

9. PROBLEMI DI TERMODINAMICA 2^a parte

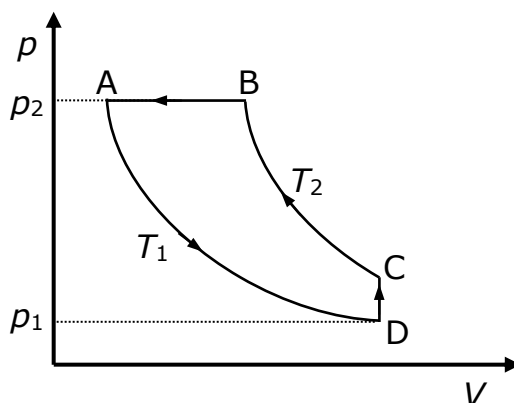
Problema 9.1 (6 punti)

Una macchina frigorifera lavora con un gas perfetto biatomico, secondo un ciclo rappresentabile nel piano di Clapeyron (piano p, V) come mostrato in Figura e formato da due isoterme alle temperature $T_1=260$ K e $T_2=310$ K, una isobara alla pressione $p_2=3 \times 10^5$ Pa, ed una isocora. La trasformazione avviene passando per un continuo di stati di equilibrio termodinamico. Si ipotizzi che l'intero ciclo utilizzi solo due sorgenti di calore a temperatura T_1 e T_2 .

Sapendo che $V_D=100$ l e $p_1=10^5$ Pa, si determinino:

1. I calori scambiati con le due sorgenti di calore; (2 punti)
2. Il lavoro da fornire per fare funzionare la macchina; (2 punti)
3. Il coefficiente di prestazione della macchina confrontandolo con quello della macchina ideale (ciclo di Carnot) funzionante tra le stesse temperature. (2 punti)

NOTA: si ricordi che il coefficiente di prestazione vale $\xi = \frac{Q_a}{|W|}$, dove Q_a è la quantità di calore assorbita dal gas dalla sorgente a temperatura inferiore e W è il lavoro compiuto in un ciclo.



Soluzione:

Dalla equazione dei gas perfetti si trova il numero di moli di gas:

$$n = \frac{p_1 V_D}{RT_1} \approx 4,6 \text{ moli.}$$

La quantità totale di calore scambiato con la sorgente a temperatura minore è data dalla seguente relazione:

$$Q(T_1) = Q_{BA} + Q_{AD} = nc_p(T_1 - T_2) + nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_A} = nc_p(T_1 - T_2) + nRT_1 \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Numericamente si ha $Q_{BA}=-6,7$ kJ e $Q_{AD}=11$ kJ. Pertanto la quantità di calore assorbita dal gas dalla sorgente a temperatura T_1 vale $Q_a=Q(T_1)=4,3$ kJ.

Analogo discorso va fatto per le quantità di calore scambiate con la sorgente a temperatura maggiore T_2 . In questo caso si ha:

$$Q(T_2) = Q_{DC} + Q_{CB} = nc_v(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_C} = nc_v(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

In questo caso i valori numerici sono $Q_{DC}=4,1$ kJ e $Q_{CB}=-13,1$ kJ. Pertanto la quantità di calore ceduto alla sorgente a temperatura maggiore vale $Q_c=Q(T_2)=-8,3$ kJ. Di conseguenza il coefficiente di prestazione vale:

$$\xi = \frac{Q_a}{|W|} = \frac{Q_a}{|Q_a - Q_c|} \approx 1,05.$$

Il lavoro da fornire alla macchina frigorifera vale $W=4$ kJ. Il coefficiente di prestazione di una macchina ideale vale:

$$\xi_C = \frac{Q_a}{|W|} = \frac{T_1}{|T_1 - T_2|} \approx 5,2.$$

Problema 9.2 (5 punti)

Alla temperatura di $T_0=0^\circ\text{C}$ ed alla pressione $p_0=10^5$ Pa, una certa quantità di idrogeno biatomico occupa un volume $V_0=1,5$ litri. Ad un certo istante il gas viene messo a contatto con una sorgente di calore ad una certa temperatura T_1 . Se si aspetta un tempo sufficiente, il volume del gas raddoppia e la sua pressione rimane uguale a quella iniziale.

Nell'ipotesi di gas ideale, si determini:

1. la temperatura finale del gas; (2 punti)
2. la variazione della energia interna del gas; (2 punti)
3. la variazione di entropia del gas. (1 punto)

Soluzione:

La trasformazione descritta nel testo del problema è una trasformazione irreversibile per la quale possiamo sempre applicare le equazioni di stato tra gli stati iniziale e finale. Inoltre si possono utilizzare le relazioni note che forniscono i valori della variazione della energia interna e della entropia perché queste grandezze sono funzioni di stato. Infine trattiamo l'idrogeno molecolare come un gas perfetto biatomico.

L'uso dell'equazione di stato permette di calcolare subito la temperatura finale del gas:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_0 2V_0}{T_1} \quad \rightarrow \quad T_1 = 2T_0 = 2 \cdot 273 = 546 \text{ K.}$$

La variazione di energia interna è $\Delta U = n c_v \Delta T$. Per applicarla dobbiamo ricavare prima il numero di moli che è $n = (p_0 V_0)/(RT_0) \approx 0,07$ moli. Quindi si ha:

$$\Delta U = n \frac{5}{2} R \Delta T \approx 400 \text{ J.}$$

Essendo infine quella descritta dal problema una trasformazione isobara si ha subito che

$$\Delta S = n c_p \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \approx 1,4 \text{ J/K.}$$

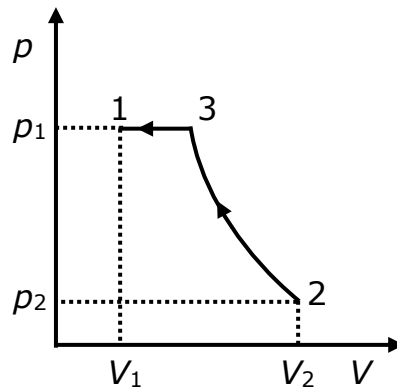
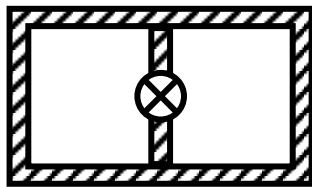
Problema 9.3 (6 punti)

Si consideri un gas racchiuso in un recipiente adiabatico diviso in due scomparti di ugual volume collegabili mediante un rubinetto. All'inizio il rubinetto è chiuso e 9 moli di un gas ideale monoatomico sono contenuti nello scomparto di sinistra mentre l'altro è vuoto. Una volta aperto il rubinetto il gas liberamente si espande. Una volta raggiunta la situazione di equilibrio termodinamico, si agisce dall'esterno con un pistone operando una compressione adiabatica reversibile (trasformazione 2-3) fino a che il gas riacquista la sua pressione iniziale p_1 . In queste condizioni (vedi figura, punto 3 del diagramma) si opera una compressione isobara reversibile (trasformazione 3-1) per riportare il gas al suo volume iniziale V_1 . Sapendo che:

- la pressione iniziale vale $p_1 = 1,01 \times 10^5$ Pa;
- la temperatura iniziale vale $T_1 = 273$ K,

si determini:

1. variazione di entropia nella espansione libera del gas; (2 punti)
2. la variazione totale di entropia del sistema (trasformazioni 1-2-3-1); (1 punto)
3. il lavoro eseguito dall'esterno per riportare il gas nello stato termodinamico di partenza (stato 1 nel diagramma di stato). (3 punti)

**Soluzione:**

L'espansione libera del gas è una trasformazione termodinamica non reversibile, adiabatica e non provoca un cambiamento della temperatura del gas. Pertanto per il calcolo della variazione di entropia si può usare la relazione valida per una trasformazione isoterma ottenendo:

$$\Delta S_{1-2} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \approx 51,8 \text{ J/K},$$

dato che il volume V_2 è doppio di quello iniziale V_1 . Infatti, al termine della espansione libera, il gas occupa tutto il volume a disposizione, cioè entrambi gli scomparti di ugual volume del recipiente. Nella trasformazione adiabatica reversibile 2-3 non si ha scambio di calore con l'esterno e, pertanto, si ha $\Delta S_{2-3} = 0$. Dato che il sistema termodinamico ritorna nella sua situazione iniziale grazie al lavoro di compressione fatto dall'esterno (aumenta l'entropia dell'universo), la variazione di entropia nella trasformazione isobara deve essere uguale e di segno opposto a quella calcolata per l'espansione irreversibile 1-2. In questo modo si impone, come deve essere, nulla la variazione totale di entropia del sistema.

Il lavoro eseguito dall'esterno è uguale a quello subito dal gas per essere riportato nella sua situazione iniziale, ma cambiato di segno. Si ha:

$$W_{\text{est}} = -[W_{2-3} + W_{3-1}] = -[nC_V(T_3 - T_1) + p_1(V_1 - V_3)]. \quad (1)$$

Il volume V_3 si ricava dalla relazione valida per le trasformazioni adiabatiche:

$$p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma \quad \rightarrow \quad V_3 = \left[\frac{p_2}{p_3} \right]^{1/\gamma} V_2 = 2 [0,5]^{1/\gamma} V_1 \approx 0,264 \text{ m}^3.$$

La temperatura T_3 si ottiene dalla equazione di stato:

$$T_3 = p_1 V_3 / nR \approx 356,5 \text{ K.}$$

La sostituzione dei valori delle variabili termodinamiche nella equazione (1) fornisce il lavoro eseguito dall'esterno, $W_{est} \approx 15,9 \text{ kJ}$.

Problema 9.4 (6 punti)

Un cilindro con pareti adiabatiche e di raggio interno $R=3$ cm è posto in posizione verticale. All'interno del cilindro è posto uno stantuffo di massa $m=0,2$ kg, anch'esso a pareti adiabatiche, che divide il cilindro in due parti, una superiore che contiene un gas biatomico ideale (gas 1) ed una inferiore contenente un secondo gas ideale (gas 2). Lo stantuffo è in equilibrio per le seguenti condizioni termodinamiche:

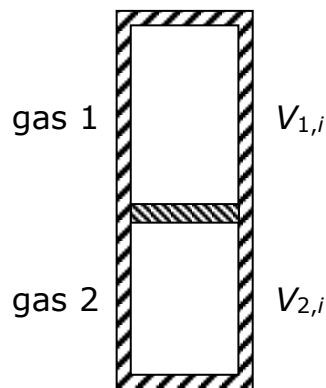
- gas 1: numero di moli $n_1=0,02$; temperatura $T_{1,i} = 127$ °C;
- gas 2: numero di moli $n_2=0,15$; temperatura $T_{2,i} = 27$ °C; pressione $p_2=0,1$ atm.

Se si aumenta la temperatura del gas 2 fino ad una temperatura finale $T_{2,f}$, si osserva che il volume occupato dal gas 1 diventa uguale a $K=(4/5)$ di quello iniziale $V_{1,i}$.

Si determini:

1. il valore della temperatura finale del gas 1 $T_{1,f}$; (3 punti)
2. il valore della temperatura finale del gas 2 $T_{2,f}$; (3 punti)

Nota: si supponga nullo l'attrito tra lo stantuffo e le pareti interne del cilindro.

**Soluzione:**

Si scriva, nelle condizioni finali, l'equazione di stato dei gas ideali per le due situazioni in esame:

$$T_{2,f} = \frac{p_{2,f} V_{2,f}}{n_2 R} \quad ; \quad T_{1,f} = \frac{p_{1,f} V_{1,f}}{n_1 R}. \quad (1)$$

Iniziamo quindi a trovare i valori delle grandezze incognite. Nello stato iniziale dei due gas si ha:

$$p_{2,i} = p_{1,i} + \frac{mg}{S} \quad \rightarrow \quad p_{1,i} = p_{2,i} - \frac{mg}{S} \approx 9,4 \times 10^3 \text{ Pa},$$

con S la superficie del setto. Di conseguenza il volume iniziale occupato dal gas 1 vale:

$$V_{1,i} = \frac{n_1 R T_{1,i}}{p_{1,i}} \approx 7,1 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

D'altro canto, il volume occupato dal gas 2 vale: $V_{2,i} = \frac{n_2 R T_{2,i}}{p_{2,i}} \approx 36,9 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

Allora il volume totale occupato dai due gas vale $V_{TOT} = 44 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

Tornando ora alla equazione (1) si ha:

$$T_{1,f} = \frac{p_{1,f} V_{1,f}}{n_1 R} = \left[\frac{5}{4} \right]^{\gamma-1} T_{1,i} \approx 439 \text{ K}$$

dove si sono usate le relazioni $p_{1,i} V_{1,i}^\gamma = p_{1,f} V_{1,f}^\gamma$, valida per le trasformazioni adiabatiche, e

$V_{1,f} = \frac{4}{5} V_{1,i}$, imposta dal testo dl problema.

Analogamente si ha sempre dalla equazione (1) che:

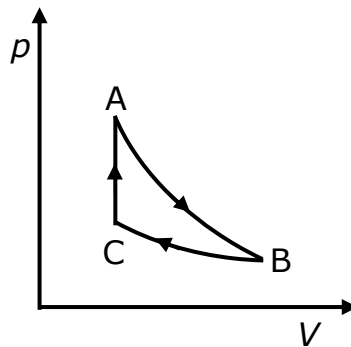
$$T_{2,f} = \frac{p_{2,f} V_{2,f}}{n_2 R} = \frac{\left[p_{1,f} + \frac{mg}{S} \right] \left[V_{TOT} - \frac{4}{5} V_{1,i} \right]}{n_2 R} \approx 414 \text{ K.}$$

Problema 9.5 (6 punti)

Un gas ideale avente un calore specifico a pressione costante uguale a $c_p = (8/3)R$, esegue il ciclo termodinamico riportato in figura e composto da tutte trasformazioni reversibili. In particolare si ha che: la trasformazione AB è una adiabatca, la BC una isoterma e la CA una isocora.

Sapendo che il volume massimo raggiunto dal gas è sei volte maggiore di quello minimo, si calcoli:

1. il rapporto tra la temperatura massima e quella minima raggiunta dal gas durante il ciclo termodinamico; (2 punti)
2. il rendimento del ciclo termodinamico in esame; (3 punti)
3. il rapporto tra il rendimento del ciclo termodinamico in esame con quella di un ciclo di Carnot ideale che operi tra le temperature massima e minima trovate nel rispondere alla prima domanda (1 punto)

**Soluzione:**

Indichiamo con T_A e T_B rispettivamente la temperatura massima e quella minima raggiunte dal gas durante il ciclo termodinamico. Essendo la trasformazione AB una adiabatca reversibile si ha subito che il rapporto tra queste due temperature vale:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \rightarrow \quad \frac{T_A}{T_B} = \left[\frac{V_B}{V_A} \right]^{\gamma-1} \approx 2,9.$$

Il rendimento termodinamico può esprimersi come:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{nc_v(T_A - T_B) + nRT_B \ln(V_A/V_B)}{nc_v(T_A - T_B)}$$

dove si pone $c_v = c_p - R$ e $V_B/V_A = 6$. Mettendo in evidenza la temperatura T_B si ha che:

$$\eta = 1 - \frac{R \ln 6}{c_v \left(\frac{T_A}{T_B} - 1 \right)} \approx 0,44.$$

D'altra parte, il rendimento di una macchina di Carnot che operi tra le temperature T_A e T_B (temperature massima e minima) vale:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_B}{T_A} \approx 0,66.$$

Pertanto, il rapporto tra i rendimenti delle due macchine termiche è uguale a $K \approx 0,67$.

Problema 9.6 (6 punti)

Una certa quantità di gas biatomico ideale è contenuta in un cilindro munito di pistone. Il sistema risulta isolato termicamente dall'ambiente esterno. Sul cilindro di massa trascurabile, è posto un peso di massa M . In queste condizioni, ed all'equilibrio, la pressione del gas vale un certo valore p_0 . Ad un certo istante viene collocata sul pistone, istantaneamente, un secondo peso anch'esso di massa M .

Sapendo che alla fine del processo di compressione che segue alla collocazione del secondo peso si misura una variazione di entropia pari a $\Delta S = 0,8 \text{ J/K}$, si determini:

1. Il valore del rapporto V_1/V_0 tra volume finale ed iniziale del gas; (2 punti)
2. Il valore del rapporto T_1/T_0 tra temperatura finale ed iniziale del gas; (2 punti)
3. Il numero di moli del gas contenuto nel cilindro. (2 punti)

Nota: si supponga nullo l'attrito tra il pistone e le pareti interne del cilindro.

Soluzione:

Il processo descritto dal problema può essere assimilato ad una compressione adiabatica irreversibile *istantanea* provocata dal fatto di aver collocato la seconda massa M sul pistone. In questo senso si può pensare che la trasformazione istantanea sia eseguita anche alla pressione costante uguale a $2p_0$, dove p_0 era la pressione agente sul gas con la sola massa M posta sul pistone. Questo fatto non ci deve preoccupare perché, per il calcolo della variazione di entropia del processo di compressione, è possibile prendere una qualsiasi trasformazione reversibile che unisca lo stato termodinamico iniziale a quello finale. Allora la relazione che è possibile utilizzare per il calcolo della entropia è:

$$\Delta S = nc_V \ln \frac{T_1}{T_0} + nR \ln \frac{V_1}{V_0}.$$

Si devono trovare, pertanto, i rapporti tra le temperature e i volumi iniziali con le rispettive grandezze misurate nello stato termodinamico finale del gas. Il 1° principio della termodinamica per una trasformazione adiabatica a pressione costante $2p_0$ di un gas ideale si scrive nel seguente modo:

$$Q = 0 \rightarrow \Delta U = -W \rightarrow nc_V(T_1 - T_0) = 2p_0(V_0 - V_1).$$

Ricordando ora che $c_V = (5/2)R$ ed applicando l'equazione di stato dei gas ideali si ha:

$$\frac{5}{2} nR(T_1 - T_0) = 2nRT_0 - nRT_1 \rightarrow \frac{T_1}{T_0} = \frac{9}{7}.$$

Analogamente si ha che $\frac{V_1}{V_0} = \frac{9}{14}$.

Pertanto il valore del numero di moli del gas si ricava dalla relazione:

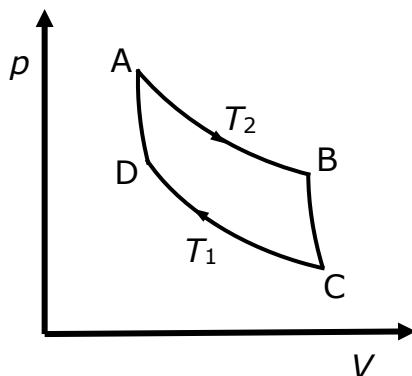
$$n = \frac{\Delta S}{R \left[\frac{5}{2} \ln \frac{T_1}{T_0} + \ln \frac{V_1}{V_0} \right]} \approx 0,52.$$

Problema 9.7 (5 punti)

Un gas ideale esegue un ciclo di Carnot composto da tutte trasformazioni reversibili. Si conosce il volume iniziale del gas $V_A=10$ litri, la pressione iniziale del gas $p_A=1$ atm, la temperatura della sorgente più calda $T_2=100$ °C e il rendimento della macchina $\eta=0,6$. Inoltre il volume del gas nello stato termodinamico B vale $V_B=3V_A$.

Si chiede di determinare:

1. la quantità di calore scambiato con la sorgente a temperatura minore T_1 ; (3 punti)
2. il valore della temperatura T_1 della sorgente a temperatura più bassa; (2 punti)

**Soluzione**

Dalla definizione di rendimento di una macchina termica si ha:

$$\eta = 1 - \frac{Q_C}{Q_A},$$

dove Q_C e Q_A sono rispettivamente le quantità di calore ceduta ed assorbita dal gas durante la compressione e la espansione isoterma. Dalla precedente equazione si può ricavare il valore della quantità di calore ceduta alla sorgente a temperatura più bassa se si conosce la quantità di calore assorbita dal gas. Si inizi con il trovare il numero di moli di gas. Si ha dall'equazione di stato che:

$$n = \frac{p_A V_A}{RT_2} \approx 0,33.$$

Si è ora in grado di calcolare Q_A , che risulta pari a:

$$Q_A = W_A = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} \approx 1,1 \text{ kJ}.$$

Pertanto la quantità di calore Q_C vale:

$$Q_C = Q_A(1 - \eta) \approx 440 \text{ J}.$$

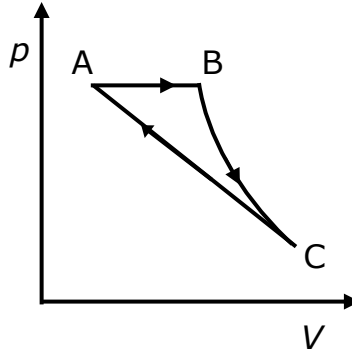
Infine, essendo il ciclo composto da sole trasformazioni reversibili ed essendo le due trasformazioni adiabatiche anche isoentropiche, dal teorema di Clausius si ha:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_A}{T_2} = \frac{Q_C}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 \frac{Q_C}{Q_A} \approx 148 \text{ K}.$$

Problema 9.8 (5 punti)

Una mole di un gas ideale monoatomico esegue il ciclo termodinamico reversibile indicato in figura: AB è una trasformazione isobara, BC una adiabatca e CA una lineare che porta il gas allo stato iniziale. Sapendo che tra i volumi del gas valgono le relazioni $V_B=2V_A$, $V_C=1,5V_B$ e che la variazione di entropia tra gli stati B ed A vale $\Delta S_{BA}=14,4 \text{ J/K}$, si chiede di determinare:

1. il rapporto tra le temperature T_B/T_A ; (2 punti)
2. il rapporto tra le temperature T_A/T_C ; (3 punti)

**Soluzione**

Dalla definizione generale di entropia per una trasformazione di un gas perfetto si ha:

$$\Delta S_{AB} = nc_v \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A},$$

dove T_A , T_B , V_A e V_B sono rispettivamente le temperature ed i volumi degli stati A e B. Ricordando che per un gas monoatomico $c_v=(3/2)R$, si ha:

$$\frac{T_B}{T_A} = \exp \left[\frac{2\Delta S_{AB}}{3nR} - \frac{3}{2} \ln \frac{V_B}{V_A} \right] = 2.$$

Considerando che nel ciclo la variazione totale di entropia è nulla (trasformazioni reversibili) e che la variazione di entropia nella trasformazione adiabatca è nulla, si può scrivere:

$$\Delta S_{CA} = -\Delta S_{AB}$$

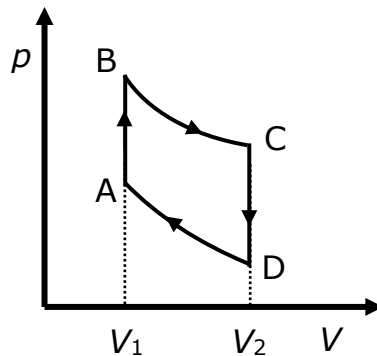
da cui:

$$\frac{T_A}{T_C} = \exp \left[-\frac{2\Delta S_{AB}}{3nR} - \frac{3}{2} \ln \frac{V_A}{V_C} \right] \approx 0,65.$$

Problema 9.9 (7 punti)

Un motore utilizza il ciclo riportato in figura: AB e CD sono due trasformazioni isocore, BC e DA due trasformazioni adiabatiche. Ipotizzando che il ciclo avvenga solo tra due sorgenti di calore, sapendo che si utilizza una mole di gas ideale biatomico e volendo ottenere per ogni ciclo un rendimento termodinamico uguale ad $\eta=0,50$, si chiede di determinare:

1. quale debba essere il rapporto tra i volumi V_1 e V_2 ; (4 punti)
2. la differenza di temperatura $T_C - T_D$ per ottenere dalla macchina una potenza pari a $P=10$ kW nel caso esegua 500 cicli termodinamici al minuto (si ricordi la definizione di potenza). (3 punti)

**Soluzione**

Si inizi con il ricordare che il rendimento di un ciclo termodinamico che utilizza solo due sorgenti di calore è dato dalla relazione generale:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

e Q_A e Q_C sono rispettivamente la quantità di calore assorbita e ceduta in un ciclo. Essendo le due trasformazioni BC e DA adiabatiche, queste quantità di calore possono scriversi come:

$$Q_A = nc_V [T_B - T_A] \quad ; \quad Q_C = nc_V [T_D - T_C].$$

Pertanto, il rendimento può scriversi nel seguente modo:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A}$$

Dalle relazioni tra le variabili termodinamiche valide per le trasformazioni adiabatiche si ha:

$$T_B V_1^{\gamma-1} = T_C V_2^{\gamma-1} \quad \rightarrow \quad T_C = T_B \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{\gamma-1}$$

$$T_A V_1^{\gamma-1} = T_D V_2^{\gamma-1} \quad \rightarrow \quad T_D = T_A \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{\gamma-1}$$

Sottraendo la prima dalla seconda equazione si ha per il rendimento termodinamico:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A} = 1 - \frac{[T_B - T_A] \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{\gamma-1}}{T_B - T_A} = 1 - \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{\gamma-1}$$

da cui:

$$\frac{V_1}{V_2} = [1 - \eta]^{1/(\gamma-1)} \approx 0,18.$$

Per trovare ora la differenza $T_C - T_D$, nel caso in cui la macchina sviluppi la potenza di 10 kW compiendo 500 cicli termodinamici al minuto, si osservi che il lavoro compiuto dal gas si trova come somma tra i lavori W_{BC} e W_{DA} eseguiti lungo le due trasformazioni adiabatiche. Si può allora scrivere:

$$W_{TOT} = W_{BC} + W_{DA} = -nc_V [T_C - T_B + T_A - T_D] = nc_V [T_B - T_C + T_D - T_A]$$

D'altro canto dalla relazione valida per il rendimento termodinamico si ha:

$$\eta = 1 - \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A} \rightarrow T_B - T_A = \frac{T_C - T_D}{1 - \eta}$$

Sostituendo in W_{TOT} si ha:

$$W_{TOT} = \frac{nc_V}{1 - \eta} \eta [T_C - T_D] \rightarrow T_C - T_D = W_{TOT} \frac{1 - \eta}{nc_V \eta} \approx 57,8 \text{ K.}$$

Il lavoro eseguito in un ciclo si trova dalla potenza totale come: $W_{TOT} = P \Delta t \approx 1,2 \text{ kJ}$, essendo il tempo per fare un ciclo pari a $\Delta t = 60 \text{ s} / (\text{numero di cicli}) = 60/500 \approx 0,12 \text{ s}$.

Problema 9.10 (6 punti)

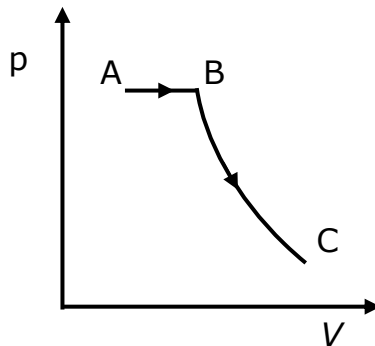
Un certo numero di moli di un gas biatomico ideale è contenuto in un cilindro e percorre consecutivamente due trasformazioni reversibili: la prima è una trasformazione isobara che porta il gas dallo stato A a quello B con $V_B > V_A$; la seconda trasformazione BC è una adiabatica che porta il gas ad avere la stessa temperatura T_A che possedeva nello stato iniziale A.

Sapendo che la pressione iniziale è $p_A = 20 \text{ atm}$, che la temperatura iniziale vale $T_A = 60^\circ \text{C}$, che la pressione $p_C = 6 \text{ atm}$ e che il lavoro totale eseguito durante le due trasformazioni vale $W_{TOT} = 1 \text{ kJ}$, si determini:

1. il numero di moli di gas contenuto nel cilindro disegnando nel piano pV le due trasformazioni eseguite dal gas; (3 punti)
2. la quantità di calore assorbito dal gas; (2 punti)
3. la variazione totale di energia interna subita dal gas. (1 punto)

Soluzione

Nel piano (pV) le due trasformazioni che subisce il gas possono essere schematizzate come segue:



Dal testo del problema risulta che gli stati termodinamici A e C, iniziale e finale, sono sulla stessa isoterma. Il lavoro totale eseguito dal gas durante le espansioni possono scriversi come:

$$W_{TOT} = W_{AB} + W_{BC}$$

Ora si ha:

$$W_{AB} = p_A(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A).$$

Inoltre dal 1° principio della termodinamica si ha:

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_V(T_A - T_B).$$

Ricordando che per una trasformazione adiabatica si ha:

$$Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{costante} \quad \rightarrow \quad T_B = T_A \left[\frac{p_C}{p_A} \right]^{(1-\gamma)/\gamma}.$$

Il lavoro totale assume la seguente espressione:

$$W_{TOT} = \frac{7}{2} nRT_A \left[\left(\frac{p_C}{p_A} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} - 1 \right],$$

da cui si ricava il valore del numero di moli di gas che è $n \approx 0,25$ moli. Nel ricavare la precedente espressione si è fatto uso del fatto che per un gas biatomico $c_V = (5/2)R$ e $\gamma = 1,4$.

Essendo la trasformazione BC una trasformazione adiabatica, l'unica quantità di calore assorbita dal gas è durante la trasformazione isobara. Per cui si ha:

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = nR(T_B - T_A) + nc_V(T_B - T_A) = W_{TOT}$$

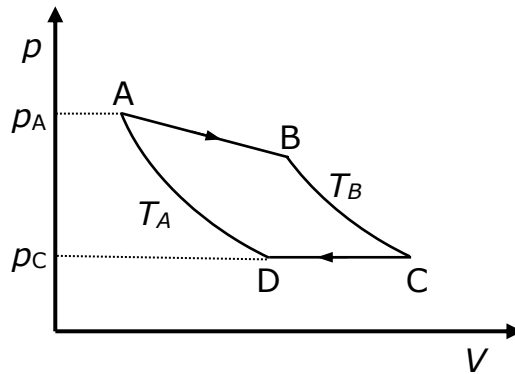
Questa quantità di calore è, di conseguenza, uguale al lavoro totale eseguito dal gas. Infatti, non potrebbe essere diversamente dato che essendo la variazione totale di energia interna nulla (temperatura in A uguale a quella in C), si deve avere:

$$\Delta U_{AB} = -\Delta U_{BC}.$$

Problema 9.11 (4 punti)

Si prenda in considerazione il ciclo termodinamico reversibile di un gas ideale riportato in figura. La trasformazione AB è una espansione lineare che unisce due isoterme rispettivamente alle temperature $T_A=100\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $T_B=150\text{ }^{\circ}\text{C}$. La trasformazione BC è una espansione isoterma, la trasformazione CD una compressione isobara ed, infine, la trasformazione DA una compressione isoterma.

Sapendo che il numero di moli di gas è uguale ad $n=1$, che $p_A=10\text{ atm}$, che $V_B=1,5V_A$ e che $V_C=2V_A$, si determini il lavoro totale eseguito durante un ciclo.

**Soluzione**

Dall'equazione dei gas ideali si ha immediatamente che:

$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} \approx 3,1 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Dalle condizioni $V_B=1,5V_A$ e $V_C=2V_A$ si deducono le seguenti grandezze fisiche:

$$p_B = \frac{nRT_B}{1,5V_A} \approx 7,66 \times 10^5 \text{ Pa} \quad \text{e} \quad p_C = \frac{nRT_B}{2V_A} \approx 5,75 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Infine per la compressione isoterma DA si ha

$$p_A V_A = p_C V_D \quad \rightarrow \quad V_D = \frac{p_A}{p_C} V_A \approx 5,4 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Si è ora in grado di calcolare il lavoro compiuto in un ciclo. Infatti, essendo:

$$W_T = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA},$$

si ottiene:

$$W_{AB} = \frac{(p_A + p_B)(V_B - V_A)}{2} \approx 1,36 \text{ kJ} \quad ; \quad W_{BC} = nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B} = nRT_B \ln \frac{2}{1,5} \approx 1 \text{ kJ}$$

$$W_{CD} = nR(T_A - T_B) \approx -0,41 \text{ kJ} \quad ; \quad W_{DA} = nRT_B \ln \frac{V_A}{V_D} \approx -1,76 \text{ kJ}.$$

Il lavoro totale allora vale $W_T \approx 0,2 \text{ kJ}$.

Problema 9.12 (5 punti)

Una certa quantità di gas ideale biatomico è contenuta nella parte inferiore del cilindro chiuso mostrato nella figura. L'intero cilindro è isolato termicamente dall'ambiente esterno eccetto per la parete inferiore che è a contatto con una sorgente ideale di calore. Il pistone, di raggio $R=10$ cm e massa trascurabile, separa il gas dalla parte superiore del cilindro che è un sistema di richiamo del tutto assimilabile ad una molla di costante elastica $K=10^4$ N/m.

I valori iniziali delle variabili termodinamiche del gas sono le seguenti:

- la pressione è quella esterna pari a $p_0=1$ atm;
- il volume occupato dal gas è $V_0=5$ litri;
- la temperatura del gas è $T_0=0$ °C.

Inoltre nelle condizioni iniziali il sistema di richiamo è nella sua posizione di riposo. Sapendo che la compressione massima a cui si può sottoporre il sistema di richiamo corrisponde ad un innalzamento del pistone uguale a $z_{MAX} = 3$ cm, si calcolino:

1. la massima temperatura T_{MAX} che può raggiungere il gas; (1 punto)
2. il valore massimo del lavoro eseguibile dal gas; (2 punti)
3. la massima variazione di energia interna del gas; (1 punto)
4. la massima quantità di calore che può assorbire il gas. (1 punto)

**Soluzione**

Dalle condizioni iniziali si ricava subito il numero di moli di gas contenuto nella parte inferiore del cilindro:

$$n = \frac{p_0 V_0}{RT_0} \approx 0,22.$$

La temperatura massima a cui può essere portato il gas si ricava sempre dall'equazione dei gas perfetti:

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR},$$

dove p_f e V_f sono la pressione ed il volume massimo raggiungibili dal gas. Queste due variabili si ricavano dalle seguenti espressioni:

$$p_f = p_0 + \frac{kz_{MAX}}{S} \approx 1,11 \times 10^5 \text{ Pa}$$

e

$$V_f = V_0 + Sz_{MAX} \approx 5,94 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

dove si è posto $S = \pi R^2$ con R raggio del cilindro. Di conseguenza la temperatura finale massima del gas risulta uguale a $T_f \approx 355$ K.

Il lavoro massimo eseguibile dal gas durante l'espansione si ottiene considerando il lavoro eseguito contro la forza elastica e la pressione atmosferica esterna. Si ha:

$$W_{MAX} = p_0 \Delta V + \frac{1}{2} K z_{MAX}^2 \approx 100 \text{ J.}$$

La corrispondente variazione di energia interna è semplicemente ricavabile dalla sua definizione generale

$$\Delta U_{MAX} = n c_V (T_f - T_0) \approx 380 \text{ J.}$$

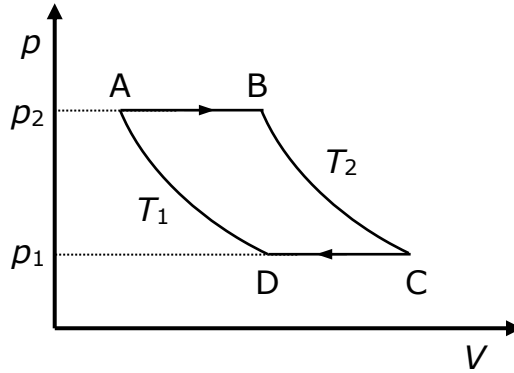
Infine, il 1° principio della termodinamica fornisce la massima quantità di calore che il gas può assorbire:

$$Q_{MAX} = \Delta U_{MAX} + W_{MAX} = 480 \text{ J}$$

Problema 9.13 (6 punti)

Un certo numero di moli di un gas ideale biatomico percorre il ciclo mostrato in figura che è costituito da due isoterme a temperatura $T_1=20^\circ\text{C}$ e $T_2=100^\circ\text{C}$, e da due isobare a pressione p_1 e p_2 . Sapendo che il lavoro totale eseguito in un ciclo vale $W_{TOT}= 400 \text{ J}$ e che la quantità totale di calore assorbito dal gas è $Q_{TOT}= 3,03 \text{ kJ}$, si calcoli:

1. rapporto $p=p_2/p_1$ tra le due pressioni del gas durante le trasformazioni isobare; (4 punti)
2. il numero di moli del gas; (2 punti)

**Soluzione**

Nella espansione a pressione costante il lavoro è dato dalla relazione:

$$W_{AB} = p_2(V_B - V_A) = nR(T_2 - T_1)$$

avendo opportunamente utilizzato l'equazione di stato dei gas ideali. Si nota subito che per le condizioni del problema si ha che $W_{AB} = -W_{CD}$. Pertanto il lavoro totale è dato soltanto dalla somma dei due lavori ottenuti come espansione e compressione del gas durante le trasformazioni isoterme. Si ha, pertanto, che:

$$W_{TOT} = W_{BC} + W_{DA} = nR \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)(T_2 - T_1). \quad (1)$$

La quantità totale di calore assorbita dal gas è quella fornita durante le espansioni a pressione e temperatura costanti. Si può allora scrivere:

$$Q_{TOT} = Q_{AB} + Q_{BC} = nc_V(T_2 - T_1) + p_2(V_B - V_A) + nRT_2 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

che diventa:

$$Q_{TOT} = \frac{7}{2}nR(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad (2)$$

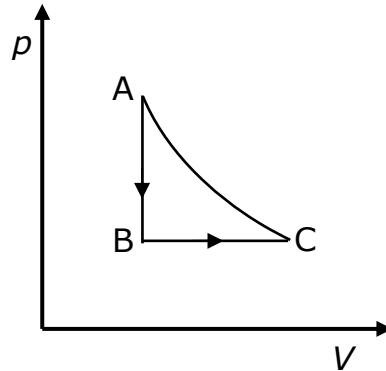
Indicando con $p=p_2/p_1$ il sistema tra le due equazioni (1) e (2) permette di calcolare le due incognite richieste dal problema:

$$n = \frac{2}{7R(T_2 - T_1)} \left[Q_{TOT} - \frac{W_{TOT}T_2}{T_2 - T_1} \right] \approx 0,5 \quad ; \quad p = \exp\left[\frac{W_{TOT}}{nR(T_2 - T_1)} \right] \approx 3,33$$

Problema 9.14 (10 punti)

Una macchina frigorifera compie il ciclo formato da tutte trasformazioni reversibili indicato in figura. La trasformazione AB è una isocora, quella BC una isobara e la CA una isoterma alla temperatura T_A . Sapendo che (i) la temperatura $T_A=330$ K; (ii) la temperatura $T_B=290$ K; (iii) la pressione $p_A=3 \times 10^5$ Pa; (iv) la quantità totale di calore ceduta nella trasformazione isocora $Q_{AB}=-6$ kJ, si determini:

1. il numero di moli del gas biatomico utilizzato dalla macchina frigorifera; (2 punti)
2. il calore fornito alla sorgente a temperatura maggiore; (4 punti)
3. il lavoro fatto in un ciclo. (4 punti)

**Soluzione:**

Utilizzando il calore ceduto durante la trasformazione isocora si ha:

$$Q_{AB} = \frac{5}{2} nR(T_B - T_A) \rightarrow n = \frac{2}{5R(T_B - T_A)} \approx 7,2 \text{ moli.}$$

Il volume della trasformazione isocora e la pressione p_B si trovano utilizzando l'equazione di stato dei gas ideali ottenendo:

$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} \approx 6,6 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \quad ; \quad p_B = p_A \frac{T_B}{T_A} \approx 2,64 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Da queste relazioni si ricava subito il volume di gas nello stato termodinamico C, $V_C \approx 7,5 \times 10^{-2} \text{ m}^3$. Siamo ora in grado di rispondere alle domande 2 e 3 del problema. La quantità di calore fornita alla sorgente a temperatura maggiore T_A è uguale ed opposto al lavoro fatto lungo la trasformazione isoterma. Si ottiene:

$$W_{CA} = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_C} \approx -2,56 \text{ kJ.}$$

Pertanto $Q_{CA}=2,56$ kJ. Il lavoro totale fatto durante il ciclo vale semplicemente:

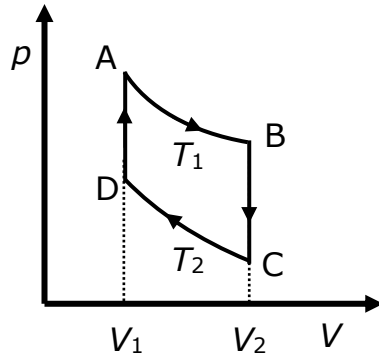
$$W_{TOT} = W_{BC} + W_{CA} = p_B(V_C - V_A) + W_{CA} \approx -158 \text{ J.}$$

Il lavoro è negativo, come ci si aspetta, dato che il ciclo proposto è un ciclo frigorifero che per funzionare, seguendo il 2° principio della termodinamica, ha bisogno di assorbire un lavoro dall'esterno.

Problema 9.15 (10 punti)

Si studi il ciclo termodinamico reversibile svolto da un gas ideale monoatomico illustrato nella figura. Il ciclo è composto da due trasformazioni isoterme (AB e CD) e da due trasformazioni isocore (BC e DA). Sapendo che $T_1=400$ K, $T_2=300$ K, e che il rapporto tra i volumi è uguale a $V_2/V_1=2$, si determini:

1. il rapporto tra le pressioni p_A/p_D e p_B/p_C ; (1 punto)
2. il rapporto tra le pressioni p_A/p_B e p_D/p_C ; (1 punto)
3. il rendimento del ciclo termodinamico ipotizzando che esistano solo due sorgenti di calore alla temperatura T_1 e T_2 ; (6 punti)
4. la variazione di entropia delle due sorgenti di calore (fare il calcolo per un numero di moli uguale a $n=1$). (2 punti)

**Soluzione:**

Utilizzando la legge dei gas ideali si ha subito che:

$$p_A/p_D = p_B/p_C = T_1/T_2 \approx 1,3 \quad \text{e} \quad p_A/p_B = p_D/p_C = V_2/V_1 = 2.$$

Il rendimento del ciclo termodinamico può scriversi uguale a:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}}.$$

La quantità di calore assorbita è:

$$Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{DA} = nRT_1 \ln(V_2/V_1) + nc_v(T_1 - T_2).$$

La quantità di calore ceduta è:

$$Q_{ced} = Q_{CD} + Q_{BC} = nRT_2 \ln(V_1/V_2) + nc_v(T_2 - T_1).$$

Per un gas ideale monoatomico $c_v=(3/2)R$ per cui si ha:

$$\eta = 1 + \frac{T_2 \ln(V_1/V_2) + 3/2(T_2 - T_1)}{T_1 \ln(V_2/V_1) + 3/2(T_1 - T_2)} \approx 16,2\%.$$

La variazione di entropia delle due sorgenti è uguale ed opposta e vale:

$$-(\Delta S_{CD} + \Delta S_{BC}) = \Delta S_{AB} + \Delta S_{DA} = nR \ln(V_2/V_1) + nc_v \ln(T_1/T_2) \approx 9,4 \text{ J/K}.$$

Problema 9.16 (10 punti)

Un blocco di ghiaccio di massa $m=20$ kg, alla temperatura di $T_0=0$ °C, viene immerso in una piscina olimpionica riempita con acqua alla temperatura $T_1=15$ °C.

Nell'ipotesi che la temperatura finale dell'acqua della piscina, una volta sciolto tutto il ghiaccio, rimanga uguale a T_1 , si risponda alle seguenti domande:

1. il processo termodinamico descritto è un processo reversibile o irreversibile? Si giustifichi la risposta (2 punti)
2. quale è la variazione totale di entropia del processo che porta la massa m di acqua contenuta nel blocco di ghiaccio ad avere la temperatura finale T_1 ? (3 punti)
3. quale è la variazione di entropia totale subita dalla massa di acqua contenuta nella piscina? (3 punti)
4. quanto vale la variazione di entropia dell'universo termodinamico? (2 punti)

Nota: il calore specifico dell'acqua vale $c_a=4187$ J/kg×K e il suo calore latente di fusione è uguale a $\lambda=3.3\times 10^5$ J/kg.

Soluzione:

La trasformazione del ghiaccio descritta dal problema è chiaramente irreversibile essendo un processo spontanea che non passando per stati di equilibrio. La variazione di entropia della massa di acqua contenuta nel blocco di ghiaccio può essere calcolata nel seguente modo:

$$\Delta S_{H_2O} = \frac{\lambda m}{T_0} + \int_{T_0}^{T_1} \frac{dQ}{T} = \frac{\lambda m}{T_0} + mc_a \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T}.$$

Nella precedente equazione, l'integrale viene risolto ipotizzando di utilizzare una trasformazione reversibile a pressione costante per la quale, nel caso in esame, la quantità di calore scambiato vale $dQ = mc_a dT$. L'espressione della variazione di entropia per la massa m di acqua contenuta inizialmente nel blocco di ghiaccio allora è uguale a:

$$\Delta S_{H_2O} = \frac{\lambda m}{T_0} + mc_a \ln \frac{T_1}{T_0} \approx 28.6 \text{ kJ/K}$$

La variazione di entropia ΔS_p dell'acqua della piscina è calcolabile usando una trasformazione isoterma reversibile alla temperatura T_1 , in cui l'acqua della piscina fornisce una quantità di calore ΔQ_p al blocco di ghiaccio pari a:

$$\Delta Q_p = -\Delta Q_{H_2O} = -m[\lambda + c_a(T_1 - T_0)].$$

Pertanto la variazione di entropia dell'acqua della piscina è uguale a:

$$\Delta S_p = -\frac{m[\lambda + c(T_1 - T_0)]}{T_1} \approx -27.3 \text{ kJ/K}.$$

La variazione di entropia dell'universo ΔS_U termodinamico (in questo caso il blocco di ghiaccio e l'acqua contenuta nella piscina) è semplicemente uguale alla somma algebrica delle due entropie calcolate. Si ha, quindi che:

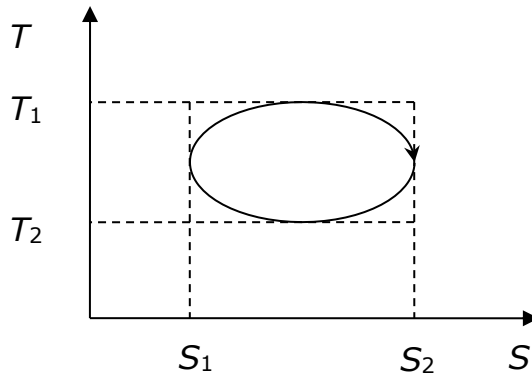
$$\Delta S_U = \Delta S_{H_2O} + \Delta S_p = 1.3 \text{ kJ/K}.$$

Problema 9.17 (10 punti)

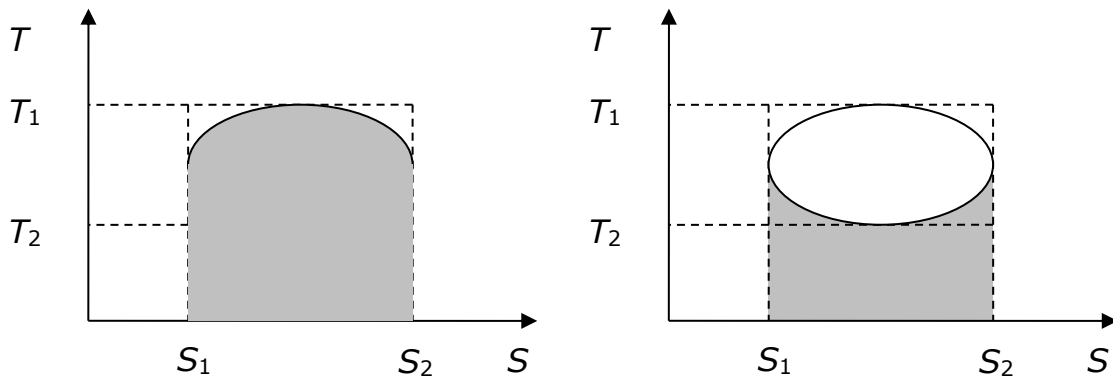
Un ciclo termodinamico di un motore è rappresentato nel piano TS dall'ellisse della figura. I dati noti del problema sono: $T_1 = 1300 \text{ K}$, $T_2 = 300 \text{ K}$, $S_2 - S_1 = 8,3 \text{ J/K}$. Calcolare:

1. il valore assoluto del calore assorbito Q_{ass} e di quello ceduto Q_{ced} dal motore durante un ciclo; (4 punti)
2. il lavoro sviluppato dal motore durante un ciclo; (2 punti)
3. il rendimento del motore; (2 punti)
4. il lavoro sviluppato da un ciclo ideale di Carnot che lavori tra due sorgenti alle temperature T_1 e T_2 assorbendo dalla sorgente alla temperatura T_1 la medesima quantità di calore Q_{ass} del ciclo calcolata nella precedente domanda 1. (2 punti)

Nota: si ricordi che l'area A di un'ellisse di asse maggiore a e asse minore b vale $A = \pi ab/4$.

**Soluzione**

Nel piano TS , le quantità di calore assorbite e cedute dal motore durante un ciclo si calcolano, determinando, rispettivamente, le aree sottese alla parte superiore ed a quella inferiore dell'ellisse come mostrato nelle due figure sottostanti.



Usando semplici nozioni di geometria piana, si ottiene:

$$Q_{\text{ass}} = (S_2 - S_1) \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{1}{8} \pi (S_2 - S_1) (T_1 - T_2) \approx 9,9 \text{ KJ}$$

e

$$Q_{\text{ced}} = (S_2 - S_1) \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{1}{8} \pi (S_2 - S_1) (T_1 - T_2) \approx 3,38 \text{ KJ}.$$

Per il primo principio della termodinamica, il lavoro sviluppato vale:

$$W = Q_{\text{ass}} - Q_{\text{ced}} = \pi (S_2 - S_1) (T_1 - T_2) / 4 = 6.52 \text{ KJ}.$$

Il rendimento vale:

$$\eta = \frac{L}{Q_{\text{ass}}} = \frac{\pi (S_2 - S_1) (T_1 - T_2) / 4}{(S_2 - S_1) (T_1 + T_2) / 2 + \pi (S_2 - S_1) (T_1 - T_2) / 2} \approx 0,66.$$

Il rendimento del ciclo di Carnot che operi tra le medesime temperature estreme del ciclo vale:

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{W_{\text{Carnot}}}{Q_{\text{ass}}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \approx 0.77.$$

Risulta, come atteso, che cioè $\eta_{\text{Carnot}} > \eta$. Dalla precedente equazione si ha: e quindi:

$$W_{\text{Carnot}} = (1 - T_2 / T_1) Q_{\text{ass}} = \left(1 - T_2 / T_1\right) \left[(S_2 - S_1) \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{\pi}{8} (S_2 - S_1) (T_1 - T_2) \right] \approx 7.6 \text{ kJ}.$$

Anche qui si trova $W_{\text{Carnot}} > W$.

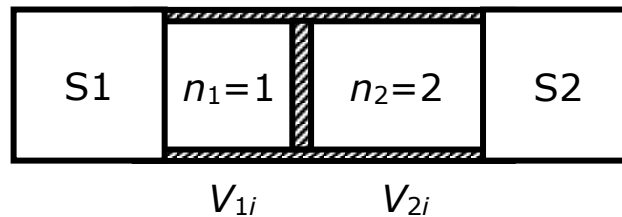
Problema 9.18 (10 punti)

Un sistema termodinamico è formato da un cilindro a pareti adiabatiche in cui può scorrere senza attrito un setto adiabatico che divide il cilindro in due sezioni stagne. Le basi del cilindro sono perfettamente conduttrici e sono connesse a due sorgenti di calore S1 e S2. Nella prima e nella seconda sezione in cui il cilindro rimane diviso dal setto adiabatico, sono contenuti rispettivamente $n_1=1$ mole e $n_2=2$ moli di due gas ideali biatomici.

All'inizio i due gas sono all'equilibrio termodinamico alla stessa temperatura $T_1=T_2=27^\circ\text{C}$ e occupano i volumi V_{1i} e V_{2i} . In queste condizioni si aumenta molto lentamente la temperatura T_1 della sorgente S1 fino a portarla ad un valore pari a $T_{1f}=127^\circ\text{C}$, mantenendo la temperatura T_2 della sorgente S2 costante. Alla fine di questa operazione si osserva che i due gas occupano i volumi V_{1f} e V_{2f} .

Nell'ipotesi di assenza di attriti si chiede di determinare:

5. il rapporto V_{2i}/V_{2f} tra il volume iniziale e quello finale della sezione 2; (4 punti)
6. la quantità di calore assorbita dal gas contenuto nella sezione 1; (4 punti)
7. la variazione di entropia della sorgente S2 a temperatura T_2 ; (2 punti)

**Soluzione**

Essendo i due gas in situazione di equilibrio sia nello stato iniziale che in quello finale, si può porre che nelle due sezioni la pressione dei gas è uguale a p_i all'inizio e a p_f alla fine del processo. Dalle equazioni di stato dei gas ideali si può scrivere:

$$\begin{aligned} p_i V_{1i} &= n_1 R T_{1i} & ; & & p_i V_{2i} &= n_2 R T_{1i} \\ p_f V_{1f} &= n_1 R T_{1f} & ; & & p_f V_{2f} &= n_2 R T_{1f} \end{aligned}$$

Dalle precedenti equazioni, ponendo $V_{1i} + V_{2i} = V_{1f} + V_{2f} = V_0$ si ha:

$$\frac{V_{2i}}{V_0 - V_{2i}} = \frac{n_2}{n_1} \quad ; \quad \frac{V_{2f}}{V_0 - V_{2f}} = \frac{n_2 T_{1i}}{n_1 T_{1f}}$$

Risolvendo rispetto a V_{2i} e V_{2f} si ottiene:

$$V_{2i} = V_0 \frac{n_2}{n_1 + n_2} \quad ; \quad V_{2f} = V_0 \frac{n_2 T_{1i}}{n_1 T_{1f} + n_2 T_{1i}} \quad \text{da cui} \quad \frac{V_{2i}}{V_{2f}} = \frac{n_1 T_{1f} + n_2 T_{1i}}{(n_1 + n_2) T_{1i}} \approx 1.11.$$

La quantità di calore assorbita dal gas 1 si ricava semplicemente dal 1° principio della termodinamica $Q_1 = \Delta U_1 + W_1$. Si ha:

$$\Delta U_1 = n_1 c_V (T_{1f} - T_{1i}) = \frac{5}{2} n_1 R (T_{1f} - T_{1i}) \approx 2.08 \text{ kJ} \quad \text{e} \quad W_1 = -W_2 = n_2 R T_{1i} \ln \frac{V_{2i}}{V_{2f}} \approx 520 \text{ J}$$

Dalle precedenti relazioni si ha $Q_1 = 2.6 \text{ kJ}$. Infine, la variazione di entropia della sorgente è uguale e contraria a quella del gas 2 che vale:

$$\Delta S_{S2} = n_2 R \ln \frac{V_{2i}}{V_{2f}} \approx 1.73 \text{ J/K}.$$

Problema 9.19 (10 punti)

Un gas ideale compie un ciclo termodinamico reversibile scambiando calore con tre sorgenti aventi temperature $T_1 < T_2 < T_3$. Dalle sorgenti a temperatura T_2 e T_3 il gas assorbe quantità di calore pari a Q_2 e Q_3 . Alla sorgente a temperatura T_1 il gas cede una quantità di calore Q_1 . Sapendo che:

- il rendimento del ciclo termodinamico è uguale a $\eta=0.65$;
- le temperature delle due sorgenti più calde valgono $T_2=370$ K e $T_3=420$ K;
- le quantità di calore assorbite dal gas sono uguali a $Q_2=20$ kJ e $Q_3=10$ kJ.

si determini

8. il calore Q_1 ceduto dal gas alla sorgente a temperatura T_1 ; (5 punti)
9. la temperatura T_1 della sorgente a cui il gas cede calore; (5 punti)

Soluzione

Essendo il ciclo proposto un ciclo reversibile, il teorema di Clausius permette di scrivere la seguente relazione tra le quantità di calore scambiate dal gas durante il ciclo e le temperature delle sorgenti:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} \cong 77.8$$

Dalla precedente equazione si ha:

$$Q_1 = T_1 \left[\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} \right].$$

Il lavoro ottenuto durante un ciclo vale:

$$W = Q_2 + Q_3 - Q_1$$

Di conseguenza il rendimento del ciclo può scriversi come segue:

$$\eta = \frac{W}{Q_2 + Q_3} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2 + Q_3} = 1 - \frac{T_1}{Q_2 + Q_3} \left[\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} \right]$$

Dalla precedente relazione si ha:

$$T_1 = \frac{(1-\eta)(Q_2 + Q_3)T_2T_3}{Q_2T_3 + Q_3T_2} \approx 134.9 \text{ K.}$$

La quantità di calore ceduta dal gas in ogni ciclo è uguale a $Q_1 = 77.8 T_1 \cong 10.5$ kJ.

Problema 9.20 (10 punti)

Una massa di $M_g=1.0$ kg di ghiaccio alla temperatura iniziale di -10 °C (calore specifico del ghiaccio $c_g=2.22$ kJ/(kg K), calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_g=333 \cdot 10^3$ J/kg, calore specifico dell'acqua 4.19 kJ/K) viene posta a contatto termico con un blocchetto di rame di $m_{Cu}=200$ g, calore specifico $c_{Cu}=387$ J/(kg K), alla temperatura iniziale di 600 °C, in un recipiente isolante di capacità termica trascurabile. Si attende che venga raggiunto l'equilibrio termico, ed il tutto è a pressione atmosferica. Si calcoli:

1. La temperatura di equilibrio finale del sistema; (4 punti)
2. La quantità di ghiaccio fusa in acqua; (3 punti)
3. La variazione di entropia totale del sistema. (4 punti)

Soluzione

La soluzione dei punti 1 e 2 richiede un bilancio di energia. L'abbassamento di temperatura di $0,02$ kg di rame del rame da 300 °C a 0 °C implica un trasferimento di energia di 46.44 kJ, mentre l'innalzamento di temperatura di 1 kg di ghiaccio implica una acquisizione di energia pari a 22.2 kJ. Quindi, il ghiaccio viene portato tutto alla temperatura di fusione. Il passaggio di 1 kg di acqua dallo stato solido a quello liquido implicherebbe il trasferimento di 333 kJ, quindi il ghiaccio non si scioglie del tutto. Quindi, la temperatura finale del sistema è di 0 °C, in quanto sussiste equilibrio tra acqua e ghiaccio. Il calcolo della quantità di ghiaccio disciolta si fa con un bilancio di energia delle varie sottocomponenti il sistema in esame (la somma delle energia acquisite dai singoli sottosistemi deve essere nulla)

$$m_{Cu}c_{Cu}(T_f - T_{i,Cu}) + M_g c_g (T_f - T_{i,gh}) + \lambda_g \Delta m = 0$$

Essendo $T_f = 0$, si ha

$$\Delta m = \frac{m_{Cu}c_{Cu}T_{i,Cu} + M_g c_g T_{i,gh}}{\lambda_g}.$$

Sostituendo i valori, si ottiene $\Delta m = 73$ g.

La variazione di entropia si ottiene dalla somma delle variazioni di entropia delle singole parti. La variazione di entropia nel passaggio di 1 kg di ghiaccio da -10 °C a 0 °C è:

$$\Delta S_g = \int_{T_{ig}}^{T_f} \frac{M_g c_g dT}{T} = M_g c_g \ln \frac{T_f}{T_{ig}}.$$

Si ricordi che nel calcolo delle entropie le temperature sono in gradi KELVIN! La variazione di entropia

$$\Delta S_{Cu} = \int_{T_{ig}}^{T_f} \frac{m_{Cu}c_{Cu}dT}{T} = m_{Cu}c_{Cu} \ln \frac{T_f}{T_{iCu}}.$$

A queste entropie, si aggiunge la variazione di entropia del ghiaccio che si scioglie in acqua. Si ha

$$\Delta S_{fus} = \frac{\Delta m \lambda_{gh}}{T_f}.$$

La variazione di entropia totale è la somma dei tre contributi. Si ha: $\Delta S_g=82.8$ J/K, $\Delta S_{Cu}=-89.9$ J/K e $\Delta S_{fus} = 88.74$ J/K.

Il risultato finale è $\Delta S=82.8 - 89.9 + 88.74=81.6$ J/K.

Problema 9.21 (10 punti)

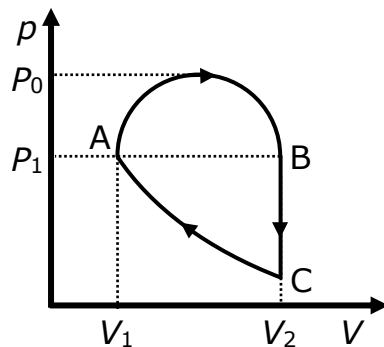
Una macchina termica funziona con un ciclo termodinamico composto da tre trasformazioni reversibili che, nel diagramma pV sotto riportato, sono: la trasformazione AB una semicirconferenza con gli stati termodinamici A e B aventi la stessa pressione p_1 ; la trasformazione BC una isocora e la CA una isoterma alla temperatura T_1 .

Con riferimento al diagramma si conosce che: il gas è monoatomico; il numero di moli vale $n=1$; $V_1=1 \text{ dm}^3$ e $V_2=2V_1$; la temperatura della compressione isoterma CA vale $T_1=300 \text{ K}$; la massima pressione raggiunta durante la trasformazione AB vale $p_0=1.5p_1$.

Si determini:

1. il lavoro eseguito dalla macchina in ciascun ciclo; (6 punti)
2. il valore della variazione di entropia in ciascuna delle tre trasformazioni che compongono il ciclo in esame. (4 punti)

Nota: si ricorda che l'area dell'ellisse vale $A=\pi ab$, dove a e b sono i semiassi.

**Soluzione:**

Dalla legge dei gas ideali è possibile trovare i valori delle pressioni p_1 e p_0 e della temperatura T_2 dello stato termodinamico B. Infatti si ha:

$$p_1 = \frac{nRT_1}{V_1} \approx 2.5 \text{ MPa} \quad ; \quad T_2 = \frac{p_1 V_2}{nR} \approx 600 \text{ K}$$

Il lavoro totale è uguale alla somma di quello eseguito durante la trasformazione AB e di quello dovuto alla compressione isoterma CA: $W_{TOT} = W_{AB} + W_{CA}$.

Il lavoro (positivo) eseguito dal gas durante la trasformazione AB si trova per via geometrica. Ricordando che l'area dell'ellisse vale $A = \pi V p$ dove, nel presente caso, i semiassi V e p valgono:

$$V = (V_2 - V_1)/2 = V_1 \quad \text{e} \quad p = p_0 - p_1 = p_1/2.$$

Pertanto, il lavoro eseguito durante la espansione del gas vale:

$$W_{AB} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{V_1 p_1}{4} \right] + p_1 (V_2 - V_1) \approx 3.5 \text{ kJ}.$$

Il lavoro di compressione del gas vale:

$$W_{CA} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \approx -1.7 \text{ kJ}.$$

Dalle due precedenti equazioni si ottiene il lavoro totale che vale $W_{TOT} = 1.8 \text{ kJ}$.

La variazione della entropia nelle trasformazioni BC e CA sono date dalle seguenti relazioni:

$$\Delta S_{BC} = nc_V \ln \frac{T_1}{T_2} \approx -8.64 \text{ J/K} \quad ; \quad \Delta S_{CA} = nR \ln \frac{V_1}{V_2} \approx -5.76 \text{ J/K}$$

Essendo nulla la variazione di entropia in un ciclo. Per differenza si trova:

$$\Delta S_{AB} = -(\Delta S_{BC} + \Delta S_{CA}) \approx 14.40 \text{ J/K}.$$

Si può anche trovare direttamente la variazione di entropia nella trasformazione reversibile AB, unendo lo stato A con lo stato B tramite una trasformazione reversibile. Nel presente caso potrebbe essere la espansione isobara AB per la quale si ha:

$$\Delta S_{AB} = nc_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} = -(\Delta S_{BC} + \Delta S_{CA}).$$

Problema 9.22 (10 punti)

Un blocco di ghiaccio di massa $M=1$ kg alla temperatura di fusione $T=0$ °C, viene colpito da due corpi puntiformi di rame che possiedono, prima dell'impatto, la stessa velocità $v_1=v_2=v=400$ m/s e viaggiano lungo la stessa direzione ma in verso opposto. I due corpi di rame, inizialmente alla stessa temperatura $T_c=-10$ °C, hanno ciascuno una massa pari a $m_c=1$ g. Assumendo che il ghiaccio e i due corpi di rame siano termicamente isolati dal resto dell'ambiente e che non si producano frammenti di alcun genere durante e dopo l'urto che risulta quindi completamente anelastico, si determini:

1. il valore della temperatura di equilibrio ϑ del sistema osservata dopo l'urto; (4 punti)
2. la quantità di ghiaccio ΔM sciolta; (2 punti)
3. la variazione di entropia dei due corpi di rame $\Delta S_c=\Delta S_1+\Delta S_2$; (2 punti)
4. la variazione di entropia dell'universo termodinamico ΔS_U . (2 punti)

NOTA: Lo studente si domandi: dove va tutta l'energia meccanica posseduta dai due corpi di rame prima dell'urto? Quanto calore è necessario per fondere l'intera massa M di ghiaccio?

Il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda=3.3 \cdot 10^5$ J/Kg e il calore specifico del rame vale $c_{Cu}=385$ J/Kg·K.

Soluzione

Nelle ipotesi poste dal problema, essendo l'urto tra i due corpi puntiformi di rame di massa uguale con il blocco di ghiaccio completamente anelastico e non producendosi frammenti di alcun genere che si allontanano dal punto di impatto, l'energia cinetica dei due corpi si trasforma completamente in calore che, pertanto, può essere utilizzato nel processo termico. Si ha:

$$Q = mv^2 = 160 \text{ J}$$

Questa è la quantità di calore utilizzabile dal sistema per scaldare i due corpi puntiformi di rame alla temperatura di equilibrio e, eventualmente, per fondere parte del ghiaccio.

La quantità di calore necessario per portare i due corpi puntiformi alla temperatura del ghiaccio vale:

$$Q_{Cu} = 2m_c c_{Cu} (T - T_c) \cong 7.7 \text{ J}.$$

La quantità di calore per fondere l'intera massa M di ghiaccio è uguale a:

$$Q_{gh} = M\lambda \cong 3.3 \times 10^5 \text{ J}.$$

Da questa ultima relazione si vede che non si ha a disposizione una quantità di calore sufficiente per sciogliere tutta la massa M di ghiaccio e che, di conseguenza, il sistema rimarrà alla temperatura di equilibrio $\vartheta=273$ K, cioè quella di fusione del ghiaccio. La quantità di ghiaccio che si scioglie vale:

$$Q - Q_{Cu} = \Delta M \lambda \quad \rightarrow \quad \Delta M = \frac{Q - Q_{Cu}}{\lambda} \cong 4.6 \times 10^{-4} \text{ kg}.$$

La variazione di entropia dei due corpi di rame vale:

$$\Delta S_c = 2 \int_{T_c}^{\vartheta} \frac{\Delta Q_{Cu}}{T} = 2m_c c_{Cu} \int_{T_c}^{\vartheta} \frac{\Delta T}{T} = 2m_c c_{Cu} \ln \left[\frac{\vartheta}{T_c} \right] \cong 0.03 \text{ J/K}.$$

La variazione di entropia dell'universo termodinamico composto dai due corpi di rame e dalla massa di ghiaccio vale:

$$\Delta S_U = \Delta S_c + \frac{\lambda \Delta M}{\vartheta} \cong 0.6 \text{ J/K}.$$

Problema 9.23 (10 punti)

Un gas perfetto esegue un ciclo di Carnot producendo un lavoro $W_{\text{ciclo}}=1$ kJ. La sorgente calda è alla temperatura $T_2=100$ °C, mentre quella fredda è alla temperatura $T_1=0$ °C ed è costituita da una quantità M_g di ghiaccio (calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_g=3.3\times 10^5$ J/Kg).

Si chiede di rispondere ai seguenti quesiti:

1. si calcoli la minima quantità M_g di ghiaccio necessario per far eseguire $n=10$ cicli. (4 punti)

A seguito di un deterioramento dell'apparato di compressione isoterma alla temperatura più fredda T_1 , essa viene eseguita in maniera irreversibile, mentre le restanti trasformazioni rimangono invariate e reversibili.

Sapendo che in queste condizioni il lavoro prodotto in un ciclo risulta ora pari a $W'_{\text{ciclo}}=0.5 W_{\text{ciclo}}$, (cioè la metà di quello ottenuto nelle condizioni in cui le quattro trasformazioni sono reversibili) si determini:

2. la minima quantità di ghiaccio M'_g necessaria per eseguire lo stesso numero $n=10$ cicli; (3 punti)
3. la variazione di entropia ΔS_u dell'universo termodinamico (cioè quello composto dal sistema in esame e dalle sorgenti di calore) per ogni ciclo di funzionamento della macchina (3 punti).

Nota: per rispondere alle domande 2 e 3 si prenda in esame il ciclo di Carnot prima e dopo il deterioramento evidenziando quali grandezze fisiche (lavoro, energia interna, quantità di calore scambiate etc.) subiscono una variazione.

Soluzione

Per il ciclo di Carnot si possono scrivere le seguenti due espressioni per il rendimento η :

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad ; \quad \eta = \frac{W}{Q_a} = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_a}$$

dove Q_a e Q_c sono la quantità di calore assorbita e ceduta dal gas. Inoltre, dal 1° principio della termodinamica per ogni ciclo si ha $W = Q_a + Q_c$. Combinando le precedenti tre relazioni si ha:

$$|Q_c| = \frac{nWT_1}{T_2 - T_1} = m\lambda_g \quad \rightarrow \quad M_g = \frac{nWT_1}{(T_2 - T_1)\lambda_g} \cong 83 \times 10^{-3} \text{ kg.}$$

Si scrivano ora le relazioni sui lavori del ciclo di Carnot prima e dopo il deterioramento della compressione isoterma:

$$W_{\text{ciclo}} = W_{4-1} + W_{T1} \quad ; \quad W'_{\text{ciclo}} = 0.5W_{\text{ciclo}} = W_{4-1} + W'_{T1}$$

dove W_{4-1} è il lavoro complessivo delle tre trasformazioni (espansione isoterma e espansione e compressione adiabatica) che rimangono reversibili e $W_{T1} = -M_g\lambda_g$, $W'_{T1} = -M'_g\lambda_g$ i lavori della compressione isoterma prima e dopo il deterioramento della macchina termica. Dalle precedenti equazioni si ha:

$$M'_g = M_g + \frac{0.5W_{\text{ciclo}}}{\lambda_g} \cong 98 \times 10^{-3} \text{ kg.}$$

La variazione complessiva di entropia per gli $n=10$ cicli è dovuta alla sola sorgente fredda e alla compressione adiabatica divenuta irreversibile. Dato che tutto avviene a temperatura costante si ottiene:

$$\Delta S_u = \frac{\lambda_g(M'_g - M_g)}{nT_1} \cong 1.8 \text{ J/K.}$$

Problema 9.24 (10 punti)

Un pistone soggetto alla pressione costante esterna $p_0 = 10^5$ Pa e di volume iniziale $V_0 = 1$ litro contiene n moli di azoto (gas perfetto biatomico) e all'equilibrio possiede una temperatura $T_0 = 0$ °C. Esso viene messo a contatto con una sorgente di calore a $T = 400$ °C. Si osserva che il pistone, sempre soggetto alla pressione esterna p_0 , si espande seguendo una trasformazione IRREVERSIBILE a pressione esterna costante. Raggiunto il volume finale $V_f = 2V_0$ il pistone viene staccato dalla sorgente e isolato termicamente, raggiungendo il suo nuovo stato di equilibrio senza ulteriori variazioni di volume.

Si calcoli:

1. la temperatura finale T_f del gas (2 punti);
2. la variazione di energia interna ΔU del gas (2 punti);
3. la variazione di entropia ΔS del gas (2 punti);
4. la variazione di entropia dell'universo ΔS_u (sistema + sorgenti). Nel caso si trovi $\Delta S_u > 0$, identificare l'origine della irreversibilità (4 punti).

Nota: l'espansione del gas è ottenuta tramite una trasformazione assimilabile ad una isobara IRREVERSIBILE. Non è pertanto possibile calcolare la quantità di calore scambiato tramite le relazioni delle isobare reversibili perché questa grandezza NON è una funzione di stato. Il lavoro scambiato è pari al prodotto della pressione esterna per la variazione di volume del gas.

Soluzione

La pressione finale del gas è la stessa di quella iniziale. Da questo deriva che la temperatura finale del gas vale:

$$p_0 V_0 = nRT_0 \quad ; \quad p_0 V_f = p_0 2V_0 = nRT_f \quad \rightarrow \quad T_f = 2T_0 = 546 \text{ K.}$$

La variazione di energia interna, essendo una funzione di stato, dipende solo dalla situazione iniziale e quella finale del gas. Conviene prima trovare il numero di moli di gas che vale:

$$n = \frac{p_0 V_0}{RT_0} \cong 0.044.$$

La variazione di energia interna è: $\Delta U = nc_v \Delta T = nc_v T_0 \cong 250 \text{ J}$

La variazione di entropia, al pari di quella della energia interna, si può facilmente calcolare dalle relazioni valide per una trasformazione isobara reversibile ottenendo:

$$\Delta S = nc_p \log \frac{T_f}{T_0} = nc_p \log 2 \cong 0.9 \text{ J/K}$$

La variazione di entropia dell'universo è data dalla variazione dell'entropia della sorgente e di quella del gas. Allora si può scrivere:

$$\Delta S_u = \frac{Q_{sorg}}{T} + nc_p \log \frac{T_f}{T_0},$$

dove Q_{sorg} è la quantità di calore ceduta al gas dalla sorgente che è esattamente uguale è opposta a quella Q assorbita dal gas. Dal 1° principio della termodinamica si può scrivere:

$$Q = \Delta U + p_0 \Delta V = \Delta U + p_0 V_0 \cong 350 \text{ J}$$

Si ha, infine

$$\Delta S_u = -\frac{Q}{T} + nc_p \log \frac{T_f}{T_0} \cong 0.38 \text{ J/K}$$

Il valore maggiore di zero della variazione dell'entropia dell'universo è compatibile con la presenza di una trasformazione irreversibile del gas.

Problema 9.25 (10 punti)

Due sferette identiche di alluminio di massa m_s e calore specifico $c_s=896 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ sono a contatto con una molla ideale di costante elastica $K=210 \text{ N/m}$ di massa e capacità termica trascurabile. Il tutto è immerso in un contenitore adiabatico in cui c'è una massa $m_g=0.1 \text{ kg}$ di glicerina che può essere considerato un liquido altamente viscoso di calore specifico pari a $c_{s,g}=2386 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$. Nella fase iniziale (Figura A) la molla è compressa di una quantità $\Delta x = 0.5 \text{ m}$ rispetto alla sua condizione di riposo e il sistema è all'equilibrio termico ad una temperatura $T_A=20^\circ\text{C}$. Successivamente la molla si scarica completamente mettendo in moto le due sferette ed esse, a loro volta, la glicerina. Dopo un certo tempo (Figura B), le due sferette e il liquido si fermano, la molla rimane ferma nella sua posizione di riposo ($\Delta x = 0$) e le due palline non hanno avuto modo di toccare le pareti del recipiente adiabatico. In questa situazione si misura che l'equilibrio termico si raggiunge per una temperatura $T_C=20.1^\circ\text{C}$.

Si chiede di calcolare:

1. la massa m_s di ciascuna sferetta; (4 punti)
2. il calore Q_s assorbito da ciascuna sferetta di alluminio; (2 punti)
3. la variazione ΔS di entropia dell'universo. (4 punti)



Figura A



Figura B

Soluzione

Come nell'esperienza di Joule, l'energia meccanica rilasciata dalla molla si trasforma in energia termica acquistata dal sistema delle due sferette e dal liquido. In base a queste considerazioni si può scrivere l'equazione del bilancio energetico come:

$$\frac{1}{2} K \Delta x^2 = 2m_s c_s (T_C - T_A) + m_g (T_C - T_A) \rightarrow m_s = \frac{K \Delta x^2 - 2m_g c_g (T_C - T_A)}{4c_s (T_C - T_A)} \cong 13 \times 10^{-3} \text{ kg}.$$

E' immediato, a questo punto, rispondere alla seconda domanda proposta dato che:

$$Q_s = 2m_s c_s (T_C - T_A) \cong 2.33 \text{ J}.$$

La variazione di entropia dell'universo termodinamico è data semplicemente dalla somma della variazione di entropia delle due sferette e della glicerina. Si ha:

$$\Delta S = \int_{T_A}^{T_C} \frac{dQ}{T} = (2m_s c_s + m_g c_g) \int_{T_A}^{T_C} \frac{dT}{T} = (2m_s c_s + m_g c_g) \log \frac{T_C}{T_A} \cong 0.09 \text{ J/K}.$$

Attenzione le temperature devono essere espresse in gradi Kelvin.

Problema 9.26 (10 punti)

Una mole $n_0=1$ di gas ideale monoatomico è contenuta in un cilindro a pareti rigide alla pressione p_0 e alla temperatura $T_0=300$ K. Al gas nel cilindro viene lentamente (reversibilmente) ceduto calore, aumentandone progressivamente la pressione. Raggiunta la pressione massima $p=2p_0$ entra in funzione una valvola di sfogo che consente la fuoriuscita del gas dall'interno del cilindro verso l'ambiente esterno in modo tale che la pressione all'interno del cilindro rimanga costantemente uguale a p pur continuando il lento trasferimento di calore.

Nella situazione nella quale inizia a fuoriuscire il gas nell'ambiente, si calcoli:

1. la temperatura T_1 del gas; (3 punti)
2. il calore Q_1 ceduto al gas. (3 punti)

Una volta fuoriuscita la metà del gas inizialmente contenuta nel cilindro, si calcoli:

3. la temperatura T_2 del gas ancora presente nel contenitore; (2 punti)
4. il calore ceduto al cilindro Q_2 in questa seconda fase, cioè dall'apertura della valvola fino a quando la temperatura del gas diventa uguale a T_2 . (2 punti)

Soluzione

Quando la valvola di sfiato si attiva la equazione di stato si scrive nel seguente modo:

$$n_0RT_1 = V_0p$$

Dato che:

$$V_0 = n_0RT_0 / p_0,$$

si ottiene:

$$T_1 = \frac{p}{p_0} T_0 = 600 \text{ K.}$$

Il processo di riscaldamento del gas avviene reversibilmente a volume costante. Pertanto si ha:

$$Q_1 = n_0c_v(T_1 - T_0) \cong 3.7 \text{ kJ.}$$

Nella seconda fase la valvola è in funzione mantenendo la pressione del gas nel cilindro pari a p e il volume rimane necessariamente uguale a V_0 . Anche se in questa seconda fase la trasformazione è irreversibile per la mancanza di equilibrio ai capi della valvola, la cessione del calore rimane lenta e per il gas ad ogni istante continua a valere l'equazione di stato che ora si scrive:

$$nRT = V_0p.$$

Quando $n=(1/2)n_0$, si ha che la temperatura è uguale a:

$$T_2 = \frac{V_04p_0}{n_0R} = \frac{V_02p}{n_0R} = 2T_1 = 1200 \text{ K.}$$

Il lavoro svolto dal gas durante la fuoriuscita è nullo (espansione a libera) e la quantità di calore ceduta al gas vale:

$$dQ = nc_vdT = \frac{c_v p V_0}{R} \frac{dT}{T} \rightarrow Q_2 = \frac{c_v p V_0}{R} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{c_v p V_0}{R} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \cong 5.2 \text{ kJ.}$$

Problema 9.27 (10 punti)

Una mole di un gas perfetto monoatomico percorre un ciclo reversibile descritto da un rettangolo nel piano pV (vedi il ciclo riportato nella parte sinistra della figura). Definendo il rendimento del ciclo come il rapporto tra il lavoro fornito dal ciclo ed il calore assorbito dal gas,

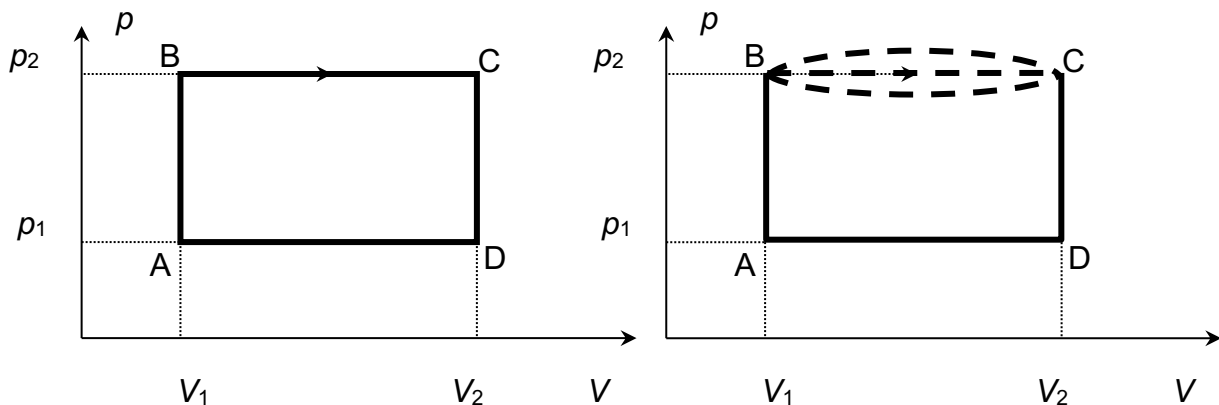
- a. calcolare il rendimento del ciclo. (4 punti)

Lo stesso gas perfetto descrive ora un ciclo irreversibile (vedi il ciclo riportato nella parte destra della figura) in quanto la espansione BC diventa irreversibile perchè avviene contro una pressione esterna costante $p_e = 0.9 p_2$, rimanendo **invariati gli stati di equilibrio iniziale e finale**.

- b. Calcolare il nuovo calore scambiato lungo la trasformazione BC, Q'_{BC} , (3 punti) e quindi
c. calcolare il nuovo rendimento del ciclo. (3 punti)

Dati: $p_2 = 2 p_1$, $V_2 = 3V_1$. La temperatura del punto A, a pressione p_1 e volume V_1 è $T_1 = 300$ K. (NB: Il risultato è indipendente dalla pressione p_1)

Suggerimento: per rispondere al punto b, si ricordi che il lavoro compiuto da un gas contro una pressione esterna costante vale in modulo $|W_{BC}| = |L_{BC}| = p_e(V_C - V_B)$.

**Soluzione**

Le temperature dei punti a partire dal punto a pressione p_1 e volume V_1 , muovendosi in senso orario sono $T_B = 2T_A$, $T_C = 3T_B = 6T_A$, e $T_D = 3T_A$. Il calore viene assorbito lungo le trasformazioni AB e BC, e vale

$$Q_{ass} = n c_v (T_B - T_A) + n c_p (T_C - T_B) = n \frac{3}{2} R (T_B - T_A) + n \frac{5}{2} R (T_C - T_B)$$

mentre il lavoro compiuto

$$|W| = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = nR(T_C - T_B - T_D + T_A),$$

avendo sviluppato il prodotto ed utilizzato l'equazione di stato dei gas perfetti. Il rendimento vale

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{ass}} = \frac{2(T_C - T_B - T_D + T_A)}{3(T_B - T_A) + 5(T_C - T_B)} = \frac{2}{9} = 0.22.$$

Si noti, per inciso, che il rendimento di Carnot di un ciclo che operi tra le due temperature estreme del ciclo è molto più alto, e vale:

$$\eta = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 0.83.$$

Per rispondere al punto b, occorre calcolare il lavoro compiuto lungo la trasformazione irreversibile BC

$$|W'_{BC}| = p_e(V_C - V_B) = 0.9p_2(V_C - V_B) = 0.9nR(T_C - T_B),$$

la variazione di energia interna tra i due stati di equilibrio B e C

$$\Delta E_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = \frac{3}{2}nR(T_C - T_B).$$

ed usare il primo principio della termodinamica per calcolare il calore scambiato

$$\Delta E_{BC} = Q'_{BC} + W'_{BC} = Q'_{BC} - |W'_{BC}| \Rightarrow Q_{BC} = \frac{3}{2}nR(T_C - T_B) + 0.9nR(T_C - T_B).$$

I dati ottenuti servono per rispondere al punto c. Il lavoro compiuto lungo il ciclo vale:

$$|W'| = (p_e - p_1)(V_2 - V_1) = (0.9p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = nR[0.9 \cdot (T_C - T_B) - (T_D - T_A)],$$

il nuovo calore totale assorbito

$$Q'_{ass} = nc_V(T_B - T_A) + Q'_{BC} = n\frac{3}{2}R(T_B - T_A) + n\left(\frac{3}{2} + 0.9\right)R(T_C - T_B),$$

ed il nuovo rendimento

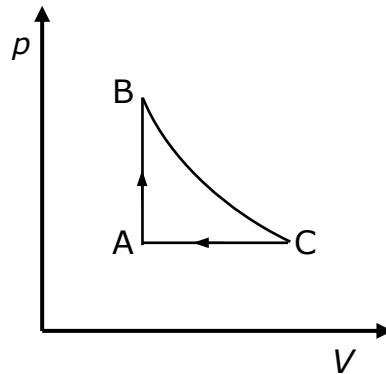
$$\eta = \frac{|W'|}{Q'_{ass}} = \frac{0.9 \cdot (T_C - T_B) - (T_D - T_A)}{\frac{3}{2}(T_B - T_A) + \left(\frac{3}{2} + 0.9\right)(T_C - T_B)} = 0.14.$$

Ovviamente, il rendimento è minore del ciclo reversibile precedente.

Problema 9.28 (10 punti)

Un gas perfetto biatomico esegue il ciclo reversibile riportato in figura composto da una trasformazione isocora AB, una espansione adiabatica BC e una compressione isobara CA. Sapendo che la temperatura dello stato termodinamico A vale $T_A = 300$ K e che un ciclo reversibile (macchina di Carnot) utilizzando solo due sorgenti poste rispettivamente alla temperatura massima e minima raggiunta dal ciclo in figura ha rendimento $\eta_0 = 0.3$, si chiede di calcolare:

1. le temperature T_B e T_C degli stati termodinamici B e C; (3 punti)
2. il rendimento η del ciclo riportato in figura; (4 punti)
3. la variazione di entropia per mole di ciascuna trasformazione termodinamica. (3 punti)

**Soluzione:**

Dalla definizione di rendimento di una macchina termica si ha che:

$$\eta = \frac{W}{Q_a} \rightarrow \eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_a}$$

con Q_a e Q_c rispettivamente le quantità di calore assorbito e ceduto durante un ciclo. Essendo la trasformazione BC una adiabatica, il calore viene assorbito dal gas nella isocora AB e ceduto durante la trasformazione isobara CA. Pertanto si ha:

$$Q_a = nc_v(T_B - T_A) \quad \text{e} \quad Q_c = nc_p(T_A - T_C).$$

Dalla relazione che esprime il rendimento del ciclo di Carnot si può scrivere:

$$\eta = 1 - \frac{T_A}{T_B} \rightarrow T_B = \frac{T_A}{1 - \eta} \cong 428.6 \text{ K},$$

essendo T_B e T_A le temperature massima e minima raggiunta dal gas durante un ciclo della macchina termodinamica proposta.

Dalle relazioni valide per le trasformazioni adiabatiche e usando l'equazione di stato si ottiene:

$$T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1} ; \quad T_C = T_B^{(1/\gamma)} T_A^{(\frac{\gamma-1}{\gamma})} \cong 387 \text{ K},$$

dato che $p_B V_B = nRT_B$; $p_A V_B = nRT_A$; $p_A V_C = nRT_C$ e $V_A = V_B$.

Dalla relazione generale sul rendimento di una macchina termica si ha:

$$\eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_a} = 1 + \gamma \frac{T_A - T_C}{T_B - T_A} \cong 0.053.$$

La variazione di entropia per ogni singola trasformazione vale:

$$\text{isocora AB: } \frac{\Delta S_{AB}}{n} = c_v \ln \frac{T_B}{T_A} \cong 7.4 \text{ J/(K} \times \text{mole)} \quad ; \quad \text{adiabatica BC: } \frac{\Delta S_{BC}}{n} = 0$$

$$\text{isobara CA: } \frac{\Delta S_{CA}}{n} = c_p \ln \frac{T_A}{T_C} \cong -7.4 \text{ J/(K} \times \text{mole)},$$

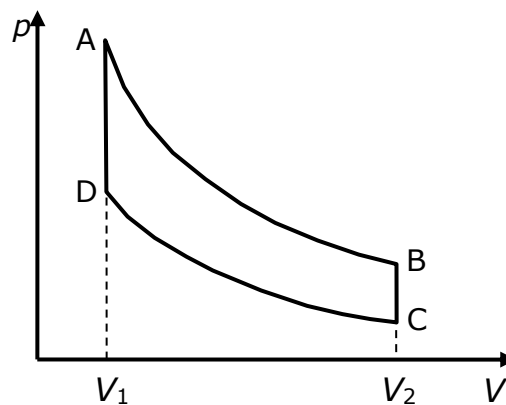
come ci si aspetta dato che la variazione totale di entropia per un ciclo deve essere nulla.

Problema 9.29 (10 punti)

a) Una mole di gas perfetto biatomico esegue il ciclo reversibile riportato in figura composto da una espansione isoterma AB, una trasformazione isocora BC, una compressione isoterma CD ed una trasformazione isocora DA. Sapendo che la temperatura delle due isoterme vale $T_1=1300\text{ K}$ e $T_2=300\text{ K}$, e che il rapporto $V_2/V_1=10$, si chiede di calcolare il rendimento del ciclo. (4 punti)

b) A causa di un guasto alla macchina che esegue il ciclo, le trasformazioni isoterme AB e CD vengono sostituite da trasformazioni irreversibili, ma aventi i medesimi stati di equilibrio iniziale e finale. Il lavoro compiuto dalla macchina nella trasformazione irreversibile AB vale $|W'_{AB}| = 0.8 |W_{AB}|$, ed il calore scambiato lungo la trasformazione irreversibile CD vale invece $|Q'_{CD}| = 1.2 |Q_{CD}|$, ove con W_{AB} e Q_{CD} si sono indicati il lavoro ed il calore scambiati dalla macchina con l'esterno nelle trasformazioni isoterme reversibili di partenza. Si calcoli il nuovo rendimento del ciclo. (3 punti)

c) Si calcoli infine la variazione di entropia del gas e delle sorgenti a temperatura T_1 e T_2 durante le trasformazioni irreversibili AB e CD (3 punti).

**Soluzione:**

Dalla definizione di rendimento di una macchina termica si ha che:

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_a|} \quad \text{cioè} \quad \eta = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_a|},$$

con Q_a e Q_c rispettivamente le quantità di calore assorbito e ceduto durante un ciclo. Questa definizione vale per qualsiasi ciclo, sia esso reversibile o irreversibile. Nel nostro caso il lavoro viene compiuto solamente lungo le trasformazioni AB e CD, e vale nel caso reversibile.

$$|W| = |W_{AB}| - |W_{CD}| = nR(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Calore viene assorbito lungo la trasformazione DA (in cui il gas aumenta la sua temperatura e quindi la sua energia interna, non compiendo lavoro) e lungo la espansione isoterma AB. Si ha:

$$|Q_a| = Q_{DA} + Q_{AB} = nc_V(T_1 - T_2) + nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Il rendimento del ciclo reversibile vale:

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_a|} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + c_v(T_1 - T_2)/(R \ln V_2/V_1)}.$$

Usando per i gas biatomici $c_v = 5/2 R$, si ottiene $\eta = 0.42$. IL rendimento di un ciclo di Carnot tra le due sorgenti sarebbe stato $\eta' = 0.77$.

Il rendimento della seconda domanda si calcola usando la medesima formula precedente, con questa volta:

$$|W'| = |W'_{AB}| - |W'_{CD}|.$$

Utilizzando il fatto che gli estremi delle trasformazioni AB e CD sono gli stessi del caso reversibile, e quindi si trovano alla medesima temperatura, la variazione di energia interna dovuta alla trasformazione irreversibile è nulla e quindi il lavoro compiuto dal sistema è sempre uguale al calore assorbito durante la trasformazione. Si ha dunque:

$$|W'_{AB}| = |Q'_{AB}| = 0.8 |Q_{AB}| = 0.8 n R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad ; \quad |W'_{CD}| = |Q'_{CD}| = 1.2 |Q_{AB}| = 1.2 n R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Pertanto:

$$|W'| = |W'_{AB}| - |W'_{CD}| = 0.8 |W_{AB}| - 1.2 |W_{CD}| = n R (0.8 \cdot T_1 - 1.2 \cdot T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Il calore assorbito vale

$$|Q'_a| = Q_{DA} + Q'_{AB} = n c_v (T_1 - T_2) + 0.8 n R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Il rendimento vale dunque

$$\eta = \frac{|W'|}{|Q'_a|} = \frac{0.8 \cdot T_1 - 1.2 \cdot T_2}{0.8 \cdot T_1 + c_v (T_1 - T_2)/(R \ln V_2/V_1)}.$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene $\eta = 0.32$.

All'ultima domanda si risponde notando che, restando invariati gli stati iniziale e finale della trasformazione, la variazione di entropia del gas è la stessa della variazione di entropia lungo la trasformazione isoterma reversibile con i medesimi stati iniziale e finale, e vale:

$$\Delta S_{AB} = n R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad ; \quad \Delta S_{CD} = n R \ln \frac{V_1}{V_2} = -\Delta S_{AB}.$$

La variazione di entropia della sorgente più calda è:

$$\Delta S'_1 = -\frac{Q'_{AB}}{T_1} = -0.8 n R \ln \frac{V_2}{V_1} = -0.8 \Delta S'_{AB}$$

e quella della sorgente più fredda vale:

$$\Delta S'_2 = -\frac{Q'_{CD}}{T_2} = -1.2 n R \ln \frac{V_1}{V_2} = -1.2 \Delta S'_{CD}.$$

Numericamente, $\Delta S'_{AB} = 19.1 \text{ J/K}$, $\Delta S'_1 = -15.3 \text{ J/K}$, $\Delta S'_{CD} = -19.1 \text{ J/K}$, $\Delta S'_2 = 22.9 \text{ J/K}$.

Problema 9.30 (10 punti)

Una mole di un gas ideale monoatomico è contenuta in un recipiente di volume $V_0 = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ e alla pressione $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Inserendo una parete adiabatica rigida, il recipiente è diviso in due parti uguali ciascuna di volume $V_1 = V_2 = V_0/2$ e il gas rimane alla stessa pressione p_0 . Il gas contenuto nella prima parte del recipiente subisce una compressione isobara reversibile fino ad un volume finale $V_{1f} = V_0/4$, mentre quello nella seconda parte subisce una espansione isoterma reversibile fino ad un volume finale $V_{2f} = (3/4)V_0$.

Dopo queste due operazioni, si sostituisce alla parete adiabatica una diatermica rigida facendo attenzione che ciascun gas rimanga nella propria parte di recipiente. Ipotizzando che questa operazione avvenga senza scambi di calore con l'esterno, si osserva che i due gas raggiungono l'equilibrio termico. Si chiede di calcolare:

1. Le temperature intermedie T_1 e T_2 dei gas contenuti nelle due parti del recipiente alla fine delle trasformazioni reversibili e prima di essere messi a contatto termico. La temperatura finale di equilibrio T_f del gas una volta inserita la parete diatermica; (3 punti)
2. il lavoro fatto W e il calore scambiato Q dal sistema (l'insieme dei due gas) durante l'intero processo. (3 punti)

Infine, viene tolta la parete diatermica e i due gas si mescolano in un unico volume $V_{1f} + V_{2f} = V_0$. In queste condizioni si calcoli:

3. la variazione di entropia del gas ΔS e quella dell'universo ΔS_U nell'intero processo. (4 punti)

Soluzione

La parete adiabatica divide il recipiente in due parti uguali. Di conseguenza, nelle due parti ci sarà lo stesso numero di molecole $n/2 = 0.5$ moli. La temperatura T_1 alla fine del processo di compressione isobara vale

$$p_0 \frac{V_0}{4} = \frac{n}{2} RT_1 \quad \rightarrow \quad T_1 = \frac{p_0 V_0}{2nR} \cong 120.35 \text{ K}$$

e quella T_2 rimane uguale alla temperatura T_0 dato che la trasformazione è una isoterma:

$$T_2 = T_0 = \frac{p_0 V_0}{nR} \cong 240.7 \text{ K}.$$

Una volta inserita la parete diatermica al posto di quella adiabatica, il gas raggiunge l'equilibrio termico con una temperatura finale:

$$\frac{n}{2} c_V (T_1 - T_f) = -\frac{n}{2} c_V (T_2 - T_f) \quad \rightarrow \quad T_f = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{3}{4} T_0 \cong 180.5 \text{ K},$$

dato che il processo di termalizzazione avviene senza scambio di calore con l'esterno e con lavoro nullo.

Il calore scambiato dal sistema con l'esterno è uguale a:

$$Q = \frac{n}{2} c_p \left[\frac{T_0}{2} - T_0 \right] + \frac{n}{2} RT_0 \ln \frac{3}{2} = -\frac{5}{8} nRT_0 + \frac{1}{2} nRT_0 \ln \frac{3}{2} = \frac{nRT_0}{2} \left[\ln \frac{3}{2} - \frac{5}{4} \right] \cong -844 \text{ J}.$$

Il lavoro scambiato vale:

$$p_0 \left[\frac{V_0}{4} - \frac{V_0}{2} \right] + \frac{n}{2} RT_0 \ln \frac{3}{2} = \frac{n}{2} RT_0 \ln \frac{3}{2} - \frac{p_0 V_0}{4} = \frac{n}{2} RT_0 \ln \frac{3}{2} - \frac{nRT_0}{4} = \frac{nRT_0}{2} \left[\ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right] \cong -94 \text{ J}.$$

Una volta che la parete diatermica è tolta il gas occupa di nuovo tutto il volume V_0 e ciò avviene tramite una espansione del gas senza produzione di lavoro né (da V_{1f} a V_0 e da V_{2f} a V_0)

essendo i gas in ciascun recipiente a due differenti pressioni e alla stessa temperatura. Usando la relazione di ΔS per una isocora reversibile si ha:

$$\Delta S = nc_V \int_{T_0}^{(3/4)T_0} \frac{dT}{T} = nc_V \log \frac{3}{4} \cong -3.6 \text{ J/K.}$$

Nelle precedenti trasformazioni reversibili (la compressione isobara e la espansione isoterma) il gas, in ciascuna parte del recipiente in cui era contenuto aveva subito le seguenti variazioni di entropia:

$$\Delta S_{isobara} = \frac{n}{2} c_p \ln \left[\frac{V_{1f}}{V_1} \right] \cong -7.2 \text{ J/K} \quad ; \quad \Delta S_{isoterma} = \frac{n}{2} c_v \ln \left[\frac{V_{2f}}{V_2} \right] \cong 2.5 \text{ J/K}$$

Nell'intero processo la variazione di entropia del gas è pari a $\Delta S_{TOT} \approx 8.3 \text{ J/K}$.

Per trovare la variazione di entropia dell'universo termodinamico per l'intero processo bisogna notare che la compressione isobara reversibile avviene utilizzando infinite sorgenti di calore e ciascuna delle quali alla temperatura generica T "assorbe" (il calore scambiato dal gas durante la trasformazione isobara è negativa) la quantità di calore:

$$dQ = \frac{n}{2} c_p dT.$$

La variazione di entropia associata è:

$$dS = \frac{n}{2} c_p \frac{dT}{T} \rightarrow \Delta S_{isobara} = \frac{n}{2} c_p \int_{T_0/2}^{T_0} \frac{dT}{T} = \frac{5}{4} nR \log 2 \cong 7.2 \text{ J/K.}$$

La variazione di entropia della sorgente a temperatura T_0 durante l'espansione isoterma del gas nella parte due del recipiente vale:

$$\Delta S_{isoterma} = -\frac{Q_{isoterma}}{T_0} = -\frac{n}{2} nR \log \frac{3}{2} \cong -1.7 \text{ J/K.}$$

Pertanto la variazione totale di entropia è uguale a:

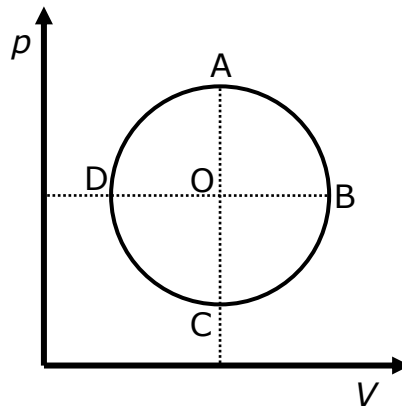
$$\Delta S_U = \Delta S + \Delta S_{isobara} + \Delta S_{isoterma} \cong 1.9 \text{ J/K.}$$

Problema 9.31 (10 punti)

Sia data una macchina termica reversibile tale che il ciclo su cui si basa sia possibile raffigurarlo, con una opportuna scelta degli assi, come una ellisse nel piano pV. La macchina usa $n=0.02$ moli di un gas ideale biatomico. Conoscendo le pressioni $p_0=1.2 \times 10^5$ Pa e $p_C=0.5 \times 10^5$ Pa, i volumi $V_0=1.0 \times 10^{-3}$ m³ e $V_B=1.6 \times 10^{-3}$ m³, e che il rendimento della macchina è la 0.31 volte quello di una macchina utilizzando il ciclo di Carnot operante con due sorgenti poste alle temperature degli stati D e B, si chiede di calcolare:

4. la variazione dell'energia interna ΔU tra gli stati termodinamici A e C; (3 punti)
5. il lavoro sviluppato dalla macchina durante un ciclo; (3 punti)
6. la quantità di calore assorbito durante il ciclo; (2 punti)
7. la variazione ΔS di entropia tra gli stati termodinamici A e B. (2 punti)

(Nota: l'area di una ellisse aventi semiassi di lunghezza a e b vale $S = \pi ab$)

**Soluzione**

Essendo l'energia interna una funzione di stato, per il suo calcolo sarà necessario conoscere le temperature degli stati A e C. Per far ciò si utilizzi l'equazione di stato dei gas ideali, ottenendo:

$$T_A = \frac{p_A V_0}{nR} = \frac{(2p_0 - p_C)V_0}{nR} \cong 1140 \text{ K} \quad ; \quad T_C = \frac{p_C V_0}{nR} \cong 300 \text{ K}.$$

Pertanto:

$$\Delta U_{AC} = n c_V (T_A - T_C) = \frac{5nR}{2} (T_A - T_C) \cong 350 \text{ J}.$$

Il lavoro prodotto dalla macchina per ogni ciclo si ricava per via geometrica e vale:

$$W = \pi (V_B - V_0)(p_A - p_0) \cong 132 \text{ J}.$$

Le temperature degli stati D e B valgono:

$$T_D = \frac{p_0 [V_0 - (V_B - V_0)]}{nR} = \frac{p_0 (2V_0 - V_B)}{nR} \cong 289 \text{ K} \quad ; \quad T_B = \frac{p_0 V_B}{nR} \cong 1155 \text{ K}$$

Pertanto il rendimento della macchina vale:

$$\eta = 0.31 \frac{T_B - T_D}{T_B} \cong 0.23$$

La quantità di calore assorbita durante un ciclo vale

$$Q_a = \frac{W}{\eta} = 569 \text{ J}.$$

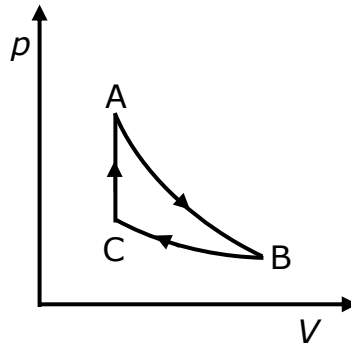
La variazione di entropia tra gli stati A e B vale, semplicemente:

$$\Delta S_{AB} = n c_V \ln \frac{T_B}{T_A} - nR \ln \frac{V_B}{V_A} \cong 0.08 \text{ J/K}.$$

Problema 9.32 (10 punti)

Sia data una macchina termica reversibile che compie il ciclo indicato in figura e composto da: AB una espansione adiabatica; BC una compressione isoterma alla temperatura T_B ; CA una trasformazione isocora. Sapendo che il gas ideale che la macchina usa ha un calore molare specifico a pressione costante pari a $c_p = (8/3)R$ e che un ciclo di Carnot tra le temperature massime e minime del ciclo descritto in figura ha un rendimento pari a $\eta_C = 0.66$, si chiede di calcolare:

8. il rapporto tra le temperature massima e minima del ciclo; (2 punti)
9. il rapporto tra i volumi V_A/V_B ; (2 punti)
10. il rendimento η della macchina descritta in figura; (6 punti)

**Soluzione**

Il rendimento del ciclo di Carnot tra le temperature massima T_A e minima T_B è dato da:

$$\eta = 1 - \frac{T_B}{T_A} = 0.66 \quad \rightarrow \quad \frac{T_A}{T_B} = 1/(1 - \eta) = 2.94.$$

Dalle relazioni valide per le trasformazioni adiabatiche si ha che:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

Il valore di γ si ottiene dalla relazione di Mayer per la quale:

$$c_V = c_p - R = R\left(\frac{8}{3} - 1\right) = \frac{5}{3}R \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{8}{5}.$$

Pertanto si ha:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \rightarrow \quad \frac{V_A}{V_B} = \left[\frac{T_B}{T_A}\right]^{1/(\gamma-1)} \cong 0.17$$

Il rendimento della macchina termica descritta in figura è:

$$\eta = \frac{W}{Q_{CA}} = 1 - \frac{|Q_{BC}|}{Q_{AC}}.$$

Ora si ha che:

$$Q_{BC} = nRT_B \int_{V_B}^{V_A} \frac{dV}{V} = nRT_B \ln \frac{V_A}{V_B} \quad \text{e} \quad Q_{CA} = nc_V(T_A - T_B) = \frac{5}{3}nR(T_A - T_B).$$

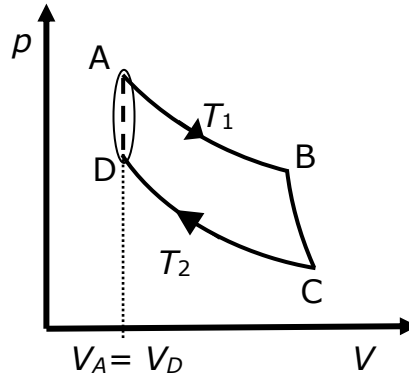
Il rendimento della macchina allora vale:

$$\eta = 1 - \frac{|3 \ln(V_A/V_B)|}{5(T_A/T_B - 1)} \cong 0.452.$$

Problema 9.33 (10 punti)

Un ciclo termodinamico compiuto da una mole di un gas perfetto biatomico ($\gamma = 7/5$) è costituito da due trasformazioni isoterme reversibili in cui il gas scambia calore con due sorgenti alla medesima temperatura del gas, $T_1 = 1200$ K e $T_2 = 300$ K, collegate da un'espansione adiabatica reversibile BC e da una trasformazione irreversibile DA in cui il sistema non scambia calore con l'esterno e avente $V_D = V_A$. Si ha inoltre $V_B = 8V_A$. Calcolare:

1. il rendimento del ciclo; (6 punti)
2. la variazione di entropia dell'universo (gas + sorgenti) durante un ciclo. (4 punti)

**Soluzione**

Il sistema scambia calore solamente lungo le trasformazioni isoterme reversibili. Il calore assorbito vale:

$$Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} = nRT_1 \ln 8.$$

La quantità di calore ceduta vale:

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} = nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_C}.$$

Essendo la trasformazione BC una adiabatica reversibile si ha:

$$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1} \Rightarrow V_C = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/(\gamma-1)} V_B.$$

Usando $V_B = 8V_A$ si ottiene:

$$V_C = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/(\gamma-1)} 8V_A$$

Sostituendo nell'espressione di Q_2 ed usando $V_D = V_A$ si ottiene:

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} = -nRT_2 \ln \left[8 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/(\gamma-1)} \right],$$

cioè, usando le proprietà dei logaritmi

$$Q_2 = -nRT_2 \left(\ln 8 + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_2} \right).$$

Il rendimento vale:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \left[1 + \frac{\ln(T_1/T_2)}{(\gamma-1)\ln 8} \right].$$

Con i dati del problema

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\ln 4}{(2/5)\ln 8} \right] \cong 0.33.$$

La variazione di entropia del gas durante un ciclo è nulla (l'entropia è una funzione di stato).
 La variazione di entropia delle sorgenti è pari alla quantità di calore assorbite dalle stesse, diviso la loro temperatura assoluta,

$$\Delta S_1 = -\frac{Q_1}{T_1} = -nR \ln \frac{V_B}{V_A} = -nR \ln 8,$$

$$\Delta S_2 = -\frac{Q_2}{T_2} = -nR \ln \frac{V_D}{V_C} = nR \ln \left[8 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/(\gamma-1)} \right].$$

La variazione di entropia dell'universo (gas + sorgenti) ogni ciclo vale quindi:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = nR \ln \left[\left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/(\gamma-1)} \right] = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_2}.$$

Con i dati del problema si ha $\Delta S = 28.8 \text{ J/K}$.

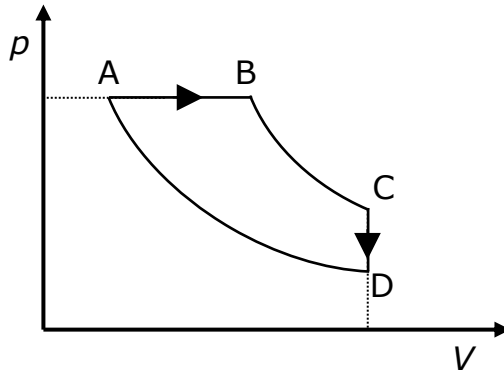
Problema 9.34 (10 punti)

Con riferimento alla figura, un ciclo termodinamico reversibile compiuto da una mole di un gas perfetto monoatomico è costituito dalla trasformazione isobara AB, dalla adiabatrica (isoentropica) BC, dalla isocora CD e dalla adiabatrica (isoentropica) DA. Sapendo solamente che la variazione di entropia della trasformazione AB vale $\Delta S_{AB} = 14.4 \text{ J/K}$, si chiede di

3. calcolare la variazione di entropia nelle altre trasformazioni. (4 punti)

Sapendo ora, in aggiunta al dato precedente, che il rendimento di una macchina di Carnot utilizzando due soli sorgenti alle temperature massima e minima raggiunte dal gas vale $\eta = 0.8$ e che $T_D = 150 \text{ K}$, si chiede di calcolare:

4. i rapporti di espansione V_C/V_B e compressione V_D/V_A raggiunti durante il ciclo. (6 punti)

**Soluzione**

Essendo la variazione di entropia del ciclo termodinamico nulla così come quella delle trasformazioni adiabetiche si ha che $\Delta S_{CD} = -\Delta S_{AB}$.

Con riferimento alle temperature massime e minime raggiunte dal gas nel ciclo proposta dal problema, si può scrivere che per una macchina di Carnot operante tra queste temperature il rendimento è uguale a:

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_D}{T_B} \Rightarrow T_B = \frac{T_D}{1 - \eta} \approx 750 \text{ K.}$$

La variazione di entropia tra due stati di equilibrio con la medesima pressione vale

$$\Delta S_{AB} = nc_p \ln \frac{T_B}{T_A} \Rightarrow T_A = T_B \exp[-\Delta S_{AB} / nc_p] \approx 375 \text{ K}$$

La variazione di entropia tra due stati di equilibrio con il medesimo volume vale:

$$\Delta S_{CD} = nc_v \ln \frac{T_D}{T_C} = -\Delta S_{AB} \Rightarrow T_C = T_D \exp[\Delta S_{AB} / nc_v] \approx 476.2 \text{ K.}$$

Essendo la trasformazione BC una adiabatrica reversibile si ha:

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_C}{V_B} = \left(\frac{T_B}{T_C} \right)^{1/(\gamma-1)} \approx 2.$$

Analogamente si ottiene:

$$\frac{V_D}{V_A} = \left(\frac{T_A}{T_D} \right)^{1/(\gamma-1)} \approx 3.95.$$

Problema 9.35 (10 punti)

Una macchina termica esegue un ciclo termodinamico operando con solo quattro sorgenti di calore alle temperature $T_1=570$ K, $T_2=350$ K, $T_3=290$ K e $T_4=200$ K. Sapendo che:

- le quantità di calore scambiate con le sorgenti a temperatura T_1 , T_2 e T_3 sono pari a $Q_1=280$ J, $Q_2=-60$ J e $Q_3=90$ J;
- il rendimento della macchina è pari a $\eta=0.24$,

si chiede di rispondere alle seguenti domande:

- quanto vale la quantità di calore Q_4 scambiata con la sorgente a temperatura T_4 ; (4 punti)
- dimostrare se il ciclo compiuto dalla macchina è reversibile o irreversibile; (4 punti)
- se la macchina si dimostra essere irreversibile, calcolare il rendimento massimo raggiungibile nel caso si riesca a farla operare in modo reversibile e confrontare il valore ottenuto con quello di un ciclo di Carnot operante tra le temperature massima e minima tra quelle delle quattro sorgenti prese in esame. (2 punti)

Soluzione

Non sappiamo a priori se la quantità di calore Q_4 è assorbita o ceduta dalla macchina termica.

Per determinarlo ricordiamo che il teorema di Clausius stabilisce che $\sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$. Supponendo

per un istante che il ciclo sia reversibile (ipotesi migliore) si ottiene che la quantità di calore scambiata con la sorgente a temperatura T_4 deve essere negativa perché la somma dei tre termini noti è maggiore di zero: la sorgente assorbe calore. A maggior ragione lo sarà se il ciclo è irreversibile. Pertanto, dalla definizione di rendimento di una macchina termica si ha:

$$\eta = \frac{W}{Q_1 + Q_3} \rightarrow \eta = 1 + \frac{Q_2 + Q_4}{Q_1 + Q_3} \rightarrow Q_4 = (Q_1 + Q_3)(\eta - 1) - Q_2 \approx -221.2 \text{ J}.$$

Conoscendo ora il valore di Q_4 e applicando di nuovo il teorema di Clausius si ha che:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{T_i} \approx -0.47 \text{ J/K}.$$

Pertanto rimane dimostrato che il ciclo termodinamico è irreversibile. Per un ciclo reversibile, sempre applicando il teorema di Clausius si avrebbe che la quantità di calore assorbita dalla sorgente a temperatura T_4 dovrebbe valere $Q'_4 \approx -126$ J. Di conseguenza, il rendimento della macchina diventerebbe:

$$\eta' = 1 + \frac{Q_2 + Q'_4}{Q_1 + Q_3} \approx 0.5.$$

Per un ciclo di Carnot tra le temperature $T_1=570$ K e $T_4=200$ K si avrebbe invece per il rendimento:

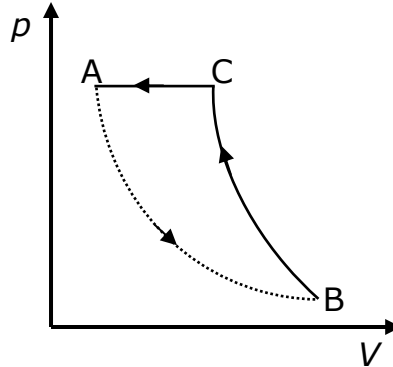
$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_4}{T_1} \approx 0.65.$$

Problema 9.36 (10 punti)

Due moli di un gas ideale eseguono il ciclo termodinamico della figura: la trasformazione AB è una espansione libera ed è quindi una trasformazione adiabatica irreversibile che porta, senza compiere lavoro, il volume del gas ad essere $V_B = 3V_A$; la trasformazione BC è una compressione adiabatica reversibile; la trasformazione CA è una compressione isobara reversibile.

Sapendo che $\gamma = c_p/c_v = 8/5$ e le temperature minima e massima raggiunte dal gas valgono rispettivamente $T_{min} = 190$ K e $T_{MAX} = 287$ K, si calcoli:

1. le variazioni di energia interna subite dal gas durante il ciclo; (3 punti)
2. le variazioni di entropia subite dal gas durante il ciclo; (3 punti)
3. il lavoro necessario per riportare il gas nella sua condizione iniziale (stato A). (4 punti)

**Soluzione**

Essendo la trasformazione AB una adiabatica e l'espansione del gas è libera essa deve avvenire senza cambiamento della temperatura del gas, cioè $T_A = T_B$. La trasformazione adiabatica BC porta il gas alla temperatura T_C e la trasformazione isobara CA riporta il gas alla temperatura T_A . Pertanto la temperatura minima corrisponde alla temperatura $T_A = T_B = T_{min}$ e quella massima $T_C = T_{MAX}$. Prima di iniziare, dalla relazione di Mayer otteniamo i valori di c_p e c_v :

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{5}{3}R \quad ; \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \frac{8}{3}R.$$

Le variazioni di energia interna valgono:

$$\Delta U_{AB} = 0 \quad ; \quad \Delta U_{BC} = \frac{5}{3}nR(T_C - T_A) \cong 2.7 \text{ kJ} \quad ; \quad \Delta U_{CA} = -\Delta U_{BC}$$

Le variazioni di entropia valgono:

$$\Delta S_{AB} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = nR \ln 3 \cong 18.3 \text{ J/K} \quad ; \quad \Delta S_{BC} = 0 \quad ; \quad \Delta S_{CA} = nc_p \ln \frac{T_A}{T_C} = \frac{8}{3}nR \ln \frac{T_A}{T_C} \cong -18.3 \text{ J/K}.$$

L'energia persa è quella relativa al lavoro compiuto dall'universo termodinamico per riportare il gas nella situazione termodinamica A. Pertanto si ha:

$$W_{BCA} = W_{BC} + W_{CA} = -nc_v(T_C - T_A) + nc_p(T_A - T_C) - nc_v(T_A - T_C) = \frac{5}{3}nR(T_A - T_C) + nR(T_A - T_C)$$

da cui:

$$W_{BCA} = \frac{8}{3}nR(T_A - T_C) \cong -4.3 \text{ kJ}.$$

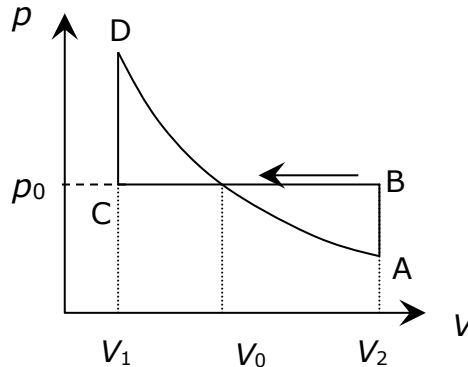
Problema 9.37 (10 punti)

Una mole di gas perfetto biatomico compie il ciclo reversibile descritto in figura. In dettaglio, DA è un'isoterma reversibile a temperatura $T_0 = 300$ K e BC un'isobara reversibile a pressione incognita p_0 . I valori dei volumi sono V_1 e V_2 .

Si chiede di calcolare:

1. per quale valore di V_0 il lavoro del ciclo è nullo; (4 punti)
2. il calore scambiato nelle quattro trasformazioni; (3 punti)
3. le variazioni di energia interna nelle quattro trasformazioni. (3 punti)

Valori numerici: $V_1 = 10^{-3} \text{ m}^3$ e $V_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

**Soluzione**

Alla domanda del punto a si risponde imponendo che l'area sottesa tra D ed A sia uguale a quella sottesa tra B e C. Si ha:

$$nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_0(V_2 - V_1).$$

Da questa equazione si ricava $p_0 = 10^6$ Pa. Usando l'equazione di stato dei gas ideali nel punto di incontro della isoterma con la isobara si ottiene $V_0 = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Le temperature dei punti A B C e D valgono:

$$T_C = p_0 V_1 / nR \approx 120 \text{ K} ; \quad T_B = p_0 V_2 / nR \approx 600 \text{ K} ; \quad T_A = T_D = T_0$$

Pertanto, le quantità di calore scambiate sono uguali a:

$$Q_{AB} = n c_V (T_B - T_0) \approx 6.3 \text{ kJ} , \quad Q_{BC} = n c_p (T_C - T_B) \approx -14.0 \text{ kJ} ;$$

$$Q_{CD} = n c_V (T_0 - T_C) \approx 3.7 \text{ kJ} ; \quad Q_{DA} = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \approx 4 \text{ kJ}.$$

Come si verifica subito, avendo imposto uguale a zero il lavoro compiuto in un ciclo dal gas, la quantità di calore assorbita e ceduta dal gas durante un ciclo deve essere nulla.

Le variazioni di energia interna sono uguali a:

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} ; \quad \Delta U_{BC} = n c_V (T_C - T_B) \approx -10 \text{ kJ} ; \quad \Delta U_{CD} = Q_{CD} ; \quad \Delta U_{DA} = 0.$$

Si sono usate per il calcolo numerico le seguenti relazioni $c_V = 5R/2$ e $c_P = 7R/2$. Come ci si aspetta per un ciclo, la somma delle variazioni di energia interna è zero.

Problema 9.38 (10 punti)

Due liquidi uguali di massa m_1 e m_2 e calore specifico c_s , sono inizialmente rispettivamente alla temperatura T_1 e T_2 . I liquidi vengono miscelati in un recipiente a pareti adiabatiche e, dopo un certo tempo, raggiungono la stessa temperatura finale T_f . Si chiede di calcolare:

1. la variazione totale di energia interna del sistema; (3 punti)
2. la temperatura finale T_f raggiunta dal liquido; (3 punti)
3. la variazione totale di entropia del sistema. (4 punti)

Dati del problema: $m_1=5$ kg; $m_2=7$ kg; $c_s=2.2 \times 10^3$ Jkg⁻¹K⁻¹; $T_1=260$ K; $T_2=310$ K

Soluzione

Dato che il mescolamento dei due liquidi avviene in un recipiente adiabatico (è nulla la quantità totale di calore scambiata dal sistema verso l'esterno), non si produce lavoro allora la variazione totale di energia interna del sistema è nulla. All'interno del recipiente i due liquidi si mescolano e la quantità di calore ceduta dalla massa di liquido a temperatura maggiore viene interamente assorbita da quella inizialmente a temperatura minore. Si ha quindi:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \rightarrow m_1 c_s \int_{T_1}^{T_f} dT + m_2 c_s \int_{T_2}^{T_f} dT = 0 \rightarrow m_1(T_f - T_1) + m_2(T_f - T_2) = 0$$

da cui

$$T_f = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} \approx 289.2 \text{ K.}$$

Dato che il processo di mescolamento è una trasformazione irreversibile, la variazione di entropia si ottiene considerando trasformazioni reversibili per i due liquidi che li porti dalle temperature iniziali T_1 e T_2 a quella finale T_f e utilizzando infinite sorgenti di calore che differiscono in temperatura tra di loro di un infinitesimo dT .

Allora è possibile scrivere per la variazione totale di entropia la seguente relazione:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_f} \frac{dQ_1}{T} + \int_{T_2}^{T_f} \frac{dQ_2}{T} = m_1 c_s \int_{T_1}^{T_f} \frac{dT}{T} + m_2 c_s \int_{T_2}^{T_f} \frac{dT}{T}$$

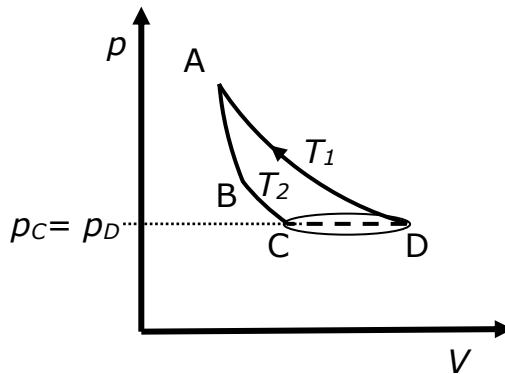
da cui

$$\Delta S = m_1 c_s \ln(T_f / T_1) + m_2 c_s \ln(T_f / T_2) \approx 101.2 \text{ J/K.}$$

Problema 9.39 (10 punti)

Un ciclo termodinamico frigorifero ABCD compiuto da una mole di un gas perfetto biatomico ($\gamma=7/5$) è costituito da due trasformazioni isoterme reversibili in cui il gas scambia calore con due sorgenti alla medesima temperatura del gas, $T_1=1200$ K e $T_2=600$ K, collegate da una espansione adiabatica reversibile AB e da una trasformazione irreversibile CD in cui il sistema non scambia calore con l'esterno e avente $p_C=p_D$. Si ha inoltre $V_D=20V_A$. Calcolare:

5. l'efficienza o prestazione della macchina $\varepsilon = \xi = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2}$; (6 punti)
6. la variazione di entropia dell'universo (gas + sorgenti) durante un ciclo. (4 punti)

**Soluzione**

Il sistema frigorifero scambia calore solamente lungo le trasformazioni isoterme reversibili. Il calore ceduto vale:

$$Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_A}{V_D} = nRT_1 \ln \frac{1}{20} \cong -30 \text{ kJ.}$$

E quello assorbito:

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_C}{V_B}.$$

Essendo la trasformazione AB una espansione adiabatica reversibile si ha:

$$T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_B^{\gamma-1} \Rightarrow V_B = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/(\gamma-1)} V_A \cong 5.66 V_A.$$

Per la trasformazione irreversibile BC dato che $p_C=p_B$, si ha:

$$p_C V_C = nRT_2 \quad ; \quad p_C V_D = nRT_1 \quad \rightarrow \quad V_C = V_D \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} 20V_A = 10 V_A.$$

Sostituendo nell'espressione di Q_2 , si ottiene:

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{10V_A}{5.66V_A} \cong 2.84 \text{ kJ.}$$

Con i dati del problema si ha per l'efficienza o prestazione del ciclo: $\varepsilon = \xi = 1 - \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2} \cong$

0.105.

Per un ciclo di Carnot frigorifero la variazione di entropia del gas durante un ciclo è nulla (l'entropia è una funzione di stato). La variazione di entropia delle sorgenti è pari alla quantità di calore assorbite dalle stesse, diviso la loro temperatura assoluta,

$$\Delta S_1 = -\frac{Q_1}{T_1} \cong +25 \text{ J/K} \quad ; \quad \Delta S_2 = -\frac{Q_2}{T_2} \cong -4.73 \text{ J/K.}$$

La variazione di entropia dell'universo per ogni ciclo vale: $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 20.3 \text{ J/K.}$

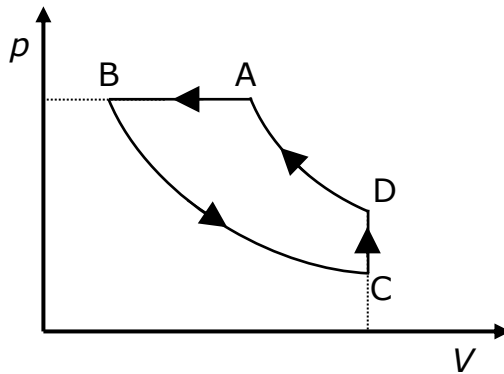
Problema 9.40 (10 punti)

Con riferimento alla figura, un ciclo termodinamico reversibile compiuto da una mole di un gas perfetto monoatomico è costituito dalla trasformazione isobara AB, dalla adiabatrica (isoentropica) BC, dalla isocora CD e dalla adiabatrica (isoentropica) DA. Sapendo solamente che la variazione di entropia della trasformazione CD vale $\Delta S_{CD} = 14.4 \text{ J/K}$, si chiede di

7. calcolare la variazione di entropia nelle altre trasformazioni. (4 punti)

Sapendo ora, in aggiunta al dato precedente, che il coefficiente di prestazione o efficienza di una macchina frigorifera di Carnot utilizzante due soli sorgenti alle temperature massima e minima raggiunte dal gas vale $\xi = \varepsilon = 0.25$ e $T_C = 150 \text{ K}$, si chiede di calcolare:

8. i rapporti di espansione V_C/V_B e compressione V_D/V_A raggiunti durante il ciclo. (6 punti)

**Soluzione**

Essendo la variazione di entropia del ciclo termodinamico nulla così come quella delle trasformazioni adiabatiche si ha che $\Delta S_{AB} = -\Delta S_{CD}$.

Con riferimento alle temperature massime e minime raggiunte dal gas nel ciclo proposta dal problema, si può scrivere che per una macchina di Carnot operante tra queste temperature il rendimento è uguale a:

$$\xi_{Carnot} = \varepsilon_{Carnot} = \frac{T_A}{T_A - T_C} \rightarrow T_A = T_C \frac{1 + \xi}{\xi} \approx 750 \text{ K}.$$

La variazione di entropia tra due stati di equilibrio con il medesimo volume vale:

$$\Delta S_{CD} = nc_v \ln \frac{T_D}{T_C} \rightarrow T_D = T_C \exp[\Delta S_{CD} / nc_v] \approx 476.2 \text{ K}$$

La variazione di entropia tra due stati di equilibrio con la medesima pressione vale:

$$\Delta S_{AB} = nc_p \ln \frac{T_B}{T_A} = -\Delta S_{CD} \rightarrow T_B = T_A \exp[-\Delta S_{CD} / nc_p] \approx 375 \text{ K}.$$

Essendo la trasformazione BC una adiabatrica reversibile si ha:

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_C}{V_B} = \left(\frac{T_B}{T_C} \right)^{1/(\gamma-1)} \approx 3.95.$$

Analogamente si ottiene:

$$\frac{V_D}{V_A} = \left(\frac{T_A}{T_D} \right)^{1/(\gamma-1)} \approx 2.$$

Problema 9.41 (10 punti)

Una macchina termica esegue un ciclo termodinamico operando con solo quattro sorgenti di calore alle temperature $T_1=570$ K, $T_2=350$ K, $T_3=290$ K e $T_4=200$ K. Sapendo che:

- c. le quantità di calore scambiate con le sorgenti a temperatura T_1 , T_3 e T_4 sono pari a $Q_1=280$ J, $Q_3=90$ J e $Q_4=-220$ J;
- d. il rendimento della macchina è pari a $\eta=0.24$,

si chiede di rispondere alle seguenti domande:

- 4. quanto vale la quantità di calore Q_2 scambiata con la sorgente a temperatura T_2 ; (4 punti)
- 5. dimostrare se il ciclo compiuto dalla macchina è reversibile o irreversibile; (4 punti)
- 6. se la macchina si dimostra essere irreversibile, calcolare il rendimento massimo raggiungibile nel caso si riesca a farla operare in modo reversibile e confrontare il valore ottenuto con quello di un ciclo di Carnot operante tra le temperature massima e minima tra quelle delle quattro sorgenti prese in esame. (2 punti)

Soluzione

Non sappiamo a priori se la quantità di calore Q_4 è assorbita o ceduta dalla macchina termica.

Per determinarlo ricordiamo che il teorema di Clausius stabilisce che $\sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$. Supponendo

per un istante che il ciclo sia reversibile (ipotesi migliore) si ottiene che la quantità di calore scambiata con la sorgente a temperatura T_2 può essere indifferentemente negativa o positiva dato che la somma dei tre termini noti dal problema è già negativa. Allora possiamo utilizzare la conoscenza del valore del rendimento. In questo caso possiamo mettere Q_4 o come quantità di calore assorbita o ceduta dalla macchina.

Essendo: $\eta = 1 - |Q_{ced}|/|Q_{ass}|$, si può avere:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2| + |Q_4|}{|Q_1| + |Q_3|} = 1 - \frac{220 + |Q_2|}{280 + 90} \quad \text{o} \quad \eta = 1 - \frac{|Q_4|}{|Q_1| + |Q_3| + |Q_2|} = 1 - \frac{220}{280 + 90 + |Q_2|}.$$

Ponendo $Q_2=0$ si vede che il valore di η sarebbe maggiore di quello dato. Di conseguenza, Q_2 deve essere una quantità di calore ceduta dalla macchina alla sorgente. Si ha:

$$\eta = \frac{W}{Q_1 + Q_3} \rightarrow \eta = 1 + \frac{Q_2 + Q_4}{Q_1 + Q_3} \rightarrow Q_2 = (Q_1 + Q_3)(\eta - 1) - Q_4 \approx -61.2 \text{ J}.$$

Conoscendo ora il valore di Q_4 e applicando di nuovo il teorema di Clausius si ha che:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{T_i} \approx -0.47 \text{ J/K}.$$

Pertanto rimane dimostrato che il ciclo termodinamico è irreversibile. Per un ciclo reversibile, sempre applicando il teorema di Clausius si avrebbe che la quantità di calore assorbita dalla sorgente a temperatura T_2 dovrebbe valere $Q'_2 \approx +104.4$ J. Di conseguenza, il rendimento della macchina diventerebbe:

$$\eta' = 1 + \frac{Q_4}{Q_1 + Q_3 + Q'_2} \approx 0.54.$$

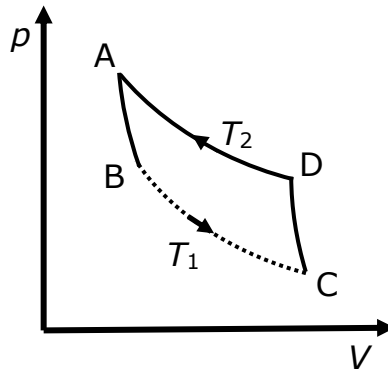
Per un ciclo di Carnot tra le temperature $T_1=570$ K e $T_4=200$ K si avrebbe invece per il rendimento:

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_4}{T_1} \approx 0.65.$$

Problema 9.42 (10 punti)

Si ha una macchina frigorifera assimilabile ad un ciclo di Carnot irreversibile compiuto da $n=2$ moli di un gas perfetto. Con riferimento alla figura si ha: AB = espansione adiabatica reversibile; BC = espansione isoterma irreversibile; CD = compressione adiabatica reversibile; DA = compressione isoterma reversibile. Il ciclo utilizza due sole sorgenti di calore alle temperature $T_2=300$ K e $T_1=250$. Conoscendo che il lavoro assorbito in un ciclo vale $W=-400$ J e che il rapporto tra i volumi $V_D/V_A=1.5$, si chiede di determinare:

1. il calore assorbito dalla macchina frigorifera; (3 punti)
2. il coefficiente di prestazione della macchina frigorifera; (3 punti)
3. la variazione di entropia dell'universo termodinamico in un ciclo. (4 punti)

**Soluzione**

Essendo la trasformazione tra A e B reversibile il calore assorbito vale:

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_D} \approx -2022 \text{ J}$$

Conoscendo il lavoro assorbito dalla macchina si ha:

$$Q_1 = W - Q_2 \approx 1622 \text{ J.}$$

1684 J

Il coefficiente di prestazione vale:

$$\xi = \frac{Q_1}{|W|} = 4.06.$$

La variazione di entropia dell'universo termodinamico in un ciclo vale:

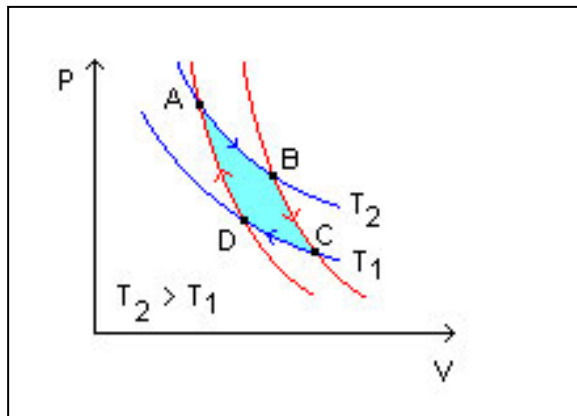
$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \approx 0.25 \text{ J/K.}$$

Problema 9.43 (10 punti)

Si ha un ciclo termodinamico assimilabile ad un ciclo di Carnot compiuto da $n=3$ moli di un gas perfetto utilizzando due sorgenti di calore alle temperature T_2 e T_1 con $T_2 > T_1$. All'inizio, il ciclo funziona in modo reversibile con un rendimento $\eta_{REV}=0.4$. Ad un certo istante il ciclo diventa irreversibile a causa di attriti meccanici presenti durante la compressione isoterma a temperatura T_1 . Tutte le altre trasformazioni rimangono invece reversibili. In queste condizioni si misura che la differenza tra i lavori ottenuti dalla macchina reversibile rispetto a quella irreversibile

$W_{REV} - W_{IRR} = 1 \text{ kJ}$ e che il rendimento ora è $\eta_{IRR}=0.3$. Essendo noto il rapporto tra i volumi $V_B/V_A=2.23$, si chiede di determinare:

1. le temperature delle due sorgenti di calore;
2. le quantità di calore scambiate con le sorgenti nella situazione di macchina irreversibile;
3. la variazione di entropia dell'universo termodinamico in un ciclo della macchina irreversibile.

**Soluzione**

Essendo dapprima il ciclo reversibile si ha che il suo rendimento vale:

$$\eta_{REV} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{W_{REV}}{Q_2}$$

Quando la macchina diventa irreversibile, il suo rendimento sarà: $\eta_{IRR} = \frac{W_{IRR}}{Q_2}$.

Da queste due equazioni si trova facilmente che:

$$\frac{W_{REV} - W_{IRR}}{Q_2} = \eta_{REV} - \eta_{IRR} \rightarrow Q_2 = \frac{W_{REV} - W_{IRR}}{\eta_{REV} - \eta_{IRR}} = 10 \text{ kJ}.$$

Continuando ad essere l'espansione isoterma reversibile, la temperatura della sorgente più calda vale:

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} \rightarrow T_2 = \frac{Q_2}{nR \ln \frac{V_B}{V_A}} \approx 500 \text{ K}$$

Dalla relazione del rendimento della macchina irreversibile si trova il valore del calore ceduto alla sorgente a temperatura T_1 :

$$\eta_{IRR} = \frac{Q_2 + Q_1}{Q_2} \rightarrow Q_1 = (\eta_{IRR} - 1)Q_2 = -7 \text{ kJ}$$

Non essendosi alterata la temperatura della sorgente più fredda, dalla relazione del rendimento della macchina reversibile si ottiene $T_1=300 \text{ K}$. Di conseguenza la variazione di entropia dell'universo termodinamico in un ciclo vale:

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \approx 3.33 \text{ J/K}.$$

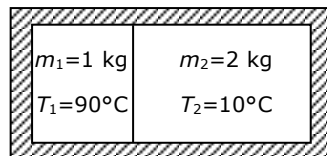
Problema 9.44 (10 punti)

Un recipiente adiabatico contiene una massa $m_1=1.0$ kg (corrispondente a 1 dm^3) di acqua a $T_1=90^\circ\text{C}$ ed una massa $m_2=2.0$ kg (corrispondenti a 2 dm^3) sempre di acqua a $T_2=10^\circ\text{C}$, all'equilibrio e separati da una membrana adiabatica (stato A). A un certo istante, la membrana si rompe e l'acqua raggiunge un nuovo stato di equilibrio (stato B). Calcolare:

1. la temperatura di equilibrio T_B dello stato B;
2. la variazione di entropia del processo che porta il sistema dallo stato A allo stato B, cioè la differenza S_B-S_A .

In seguito, la temperatura dell'acqua è variata reversibilmente, mettendola a contatto con sorgenti esterne, in modo da portare il sistema termodinamico a uno stato di equilibrio C che ha la medesima entropia dello stato iniziale. Calcolare la temperatura T_C dello stato C.

NOTA: Il calore specifico dell'acqua vale $c_a = 4186 \text{ J/kg K}$.

**Soluzione**

La temperatura finale si ottiene imponendo che $Q + W = 0$, cioè:

$$m_1 c_a (T_B - T_1) + m_2 c_a (T_B - T_2) = 0$$

Il risultato finale è

$$T_B = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$$

cioè $T_B = 36.7^\circ\text{C} = 309.85 \text{ K}$. La variazione di entropia vale

$$S_B - S_A = m_1 c_a \ln \frac{T_B}{T_1} + m_2 c_a \ln \frac{T_B}{T_2}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene $S_B - S_A = 88.6 \text{ J/K}$.

La temperatura dello stato finale T_C deve essere tale che la variazione di entropia $S_C - S_B$ Sia uguale ed opposta alla variazione di entropia della trasformazione spontanea precedente $S_B - S_A$, cioè

$$S_C - S_B = (m_1 + m_2) c_a \ln \frac{T_C}{T_B} = -(S_B - S_A)$$

Questa equazione ha soluzione

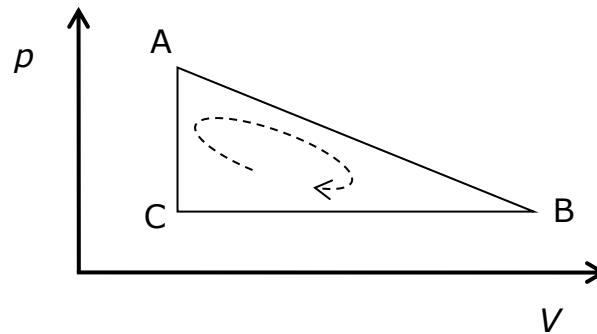
$$T_C = T_B \exp \left[-\frac{S_B - S_A}{c_a (m_1 + m_2)} \right]$$

cioè $T_C = 307.6 \text{ K}$. Le sorgenti debbono raffreddare il sistema per riportare l'entropia al valore iniziale dello stato A, come è ovvio: la variazione di entropia negativa necessaria per compensare la variazione positiva causata dalla trasformazione spontanea richiede che il sistema si raffreddi.

Problema 9.45 (10 punti)

Una mole di gas perfetto biatomico compie il ciclo reversibile rappresentato sul piano di Clapeyron pV da un triangolo ABC in cui le trasformazioni BC e CA sono un'isobara e un'isocora, rispettivamente. Le pressioni valgono $p_C=10^5$ Pa, $p_A=4 \times 10^5$ Pa, e i volumi $V_C=24.9 \times 10^{-3}$ m³ e $V_B=83.1 \times 10^{-3}$ m³. Calcolare:

1. Il lavoro compiuto lungo la trasformazione AB;
2. La variazione di energia interna del gas lungo la trasformazione AB;
3. Il calore scambiato lungo la trasformazione AB;
4. Il rendimento del ciclo.

**Soluzione**

Le temperature, utilizzando la legge dei gas perfetti, sono $T_A=1200$ K, $T_B=1000$ K e $T_C=300$ K.

Il lavoro scambiato lungo la trasformazione AB è l'area sotto il ciclo:

$$W_{AB} = -\frac{1}{2}(p_A + p_C)(V_B - V_C)$$

e vale $W_{AB} = 14.55$ KJ. La variazione di energia interna è:

$$\Delta U_{AB} = nc_v(T_B - T_A) \approx -4.16 \text{ KJ.}$$

Applicando il primo principio della termodinamica si ha:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} - W_{AB},$$

si ottiene che il lavoro scambiato vale $Q_{AB} = 10.39$ KJ, assorbito dal sistema.

Il sistema assorbe calore anche lungo la trasformazione CA

$$Q_{CA} = nc_v(T_A - T_C) \approx 18.71 \text{ KJ.}$$

Il calore ceduto lungo la trasformazione BC

$$Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B) \approx -20.37 \text{ KJ.}$$

Il rendimento è:

$$Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B)\eta = 1 - \frac{|Q_{BC}|}{Q_{AB} + Q_{CA}}$$

da cui $\eta = 0.3$.

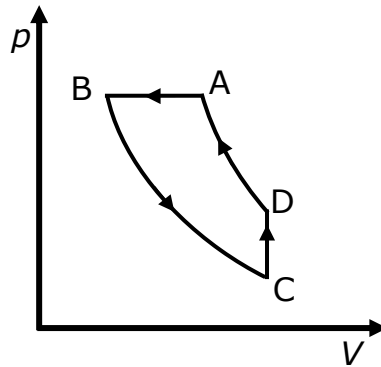
Problema 9.46 (10 punti)

Un gas ideale biatomico descrive il ciclo frigorifero mostrato in figura: dalla stato iniziale A alla temperatura T_A viene eseguita una trasformazione isobara per punti di equilibrio fino a raggiungere la temperatura T_B . A questo punto una trasformazione isoterma reversibile porta il volume al valore V_C e una trasformazione isocora riporta il sistema alla temperatura iniziale T_A . Infine una compressione isoterma riporta il sistema nello stato iniziale. Il ciclo avviene utilizzando due sole sorgenti di calore alle temperature T_A e T_B .

Determinare:

1. il calore sottratto alla sorgente a temperatura inferiore in un ciclo; (3 punti)
2. il coefficiente di prestazione della macchina frigorifera; (4 punti)
3. la variazione di entropia dell'universo termodinamico in un ciclo. (3 punti)

Dati del problema $T_A=300$ K, $V_B=10^{-2}$ m³, $p_A=7\times 10^5$ Pa, $T_B=250$ K, $p_C=2.92\times 10^5$ Pa.

**Soluzione**

Nella trasformazione isobara si ha:

$$V_A = V_B \frac{T_A}{T_B} = 12 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

e nella isoterma a temperatura T_B si ha:

$$V_D = V_C = V_B \frac{p_B}{p_C} = 24 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Il numero di moli vale:

$$n = \frac{p_A V_A}{RT_A} \approx 3.4 \text{ moli.}$$

Pertanto il calore scambiato con la sorgente a più bassa temperatura vale:

$$Q(T_B) = Q_{AB} + Q_{BC} = n \frac{7}{2} R(T_B - T_A) + nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B} \approx 1.23 \text{ kJ.}$$

D'altro canto, il calore scambiato con la sorgente a temperatura maggiore è:

$$Q(T_A) = Q_{CD} + Q_{DA} = n \frac{5}{2} R(T_A - T_B) + nRT_A \ln \frac{V_A}{V_D} \approx -2.32 \text{ kJ.}$$

Il lavoro in un ciclo è:

$$W = Q(T_B) + Q(T_A) = -1.09 \text{ kJ.}$$

Il coefficiente di prestazione vale:

$$\xi = \frac{Q(T_B)}{|W|} \approx 1.12.$$

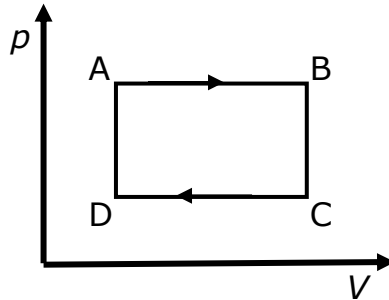
Infine, la variazione di entropia delle due sorgenti è uguale a:

$$\Delta S = -\frac{Q(T_B)}{T_B} - \frac{Q(T_A)}{T_A} = 2.8 \text{ J/K.}$$

Problema 9.47 (10 punti)

Una macchina termica lavora con $n=1.2$ moli di un gas perfetto biatomico eseguendo il ciclo termodinamico non reversibile per un continuo di stati di equilibrio (vedi figura). La trasformazione $A \rightarrow B$ è una isobara che porta la temperatura del gas da $T_A=600$ K a $T_B=700$ K. La isocora $B \rightarrow C$ porta il gas alla temperatura $T_C=550$ K e alla pressione $p_C=1.4 \times 10^5$ Pa. Nella compressione isobara $C \rightarrow D$ il gas raggiunge la temperatura T_D . Infine, la isocora $D \rightarrow A$ porta il sistema nello stato iniziale A. La macchina lavora solo tra due sorgenti di calore a temperatura T_B (trasformazioni $D \rightarrow A$ e $A \rightarrow B$) e T_D (trasformazioni $B \rightarrow C$ e $C \rightarrow D$). Si chiede di determinare:

1. Il lavoro eseguito in un ciclo; (3 punti)
2. Il rendimento del ciclo; (4 punti)
3. L'aumento di entropia dell'universo termodinamico in un ciclo. (3 punti)

**Soluzione**

Dai dati del problema si ha:

$$V_C = V_B = nRT_C / p_C \cong 3.9 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3; \quad p_A = p_B = nRT_B / V_B \cong 1.8 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = V_D = nRT_A / p_A \cong 3.3 \times 10^{-2} \text{ m}^3; \quad T_D = p_D V_D / nR \cong 471 \text{ K}.$$

Il lavoro in un ciclo è pertanto uguale a:

$$W = (p_A - p_D)(V_C - V_A) \cong 214 \text{ J}$$

Troviamo ora le quantità di calore scambiate:

$$Q_{AB} = \frac{7}{2} nR(T_B - T_A) \cong 3.5 \text{ kJ}; \quad Q_{BC} = \frac{5}{2} nR(T_C - T_B) \cong -3.7 \text{ kJ}$$

$$Q_{CD} = \frac{7}{2} nR(T_D - T_C) \cong -2.74 \text{ kJ}; \quad Q_{DA} = \frac{5}{2} nR(T_A - T_D) \cong 3.2 \text{ kJ}.$$

Si verifica immediatamente che $W = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$. Il rendimento vale:

$$\eta = \frac{W}{Q_{AB} + Q_{DA}} \cong 0.032.$$

Infine, essendo in presenza di un ciclo chiuso, la variazione dell'entropia dell'universo termodinamico vale:

$$\Delta S = -\frac{Q_{AB} + Q_{DA}}{T_B} - \frac{Q_{BC} + Q_{CD}}{T_A} \cong 4.2 \text{ J/K}.$$

Problema 9.48 (10 punti)

In una trasformazione generica che verifica la relazione $pV^k = \text{costante}$ (trasformazione politropica), dove k è una costante da determinare, la pressione e il volume di una definita massa di ossigeno (gas biatomico) variano da $p_1=4.00 \times 10^5$ Pa e $V_1=10^{-3}$ m³ ai valori $p_2=10^5$ Pa e $V_2=2 \times 10^{-3}$ m³. La temperatura iniziale del gas è $T_1=500$ K.

Si determini:

- a) il calore Q che viene scambiato dall'ossigeno con l'ambiente; (5 punti)
- b) la variazione ΔU_{int} di energia interna del gas; (3 punti)
- c) la variazione ΔS di entropia del gas. (2 punti)

Soluzione

Prima di tutto si noti che, utilizzando l'equazione dei gas ideali, il numero n di moli di ossigeno e la temperatura T_2 del secondo stato sono pari a:

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} \approx 0.1 \text{ moli} \quad ; \quad T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} \approx 241 \text{ K.}$$

Inoltre, dato che la trasformazione politropica è caratterizzata dalla legge $pV^k = \text{cost.}$, si ha:

$$k = \ln(p_1 / p_2) / \ln(V_2 / V_1) = 2.$$

La natura biatomica del gas implica che il suo calore specifico molare a volume sia pari a $c_v=5/2R$. Quindi la variazione di energia interna subita dal gas nella trasformazione sarà data da:

$$\Delta U = nc_v(T_2 - T_1) \approx -538 \text{ J.}$$

Poi, dalla prima legge della termodinamica ricaviamo che la quantità di calore scambiato dal gas è data da $Q = \Delta U + W$, dove:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_2 V_2^2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = p_2 V_2^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = p_1 V_1 - p_2 V_2 = 200 \text{ J}$$

dove si sono utilizzate le relazioni $p = \frac{p_2 V_2^2}{V^2}$ e $p_2 V_2^2 = p_1 V_1^2$. Allora il calore scambiato è uguale a $Q = -358 \text{ J}$.

Infine, per calcolare la variazione di entropia possiamo utilizzare:

$$\Delta S = nc_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -0.873 \text{ J/K.}$$

Problema 9.49 (10 punti)

Una macchina che lavora fra due sorgenti a temperatura $T_1=500\text{ K}$ e $T_2=300\text{ K}$ ha un rendimento pari all'80% di quello di una macchina ideale che lavora fra le stesse due sorgenti e cede all'ambiente, che costituisce la sorgente a temperatura T_2 , una quantità di calore $Q_2=2.8\text{ KJ}$.

- a) Calcolare il lavoro W fornito dalla macchina e la quantità di calore assorbita dalla sorgente a temperatura T_1 . (2 punti)
b) Per una macchina ideale che lavora fra le stesse due sorgenti cedendo la stessa quantità di calore Q_2 calcolare la quantità di calore assorbita dalla sorgente a temperatura T_1 e il lavoro addizionale ΔW che essa fornisce in più rispetto alla precedente macchina. (5 punti)
c) Determinare le variazioni di entropia delle sorgenti per la macchina del quesito a). (3 punti)

Soluzione.

Il rendimento della macchina ideale è:

$$\eta_C = 1 - T_2/T_1 = 2/5 = 0.4,$$

quindi per la macchina reale è $\eta = 0.8\eta_C = 0.32$.

- a) Il calore assorbito dalla sorgente T_1 è:

$$Q_1 = Q_2/(1-\eta),$$

allora $Q_1=4181\text{ J}$, e $W=Q_1-Q_2=1318\text{ J}$;

- b) La macchina ideale assorbe dalla sorgente T_1 il calore $Q'_1=Q_2/(1-\eta_C)=4667\text{ J}$, il lavoro fornito dalla macchina ideale è quindi:

$$W_0=Q'_1-Q_2=1867\text{ J} \quad \text{per cui} \quad \Delta W=549\text{ J};$$

- c) La variazione di entropia della sorgente T_1 è:

$$\Delta S_1 = Q_1/T_1 = -8.362\text{ J/K},$$

mentre per T_2 è:

$$\Delta S_2 = Q_2/T_2 = 9.333\text{ J/K}.$$

Ne consegue che $\Delta S > 0$.

Problema 9.50 (10 punti)

Un recipiente adiabatico rigido è diviso in due parti *uguali* di volume $V = 0.05 \text{ m}^3$ da una parete isolante. Una parte contiene un n_1 moli gas perfetto biatomico a temperatura e pressione iniziali $T_1 = 300\text{K}$ e $p_1 = 10^5\text{Pa}$. Nell'altra parte è contenuta una quantità n_2 di moli dello stesso gas perfetto a temperatura e pressione iniziali $T_2 = 500\text{K}$ e $p_2 = 3 \times 10^5\text{Pa}$. Se la parete viene rimossa e i due gas si mescolano, determinare

1. Il numero di moli n_1 ed n_2 ; (2 punti)
2. La temperatura T_f e la pressione p_f del gas nella condizione di equilibrio finale; (5 punti)
3. Se i due recipienti sono dotati di scambiatori di calore al loro interno, la quantità di calore Q_1 e Q_2 che gli scambiatori dovrebbero fornire o assorbire per portare i due gas alla medesima temperatura finale T_f senza che il setto venga rimosso. (3 punti)

Soluzione

Alla prima domanda si risponde usando l'equazione di stato dei gas perfetti nello stato iniziale:

$$p_1 V = n_1 R T_1 \Rightarrow n_1 = \frac{p_1 V}{R T_1} = 2 \text{ moli} \quad \text{e} \quad p_2 V = n_2 R T_2 \Rightarrow n_2 = \frac{p_2 V}{R T_2} = 3.6 \text{ moli}.$$

Alla seconda domanda si risponde imponendo che lo stato di equilibrio finale, di volume $2V$, verifichi l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_f(2V) = (n_1 + n_2) R T_f,$$

e che la variazione di energia interna della trasformazione, che avviene senza scambio di calore e lavoro con l'esterno, sia nulla

$$\Delta U = n_1 c_V T_1 + n_2 c_V T_2 - (n_1 + n_2) c_V T_f = 0 \quad \Rightarrow \quad T_f = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2} = 428.6 \text{ K},$$

e quindi, dall'equazione di stato dei gas perfetti, $p_f = 2 \times 10^5 \text{Pa}$.

Le quantità di calore valgono:

$$Q_1 = n_1 c_V (T_f - T_1) = n_1 \frac{5}{2} R (T_f - T_1) = 5.35 \text{ kJ},$$

$$Q_2 = n_2 c_V (T_f - T_2) = n_2 \frac{5}{2} R (T_f - T_2) = -5.35 \text{ kJ}.$$

Problema 9.51 (10 punti)

Una macchina che lavora fra due sorgenti a temperatura $T_1=500\text{K}$ e $T_2=300\text{K}$ ha un rendimento pari $\eta=0.32$ e cede alla sorgente a temperatura T_2 la quantità di calore $Q_2=2.8\text{ KJ}$.

- Dimostrare che la macchina descritta è una macchina NON reversibile e calcolare il lavoro W da essa fornito. (3 punti)
- Per una macchina ideale che lavora fra le stesse due sorgenti a temperatura T_1 e T_2 e che cede la stessa quantità di calore Q_2 , quale dovrebbe essere la quantità di calore assorbita dalla sorgente a temperatura T_1 e il lavoro addizionale ΔW che essa fornisce in più rispetto alla macchina irreversibile. (4 punti)
- Determinare le variazioni di entropia delle sorgenti per la macchina irreversibile. (3 punti)

Soluzione.

a) Per sapere se la macchina è irreversibile basta calcolare il rendimento di una macchina reversibile che lavora tra le temperature T_1 e T_2 . Si ha:

$$\eta_{REV}=1-T_2/T_1=0.4.$$

Ricordando il teorema di Carnot si dimostra quanto richiesto dalla domanda. In modo analogo si può verificare che:

$$(Q_1/T_1) + (Q_2/T_2) < 0.$$

Per usare questa espressione si calcoli il calore assorbito dalla sorgente alla temperatura T_1 :

$$Q_1 = |Q_2|/(1-\eta) \cong 4181 \text{ J}.$$

Pertanto il lavoro vale:

$$W = Q_1 - Q_2 = 1318 \text{ J}$$

e la precedente relazione risulta minore di zero.

La macchina ideale assorbe dalla sorgente T_1 il calore:

$$Q'_1 = Q_2/(1-\eta_{REV}) = 4667 \text{ J},$$

il lavoro fornito dalla macchina ideale è quindi $W_0 = Q'_1 - Q_2 = 1867 \text{ J}$ per cui $\Delta W = 549\text{J}$;

La variazione di entropia della sorgente T_1 è:

$$\Delta S_1 = Q_1/T_1 = -8.362 \text{ J/K},$$

mentre per la sorgente alla temperatura T_2 è:

$$\Delta S_2 = Q_2/T_2 = 9.333 \text{ J/K}.$$

Ne consegue che $\Delta S > 0$.

Problema 9.52 (10 punti)

Una macchina frigorifera reversibile opera tra due sorgenti S_1 e S_2 poste rispettivamente alle temperature $T_1=250$ K e $T_2=300$ K. Il lavoro necessario per far funzionare la macchina frigorifera è fornito da una seconda macchina termica anch'essa reversibile, schematizzabile con un ciclo di Carnot, che opera tra due sorgenti S'_1 e S'_2 poste alle temperature $T'_1=300$ K e $T'_2=400$ K. Sapendo che la macchina frigorifera estrae in ogni ciclo la quantità di calore $Q_1=5$ KJ, si chiede di determinare:

- 1) Il lavoro per ciclo W necessario al funzionamento della macchina frigorifera; (4 punti)
- 2) le quantità di calore Q'_1 e Q'_2 scambiate dalla macchina termica affinché quella frigorifera possa funzionare; (4 punti)

Ad un certo istante la macchina frigorifera diventa irreversibile nella sua fase di cessione di calore alla sorgente a maggior temperatura T_2 . La macchina frigorifera cede una quantità di calore $Q_2^*=1.2 Q_2$, con Q_2 la quantità di calore ceduta dalla macchina frigorifera reversibile calcolata prima, mentre la quantità di calore Q_1 rimane invariata.

- 3) Calcolare il lavoro necessario a far funzionare la macchina frigorifera in queste condizioni (2 punti)

Soluzione

Dovendo essere le due macchine entrambe reversibili, è possibile utilizzare il teorema di Clausius per trovare subito la quantità di calore Q_2 che la macchina frigorifera deve cedere alla sorgente a temperatura T_2 :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \rightarrow Q_2 = -T_2 \frac{Q_1}{T_1} \cong -6 \text{ KJ},$$

avendo ricordato la convenzione per i segni delle quantità di moto scambiate con le sorgenti. Il lavoro che la macchina termica deve sviluppare per far funzionare quella frigorifera è pari a $W=1$ KJ. Per sapere le quantità di calore scambiate con le due sorgenti dalla macchina termica si può di nuovo ricorrere al teorema di Clausius (si possono in alternativa anche utilizzare le formule relative al rendimento di una macchina termica di Carnot):

$$\frac{Q'_1}{T'_1} + \frac{Q'_2}{T'_2} = 0 \rightarrow \frac{Q'_1}{T'_1} + \frac{W - Q'_1}{T'_2} = 0 \text{ dato che } |W| = Q_1 + Q_2 = |Q'_1 + Q'_2|$$

Con semplici calcoli algebrici si ottiene:

$$Q'_1 = -\frac{W}{T'_2} \left(\frac{T'_1 T'_2}{T'_2 - T'_1} \right) \cong -3 \text{ KJ} \quad ; \quad Q'_2 = W - Q'_1 = 4 \text{ KJ}. \quad (1)$$

Quando la macchina frigorifera diventa irreversibile per cui si ha $Q_2^* = 1.2 Q_2$, utilizzando il primo principio si ottiene $|W^*| = |Q_1 + 1.2 Q_2| = 2.2 \text{ KJ}$.

Problema 9.53 (10 punti)

Un blocco di rame di massa $m = 1 \text{ kg}$ e calore specifico $c_r = 385 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ alla temperatura $T_r = 200 \text{ }^\circ\text{C}$ viene immerso in un recipiente, isolato termicamente, contenente una massa $M = 0.1 \text{ kg}$ di ghiaccio alla temperatura di fusione ($T_g = 0 \text{ }^\circ\text{C}$). Il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda = 333.55 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$ ed il calore specifico dell'acqua $c_a = 4186 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$. Si osserva che lo stato finale è costituito da sola acqua allo stato liquido (il ghiaccio si è sciolto completamente) e dal blocco di rame, all'equilibrio termico. Calcolare:

- 1) la temperatura finale del sistema T_f . (4 punti)
- 2) la variazione di entropia della trasformazione del ghiaccio dalla temperatura T_g ad acqua alla temperatura T_f . (3 punti)
- 3) la variazione di entropia della trasformazione del rame dalla temperatura T_r alla temperatura T_f , verificando che la somma delle variazioni di entropia del rame e del sistema acqua-ghiaccio sia positiva (2 punti)
- 4) sapendo che la densità molare del rame vale $m_a = 63.546 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$, e che il calore specifico vale $c_r = 385 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$, calcolare il calore specifico molare $c_{r,mol}$ in $\text{J/(mol}\cdot\text{K)}$. Si suggerisce di fare le operazioni tenendo le unità di misura, cioè di scrivere la grandezza fisica come misura (numero puro) per l'unità di misura, e fare l'operazione che assicuri che, con opportune semplificazioni, l'unità di misura finale sia quella giusta. (1 punto)

Soluzione

La temperatura finale del sistema si trova imponendo che le quantità di calore assorbite dai due sottosistemi per arrivare all'equilibrio termico abbiano somma nulla

$$mc_r(T_f - T_r) + \lambda M + Mc_a(T_f - T_0) = 0,$$

da cui

$$T_f = \frac{mc_r T_r - \lambda M + Mc_a T_0}{mc_r + Mc_a} = 327.5 \text{ K}.$$

La variazione di entropia del ghiaccio è (si noti che le temperature sono in Kelvin!)

$$\Delta S_g = \frac{M\lambda}{T_0} + Mc_a \ln \frac{T_f}{T_0} = 198.0 \text{ J/K},$$

e del rame

$$\Delta S_r = mc_r \ln \frac{T_f}{T_r} = -141.7 \text{ J/K}.$$

La variazione di entropia dell'universo è $\Delta S_u = \Delta S_g + \Delta S_r = 56.3 \text{ J/K}$, positiva come deve essere per una trasformazione spontanea in un sistema isolato.

Il calore specifico molare vale (semplificando kg)

$$c_{r,mol} = c_{r,mol} m_a = 385 \text{ J/(kg K)} \cdot 63.56 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol} = 24.44 \text{ J/(mol K)}.$$

Problema 9.54 (10 punti)

Un iceberg di $m = 10^5$ kg a -5°C di temperatura si stacca dalla calotta polare va alla deriva nell'oceano che si trova a 5°C di temperatura, e si scioglie completamente.

1. Si calcoli la variazione di entropia dell'iceberg nella trasformazione ghiaccio $\rightarrow$ acqua; (3 punti)
2. La variazione di entropia dell'oceano; (3 punti)
3. La variazione di entropia del sistema iceberg + oceano. (4 punti)

Si assuma per il calore specifico del ghiaccio $c_g = 2010$ J/kg K, per quello dell'acqua di $c_a = 4186$ J/kg K, e per il calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda = 333$ kJ/kg.

Suggerimento: si usi nei calcoli numerici dei punti 1 e 2 un numero di cifre significative almeno pari a 6, per avere una precisione sufficiente per rispondere al punto 3, che coinvolge la differenza di due numeri molto prossimi tra loro.

Soluzione

L'iceberg passa da una massa m di ghiaccio a -5°C ad una eguale massa di acqua a 5°C . La sua variazione di entropia si calcola come somma dei contributi delle variazioni di entropia dovuto ad una trasformazione reversibile che porta il ghiaccio da $T_1 = (273.15 - 5)$ K a $T_2 = 273.15$ K, poi alla transizione di fase che porta da ghiaccio ad acqua alla temperatura costante T_2 , poi alla trasformazione che porta l'acqua da T_2 a $T_3 = (273.15 + 5)$ K. Si ha dunque

$$\Delta S_i = mc_g \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m\lambda}{T_2} + mc_a \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

Numericamente si ottiene che la variazione di entropia dell'iceberg è $1,3322 \times 10^8$ J/K. Durante il processo di riscaldamento, la quantità di calore ceduto dall'oceano vale:

$$|Q| = mc_g(T_2 - T_1) + m\lambda + mc_a(T_3 - T_2).$$

Numericamente, $|Q| = 3,64 \times 10^{10}$ J. La variazione di entropia dell'oceano vale:

$$\Delta S_o = \frac{Q}{T_3} = -\frac{|Q|}{T_3},$$

cioè $\Delta S_o = -1,3086 \times 10^8$ J/K.

La variazione di entropia dell'insieme iceberg + oceano vale $\Delta S_i + \Delta S_o = 2,36 \times 10^6$ J/K, ed è positiva come richiede il secondo principio della termodinamica, essendo il sistema iceberg + oceano un sistema isolato.

Problema 9.55 (10 punti)

Un recipiente cilindrico di raggio r è chiuso da un pistone che è legato alla base tramite un filo metallico flessibile ma inestensibile di lunghezza $L=0.8$ m. Le pareti del sistema sono adiabatiche, il cilindro contiene $n=0.2$ moli di un gas perfetto biatomico e la pressione esterna è quella atmosferica $p_0=1.013 \times 10^5$ Pascal. Nelle condizioni iniziali l'altezza del pistone è $h_0=L/2$ e la temperatura del gas vale $T_0=300$ K. Il filo è anche una resistenza elettrica che permette di riscaldare il gas facendo passare una opportuna corrente elettrica. Mediante questo meccanismo si cede calore al gas che raggiunge uno stato di equilibrio finale in cui il filo è completamente allungato e la temperatura del gas aumenta da T_0 a T_1 .

1. In queste condizioni si calcoli la temperatura T_1 del gas; (2 punti)

Si continua somministrare calore fino al raggiungimento della temperatura $T_2=700$ K, superata la quale il filo si spezza e il gas raggiunge la temperatura finale T_f per la quale l'altezza del pistone è uguale a $h=0.88$ m. Si chiede di calcolare:

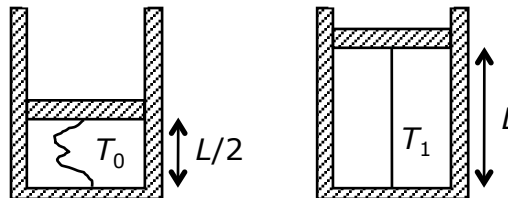
2. la pressione p_2 del gas un istante prima della rottura del filo; (2 punti)

3. La quantità di calore totale fornita al gas; (2 punti)

4. la temperatura finale T_f del gas; (2 punti)

5. la variazione totale di entropia del gas dall'istante iniziale a quello finale. (2 punti)

Nota: si assumano le trasformazioni delle domande 1 e 2 **reversibili** e trascurabili la massa del filo e la sua capacità termica e la massa del pistone.

**Soluzione**

Per rispondere alla prima domanda si consideri che la trasformazione in questo caso è una isobara reversibile per la quale si ha:

$$p_1 = p_0 \quad ; \quad \frac{V_1}{V_0} = \frac{T_1}{T_0} \rightarrow T_1 = T_0 \frac{2V_0}{V_0} = 600 \text{ K.}$$

Una volta esteso il filo per tutta la sua lunghezza L , la trasformazione diventa una isocora reversibile che porta il gas alla temperatura T_2 e pressione p_2 . Pertanto il valore della pressione p_2 è uguale a:

$$p_2 = p_0 \frac{T_2}{T_1} \approx 1.17 \times 10^5 \text{ Pascal.}$$

La quantità di calore totale fornita al gas vale:

$$Q = nc_p(T_1 - T_0) + nc_v(T_2 - T_1) \approx 2.16 \text{ kJ.}$$

Nella situazione finale, una volta che il filo si è spezzato, la pressione del gas torna ad essere quella atmosferica esterna. Pertanto si ha:

$$p_f V_f = nRT_f \quad ; \quad p_0 V_0 = nRT_0 \quad \text{da cui} \quad T_f = T_0 \frac{V_f}{V_0} = T_0 \frac{h}{L/2} \approx 660 \text{ K.}$$

La variazione totale di entropia è calcolabile utilizzando la relazione valida per una isobara essendo la pressione finale del gas uguale a quella iniziale. Quindi si ha:

$$\Delta S = nc_p \ln \frac{T_f}{T_0} \approx 4.6 \text{ J/K.}$$

Problema 9.56 (10 punti)

Una massa di ferro $m_f=2$ kg è immersa in una recipiente termicamente isolante contenente 5 litri di acqua alla temperatura $T_1= 293$ K. Il sistema si porta all'equilibrio e si misura che una temperatura del sistema uguale a $T_e=320$ K.

1. calcolare la temperatura iniziale della massa di ferro; (3 punti)
2. determinare la variazione di entropia del processo irreversibile di mescolamento; (3 punti)
3. supponendo ora che il processo di mescolamento possa avvenire in modo reversibile, si calcoli quale sarebbe la temperatura finale in questo caso, partendo dalle stesse temperature iniziali delle masse di ferro ed acqua; (2 punti)
4. sempre assumendo una trasformazione reversibile nel recipiente isolato e quindi la temperatura finale calcolata nel punto 3, calcolare la variazione di energia interna del sistema ed il lavoro ottenuto dal processo (che è il massimo lavoro estraibile dal sistema iniziale). (2 punti)

Calore specifico del ferro: $c_f=444$ J/(kg•K); calore specifico dell'acqua: $c_a= 4186$ J/(kg•K).

Soluzione

Una volta immerso il ferro nell'acqua la relazione dello scambio di calore tra le due sostanze in condizioni adiabatiche si scrive nel modo seguente:

$$m_f c_f (T_2 - T_e) = m_a c_a (T_e - T_1),$$

da cui si ricava la temperatura iniziale del ferro $T_2=956.38$ K.

La variazione di entropia del processo irreversibile vale, definendo $C_a=m_a c_a$ e $C_f=m_f c_f$ le capacità termiche dell'acqua e del ferro:

$$\Delta S = C_f \ln \frac{T_e}{T_2} + C_a \ln \frac{T_e}{T_1} \cong 872.72 \text{ J/K}$$

Se il processo di mescolamento avvenisse per stati di equilibrio in condizioni adiabatiche la trasformazione sarebbe reversibile e la sua variazione di entropia nulla. Da ciò segue che la temperatura finale di equilibrio del processo deve in questo caso essere diversa. Essa si ricava ponendo nulla la variazione di entropia:

$$\Delta S = C_f \ln \frac{T_e^*}{T_2} + C_a \ln \frac{T_e^*}{T_1} = 0$$

dove T_e^* è la nuova temperatura di equilibrio. Ponendo $A=C_a/C_f$ si ha:

$$T_e^* = T_1^{A/(1+A)} T_2^{1/(1+A)} \approx 307.45 \text{ K.}$$

La variazione di energia interna, che è una funzione di stato e nei solidi dipende solamente dalle temperature iniziale e finale, si ottiene a partire dai relativi calori specifici:

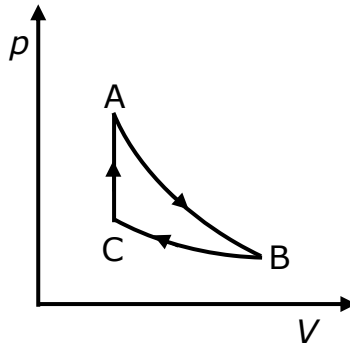
$$\Delta U = m_f c_f (T_e^* - T_2) + m_a c_a (T_e^* - T_1) \approx -273.76 \text{ kJ.}$$

Il lavoro che in queste condizioni si estrae si calcola dal primo principio, ed essendo in un recipiente isolato termicamente $Q = 0$, si ottiene $W = -\Delta U = 273.76 \text{ kJ.}$

Problema 9.57 (Problema d'esame del 15 febbraio 2012)

Sia data una macchina termica reversibile che compie il ciclo indicato in figura e composto da: AB una espansione adiabatica reversibile; BC una compressione isoterma alla temperatura T_B ; CA una trasformazione isocora. Sapendo che il gas ideale che la macchina usa ha un calore molare specifico a pressione costante pari a $c_p = (8/3)R$ e che il rapporto tra i volumi $V_A / V_B = 0.17$, si chiede di calcolare:

1. il rapporto tra le temperature massima e minima del ciclo; (2 punti)
2. il rendimento η della macchina descritta nella figura; (6 punti)
3. il rendimento di un ciclo di Carnot operante tra le temperature massima e minima del ciclo descritto in figura. (2 punti)

**Soluzione**

Dalle relazioni valide per le trasformazioni adiabatiche si ha che:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \rightarrow \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_B}{T_A} \cong 0.345$$

avendo ricavato il valore di γ dalla relazione di Mayer:

$$c_V = c_p - R = R\left(\frac{8}{3} - 1\right) = \frac{5}{3}R \rightarrow \gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{8}{5}.$$

Pertanto il rapporto tra la temperatura massima e quella minima raggiunta in un ciclo vale $T_A / T_B = 2.9$.

Il rendimento della macchina termica descritta in figura è: $\eta = \frac{W}{Q_{CA}} = 1 - \frac{|Q_{BC}|}{Q_{CA}}$.

Ora si ha che:

$$Q_{BC} = nRT_B \int_{V_B}^{V_A} \frac{dV}{V} = nRT_B \ln \frac{V_A}{V_B} \quad \text{e} \quad Q_{CA} = nc_V(T_A - T_B) = \frac{5}{3}nR(T_A - T_B).$$

Da queste relazioni si ha:

$$\eta = 1 - \frac{|3 \ln(V_A / V_B)|}{5(T_A / T_B - 1)} \cong 0.44.$$

Il rendimento del ciclo di Carnot tra le temperature massima T_A e minima T_B è dato da:

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_B}{T_A} = 0.655.$$

Problema 9.58 (Problema d'esame del 17 luglio 2012)

Si immerge un blocco di silice di massa $m_s=0.5$ kg alla temperatura di $T_s=140$ °C in un contenitore adiabatico contenente una massa $m_a=1,00$ kg alla temperatura di $T_a=20$ °C.

Determinare:

1. la temperatura di equilibrio della miscela silice-acqua; (2 punti)
2. La variazione di entropia del processo di mescolamento; (4 punti)
3. la temperatura di equilibrio che il sistema raggiungerebbe nel caso di trasformazione reversibile, mantenendo isolato il sistema anche in questo caso (una simile trasformazione si potrebbe ottenere facendo operare un ciclo reversibile che utilizzi le due sostanze come sorgenti); 2 (punti)
4. il lavoro prodotto dalla trasformazione reversibile di cui al punto precedente. 2 (punti)

NOTA: calore specifico della silice: $c_s=2020$ J/kg·K; calore specifico dell'acqua $c_a=4186$ J/kg·K

Dalle relazioni calorimetriche si trova subito il valore della temperatura d'equilibrio della miscela silice-acqua:

$$m_s c_s (T_s - T_e) = m_a c_a (T_e - T_a) \rightarrow T_e = \frac{m_s c_s T_s + m_a c_a T_a}{m_a c_a + m_s c_s} \approx 316,33 \text{ K.}$$

La variazione di entropia del ciclo reversibile vale:

$$\Delta S_{IRR} = m_a c_a \ln\left(\frac{T_e}{T_a}\right) + m_s c_s \ln\left(\frac{T_e}{T_s}\right) \approx 51.38 \text{ J/K.}$$

Per trovare il lavoro massimo ottenibile da una trasformazione reversibile, si deve calcolare la temperatura di equilibrio a cui la soluzione silice-acqua raggiungerebbe. Per ottenere tale valore è necessario porre nulla la variazione di entropia del processo:

$$\Delta S_{REV} = m_a c_a \ln\left(\frac{T_e^*}{T_a}\right) + m_s c_s \ln\left(\frac{T_e^*}{T_s}\right) = 0.$$

Dopo semplici passaggi si ottiene:

$$T_e^* = (T_s T_a^A)^{1/(1+A)} \approx 313,20 \text{ K}$$

dove $A = m_a c_a / m_s c_s = 4.15$.

Pertanto, il lavoro massimo ottenibile vale:

$$W = m_s c_s (T_e^* - T_s) + m_a c_a (T_e^* - T_a) \approx 16.24 \text{ kJ.}$$

Problema 9.59 (Problema d'esame del 12 settembre 2012)

Una mole di gas perfetto monoatomico compie un ciclo reversibile ABCD in cui AB è una trasformazione isoterma a temperatura $T_2 = 350$ K, BC un'isocora, CD un'isoterma a temperatura $T_1 = 250$ K, DA un'adiabatica. Sia $V_A = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ e $V_B = 3V_A$.

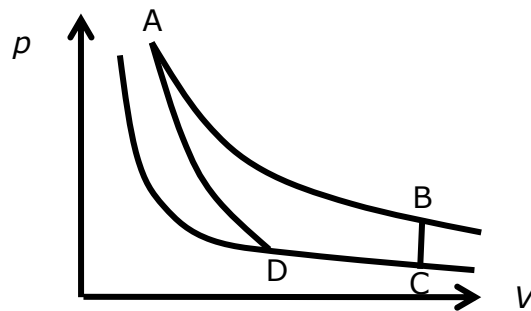
Disegnare qualitativamente, ma tenendo conto dei dati del problema, il ciclo nel piano pV . (1 punto)

Calcolare inoltre:

1. pressione, volume e temperatura dei quattro stati A, B, C e D; (4 punti)
2. il lavoro totale compiuto nel ciclo; (3 punti)
3. il rendimento del ciclo stesso, confrontandolo con il rendimento del ciclo di Carnot operante fra le stesse temperature T_1 e T_2 . (2 punti)

Soluzione

Il ciclo termodinamico ha la seguente raffigurazione nel piano pV :



Risposta alla domanda 1:

stato termodinamico A: $T_A = 350$ K; $V_A = 3.00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$;

967 KPa;

valido.

Errore. L'oggetto incorporato non è

stato termodinamico B: $T_B = T_A = 350$ K; $V_B = 9.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3$; $p_B = \frac{nRT_B}{V_B} \approx 323$ KPa;

stato termodinamico C: $T_C = T_1 = 250$ K; $V_C = V_B = 9.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3$; $p_C = \frac{nRT_C}{V_C} \approx 231$ KPa;

stato termodinamico D: $T_D = T_1 = 250$ K; $V_D = V_A \left(\frac{T_A}{T_D} \right)^{1/(\gamma-1)} \approx 4,97 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ con $\gamma = 5/3$,

$p_D = \frac{nRT_D}{V_D} \approx 418$ KPa.

Risposta alla domanda 2: $W = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} = 716$ J essendo:

$Q_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = 3197$ J ; $Q_{BC} = nC_V(T_1 - T_2) = -1247$ J ; $Q_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} = -1234$ J.

Risposta alla domanda 3: $\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = 22.4\%$ da confrontare con $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 28,6\%$.

Problema 9.60 (Problema d'esame del 18 giugno 2012)

Un blocco di rame ed un blocco di ferro hanno massa $m_1 = 1.0\text{kg}$ e $m_2 = 4.0\text{kg}$. Il calore specifico del rame è $C_1 = 385 \text{ J/(kg K)}$ e quello del ferro $C_2 = 444 \text{ J/(kg K)}$. Essi si trovano inizialmente a temperatura $T_1 = 0^\circ\text{C}$ e $T_2 = 100^\circ\text{C}$, rispettivamente, sono isolati termicamente dall'ambiente esterno ed isolati tra di loro. Ad un certo istante vengono posti a contatto termico pur rimanendo isolati dall'ambiente esterno, e raggiungono l'equilibrio termico. Calcolare:

- la temperatura finale dei due corpi; (3 punti)
- le variazioni di entropia del corpo 1 e 2; (3 punti)
- La variazione di entropia dell'universo termodinamico (i due corpi + l'ambiente) dallo stato in cui i due corpi sono in equilibrio termico tra di loro allo stato in cui questi si trovano dopo che, a causa dell'imperfetta tenuta dell'isolamento termico, i due blocchi raggiungono l'equilibrio termico anche con l'ambiente che si trova ad una temperatura, **che si assume costante**, di $T_a = 25^\circ\text{C}$. (4 punti)

Soluzione

Per evitare facili errori, siccome si debbono calcolare delle variazioni di entropia, conviene lavorare esclusivamente con i Kelvin, trasformando dall'inizio i gradi Celsius in Kelvin. La temperatura finale si trova da un bilancio termico (che incidentalmente è valido anche con i gradi Celsius):

$$m_1 c_1 (T_f - T_1) + m_2 c_2 (T_f - T_2) = 0 \rightarrow T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = 355.3 \text{ K.}$$

La variazione di entropia dei due corpi vale:

$$\Delta S_1 = m_1 c_1 \ln \frac{T_f}{T_1} = 101.3 \text{ J/K} ; \Delta S_2 = m_2 c_2 \ln \frac{T_f}{T_2} = -86.9 \text{ J/K.}$$

Nella seconda trasformazione le variazioni di entropia sono:

$$\Delta S'_1 = m_1 c_1 \ln \frac{T_a}{T_f} = -67.6 \text{ J/K} ; \Delta S'_2 = m_2 c_2 \ln \frac{T_a}{T_f} = -311.6 \text{ J/K.}$$

La variazione di entropia dell'ambiente vale:

$$\Delta S_a = \frac{Q_a}{T_a}$$

ove Q_a è il calore trasferito dai due corpi all'ambiente uguale a:

$$Q_a = m_1 c_1 (T_f - T_a) + m_2 c_2 (T_f - T_a) = Q_a = 124 \text{ J/K.}$$

Da cui si ottiene $\Delta S_a = 414.5 \text{ J/K}$ La variazione di entropia dell'universo termodinamico vale $\Delta S_U = \Delta S'_1 + \Delta S'_2 + \Delta S_a = 35 \text{ J/K}$ positiva come deve essere per tutte le trasformazioni spontanee di un sistema isolato.