

8. PROBLEMI DI TERMODINAMICA 1ª parte

Problema 8.1

Una quantità di 1,25 l di acqua distillata alla temperatura $T_1=80\text{ }^{\circ}\text{C}$ è collocata all'interno di un recipiente isolato termicamente dall'ambiente. In questo recipiente viene immerso un cubo di rame di massa $m_{\text{Cu}}=200\text{ g}$ alla temperatura $T_2=20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Determinare la temperatura d'equilibrio tra l'acqua ed il cubo di rame sapendo che i calori specifici dell'acqua e del rame sono rispettivamente uguali a $c_{\text{acq}}=4186,8\text{ J/kg}\times\text{K}$ e $c_{\text{Cu}}=703\text{ J/kg}\times\text{K}$.

Soluzione

Indichiamo con $m_1=1,5\text{ kg}$ ($\rho_{\text{acq}}=10^3\text{ kg/m}^3$) la massa di acqua inizialmente a temperatura T_1 . Dato che il processo di scambio di calore tra l'acqua ed il cubo di rame avviene all'interno di un contenitore a pareti adiabatiche, non ci sono scambi di calore con l'ambiente esterno, per cui deve valere la seguente relazione tra le quantità di calore scambiate:

$$m_1 c_{\text{acq}} (\vartheta - T_1) + m_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}} (\vartheta - T_2) = 0$$

dove ϑ indica la temperatura di equilibrio finale raggiunta dai due corpi. Come ci si aspetta la quantità di calore ceduta dall'acqua è negativa, mentre quella assorbita dal cubo di rame è positiva. Dalla precedente equazione si ottiene il valore della temperatura di equilibrio finale che risulta:

$$\vartheta = \frac{m_1 c_{\text{acq}} T_1 + m_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}} T_2}{m_1 c_{\text{acq}} + m_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}}} \approx 352\text{ K},$$

avendo avuto cura di trasformare in gradi Kelvin i valori delle temperature iniziali dei due corpi. Trasformando in gradi Celsius la temperatura di equilibrio si ha $\vartheta=70\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Problema 8.2

Due quantità di acqua distillata di massa $m_1=2$ kg e $m_2=4$ kg vengono miscelate in un recipiente adiabatico. Determinate la temperatura di equilibrio raggiunta sapendo che quelle iniziali valevano per la massa m_1 ed m_2 rispettivamente $T_1=90$ °C e $T_2=12$ °C.

Soluzione

Dato che il contatto termico tra le due masse d'acqua avviene in un contenitore adiabatico, si ha che la relazione tra gli scambi di calore deve essere:

$$m_1(\vartheta - T_1) + m_2(\vartheta - T_2) = 0$$

Nella relazione precedente non compaiono i calori specifici essendo le due sostanze uguali ed, inoltre, ϑ indica la temperatura d'equilibrio raggiunta dal sistema. Esplicitando rispetto a ϑ si ottiene:

$$\vartheta = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} \approx 311 \text{ K} = 38 \text{ °C}.$$

La quantità di calore scambiato è uguale a:

$$|Q_1| = Q_2 = m_2 c_{H_2O} (\vartheta - T_1) \approx 435 \text{ kJ}.$$

Problema 8.3

Determinare la quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di una massa di ghiaccio $m_{gh}=200$ g da $T_1=-20$ °C a $T_2= 80$ °C.

Soluzione

Il valore della quantità di calore necessario per portare la massa di ghiaccio ($m_{gh}=0,2$ kg) al punto di fusione, fonderlo per poi portare l'acqua risultante ($m_{H_2O}=0,2$ kg) ad avere la temperatura finale $T_2=80$ °C si ricava dalla seguente relazione:

$$Q = m_{gh}c_{gh}(T_f - T_1) + m_{gh}\lambda_f + m_{H_2O}c_{H_2O}(T_2 - T_f)$$

Nella precedente relazione $T_f = 273$ K e $\lambda_f = 3,3 \times 10^5$ J/kg sono rispettivamente la temperatura ed il calore latente di fusione del ghiaccio.

Sostituendo i valori numerici delle grandezze fisiche nella relazione precedente, si ottiene $Q \approx 140$ kJ.

Problema 8.4

Due moli di gas perfetto monoatomico si espandono seguendo una trasformazione adiabatica reversibile da una pressione e volume iniziale rispettivamente uguali a $p_A=5$ atm e $V_A=12$ l. Sapendo che il volume finale è $V_B=30$ l, trovare la pressione finale del gas e le sue temperature iniziali e finali. Si calcoli infine il lavoro eseguito dal gas.

Soluzione

Iniziamo col trasformare nelle unità del sistema internazionale i valori delle grandezze fornite dal problema. Si ha quindi $p_A \approx 5 \times 10^5$ Pa, $V_A \approx 12 \times 10^{-3}$ m³ e $V_B \approx 30 \times 10^{-3}$ m³. Dato che il gas esegue una trasformazione adiabatica si ha che deve valere:

$$pV^\gamma = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma.$$

Essendo il gas perfetto monoatomico si ha $\gamma=5/3$, per cui:

$$p_B = p_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\gamma \approx 1,1 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Dalla equazione dei gas perfetti si ricavano subito le temperature del gas nello stato iniziale e finale. Si ha:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} \approx 361 \text{ K} \quad ; \quad T_B = \frac{p_B V_B}{nR} \approx 199 \text{ K}.$$

Il lavoro eseguito dal gas si ricava dal primo principio della termodinamica ricordando che in una trasformazione adiabatica $Q=0$. Per cui:

$$W = -\Delta U = n c_v (T_B - T_A) \approx 4 \text{ kJ}.$$

Il lavoro è positivo come ci aspettiamo dato che il gas si espande.

Problema 8.5

Il volume di una mole di gas biatomico contenuto in un cilindro con pistone a pareti adiabatiche si espande fino ad avere un volume V_B doppio del volume iniziale $V_A=0,3$ l. Sapendo che la temperatura iniziale del gas è $T_A= 300$ K, trovare la sua temperatura finale, i valori della pressione iniziale e finale ed il lavoro eseguito dal gas.

Per gli stessi valori dei volumi iniziale e finale, quale sarebbero i valori della pressione iniziale e finale ed il lavoro fatto dal gas se invece di espandersi seguendo una trasformazione adiabatica ne seguisse una isoterma alla temperatura iniziale T_A ?

Soluzione

Essendo l'espansione del gas adiabatica, si ha che valgono le seguenti relazioni tra T e V :

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} \approx 227 \text{ K.}$$

I valori della pressione iniziale e finale del gas si trovano subito utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti. Risulta allora che:

$$p_A = \frac{nRT_A}{V_A} \approx 8,3 \times 10^6 \text{ Pa} = 8,3 \text{ MPa} \quad ; \quad p_B = \frac{nRT_B}{2V_A} \approx 3,1 \text{ MPa.}$$

Per calcolare il lavoro eseguito dal gas si utilizzare il 1° principio della termodinamica ($Q=0$ per una trasformazione termodinamica) applicato ad una trasformazione adiabatica ottenendo:

$$W = -\Delta U = nc_v(T_B - T_A) = \frac{5}{2} nR(T_B - T_A) \approx 1,5 \text{ kJ.}$$

Nel caso in cui il gas segua una trasformazione isoterma nella sua espansione andando dal volume iniziale V_A al volume finale $V_B=2V_A$ alla temperatura iniziale T_A , si ha:

$$p_B = \frac{nRT_A}{2V_B} \approx 4,1 \text{ Mpa,}$$

mentre la pressione p_A rimane quella precedentemente trovata. Il lavoro eseguito dal gas nella espansione isoterma è pertanto:

$$W = nRT_A \ln 2 \approx 1,7 \text{ kJ.}$$

Problema 8.6

Alla temperatura di 0°C ed alla pressione $p_0=1$ atm, una certa quantità di idrogeno molecolare occupa un volume $V_0= 1,5$ litri. Ad un certo istante il gas viene messo a contatto con una sorgente di calore ad una certa temperatura. Se si aspetta un tempo sufficiente, il volume del gas raddoppia e la sua pressione rimane quella iniziale.

Determinare:

1. la temperatura finale del gas;
2. la variazione di energia interna del gas;
3. la variazione di entropia del gas.

Soluzione

La trasformazione descritta nel testo del problema è una trasformazione irreversibile per la quale possiamo applicare le equazioni di stato solo per gli stati iniziale e finale, in condizioni di equilibrio. Inoltre si possono utilizzare le relazioni note che forniscono i valori della variazione della energia interna e della entropia perché queste sono funzioni di stato. Infine trattiamo l'idrogeno molecolare come un gas perfetto biatomico.

L'uso dell'equazione di stato permette di calcolare subito la temperatura finale del gas:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_0 2V_0}{T_1} \quad \rightarrow \quad T_1 = 2T_0 = 546 \text{ K},$$

con $T_0=273$ K. La variazione di energia interna è $\Delta U = n c_v \Delta T$. Per utilizzarla si deve ricavare prima il numero di moli che è uguale a $n = (p_0 V_0)/(RT_0) \approx 0,07$ moli. Di conseguenza si ha:

$$\Delta U = n \frac{5}{2} R \Delta T \approx 400 \text{ J}.$$

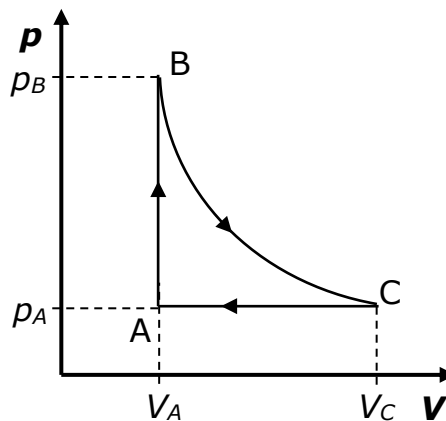
Essendo infine quella descritta dal problema una trasformazione isobara si trova che:

$$\Delta S = n c_v \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) \approx 1 \text{ J/K}$$

Problema 8.7

Una mole di idrogeno, da considerarsi come un gas ideale, compie il ciclo reversibile rappresentato in figura partendo dallo stato termodinamico A caratterizzato da una pressione $p_A=1 \text{ atm}$ e da una temperatura $T_A=273 \text{ K}$. La trasformazione AB è una isocora, BC una adiabatrica ed infine CA una isobara. Sapendo che la variazione di entropia nella trasformazione isocora è $\Delta S_{AB}=50 \text{ J/K}$ e considerando costanti i calori specifici rispetto alla variazione di temperatura, si determini:

1. la quantità di calore assorbita dal gas durante il ciclo termodinamico;
2. il lavoro svolto durante il ciclo termodinamico;
3. il rendimento η del ciclo termodinamico;
4. il rendimento η_c di una macchina di Carnot funzionante tra le temperature estreme raggiunte nel ciclo termodinamico precedentemente studiato.



Soluzione

Trasformiamo dapprima la pressione nelle unità del sistema internazionale ottenendo $p_A=1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$. Inoltre ricordiamo che l'idrogeno deve essere considerato un gas biatomico ideale per cui $c_v=(5/2)R$, $c_p=(7/2)R$ e $\gamma=1,4$.

Per rispondere alla 1ª domanda si consideri il valore della variazione d'entropia nella trasformazione isocora AB, ricorrendo all'uso della seguente relazione:

$$\Delta S = S_B - S_A = nc_v \ln \frac{T_B}{T_A} = nc_v \ln \frac{p_B}{p_A},$$

da cui si ricava subito:

$$p_B = p_A \exp\left[\frac{\Delta S}{nc_v}\right] \approx 1,12 \times 10^6 \text{ Pa} \text{ e } T_B = T_A \exp\left[\frac{\Delta S}{nc_v}\right] \approx 3024 \text{ K}.$$

Dalla equazione di stato dei gas ideali si ha $V_A = \frac{nRT_A}{p_A} \approx 22,4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. Applicando poi una delle equazioni valide per le trasformazioni adiabatiche si ha:

$$T_C = T_B \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} \approx 1520 \text{ K}.$$

Con le grandezze ora trovate è possibile calcolare la quantità di calore assorbita dal gas che avviene solo durante la trasformazione isocora AB. Si ha:

$$Q_A = nc_v(T_B - T_A) \approx 57,2 \text{ KJ}$$

Il lavoro totale eseguito durante l'intero ciclo è dato da $W = W_{BC} + W_{CA}$, avendo indicato con W_{BC} e W_{CA} rispettivamente il lavoro svolto nella trasformazione adiabatica BC ed in quella isobara CA. La relazione precedente si scrive pertanto nel seguente modo:

$$W = n c_v (T_C - T_B) + n R (T_A - T_C) \approx (31,7 - 10,36) \text{ KJ} \approx 20,9 \text{ KJ}$$

dove si è posto nella trasformazione adiabatica $W = -\Delta U_{BC}$.

Il rendimento del ciclo termodinamico si trova facilmente applicando la relazione:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} \approx 0,37.$$

Essendo le temperature estreme raggiunte durante il ciclo uguali a $T_B=3024 \text{ K}$ e $T_A=273 \text{ K}$, si ha per il rendimento di una macchina di Carnot che operasse tra queste due temperature il valore:

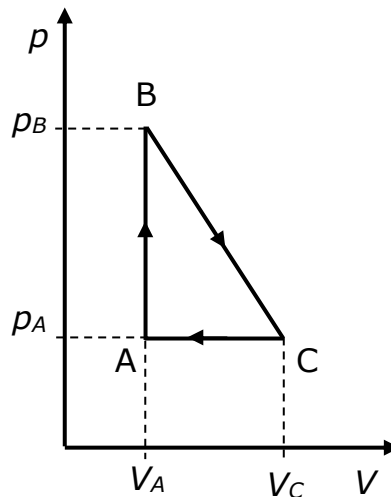
$$\eta_C = 1 - \frac{T_A}{T_B} \approx 0,91.$$

Problema 8.8

Una mole di gas biatomico ideale percorre il ciclo termodinamico in figura che è composto dalle seguenti tre trasformazioni reversibili: AB una trasformazione isocora; BC una trasformazione in cui la pressione varia linearmente con il volume; CA una trasformazione isobara.

Sapendo che la pressione $p_A = 2 \text{ atm}$ e $V_A = 2 \text{ litri}$ e che $p_B/p_A = 2$ e $V_C/V_A = 1,5$, si calcoli:

1. Il rendimento η del ciclo termodinamico;
2. La quantità di calore ceduto dal gas durante la trasformazione BC;
3. La variazione di entropia nella trasformazione BC;



Soluzione

Trasformiamo i valori noti della pressione e del volume nel sistema internazionale. $p_A = 2,013 \times 10^5 \text{ Pa}$, e $V_A = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. Dal testo del problema si trova che $p_B = 4,026 \times 10^5 \text{ Pa}$ e $V_C = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

Come si vede dalla figura, la temperatura T_A risulta minore della T_B . I loro valori si trovano utilizzando l'equazione di stato dei gas ideali, ottenendo:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} \approx 48 \text{ K} \quad ; \quad T_B = \frac{p_B V_B}{nR} \approx 97 \text{ K}$$

Per il 1° principio della termodinamica si ricava il calore scambiato nella trasformazione AB che vale:

$$Q_{AB} = \Delta U = n c_v (T_B - T_A) \approx 1 \text{ KJ}$$

Questa è la sola quantità di calore assorbita al gas. Il lavoro eseguito durante l'intero ciclo si trova come l'area del triangolo ABC. Si può scrivere:

$$W_{TOT} = \frac{(V_C - V_A) \times (p_B - p_A)}{2} \approx 100 \text{ J}$$

Il rendimento termodinamico del ciclo è dato da:

$$\eta = \frac{W_{TOT}}{Q_{AB}} = 0,1.$$

Per calcolare ora la quantità di calore ceduta dal gas durante la trasformazione BC utilizziamo il 1° principio della termodinamica che si scrive nel seguente modo:

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC}.$$

La variazione di energia interna si trova dalla relazione $\Delta U_{BC} = nc_v(T_C - T_B)$. Il valore di T_C si trova a sua volta dalla equazione di stato dei gas ideali, ottenendo:

$$T_C = \frac{p_A V_C}{nR} \approx 73 \text{ K}.$$

Quindi $\Delta U_{BC} \approx -500 \text{ J}$. Il lavoro W_{BC} è dato da $W_{BC} = W_{TOT} + p_A(V_C - V_A) \approx 300 \text{ J}$. Da ciò segue che $Q_{BC} \approx -200 \text{ J}$.

Per il calcolo della variazione di entropia nella trasformazione BC basta applicare la ben nota relazione:

$$S_C - S_B = nc_v \ln \frac{T_C}{T_B} + nR \ln \frac{V_C}{V_B} \approx -2,3 \text{ J/K}.$$

Problema 8.9

Nello stato iniziale 2 moli di gas ideale occupano un volume $V_0 = 10 \text{ dm}^3$ di un cilindro munito di pistone con la base circolare di raggio $r = 10 \text{ cm}$ ed esercitano una pressione $p_0 = 1,5 \text{ atm}$. Il gas esegue una trasformazione reversibile durante la quale assorbe una quantità di calore Q e si espande sollevando di una altezza $h = 70 \text{ cm}$ un corpo di massa $m = 8 \text{ kg}$. Alla fine dell'espansione il gas raggiunge una temperatura $T = 50^\circ\text{C}$.

Sapendo che la quantità di calore Q assorbita dal gas è pari ad $1/100$ di quella necessaria alla fusione di una massa di ghiaccio pari a $m_g = 120,4 \text{ g}$ posta inizialmente alla temperatura $t_g = -1^\circ\text{C}$, si calcoli:

1. il calore specifico del gas a volume costante, c_v ;
2. il calore specifico del gas a pressione costante, c_p ;
3. la variazione di entropia nella trasformazione termodinamica considerata.

Soluzione

Utilizzando il primo principio della termodinamica si ha:

$$\Delta U = Q - W = nc_v(T - T_0),$$

dove $T = 323 \text{ K}$ è la temperatura finale del gas, T_0 quella iniziale, c_v il calore specifico a volume costante ed n il numero di moli. Ricaviamo ora i valori di Q e W .

La quantità di calore Q' necessaria per fondere una massa m_g di ghiaccio si ottiene dalla espressione:

$$Q' = m_g c_g \Delta T + m_g \lambda_f$$

dove c_g e λ_f sono rispettivamente il calore specifico del ghiaccio ed il suo calore latente di fusione. Essendo la temperatura iniziale del ghiaccio pari a $t_g = -1^\circ\text{C}$, segue che $\Delta T = 1^\circ\text{C}$, per cui si ricava $Q' \approx 40 \text{ kJ}$. Di conseguenza il calore assorbito dal gas durante la sua espansione è $Q = Q' / 100 \approx 400 \text{ J}$. Il lavoro W fatto dal gas è quello necessario per innalzare la massa m della quota h . Cioè $W = mgh \approx 55 \text{ J}$.

Infine la temperatura T_0 si trova dalla equazione dei gas perfetti, $T_0 = \frac{V_0 p_0}{nR} \approx 91,5 \text{ K}$.

E' ora possibile calcolare il calore specifico del gas a volume costante. Si ottiene:

$$c_v = \frac{(Q - W)}{n(T - T_0)} \approx 0,745 \text{ J/K}\cdot\text{mole}$$

Dalla relazione di Mayer si ha subito che $c_p = R + c_v \approx 9,1 \text{ J/K}\cdot\text{mole}$.

La variazione di entropia si calcola utilizzando la relazione generale valida per i gas ideali e per una trasformazione reversibile dallo stato termodinamico iniziale a quello finale considerati dal problema:

$$\Delta S = nc_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right).$$

Il volume finale si calcola dalla relazione:

$$V = V_0 + h\pi r^2 \approx 0,032 \text{ m}^3.$$

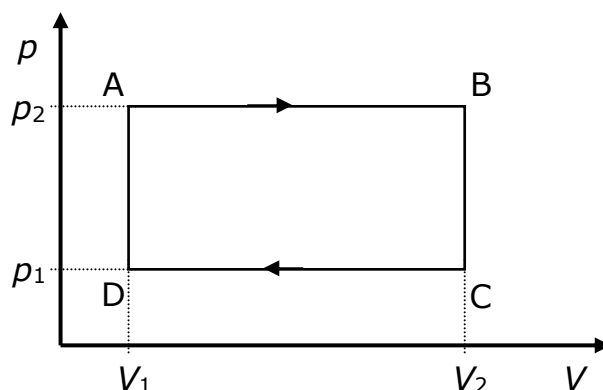
Sostituendo i valori numerici si trova $\Delta S \approx 21 \text{ J/K}$.

Problema 8.10

Una mole di gas perfetto monoatomico esegue il ciclo termodinamico ABCDA mostrato in figura e composto da due trasformazioni isobare reversibili (AB e CD) e da due trasformazioni isocore reversibili (BC e DA). Gli stati termodinamici A e C sono sulla stessa isoterma a temperatura $T_A=300$ K. La temperatura dello stato B risulta $T_B=500$ K e la differenza di pressione è $\Delta p=3$ atm.

In queste condizioni si risponda alle seguenti domande:

1. quale è il lavoro svolto nell'intero ciclo ABCDA ?
2. quanto vale il rendimento termodinamico del ciclo ABCDA ?
3. se si unissero gli stati termodinamici A e C mediante una trasformazione isoterma reversibile, quale sarebbe dei due cicli ABCA e ACDA quello con rendimento maggiore?

**Soluzione**

Nella trasformazione isocora BC è valida la seguente relazione:

$$\frac{T_C}{T_B} = \frac{T_A}{T_B} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Essendo dai dati del problema $\Delta p = p_2 - p_1 = 3,04 \times 10^5$ Pa si ha:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{p_1}{p_1 + \Delta p} \rightarrow p_1 = \frac{T_A}{T_B - T_A} \Delta p \approx 4,56 \times 10^5 \text{ Pa},$$

da cui si ricava subito $p_2 \approx 7,6 \times 10^5$ Pa. Dalla equazione di stato dei gas perfetti applicata allo stato termodinamico A si ottiene:

$$V_1 = \frac{nRT_A}{p_2} \approx 3,28 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

L'equazione di stato applicata allo stato termodinamico B fornisce $V_2 \approx 5,5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. Abbiamo così calcolato tutti i valori delle grandezze necessarie alla determinazione del lavoro per l'intero ciclo ABCDA che risulta essere uguale a:

$$W_T = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) \approx 666 \text{ J}.$$

Per determinare la quantità di calore assorbito dal ciclo termodinamico, osserviamo che esso viene fornito al sistema solo durante le trasformazioni AB e DA. Infatti la temperatura

dello stato D risulta $T_D = \frac{p_1 V_1}{nR} \approx 180$ K. Quindi si può scrivere:

$$Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{DA} = nc_p(T_B - T_A) + nc_v(T_A - T_D) \approx 5,66 \text{ kJ}.$$

Il rendimento del ciclo termodinamico ABCDA è uguale a:

$$\eta = \frac{W_T}{Q_{ass}} \approx 0,12.$$

Uniamo ora, nel piano di Clapeyron, gli stati termodinamici A e C mediante una trasformazione isoterma ed analizziamo i due cicli ABCA e ACDA.

Ciclo ABCA: in questo ciclo il lavoro è dato da:

$$p_2(V_2 - V_1) + nRT_A \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \approx 389 \text{ J}.$$

Il calore assorbito dal sistema è in questo caso dato da $Q_{ass} = Q_{AB} \approx 4,2 \text{ kJ}$. Quindi il rendimento del ciclo termodinamico ABCA è:

$$\eta_{ABCA} = \frac{W_{ABCA}}{Q_{AB}} \approx 0,09.$$

Ciclo ACDA: per questo ciclo il lavoro svolto si trova subito dalla relazione:

$$W_{ACDA} = W_T - W_{ABCA} = 280 \text{ J}.$$

La quantità di calore assorbito vale:

$$Q_{ass} = Q_{AC} + Q_{DA} = W_{AC} + Q_{DA} = nRT_A \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + Q_{DA} \approx 2,8 \text{ kJ}$$

Pertanto il rendimento termodinamico per questo ciclo è uguale a:

$$\eta_{ACDA} = \frac{W_{ACDA}}{W_{AC} + Q_{DA}} \approx 0,1.$$

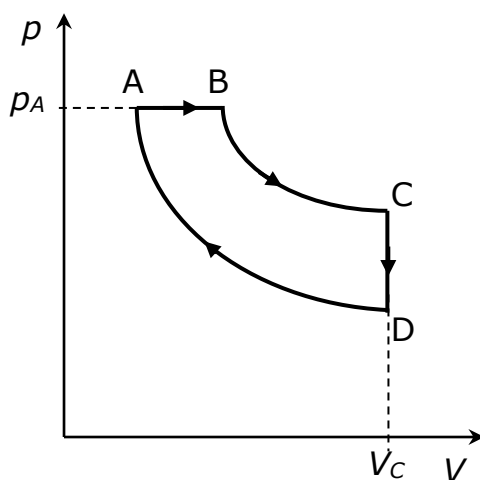
E' facile concludere che il rendimento maggiore lo si ottiene per il ciclo ACDA.

Problema 8.11

Un gas ideale monoatomico percorre il ciclo termodinamico descritto nella figura che è composto dalle seguenti trasformazioni reversibili: AB una trasformazione isobara; BC una trasformazione isoterma a temperatura T_2 ; CD una trasformazione isocora; DA una trasformazione isoterma a temperatura T_1 . Sapendo che la pressione nello stato A è $p_A = 10$ atm, il numero di moli $n=5$, $V_B=3V_A$, $V_C=60$ litri ed infine che $T_1=27^\circ\text{C}$, si determinino:

1. il lavoro compiuto durante il ciclo termodinamico;
2. il rendimento termodinamico della macchina termica;
3. la quantità di ghiaccio che alla temperatura di 0°C fonderebbe utilizzando una quantità di calore eguale a quella assorbita dal gas durante il ciclo termodinamico sopra descritto.

Nota: si assumi che la macchina termica funzioni con due sole sorgenti alla temperatura T_1 e T_2 .

**Soluzione**

Prima di iniziare a risolvere il problema è utile, per non commettere errori, trasformare i valori delle grandezze fisiche assegnate dal problema nel sistema internazionale. Si ha:

$$p_A = 10 \text{ atm} = 1,013 \times 10^6 \text{ Pa} \quad ; \quad V_C = 60 \text{ l} = 60 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \quad ; \quad T_1 = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}$$

Il lavoro totale compiuto dal gas, W_{TOT} , lungo l'intero ciclo termodinamico è dato dalla seguente relazione:

$$W_{TOT} = W_{AB} + W_{BC} + W_{DA}.$$

I vari termini si esplicitano nel seguente modo:

$$W_{AB} = p_A(V_B - V_A) = 2p_A V_A \quad ; \quad W_{BC} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) \quad ; \quad W_{DA} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right).$$

L'equazione di stato dei gas ideali applicata allo stato termodinamico A fornisce:

$$V_A = \frac{nRT_1}{p_A} \approx 12 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Applicando di nuovo l'equazione di stato dei gas ideali agli stati termodinamici B e C legati dalla trasformazione isoterma BC si trova:

$$p_A V_B = p_C V_C \Rightarrow p_C = \frac{3p_A V_A}{V_C} \approx 62,3 \times 10^5 \text{ Pa} \quad ; \quad T_2 = \frac{3p_A V_A}{nR} \approx 900 \text{ K}$$

Si sono quindi determinate tutte le grandezze necessarie per il calcolo del lavoro W_{TOT} . Pertanto si ottiene:

$$W_{AB} = 2p_A V_A \approx 24,9 \text{ kJ} ; W_{BC} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) \approx 18,2 \text{ kJ} ; W_{DA} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right) \approx -19,7 \text{ kJ}$$

Il valore del lavoro totale ottenuto è $W_{TOT} = 23,4 \text{ kJ}$.

Il rendimento della macchina termica è dato in generale dalla relazione $\eta = W_{TOT}/Q_A$ dove Q_A è la quantità di calore assorbito. La quantità di calore è assorbita dal gas durante le due trasformazioni AB e BC. In particolare, essendo la trasformazione BC una isoterma, $\Delta U = 0$ e quindi $Q_{BC} = W_{BC} = 18,2 \text{ kJ}$. La trasformazione AB è invece una isobara. La quantità di calore scambiata è allora data dal 1° principio della termodinamica da:

$$Q_{AB} = nc_p(T_2 - T_1) = nc_v(T_2 - T_1) + W_{AB} \approx 62,3 \text{ kJ},$$

essendo $c_v = \frac{3}{2}R$ e $c_p = \frac{5}{2}R$.

La quantità di calore assorbita risulta essere uguale a $Q_A = 80,5 \text{ kJ}$. A questo punto è possibile calcolare il rendimento che vale:

$$\eta = \frac{W_{TOT}}{Q_A} = \frac{23,4}{80,5} \approx 0,29 \quad \text{cioè} \quad \eta \approx 29\%.$$

Il processo di fusione del ghiaccio è un passaggio di stato, e, da un punto di vista termodinamico, una trasformazione isoterma. Si può pertanto porre:

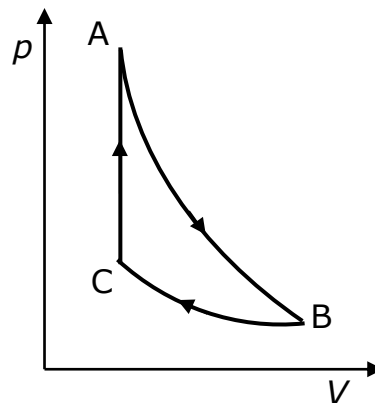
$$Q_A = m\lambda_f \quad \Rightarrow \quad m = \frac{Q_A}{\lambda_f} \approx \frac{80,5 \times 10^3 \text{ J}}{3,3 \times 10^5 \text{ J/Kg}} \approx 0,24 \text{ kg}.$$

Problema 8.12

Un gas ideale possiede un calore specifico a volume costante $c_v = (5/3)R$ ed esegue il ciclo termodinamico composto da tre trasformazioni reversibili AB, BC, CA. La trasformazione AB è una trasformazione adiabatica, la BC una isoterma ed, infine, la CA una isocora che riporta il gas nello stato termodinamico iniziale A. Si misura che la relazione che esiste tra i volumi negli stati termodinamici A e B sono nella relazione $V_B = 5V_A$.

Si risponda ai seguenti quesiti:

1. Si raffiguri nel piano di Clapeyron il ciclo termodinamico;
2. si determini il rapporto tra la temperatura massima e minima raggiunta dal gas durante l'intero ciclo termodinamico;
3. si calcoli il rendimento termodinamico della macchina;
4. si calcoli il rendimento di una macchina funzionante come un ciclo di Carnot ideale che utilizzi due sorgenti di calore operanti alle temperature massima e minima trovate in precedenza.



Soluzione

Il ciclo termodinamico subito dal gas è riportata nella Figura. Si nota immediatamente che la temperatura del gas è massima in A. La temperatura minima è invece quella che caratterizza la isoterma BC. E' allora facile ottenere il rapporto tra queste due temperature sfruttando l'equazione di stato valida per le trasformazioni termodinamiche nella forma:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_A}{T_B} = \frac{V_B^{\gamma-1}}{V_A^{\gamma-1}}.$$

Ricordando che $c_p = c_v + R = \frac{8}{3}R$, si ha $\frac{T_A}{T_B} \approx 2,6$. Per trovare il rendimento della macchina termica troviamo il lavoro compiuto dal gas e la quantità di calore assorbita. Osservando il ciclo si ha per il lavoro la seguente relazione:

$$W_{TOT} = W_{AB} + W_{BC} = -nc_v(T_B - T_A) + nRT_A \ln \frac{V_C}{V_B},$$

mentre il gas assorbe calore solo durante la trasformazione isocora CA. Allora si ha:

$$Q_a = nc_v(T_A - T_B)$$

Conoscendo il lavoro e la quantità di calore assorbita dal gas si è in grado di calcolare il rendimento della macchina termica. Si ottiene:

$$\eta = \frac{W_{TOT}}{Q_a} = 1 - \frac{3}{5(T_A/T_B - 1)} \ln \left(\frac{V_B}{V_C} \right) \approx 0,41$$

Per il ciclo di Carnot operante tra T_A e T_B si ha subito $\eta_c \approx 0,62$.

Problema 8.13

Una mole di gas ideale è contenuta in un contenitore cilindrico verticale munito di un pistone di massa $m=6,6$ kg. Partendo da un volume iniziale del gas $V_i=20$ l e da una pressione $p_i=1,3$ atm, il gas riceve una quantità di calore $Q=500$ J da una sorgente esterna. In ragione di ciò, il gas si espande raggiungendo una temperatura finale $T_f=50^\circ\text{C}$, sollevando il pistone di una quota $h=70$ cm.

Si determini:

1. la temperatura iniziale del gas;
2. il valore del calore specifico del gas a volume costante, c_V ;
3. il valore del calore specifico del gas a pressione costante, c_p ;
4. la variazione di energia interna del gas;
5. il valore del lavoro eseguito dal gas.

Soluzione

Per una qualsiasi trasformazione termodinamica vale il 1° principio della termodinamica: $Q-W=\Delta U$.

Inoltre, trattandosi di gas ideale, vale l'equazione di stato che permette di determinare il valore della temperatura iniziale del gas:

$$T_i = \frac{p_i V_i}{nR} \approx 313 \text{ K.}$$

Dal 1° principio della termodinamica si ha:

$$c_V = \frac{Q - W}{n(T_f - T_i)}.$$

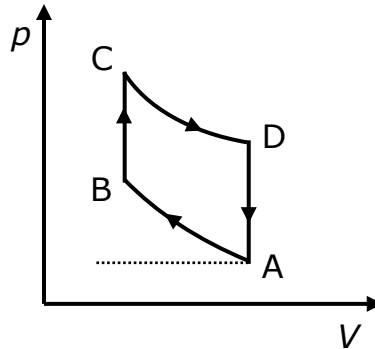
Ora il lavoro è uguale alla variazione di energia potenziale del pistone $W=mgh \approx 45,3$ J. Trasformando tutti i valori nel S.I. si ha $c_V \approx 45,5$ J/K×mole.

Ricordando che $c_p = c_V + R$ si ha $c_p \approx 53,8$ J/K×mole. Infine utilizzando i valori trovati si determina il valore della variazione di energia interna che vale: $\Delta U \approx 453$ J.

Problema 8.14 (Problema d'esame: 10 punti)

Un motore a scoppio che è assimilabile ad un ciclo di Otto ideale, funziona con una mole di gas biatomico. Si misura che il motore sviluppa una potenza $P=10$ kW compiendo 500 cicli al minuto. Sapendo che il suo rendimento è $\eta=0,3$ e che la temperatura iniziale della compressione adiabatica vale $T_A=20^\circ\text{C}$, si calcolino:

1. le temperature T_B , T_C , T_D nei rispettivi stati termodinamici B, C, D (vedi figura); (9 punti)
2. la quantità di calore assorbito in un singolo ciclo. (1 punto)

**Soluzione**

Iniziamo con il calcolare dalla potenza il lavoro eseguito dal gas per ogni ciclo. Il tempo di percorrenza di un ciclo si ricava dal numero di cicli per minuto c_m che vale:

$$\nu = \frac{c_m}{60} \approx 8,33 \text{ Hz},$$

da cui si ricava che il tempo per effettuare un ciclo è $\Delta t = \nu^{-1} \approx 0,12 \text{ s}$.

Allora, essendo per definizione la potenza una energia per unità di tempo si ha che:

$$W_{TOT} = P \times \Delta t = 1,2 \text{ kJ.} \quad \text{con} \quad W_{TOT} = W_{CD} + W_{AB}.$$

Dato che in una trasformazione adiabatica $Q=0$, si ha anche:

$$W_{TOT} = -(\Delta U_{CD} + \Delta U_{AB}) = nc_v [T_C - T_D - T_B + T_A]$$

D'altro canto il rendimento del ciclo di Otto si scrive come:

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} \quad \rightarrow \quad T_C - T_B = \frac{T_D - T_A}{1 - \eta}.$$

Sostituendo nella espressione di W_{TOT} si ha:

$$W_{TOT} = \eta \frac{nc_v}{1 - \eta} (T_D - T_A) \quad \rightarrow \quad T_D = 428 \text{ K}$$

Conoscendo i valori di T_A e T_D , possiamo calcolare la quantità di calore ceduto:

$$Q_c = Q_{DA} = nc_v (T_A - T_D) \approx -2,8 \text{ kJ}.$$

La quantità di calore assorbita si può trovare in due modi del tutto equivalenti:

$$Q_A = W_{TOT} - Q_C = 4 \text{ kJ}, \quad \text{e} \quad Q_A = nc_v(T_C - T_B)$$

Dalla seconda si ha:

$$T_C - T_B = \frac{Q_A}{nc_v} \approx 192 \text{ K}.$$

Si ricordi ora che il rendimento del ciclo di Otto si può scrivere anche come:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}.$$

Le temperature ed i volumi nella espansione adiabatica CD sono legati dalla relazione:

$$T_C V_1^{\gamma-1} = T_D V_2^{\gamma-1}.$$

Eseguite le opportune sostituzioni si ricava:

$$T_C = T_D r^{\gamma-1} = T_D \frac{1}{1-\eta} \approx 610 \text{ K}.$$

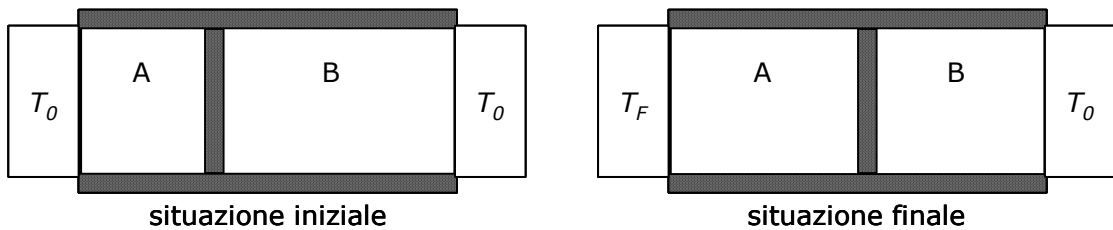
Per differenza si determina infine il valore di $T_B \approx T_C - 192 \approx 418 \text{ K}$.

Problema 8.15 (Problema d'esame 10 punti)

Un recipiente di volume $V_{tot}=20 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ è diviso in due parti A e B da un setto mobile privo di massa ed isolante. I due volumi V_A e V_B contengono rispettivamente $n_A=2$ moli ed $n_B=3$ moli di gas perfetto biatomico. Inizialmente entrambi i gas sono in equilibrio termodinamico e in contatto termico con due sorgenti di calore entrambe alla temperatura $T_0=300 \text{ K}$. Ad un certo istante il gas nella parte A viene posto in contatto con una sorgente di calore a temperatura $T_f=500 \text{ K}$ ed assorbe una quantità di calore pari a $Q_f=20.5 \text{ kJ}$. Il gas nella parte B rimane a contatto con la sorgente a temperatura T_0 .

Si determini:

1. pressione e volume dello stato iniziale e finale dei gas contenuti nelle due parti A e B del recipiente; (5 punti)
2. il calore scambiato dal gas B con la sorgente T_0 . (5 punti)

**Soluzione:**

Si scrivano le equazioni di stato per i due gas contenuti nelle parti A e B del recipiente:

$$p_A V_A = n_A R T_0 \quad ; \quad p_B V_B = n_B R T_0$$

Essendo il sistema all'equilibrio termodinamico, le pressioni p_A e p_B sono uguali. Ricordando che $V_A + V_B = V_{tot}$ e usando le precedenti equazioni di ottengono i valori dei volumi: $V_A = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ e $V_B = 12 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. Con questi valori dei volumi si trova subito la pressione dei due gas che vale $p_A = p_B = 6.23 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Per lo stato finale si procede nello stesso identico modo:

$$p_{A,f} V_{A,f} = n_A R T_f \quad ; \quad p_{B,f} V_{B,f} = n_B R T_0.$$

Di nuovo si ha $V_{A,f} + V_{B,f} = V_{tot}$ e $p_A = p_B = p_f$, si ottengono i valori dei volumi e della pressione dei due gas nello stato finale: $V_{A,f} = 10.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, $V_{B,f} = 9.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, $p_f = 7.87 \times 10^5 \text{ Pa}$.

La trasformazione che subisce il gas nella parte A è descritta dal 1° principio della termodinamica. Sia ha:

$$Q_A = Q_f = \Delta U_A + W_A \quad \rightarrow \quad Q_f = n_A c_V (T_f - T_0) + W_A$$

La trasformazione eseguita dal gas nella parte B è una isoterma per la quale si può scrivere:

$$Q_B = W_B.$$

Attenzione la trasformazione subita dal gas contenuto in B può essere, al massimo, considerata una isoterma irreversibile e il lavoro, non essendo una funzione di stato, non può essere calcolato con la relazione valida per le trasformazioni isoterme reversibili.

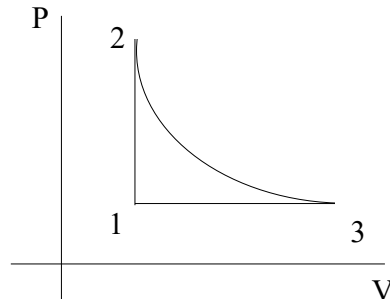
Il lavoro eseguito dal gas nella parte A è uguale a quello subito dal gas nella parte B. Per questo il lavoro totale del sistema verso l'esterno è nullo: $W_A + W_B = 0$. Combinando le due equazioni si ha:

$$Q_f = n_A c_V (T_f - T_0) - Q_B \quad \rightarrow \quad Q_B = \frac{5}{2} n_A R (T_f - T_0) - Q_f \cong -12.2 \text{ kJ}.$$

Problema 8.16 (Problema d'esame 10 punti)

Un sistema termodinamico composto da $n=10\text{mol}$ di gas perfetto monoatomico ($c_V=3R/2$) si trova nello stato iniziale 1, pressione $p_1=831.4\text{ Pa}$, e volume $V_1=30\text{m}^3$. Il sistema subisce le seguenti trasformazioni reversibili: (1→2) trasformazione isocora fino alla pressione $p_2=1108.5\text{Pa}$; (2→3) trasformazione isoterma; (3→1) trasformazione isobara che chiude il ciclo. Determinare:

- le condizioni termodinamiche del gas in ogni stato;
- il lavoro compiuto dal sistema in un ciclo;
- il rendimento del ciclo. (costante dei gas, $R=8.314\text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$).

**Soluzione**

Dalla equazione di stato di ottiene:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} \approx 300\text{ K} ; \quad T_2 = \frac{p_2 V_1}{nR} \approx 400\text{ K} ; \quad V_3 = \frac{nRT_2}{p_1} \approx 40\text{ m}^3.$$

Il lavoro eseguito in un ciclo vale:

$$W_{TOT} = W_{23} + W_{31} = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} + p_1(V_1 - V_3) \approx 1.3\text{ kJ}.$$

La quantità di calore assorbito in un ciclo dal gas è:

$$Q_{TOT} = Q_{12} + Q_{23} = nc_V(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_1} \approx 21.46\text{ kJ}.$$

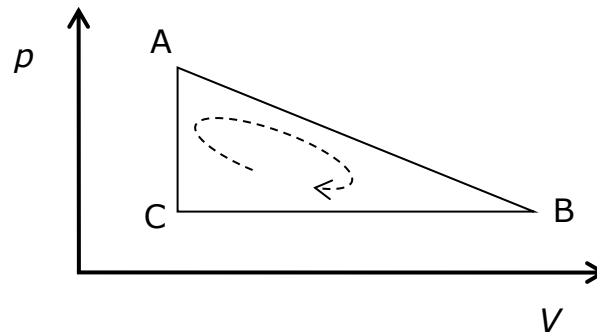
Il rendimento vale:

$$\eta = \frac{W_{TOT}}{Q_{TOT}} \approx 0.06.$$

Problema 8.17 (Problema d'esame 10 punti)

Una mole di gas perfetto biatomico compie il ciclo reversibile rappresentato sul piano di Clapeyron pV da un triangolo ABC in cui le trasformazioni BC e CA sono un'isobara e un'isocora, rispettivamente. Le pressioni valgono $p_C = 10^5$ Pa, $p_A = 4 \times 10^5$ Pa, e i volumi $V_C = 24.9 \times 10^{-3}$ m³ e $V_B = 83.1 \times 10^{-3}$ m³. Calcolare:

1. Il lavoro compiuto lungo la trasformazione AB;
2. La variazione di energia interna del gas lungo la trasformazione AB;
3. Il calore scambiato lungo la trasformazione AB;
4. Il rendimento del ciclo.

**Soluzione**

Le temperature, utilizzando la legge dei gas perfetti, sono $T_A = 1200$ K, $T_B = 1000$ K e $T_C = 300$ K.

Il lavoro scambiato lungo la trasformazione AB è l'area sotto il ciclo:

$$W_{AB} = -\frac{1}{2}(p_A + p_C)(V_B - V_C)$$

e vale $W_{AB} = 14.55$ KJ. La variazione di energia interna è:

$$\Delta U_{AB} = nc_v(T_B - T_A) \approx -4.16 \text{ KJ.}$$

Applicando il primo principio della termodinamica si ha:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} - W_{AB},$$

si ottiene che il lavoro scambiato vale $Q_{AB} = 10.39$ KJ, assorbito dal sistema.

Il sistema assorbe calore anche lungo la trasformazione CA

$$Q_{CA} = nc_v(T_A - T_C) \approx 18.71 \text{ KJ.}$$

Il calore ceduto lungo la trasformazione BC

$$Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B) \approx -20.37 \text{ KJ.}$$

Il rendimento è:

$$Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B) \eta = 1 - \frac{|Q_{BC}|}{Q_{AB} + Q_{CA}}$$

da cui $\eta = 0.3$.

Problema 8.18 (Problema d'esame 10 punti)

Una macchina frigorifera reversibile (di Carnot) acquista calore da una riserva di acqua e ghiaccio alla temperatura $T_2=0\text{ }^{\circ}\text{C}$, e ne cede all'ambiente, alla temperatura $T_1=17\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Si determinino:

1. La quantità di calore Q_1 che la macchina cede all'ambiente quando essa acquista calore dalla trasformazione in ghiaccio di una massa di acqua $m=50\text{ g}$ alla temperatura T_2 ; (4 punti)
2. Il lavoro W necessario a questo scopo; (3 punti)
3. Il numero di cicli N necessari per la trasformazione di $m=50\text{ g}$ di acqua in ghiaccio se il frigorifero di Carnot usa come fluido $n = 0.32$ moli di un gas perfetto e il rapporto tra il volume finale e quello iniziale dell'espansione isoterma è $V_f/V_i = 10$. (3 punti)

Nota: Il calore latente di fusione dell'acqua è $\lambda_f=3.34\times 10^5\text{ J/Kg}$, e la costante dei gas $R = 8.314\text{ J/K mol}$.

Soluzione

Siccome la macchina di Carnot è reversibile, si ha per il teorema di Clausius (oppure più semplicemente perché in un ciclo reversibile la variazione di entropia dell'universo deve essere zero)

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \Rightarrow Q_1 = -\frac{T_1}{T_2} Q_2,$$

con Q_1 negativo (calore ceduto dal sistema). Ma la quantità di calore Q_2 è, come detto nel problema, pari alla quantità di calore sottratta alla massa d'acqua per farla ghiacciare

$$Q_2 = m\lambda_f$$

quindi

$$Q_1 = -\frac{T_1}{T_2} m\lambda_f = -1.8 \times 10^4\text{ J}.$$

Il lavoro richiesto è:

$$W=Q_1+Q_2=-1.0\times 10^3\text{ J},$$

negativo perché fornito al sistema. Il calore assorbito lungo la trasformazione isoterma è

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_f}{V_i} = 1.67 \times 10^3\text{ J}$$

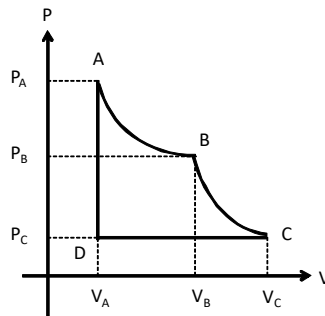
e perciò il numero di cicli è $N = m\lambda_f/Q_2 = 10$.

Problema 8.19 (Problema d'esame 10 punti)

Una macchina termica utilizza 0.3 moli di un gas perfetto monoatomico per descrivere il ciclo ABCD costituito dalle seguenti trasformazioni: espansione isoterma reversibile AB; espansione adiabatica reversibile BC; compressione isobara reversibile CD; trasformazione isocora reversibile DA. Sapendo che $p_A = 6 \times 10^5$ Pa, $T_A = 600$ K, $V_B = 2V_A$, $p_C = 10^5$ Pa. Si calcoli:

1. i valori delle coordinate termodinamiche nei punti A, B, C, D;
2. il lavoro compiuto dal gas nell'isoterma AB;
3. il rendimento del ciclo.

Rispondere alle domande (2) e (3) nell'ipotesi in cui l'isoterma AB sia irreversibile e il calore assorbito dalla macchina nell'isoterma AB sia $Q'_{AB} = 800$ J.

**Soluzione**

Nello stato A, applicando l'equazione dei gas ideali si può ricavare:

$$V_A = nRT_A / p_A \approx 2.46 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Nello stato B:

$$T_B = T_A, \quad V_B = 2V_A \approx 4.92 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ e } p_B = nRT_B / V_B \approx 3.04 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Nella trasformazione adiabatica BC si ha che $p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$ con $\gamma = 5/3$ essendo il gas monoatomico. Pertanto:

$$V_C = V_B (p_B / p_C)^{1/\gamma} \approx 9.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3, \text{ e quindi } T_C = p_C V_C / nR \approx 386.6 \text{ K}.$$

Infine nello stato D:

$$V_D = V_A \approx 2.46 \times 10^{-3} \text{ m}^3, \text{ e } T_D = p_D V_D / nR = 100 \text{ K}.$$

Nell'isoterma AB il lavoro è:

$$W_{AB} = Q_{AB} = nRT_A \ln(V_B / V_A) \approx 1.04 \text{ kJ}.$$

Il lavoro totale svolto in un ciclo è:

$$W = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$$

dove

$$Q_{BC} = 0; \quad Q_{CD} = 5nR(T_D - T_C) / 2 \approx -1.8 \text{ kJ}; \quad Q_{DA} = 3nR(T_A - T_D) / 2 \approx 1.9 \text{ kJ}$$

quindi $W = 1.1 \text{ kJ}$.

Il calore assorbito dal gas lungo un ciclo è:

$$Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{DA} \approx 2.9 \text{ kJ}.$$

Di conseguenza il rendimento del ciclo vale:

$$\eta = W / Q_{ass} \approx 0.386.$$

Nel caso che l'isoterma sia irreversibile vale comunque $Q' = W'_{AB} = 800 \text{ J}$.

Il lavoro totale svolto durante un ciclo è:

$$W' = Q'_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = 884 \text{ J},$$

ed il calore assorbito:

$$Q'_{ass} = Q'_{AB} + Q_{DA} \approx 2.67 \text{ kJ},$$

e, infine il rendimento vale:

$$\eta' = W' / Q'_{ass} \approx 0.331.$$

Problema 8.20 (Problema d'esame 13 gennaio 2012)

Una macchina termica utilizza un ciclo di Carnot reversibile sviluppando un lavoro pari a $W=16$ kJ per ciclo e assorbendo una quantità di calore $Q_a=23$ kJ con la sorgente a temperatura maggiore T_2 mentre temperatura dell'altra sorgente vale $T_1=300$ K. Ad un certo istante la trasformazione con la sorgente a temperatura inferiore T_1 diventa irreversibile e si misura che la variazione di entropia dell'universo termodinamico vale $\Delta S_U=13.3$ J/K. Si chiede di determinare:

1. il valore della temperatura T_2 della sorgente più calda; (2 punti)
2. La quantità di calore $Q_{C,REV}$ scambiato con la sorgente a temperatura T_1 quando la macchina lavora in modo reversibile; (3 punti)
3. La quantità di calore $Q_{C,IRR}$ scambiato con la sorgente a temperatura T_1 quando la macchina lavora in modo irreversibile; (3 punti)
4. Il rendimento η_{IRR} quando la macchina lavora in modo irreversibile; (1 punto)
5. La variazione della quantità di lavoro prodotta per ciclo dalla macchina termica quando essa lavora in modo irreversibile. (1 punto)

Soluzione

Il rendimento della macchina reversibile vale $\eta_{REV} = \frac{W}{Q_a} \approx 0.7$. Per cui la temperatura della

sorgente più calda vale $T_2 = \frac{T_1}{1 - \eta_{REV}} = 1000$ K. La quantità di calore scambiato dalla

macchina con la sorgente a temperatura inferiore vale: $Q_{C,REV} = W - Q_a = -7$ kJ.

Quando la macchina diventa irreversibile la variazione di entropia è dovuta solo alle sorgenti rimanendo nulla quello del ciclo termodinamico della macchina. Pertanto è possibile scrivere:

$$\Delta S_U = -\frac{Q_{C,IRR}}{T_1} - \frac{Q_a}{T_2} \rightarrow Q_{C,IRR} = -T_1 \left[\Delta S_U + \frac{Q_a}{T_2} \right] \approx -10.9 \text{ kJ.}$$

Il lavoro prodotto per ciclo dalla macchina irreversibile vale $W_{IRR}=12.1$ kJ. Pertanto, la variazione di lavoro rispetto a quello prodotto dalla macchina reversibile vale $\Delta W=3.9$ kJ. Il valore del rendimento della macchina irreversibile è uguale a $\eta_{IRR} \approx 0.53$.

Problema 8.21 (Problema d'esame 30 gennaio 2012)

Un cilindro contenente $n=0.47$ moli di un gas perfetto alla temperatura $T=297$ K occupa inizialmente un volume V_A . Il gas è soggetto a due trasformazioni. La prima, AB, è una compressione isoterma reversibile fino al raggiungimento di un volume $V_B=0.25 V_A$. La seconda, BA, è compiuta isolando termicamente il gas e lasciandolo espandere liberamente nel vuoto fino a rioccupare il volume originario V_A . Calcolare per ciascuna delle due trasformazioni:

1. il calore Q scambiato dal gas; (2 punti)
2. il lavoro W compiuto dal gas; (2 punti)
3. la variazione di energia interna ΔU del gas; (2 punti)
4. la variazione di entropia del gas, della sorgente, e totale; (2 punti)
5. disegnare qualitativamente le due trasformazioni nel piano p - V . (2 punti)

Soluzione

Domande 1. e 2. Il calore ed il lavoro scambiati durante la trasformazione isoterma AB valgono:

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} = -1.61 \text{ kJ.}$$

Per la espansione libera del gas BA si ha: $Q_{BA}=W_{BA}=0$.

Domanda 3. Nelle due trasformazioni AB e BA la variazione di energia interna è nulla perché la variazione di temperatura del gas è nulla.

Domanda 4. La variazione di entropia del gas nella trasformazione isoterma AB vale:

$$\Delta S_{AB} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = -5.42 \text{ J/K.}$$

Considerando che il gas ritorna esattamente nello stato termodinamico iniziale si ha:

$$\Delta S_{BA} = -\Delta S_{AB} = 5.42 \text{ J/K.}$$

Per quanto riguarda la variazione di entropia della sorgente di calore essa ha un valore non nullo solo per la trasformazione isoterma AB:

$$\Delta S_{AB,sorgente} = \frac{Q_{AB}}{T} = -\Delta S_{AB} = 5.42 \text{ J/K} ; \Delta S_{BA,sorgente} = 0.$$

Ritornando il gas nel suo stato termodinamico iniziale la sua variazione di entropia è nulla. Pertanto, la variazione di entropia dell'universo termodinamico è uguale a:

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{AB,sorgente} + \Delta S_{totale,gas} = \Delta S_{AB,sorgente} = 5.42 \text{ J/K.}$$

Il valore della variazione di entropia è maggiore di zero come ci si aspetta dato che l'espansione libera del gas è una trasformazione irreversibile.

Domanda 5. Nel piano p - V le due trasformazioni vanno rappresentate nel seguente modo:

- la trasformazione AB come un tratto di iperbole a linea continua;
- l'espansione libera come una espansione irreversibile che unisce lo stato B allo stato A.