENTE FERMO E DI RUOTARE SENZA SLITTARE.

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Ccm} \Rightarrow \vec{v}_{cm} = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{Ccm} + \vec{v}_C$$

NEL CASO DI PURO ROTOLOMENTO, $\vec{v}_C = 0$ E, IN MODULO, $v_{cm} = \omega R$

$$\omega = a_{cm} / R$$

UTILIZZANDO LA 1ª EQ. LAMBINIA,

$$y: N = P \Rightarrow N = mg$$

$$x: F - F_{a,s} = m a_{cm} \Rightarrow F = F_{a,s} + m a_{cm} \quad (1)$$

UTILIZZANDO LA 2ª EQ. LAMBINIA,

$$\vec{M}_{Ccm} = I \alpha \Rightarrow R F_{a,s} = I \alpha \Rightarrow R F_{a,s} = I \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow F_{a,s} = \frac{I a_{cm}}{R^2} \quad (2)$$

SOSTITUENDO NELLA EQ (1)

$$F = \frac{I a_{cm}}{R^2} + m a_{cm} \Rightarrow F = \left(\frac{I}{R^2} + m \right) a_{cm} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{F}{m \left(1 + \frac{I}{m R^2} \right)}}$$

SOSTITUENDO NEGLA ②:

$$F_{a,s} = \frac{I F}{mR^2 \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)} = \frac{I F}{mR^2 + I} = \frac{\cancel{I} F}{\cancel{I} \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)} \Rightarrow F_{a,s} = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

$$F_{a,s} \leq F_{a,s}^{\max} = \mu_s N \Rightarrow \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I}} = \mu_s mg$$

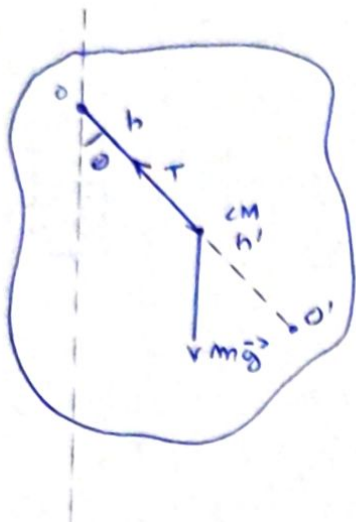
$$F_{\max} = \mu_s mg \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)$$

OPPURE,

$$\mu_s^{\min} = \frac{F}{mg \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)}$$

DOMANDA 28

QUALUNQUE CORPO RIGIDO CHE POSSA OSCILLARE IN UN PIANO VERTICALE
ATTORNO AD UN ASS^{NON} DI SOSTEGNO. PER IL SUO CENTRO DI MASSA È UN
PENDOLO FISICO.



$$M_0 = -mgh \sin \theta$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_0 = -I_z \ddot{\theta} \Rightarrow I_z \ddot{\theta} = -mgh \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgh \sin \theta}{I_z} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \sin \theta = 0} \quad \text{PER PICCOLE OSCILLAZIONI, } \sin \theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \theta = 0} \Rightarrow \text{eq. OSCILLATORE ARMONICO}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgh}}}$$

SI A $l_{RD} = \frac{I_z}{mh}$ OVVERO LA LUNGHEZZA RIDOTTA DEL PENDOLO

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{RD}}{g}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l_{RD}}}}$$

$$h' = \frac{I_{cm}}{mh} \Rightarrow I_{cm} = mhh'$$

$$l_{212} = \frac{I_2}{mh} = \frac{I_{cm} + mh'^2}{mh} = \frac{\cancel{mhh'} + mh'^2}{\cancel{mh}} = h + h' > h$$

$$l'_{212} = \frac{I'}{mh'} = \frac{I_{cm} + mh'^2}{mh'} = \frac{\cancel{mhh'} + mh'^2}{\cancel{mh'}} = h + h' > h'$$

$\Rightarrow \boxed{l_{212} = l'_{212}} \Rightarrow$ I DUE ASSI PARALLELI PER O E PER O' SONO
DETTI RELATIVI IN QUANTO HANNO LA STESSA
LUNGHEZZA RIDOTTA

DOMANDA 29

ESPERIMENTI DI SOULE:

- 1) RISCALDAMENTO DELL'ACQUA MEDIANTE L'AZIONE DI UN MULINELLO. SI RICHIEDE NECESSITA' DI LAVORO MECCANICO PER AZIONARE IL MULINELLO
- 2) LAVORO SPESO PER FAR CIRCOLARE CORRENTE ELETTRICA IN UN CONDUTTORE DI RESISTENZA R IMMERSO IN ACQUA.
- 3) LAVORO SPESO PER COMPIMERE UNA MASSA DI ACQUA IN UN RECIPIENTE CON PARETI ADIABATICHE
- 4) LAVORO SPESO PER STROFINARE DUE BLOCCHI DI METALLO IMMESSI IN ACQUA

SOULE DESUSO CHE IL LAVORO SPESO PER OTTENERE UN AUMENTO DI TEMPERATURA È SEMPRE PROPOZIONALE ALL'AUMENTO DI TEMPERATURA STESSO A PARITÀ DI MASSA DI ACQUA

INOLTRE, SOULE DESUSO CHE PER UN SISTEMA ADIABATICO IL LAVORO SPESO PER FAR PASSARE DA UNO STATO TERMODINAMICO A UN ALTRO STATO TERMODINAMICO NON DIPENDE DAL TIPO DI TRASFORMAZIONE.

$$W_{ad} = -\Delta U = U_i - U_f$$

DOVE U È UNA FUNZIONE DI STATO, DETTA ENERGIA INTERNA, CHE DIPENDE DALLE SOLE VARIABILI TERMODINAMICHE

$$Q = \Delta U$$

$$Q = -W$$

SE CONSIDERO CHE UN SISTEMA PUÒ SCAMBIARE LAVORO MA ANCHE CALORE CON L'AMBIENTE, SPERIMENTALMENTE SI OSSERVA CHE $Q - W$ NON DIPENDE DALLA TRASFORMAZIONE SUBITA PER PASSARE DA UNO STATO A UN ALTRO.

$$\Delta U = Q - W \Rightarrow 1^o \text{ PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA}$$

OPPURE

$$dU = dQ - dW$$

DOMANDA 30

CONSIDERO 2 SOLIDI POSTI A CONTATTO TERMICO CON $T_1 > T_2$

$$\begin{array}{l} T_1 \\ T_2 \end{array} \rightarrow T_e \quad \begin{array}{l} T_e < T_1 \\ T_e > T_2 \end{array}$$

IN TALE PROCESSO NON AVVIENE UNO SCAMBIO DI LAVORO E NON VIENE SCAMBIATO CALORE CON L'AMBIENTE, $Q = W = 0$

$$\Delta U = 0, \text{ TUTTAVIA } \Delta U_1 \neq \Delta U_2, \Delta U_1 < 0, \Delta U_2 > 0$$

$$Q = mc(T_f - T_i)$$

c = CALORE SPECIFICO, CHE IL CALORE NECESSARIO PER FARE AUMENTARE DI 10°K LA TEMPERATURA DI UNA MASSA DI 1kg DI UNA DATA SOSTANZA

$$d = \underset{\text{CAPACITÀ TERMICA}}{\text{CAPACITÀ}} = mc \Rightarrow Q = c \Delta T \quad c_{\text{ACQUA}} = 4180 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$dQ = mc dT = c dT \Rightarrow c = \frac{dQ}{dT} \quad c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$$

$$\text{SE } c = c(T), \quad Q = \int_{T_1}^{T_2} mc(T) dT$$

ESEMPIO:

$$Q = 0 \Rightarrow Q_1 = -Q_2 \Rightarrow m_1 c_1 (T_f - T_1) = -m_2 c_2 (T_f - T_2)$$

$$\Rightarrow m_1 c_1 T_f - m_1 c_1 T_1 = -m_2 c_2 T_f + m_2 c_2 T_2$$

$$\Rightarrow (m_1 c_1 + m_2 c_2) T_f = m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2$$

$$\Rightarrow T_f = T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

SE CONSIDERO UN PROCESSO ISOTERMO, (CUI È A T COSTANTE) SI HA UNA TRASIZIONE DI FASE

$$Q = m \lambda$$

$$\lambda_{\text{FUSIONE ACQUA}} = 3,3 \times 10^5 \text{ J/kg}$$

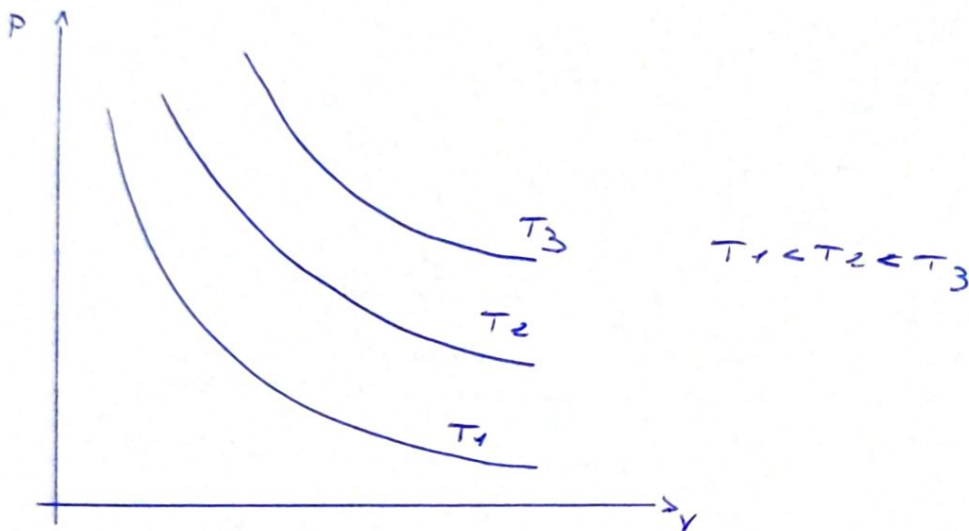
DOMANDA 31

UN GAS IDEALE È UNA CONDIZIONE LIMITE DI UN GAS REALE IN CUI QUEST'ULTIMO È ESTREMAMENTE RASSEMBLATO E SI TROVA AD UNA TEMPERATURA SUFFICIENTEMENTE ELEVATA AFFINCHÉ GLI URTI TRA LE MOLECOLE CHE LO COMpongONO POSSANO ESSERE TRASCURABILI.

UN GAS IDEALE IN UNO STATO DI EQ. TERMODINAMICA A T COSTANTE SI OSSERVA CHE:

$$PV = \text{COSTANTE} \quad \text{LEGGE DI BOYLE}$$

UNA TRASFORMAZIONE A T COSTANTE È DETTA ISOTERMA



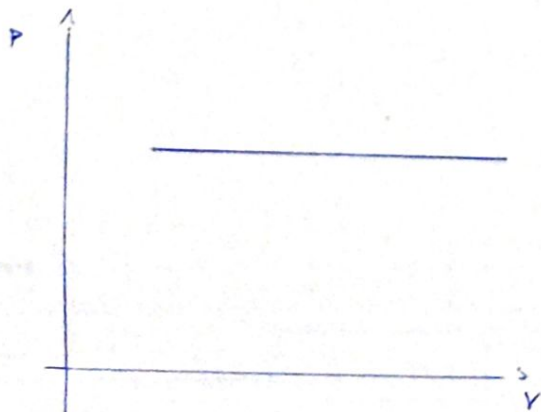
UNA TRASFORMAZIONE A P COSTANTE È DETTA ISOBARA

$$V = V_0 (1 + \alpha t) \quad \text{LEGGE DI VOLT- GAY-LUSSEAC ISOBARA}$$

t = TEMPERATURA IN $^{\circ}\text{C}$

V_0 = VOLUME OCCUPATO A 0°C

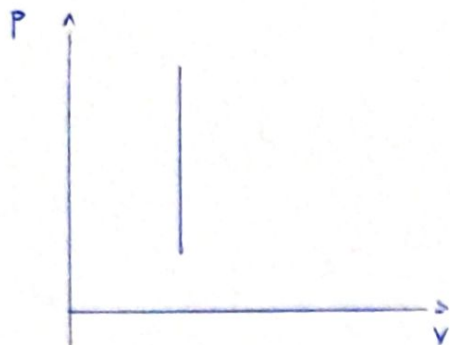
α = COSTANTE



UNA TRASFORMAZIONE A V LOSTANTE E DATA DALLA 126020

$$P = P_0 (1 + 2t)$$

LEGGE DI VOLTA GAY-LUSSAC 120020



IN UN GAS IDEALE, $\alpha = \beta = \frac{1}{273,15 \text{ K}}$

$$V = V_0 \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = V_0 \alpha T \quad T = (273,15 + t) \text{ K}$$

$$P = P_0 \alpha T$$

PER LA LEGGE DI AVOGADRO, $N = \frac{m}{m_{\text{MOLECOLA}}}$. IL NUMERO DI MOLECOLE N È LO STESSO A PARITÀ DI T, V, P .

$\Rightarrow$ 1 mol di un gas occupa SEMPRE LO STESSO VOLUME A PARITÀ DI T E P

$$V_m = 22,414 \text{ L} \quad \text{A } P = 1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa} \quad T = 273,15 \text{ K}$$

$$P = P_0 \alpha T \Rightarrow P V_0 = P_0 V_0 \alpha T \Rightarrow P V_0 = P_0 V$$

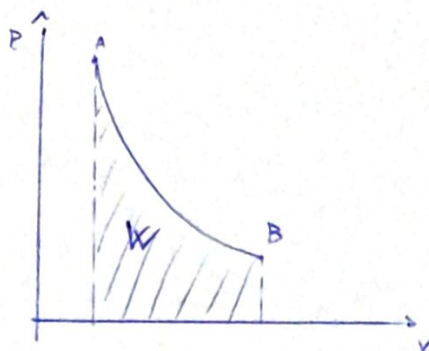
$$\Rightarrow P V = P_0 V_0 \alpha T = P_0 m V_m \alpha T = m (P_0 V_m \alpha) T = m R T$$

$$\Rightarrow \boxed{P V = m R T}$$

$$P V = \frac{N}{N_A} R T = N \frac{R}{N_A} T = N k_B T \Rightarrow \boxed{P V = N k_B T}$$

IN UNA TRASFORMAZIONE FINITA,

$$W = \int_a^B P(V) dV$$



IN UNA TRASFORMAZIONE ISOBARA, $dP = 0 \Rightarrow$ $W_{\text{isobara}} = 0$

IN UNA TRASFORMAZIONE ISOBARA, $W = P \int_a^B dV \Rightarrow$ $W_{\text{isobara}} = P \Delta V$

IN UNA ISOTERMA $W = \int_a^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln V \Big|_a^B \Rightarrow$ $W_{\text{isoterma}} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$

DOMANDA 32

$$A \quad V = \text{cost}, \quad C_V = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad 150 \text{ cal/mol}$$

$$A \quad P = \text{cost}, \quad C_P = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad 170 \text{ cal/mol}$$

$$Q_P = m C_P \Delta T \quad Q_V = m C_V \Delta T$$

SE C_P E C_V SONO COSTANTI

$$Q_P = m \int_{T_A}^{T_B} C_P(T) dT \quad Q_V = m \int_{T_A}^{T_B} C_V(T) dT$$

TRANSFORMAZIONE ~~150 cal/mol~~
170 cal/mol

$$\Delta U = Q_P - W \Rightarrow Q_P = m C_P \Delta T = \Delta U + P \Delta V$$

TRANSF. 150 cal/mol

$$\Delta U = Q_V - W \Rightarrow Q_V = m C_V \Delta T = \Delta U$$

P SE ΔT È LA STESSA, ANCHE ΔT È LA STESSA

$$\Delta U = m C_V \Delta T = m C_P \Delta T - P \Delta V \quad P \Delta V = m R \Delta T$$

$$\Rightarrow \cancel{m C_V \Delta T} = \cancel{m C_P \Delta T} - \cancel{m R \Delta T} \Rightarrow C_V = C_P - R \quad \text{RELAZIONE DI MAYER}$$

$$\text{DA } C_P = C_V + R \Rightarrow \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} = \gamma > 1$$

$$\Rightarrow \frac{C_P}{C_V} = \gamma$$

SPEZIMENTALMENTE SI OSSERVA CHE:

• MONOATOMICI:

$$C_V = \frac{3}{2} R \quad C_P = \frac{5}{2} R \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

• BIATOMICI:

$$C_V = \frac{5}{2} R \quad C_P = \frac{7}{2} R \quad \gamma = \frac{7}{5}$$

DOMANDA 33

IN UNA ADIABATICA $Q_{AB} = 0$

$$\Rightarrow \Delta U = -W \Rightarrow W_{AB} = -m c_V (T_B - T_A) = -m c_V \left(\frac{P_B V_B}{m R} - \frac{P_A V_A}{m R} \right) =$$

$$= -\frac{c_V}{R} (P_B V_B - P_A V_A)$$

$$\frac{c_V}{R} = \frac{c_V}{c_P - c_V} = \frac{\frac{c_V}{c_P}}{1 - \frac{c_V}{c_P}} = \frac{\frac{1}{\gamma}}{1 - \frac{1}{\gamma}} = \frac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{AB} = \frac{1}{\gamma-1} (P_A V_A - P_B V_B)}$$

NEL CASO DI UNA ADIABATICA REVERSIBILE:

$$dU + dW = \cancel{m c_V dT} + P dV \quad m c_V dT + P dV = 0 \quad P = \frac{m R T}{V}$$

$$\Rightarrow \cancel{m c_V dT} + \frac{m R T}{V} dV = 0 \Rightarrow \frac{c_V}{T} dT + \frac{R}{V} dV = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_V} \frac{dV}{V} \Rightarrow -\frac{dT}{T} = \frac{c_P - c_V}{c_V} \frac{dV}{V} \Rightarrow -\frac{dT}{T} = (\gamma - 1) \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \int_{T_A}^{T_B} -\frac{1}{T} dT = \int_{V_A}^{V_B} (\gamma - 1) \cdot \frac{1}{V} dV \Rightarrow -\ln \frac{T_B}{T_A} = (\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{-1} = \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{-1} = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}}$$

$$T_A = \frac{P_A V_A}{m R} \quad T_B = \frac{P_B V_B}{m R}$$

$$\frac{P_A V_A}{m R} V_A^{\gamma-1} = \frac{P_B V_B}{m R} V_B^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{P_A V_A^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma}}$$

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} \quad V_B = \frac{nRT_B}{P_B}$$

$$\Rightarrow P_A \frac{\cancel{n}^{\gamma} \cancel{R}^{\gamma} T_A^{\gamma}}{P_A^{\gamma}} = P_B \frac{\cancel{n}^{\gamma} \cancel{R}^{\gamma} T_B^{\gamma}}{P_B^{\gamma}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_A^{1-\gamma} T_A^{\gamma} = P_B^{1-\gamma} T_B^{\gamma}}$$

DOMANDA 34

IN UNA TRASFORMAZIONE ISOTERMA $T = \text{cost} \Rightarrow \Delta U = 0$

$$\Rightarrow Q_{AB} = W_{AB} = \int_A^B p \, dv = \int_A^B \frac{nRT}{v} \, dv = nRT \ln \frac{v_B}{v_A}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_{AB} = W_{AB} = nRT \ln \frac{v_B}{v_A}} \quad \text{e} \quad \boxed{p_A v_A = p_B v_B}$$

DOMANDA 35

* TRASFORMAZIONE ISOVOLUME ($V = \text{cost.}$)

$$W = 0 \Rightarrow Q = \Delta U = m c_V (T_B - T_A)$$

INOLTRE, $\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B}$

* TRASFORMAZIONI ISOBARICHE ($P = \text{cost.}$)

$$Q_{AB} = m c_P (T_B - T_A)$$

$$W_{AB} = \int_A^B P dV = P \Delta V$$

$$\Delta U = Q - W$$

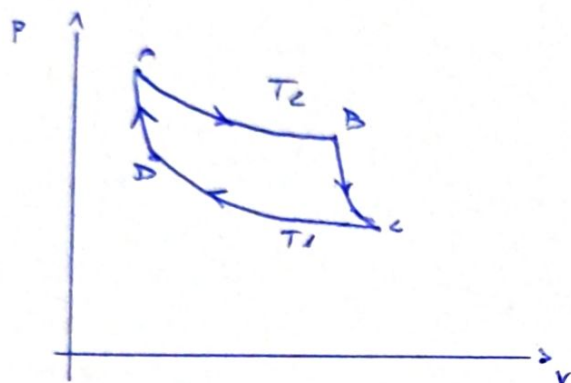
DOMANDA 36

IN UN CICLO TERMICO NON TUTTO IL CALORE ASSorbito PUò ESSERE TRASFORMATO IN LAVORO

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + |Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

$$0 < \eta < 1$$

UN CICLO DI CARNOT È COSTITUITO DA 2 ISOTERMIE E 2 ADIABATICHE



AB e CD SONO ISOTERMIE
BC e DA SONO ADIABATICHE
 $T_2 > T_1$

$$AB: Q_{AB} = W_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$$

$$BC: Q_{BC} = 0 \quad W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nC_V(T_C - T_B) = -nC_V(T_1 - T_2) > 0$$

$$CD: Q_{CD} = W_{CD} = nRT_1 \ln \left| \frac{V_D}{V_C} \right| < 0$$

$$DA: Q_{DA} = 0 \quad W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nC_V(T_A - T_D) = -nC_V(T_2 - T_1) < 0$$

$$Q_{ass} = Q_{AB} + |Q_C| = nRT_1 \ln \left| \frac{V_C}{V_D} \right|$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{nRT_1 \ln \left| \frac{V_C}{V_D} \right|}{nRT_2 \ln \left| \frac{V_B}{V_A} \right|} = 1 - \frac{T_1 \ln \left| \frac{V_C}{V_D} \right|}{T_2 \ln \left| \frac{V_B}{V_A} \right|}$$

NELLE ADIABATICHE $TV^{\gamma-1} = \text{cost.}$

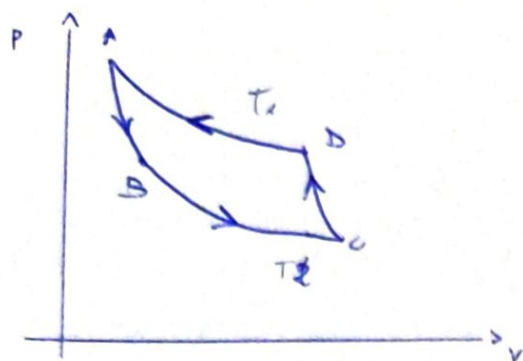
$$\Rightarrow \begin{cases} T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} \\ T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1} \end{cases} \quad \begin{cases} T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} \\ T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\left| \frac{V_B}{V_A} \right|^{\gamma-1} = \left| \frac{V_C}{V_D} \right|^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}}$$

DOMANDA 37

IN UN CICLO FRIGORIFERO IL SISTEMA LOSE LAVORO E ASSORBE CALORE



AB E DA ADIABATICHE

BC E CD ISOTERMICHE

$T_1 > T_2$

$$\text{COP} = \frac{Q_A}{|Q_A + Q_C|}$$

$$AB: Q_{AB} = Q_{DA} = 0$$

$$BC: Q_{BC} = -W_{BC} = mRT_2 \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) > 0$$

$$CD: Q_{CD} = W_{CD} = mRT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right) < 0$$

$$\text{COP} = \frac{mRT_2 \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)}{\left| mRT_2 \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) + mRT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right) \right|}$$

$$\begin{cases} T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1} \\ T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_A}{V_D} = \frac{V_B}{V_C}$$

$$\Rightarrow \text{COP} = \frac{-mRT_2 \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right)}{\left| -mRT_2 \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right) + mRT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right) \right|} = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

$$\boxed{\text{COP} = \frac{T_2}{T_2 - T_1}}$$

DOMANDA 38

• ENUNCIATO DI KELVIN-PLANCK:

È IMPOSSIBILE REALIZZARE UN PROCESSO CHE ABBA COME UNICO RISULTATO LA TRASFORMAZIONE IN LAVORO DEL CALORE FORNITO DA UNA SORGENTE A TEMPERATURA T UNIFORME.

• ENUNCIATO DI CLAUSIUS:

È IMPOSSIBILE REALIZZARE UN PROCESSO CHE ABBA COME UNICO RISULTATO IL TRASFERIMENTO DI UNA QUANTITÀ DI CALORE DA UN CORPO A UN ALTRO A TEMPERATURA MAGGIORE DEL PRIMO.

II PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA:

CONSIDERO UN PROCESSO MONOTERMO (1 SOLA SORGENTE).

SE $Q \leq 0$ E $W \leq 0$, VIENE ASSORBITO LAVORO DAL SISTEMA CHE POI CEDA CALORE ALLA SORGENTE.

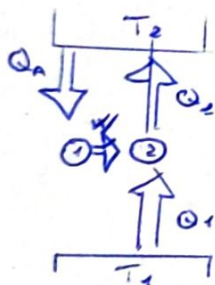
SE $Q = W = 0$

IPOTIZZO CHE ESISTA UN TALE PROCESSO MONOTERMO REVERSIBILE CHE ASSORBE CALORE E PRODUCE LAVORO.

$$Q \geq 0 \quad W \geq 0$$

TUTTAVIA, QUESTO CASO È IN CONTRASTO CON GLI ENUNCIATI, DUNQUE L'UNICO CASO POSSIBILE È CHE $Q = W = 0$.

SUPPONGO DI VIOLARE IL PRINCIPIO DI KELVIN-PLANCK.



$$T_2 > T_1$$

① ASSORBE CALORE Q_1 E LO TRASFORMA INTEGRAMENTE IN LAVORO COME A ②

$$Q_1 = W$$

② AGISCE COME MACCHINA FRIGORIFERA ASSORBENDO LAVORO W PRODOTTO DA ① E CEDA Q_1 PRODOTTO DA T_1 PER POI CEDERE CALORE Q_2 A T_2 .

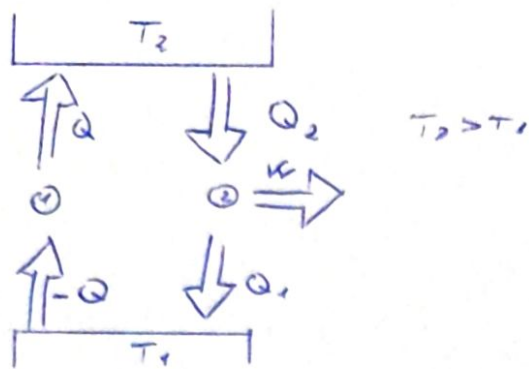
$W' = -W$ DOVE W' È IL LAVORO DIETESTO DA ②

$$Q_1 + Q_2 = W' = -W$$

$$Q_1 + Q_2 = W + Q_2 = -Q_1 - Q_2 + Q_2 \Rightarrow Q_1 + Q_2 = -Q_1$$

POICHÉ COMPLESSIVAMENTE IL LAVORO È NULLO, L'UNICO RISULTATO POSSIBILE È CHE VIENE ~~TRASFERITO~~ TRASFERITA UNA QUANTITÀ DI CALORE DALLA SORGENTE PIÙ FREDDA A QUELLA PIÙ CALDA, IL CHE VIOLA L'ENUNCIATO DI CLAUSIUS.

SUPPONGO DI VIOLARE L'ENUNCIATO DI CLAUSIUS.



SIA $Q_1 = Q$. In questo modo T_1 NON HA SCELTO CALORE: $-Q + Q = 0$

$$W = Q_2 - Q_1 = Q_2 - Q > 0 \text{ PERCHÉ } Q_2 > |Q_1|$$

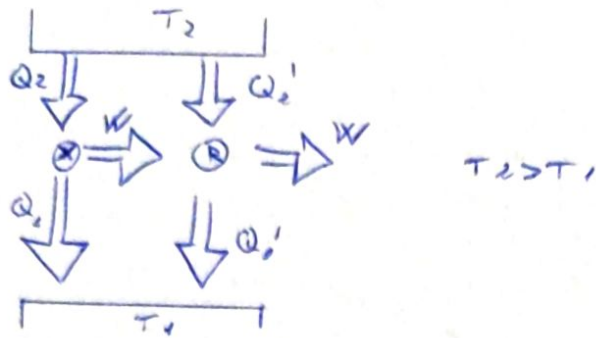
MA COMPLESSIVAMENTE, W È PARI AL CALORE ~~TRASFERITO~~ SCAMBIATO COMPLESSIVAMENTE CON LA SORGENTE T_2 , IL CHE VIOLA L'ENUNCIATO DI KELVIN-PLANCK

QUINDI, SE VIOLA UN PRINCIPIO VIENE VIOLATO ANCHE L'ALTRO

$\Rightarrow$ I DUE PRINCIPI SONO AUTOCONSISTENTI

DOMANDA 39

IL TEOREMA DI CARNOT STABILISCE LA MASSIMA PERCENTUALE DI CALORE ASSORBITO DA UNA MACCHINA TERMICA CHE PUO' ESSERE TRASFORMATO IN LAVORO



$$\eta_x = \frac{W}{Q_2} \quad \eta_R = \frac{W}{Q_1} \quad Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' = W$$

SUPPONGO PER IPOTESI $\eta_x > \eta_R$ E SUPPONGO CHE R POSSA FUNZIONARE COME MACCHINA FRIGORIFERA

$$\frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q_1} \Rightarrow Q_2 < Q_1 \Rightarrow Q_2 - Q_1 < 0 \quad \text{OVVERO IL CALORE COMPLESSIVAMENTE CESSA DA } T_2$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' \Rightarrow -Q_2 + Q_2' = +Q_1 - Q_1' > 0 \quad \text{OVVERO IL CALORE ASSORBITO COMPLESSIVAMENTE DA } T_1$$

1. COMPLESSIVAMENTE T_1 ASSORBE $Q_1 - Q_1'$
2. NON VIENE SCAMBIATO LAVORO CON L'AMBIENTE
3. ~~VIENE~~ ~~SCAMBIATO~~ SI CESSA CALORE $Q_2 - Q_1$ A T_2

VIENE QUINDI VIOLATO IL PRINCIPIO DI CLOUSIUS

$$\Rightarrow \eta_x \leq \eta_R$$

SE AVESSI SUPPOSTO $\eta_x \leq \eta_R$ TROVEREI CUMULOS UNA VIOLAZIONE DI CLOUSIUS

$$\Rightarrow \eta_x = \eta_R \quad \text{SE } X \text{ E' REVERSIBILE}$$

$\Rightarrow$ TUTTE LE MACCHINE TERMICHE REVERSIBILI CHE SCAMBIANO CALORE TRA DUE SORGENTI HANNO LO STESSO RENDIMENTO

$$\eta_{\text{CARNOT}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad W_{\text{max}} = \eta_{\text{CARNOT}} Q_A$$

TUTTE LE MACCHINE IDEALI HANNO RENDIMENTO MINUS DI QUELLO DI CARNOT.

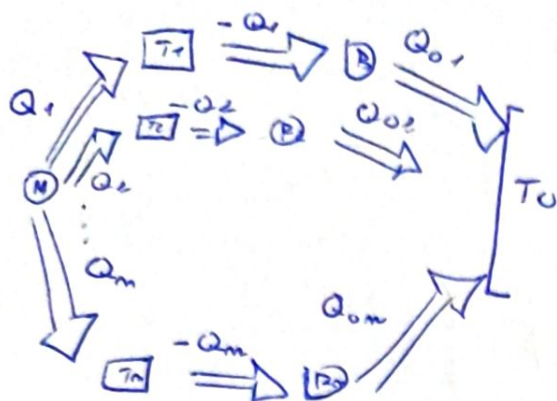
$$1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A}$$

$$\Rightarrow - \frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_C}{Q_A} \Rightarrow \frac{Q_C}{T_1} + \frac{Q_A}{T_2} = 0$$

DOMANDA 40

PER UNA MACCHINA M CHE OPERA TRA m SORGENTI A TEMPERATURE T_i SI HA

$$\sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$



$$R_m: -\frac{Q_m}{T_m} + \frac{Q_{0m}}{T_0} = 0 \Rightarrow \frac{Q_{0m}}{T_0} = \frac{Q_m}{T_m}$$

$$\frac{1}{T_0} \sum_{i=1}^m Q_{0i} = \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{T_i}$$

COMPLESSIVAMENTE NON C'È SCAMBIO DI CALORE CON LE SORGENTI $T_1, \dots, T_m$ MA SOLO CON T_0 , SI HA QUINDI UNA TRASFORMAZIONE CICLICA MONOTERMA E Q_{0i} NON PUÒ ESSERE POSITIVO

$$\Rightarrow \sum_i Q_{0i} \leq 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{T_i} \leq 0}$$

PER m SORGENTI,

$$\boxed{\oint \frac{dQ}{T} \leq 0}$$

SE M È REVERSIBILE, POSSO INVERTIRE TUTTI I CICLI E TUTTI GLI SCAMBI DI CALORE CAMBIANDO DI SEGNO

$$\sum_{i=1}^m (-Q_{0i}) \leq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{T_i} \geq 0$$

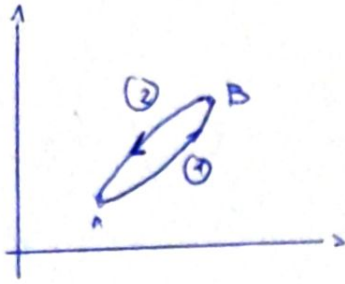
QUINDI, SI HA COMPATIBILITÀ IN CASO M SIA REVERSIBILE SÌ

$$\boxed{\sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad \text{e} \quad \oint \frac{dQ}{T} = 0}$$

$\Rightarrow$ TEOREMA DI CLAUSIUS PER MACCHINE REVERSIBILI

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

$\Rightarrow$ TEOREMA DI CLAUSIUS PER CICLI IRREVERSIBILI



$$(1) + (-2)$$

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \Rightarrow \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 = 0$$

$$\Rightarrow \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{REV}} \quad \text{NON CAMBIA IN QUALSIASI TRASFORMAZIONE}$$

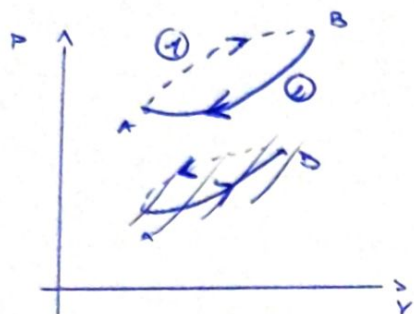
$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{REV}}$$

FUNZIONE DI STATO ENTROPIA

DOMANDA 41

• PRINCIPIO DI AUMENTO DELL'ENTROPIA:

PER UN SISTEMA TERMODINAMICO TERMICAMENTE ISOLATO L'ENTROPIA NON PUÒ MAI DIMINUIRE. RIMANE COSTANTE SE LE TRASFORMAZIONI SONO REVERSIBILI E AUMENTA SE SONO IRREVERSIBILI.



$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{1' \text{ irreversibile}} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{2' \text{ reversibile}} < 0$$

TEOREMA DI CARNOT

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{2' \text{ rev}} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{1' \text{ irr.}}$$

SE IL SISTEMA È ISOLATO TERMICAMENTE, $\delta Q = 0$

$$\Rightarrow \Delta S_{AB} \geq 0 \Rightarrow \boxed{S_B \geq S_A}$$

CONSIDERO UNA TRASFORMAZIONE CICLICA:

$$\Delta S_M = \Delta S_{\text{AMBIENTE}} + \Delta S_{\text{SISTEMA}}^{(0)}$$

SE IL CICLO È REVERSIBILE,

$$\boxed{\Delta S_M = \Delta S_{\text{AMBIENTE}} = 0}$$

SE È IRREVERSIBILE,

$$\boxed{\Delta S_M = \Delta S_{\text{AMBIENTE}} > 0}$$

DOMANDA 42

Per GAS IDEALI,

$$dQ = m c_v dT + dW = m c_v dT + P dV = m c_v dT + m R T \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} = \int_A^B \left(\frac{m c_v dT}{T} + m R \frac{dV}{V} \right)_{\text{rev}} = \int_A^B m c_v \frac{1}{T} dT + \int_A^B m R \frac{1}{V} dV$$

$$\Rightarrow \Delta S_{AB} = m c_v \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + m R \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$$

Da $PV = mRT \Leftrightarrow (P - P_A) = R$

$$\Delta S_{AB} = m c_v \ln \left(\frac{P_B}{P_A} \right) + m c_p \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = m c_p \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) - m R \ln \left(\frac{P_B}{P_A} \right)$$

ISOTERMA: $\Delta S_{AB} = m R \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$

ISOBARA: $\Delta S_{AB} = m c_v \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) = m c_v \ln \left(\frac{P_B}{P_A} \right)$

ISOBARO: $\Delta S_{AB} = m c_p \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) = m c_p \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$

ADIBATICA: $\Delta S_{AB} = 0$