

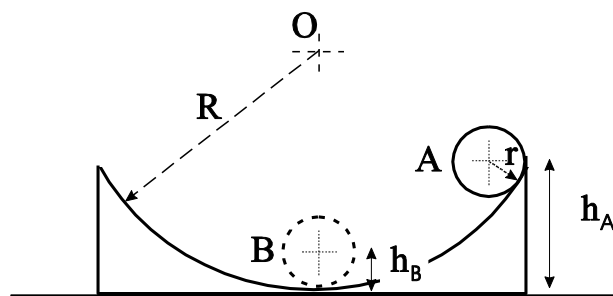
7 PROBLEMI DI STATICA E DINAMICA DEL CORPO RIGIDO
quaderno 2

Problema 7.31 (10+3 punti)

Un cilindro omogeneo di raggio $r=1$ m e massa $m=1$ kg può ruotare senza scivolare su una guida a sagoma cilindrica di raggio $R=5$ m, come in figura. La guida è vincolata al piano del laboratorio. Al tempo $t=0$ il cilindro viene posizionato fermo sulla guida, con il suo centro di massa nel punto A a quota $h_A = 2$ m dal piano orizzontale. Si calcoli nella posizione in cui il cilindro passa per il punto B dove la quota $h_B=r$ è minima rispetto al piano orizzontale:

1. la velocità di traslazione v_{CM} del centro di massa del cilindro; (4 punti)
2. la componente normale N della reazione vincolare esercitata dalla guida sul cilindro (3 punti);
3. la componente tangenziale T della reazione vincolare (3 punti).

Domanda opzionale: nel caso in cui la guida di massa $M=10$ kg possa slittare senza attrito sul piano del laboratorio sul quale essa poggia, quale risulterebbe essere il modulo della sua velocità v_{guida} nel momento in cui il cilindro transita con velocità v'_{CM} per il punto di quota minima? (3 punti)



Soluzione

Indicando con h_P una generica quota rispetto a quella iniziale h_A , dalla conservazione dell'energia meccanica e dalla condizione di puro rotolamento si può scrivere:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 = mg(h_A - h_P) \quad ; \quad v_{CM} = \omega r$$

da cui per $h_P=r$ si ha:

$$v_{CM} = \sqrt{(4/3)(h_A - h_P)}.$$

Nel punto B la velocità è quella massima raggiungibile dal cilindro. Di conseguenza l'accelerazione tangenziale a_T del centro di massa in B è nulla e la sola accelerazione che rimane è quella centripeta a_N che si deve utilizzare nella equazione del moto del centro di massa sempre nel punto B. Si ha:

$$a_N = \frac{v_{CM}^2}{(R-r)} \quad ; \quad N - mg = ma_N = m \frac{v_{CM}^2}{(R-r)}.$$

Numericamente si ha che le componenti normale e tangenziale della reazione vincolare valgono $N \cong 13 \text{ N}$ e $T = ma_T = 0$.

Domanda opzionale: essendo nulla le componenti orizzontale delle forze esterne e non essendo presenti forze dissipative che compiono lavoro si conclude che deve conservarsi la quantità di moto del sistema e l'energia. Di conseguenza:

$$mv'_{CM} + Mv_{guida} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2}I\omega'^2 + \frac{1}{2}mv'^2_{CM} + \frac{1}{2}Mv^2_{guida} = mg(h - r)$$

dove ora $\omega' = (v'_{CM} - v_{guida})/r$. Dalle precedenti equazioni si ottiene:

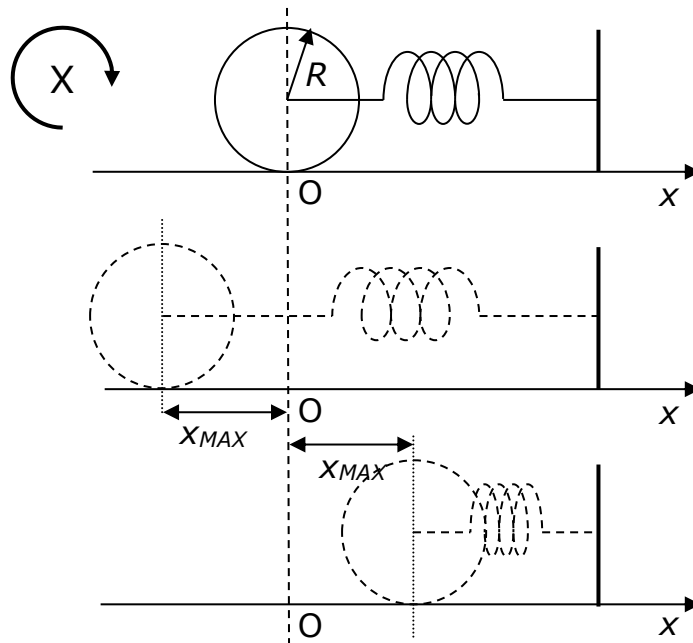
$$v_{guida} = -\sqrt{\frac{4g(h_A - r)}{3(M/m)^2 + 10(M/m) + 4}} \cong -0.3 \text{ m/s}.$$

Problema 7.32 (10+2 punti)

L'asse di un cilindro omogeneo di raggio $R=1$ m e massa $m=1$ kg è connesso ad un punto fisso da una molla ideale e costante elastica $k=1$ N/m. Il cilindro rotola senza strisciare su di una superficie con coefficiente di attrito statico μ_s . Al tempo $t=0$ il centro di massa del cilindro transita nel punto che corrisponde alla posizione di riposo della molla, nel quale porremo l'origine del sistema di riferimento, con velocità di traslazione $v_0=1$ m/s. Calcolare

1. la massima distanza x_{MAX} del centro del cilindro dalla posizione di riposo P (4 punti);
2. il periodo T delle oscillazioni attorno al punto $x=0$ (4 punti);
3. il valore minimo di μ_s per avere il moto di puro rotolamento (4 punti).

NOTA BENE: per rispondere alla domanda 2 si possono usare le equazioni cardinali della meccanica facendo attenzione che il verso della forza elastica è sempre discorde con quello della forza di contatto tra il cilindro ed il piano orizzontale. Inoltre, per il segno dei momenti delle forze si prenda, per esempio, come positivo quello orario (vedi figura).

**Soluzione**

Si applichi il principio di conservazione dell'energia scritto prendendo come situazione iniziale il passaggio del CM del cilindro per il punto P e come situazione finale la massima estensione della molla che corrisponde al momento in cui il cilindro si ferma per tornare indietro. Si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}kx_{MAX}^2 \quad \rightarrow \quad x_{MAX} = v_0 \sqrt{\frac{3m}{2k}} \cong 1.2 \text{ m},$$

dove $I = (1/2)mR^2$ e $v_0 = \omega_0 R$.

Dato che sul sistema dinamico in esame non agiscono forze non conservative, il moto del cilindro sarà un moto di andata e ritorno intorno alla posizione per la quale si ha che la forza elastica è nulla, cioè intorno a $x=0$ (vedi figura). Per trovare il periodo di questo moto è necessario scrivere, come suggerito dal problema, le due equazioni cardinali relative ai momenti delle forze applicate al cilindro e alle forze applicate al suo centro di massa. Prendendo per esempio la situazione di in cui la molla si carica e il disco è nella situazione delle x negative (vedi disegno) e ruota in senso antiorario, si ha:

$$F_e - f = ma_{CM} \quad \Rightarrow \quad -kx_{CM} - f = ma_{CM} \quad ; \quad fR = I\alpha, \quad (1)$$

dove con F_e si è indicata la forza elastica che agisce per valori negativi di x . Dalla equazione dei momenti si ottiene l'espressione della forza di contatto $f = (1/2)ma_{CM}$ che sostituita nella equazione delle forze fornisce l'equazione del moto del CM del cilindro:

$$a_{CM} = \frac{2k}{3m} x_{CM}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{d^2 x_{CM}}{dt^2} + \frac{2k}{3m} x_{CM} = 0$$

Si riconosce immediatamente che questa è l'equazione di un moto armonico di periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{2k}} \cong 7.7 \text{ s.}$$

La forza di contatto $f = (1/2)ma_{CM}$ è massima quando massima sarà l'accelerazione del sistema dinamico. Ciò avviene quando il cilindro si ferma avendo il CM del cilindro raggiunto in modulo la coordinata x_{MAX} (la molla cioè è nella sua massima estensione o compressione). Si può allora scrivere:

$$f_{MAX} = (1/2)ma_{CM,MAX} = \frac{1}{3}kx_{MAX} < \mu_s mg$$

da cui $\mu_s > \frac{1}{3} \frac{kx_{MAX}}{mg} \cong 0.04$.

Problema 7.33 (10 punti)

Un disco non omogeneo ha una distribuzione della massa che varia radialmente seguendo la relazione $\sigma(r) = K(2R - r)$, dove $\sigma(r)$ è la densità superficiale di massa, R il raggio del disco, K una costante. Il disco, posto su di un piano inclinato scabro di angolo $\alpha = 20^\circ$, viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Si osserva che il suo moto è di moto di puro rotolamento. Dopo aver percorso un tratto Δx , si misura che la velocità del centro di massa del disco vale $v_{CM} = 6.4$ m/s. Si chiede di calcolare:

1. il valore del dislivello h corrispondente allo spazio percorso Δx ; (4 punti)
2. l'accelerazione a_{CM} del centro di massa del disco; (3 punti)
3. il valore massimo dell'angolo del piano inclinato α_{MAX} affinché il moto del disco rimanga di puro rotolamento se il coefficiente di attrito statico tra disco e piano inclinato vale $\mu_s = 0.6$. (3 punti)

Suggerimento: si faccia attenzione che la massa non è uniformemente distribuita e per questo è necessario calcolare sia il momento di inerzia che la massa del disco partendo dalla definizione generale di densità di superficie $\sigma = dm / d\Sigma$.

Soluzione

Dalla definizione di densità di massa e di momento di inerzia si ha:

$$dm = \sigma(r)d\Sigma = \sigma(r)rdrd\varphi \quad ; \quad dI = r^2dm = \sigma(r)r^3drd\varphi . \quad (1)$$

Sostituendo la relazione che fornisce la legge di variazione radiale della massa si ottiene:

$$I = K \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (2R - r)r^3dr = \frac{3}{5} \pi K R^5 . \quad (2)$$

D'altra parte l'espressione della massa si ottiene dalla prima delle (1):

$$m = \int \sigma(r)d\Sigma = K \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (2R - r)rdr = \frac{4}{3} \pi K R^3 . \quad (3)$$

Le relazioni (2) e (3) permettono, una volta sostituite nella relazione di conservazione della energia meccanica, permettono di determinare il dislivello h richiesto.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I \frac{v_{CM}^2}{R^2} \rightarrow h = \frac{29}{40} \frac{v_{CM}^2}{g} \approx 3 \text{ m} .$$

Il valore dell'accelerazione del centro di massa può ricavarsi dalle leggi della cinematica del moto del centro di massa stesso oppure, dato che in seguito servirà, dalla soluzione delle equazioni cardinali del moto che si scrivono come:

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - f &= ma_{CM} \\ fR &= I\alpha = I \frac{a_{CM}}{R} \end{aligned} \rightarrow a_{CM} = \frac{20}{29} g \sin \alpha$$

Per sapere l'angolo massimo oltre il quale il moto cessa di essere di puro rotolamento è necessario uguagliare la forza f con la componente normale della resistenza vincolare moltiplicata per il coefficiente di attrito statico: $N = \mu_s mg \cos \alpha$. Dalle precedenti equazioni si ottiene:

$$\tan \alpha_{MAX} = \frac{29}{9} \mu_s \rightarrow \alpha_{MAX} = \tan^{-1} \left(\frac{29}{9} \mu_s \right) \approx 62.7 \text{ gradi} .$$

Problema 7.34 (10 punti)

Un'asta di lunghezza $L=0.5\text{m}$ è vincolata ad un suo estremo come è illustrato in figura. Nella sua posizione di riposo essa è disposta verticalmente a causa dell'azione della sua forza peso. Ad un certo istante t_0 , un corpo puntiforme di massa $m_0=50\text{ g}$ si conficca nell'asta nella sua parte più bassa avendo, nel momento dell'urto, una velocità $v_0=1\text{ m/s}$. Sapendo che la massa dell'asta vale $m_a=0.6\text{kg}$ si determini:

1. la velocità angolare ω del sistema (asta e corpo puntiforme) subito dopo l'urto; (3 punti)
2. il valore dell'angolo massimo α_{MAX} rispetto alla verticale raggiunto dall'asta dopo l'urto; (4 punti)
3. nel caso in cui l'angolo α_{MAX} sia piccolo tale da considerare il moto dell'asta dopo l'urto quello di oscillazione di un pendolo composto, il periodo del moto. (3 punti)

Nota: si ricordi che l'asta è soggetta al vincolo e, pertanto, non si ha la conservazione della quantità di moto del sistema corpo puntiforme e asta prima e dopo l'urto. Il periodo

del pendolo composto vale $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{m g x_0}}$ dove m è la massa del pendolo, I_0 e x_0

rispettivamente il suo momento di inerzia e la distanza del centro di massa entrambe le grandezze riferite all'asse di rotazione.

**Soluzione**

Dato che l'asta è vincolata, nell'urto deve conservarsi il solo momento della quantità di moto. Si ha:

$$m_0 v_0 L = I_{TOT} \omega. \quad (1)$$

Per trovare il momento di inerzia totale dopo l'urto si deve considerare il fatto che il corpo di massa m_0 rimane conficcato nell'asta. Allora si può scrivere la seguente relazione:

$$I_{TOT} = \frac{1}{3} M_A L^2 + m_0 L^2 \approx 6.25 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2.$$

Pertanto, dalla (1) si ottiene il valore della velocità angolare è $\omega \approx 0.4 \text{ rad/s}$. Applicando ora la conservazione dell'energia per determinare l'angolo massimo raggiunto dal sistema si ottiene:

$$\frac{1}{2} I_{TOT} \omega^2 = g(m_0 \Delta x_0 + m_a \Delta x_{CM}) = gL(m_0 + \frac{m_a}{2})(1 - \cos \alpha_{\text{MAX}}),$$

dove si è indicato con Δx_{CM} la variazione della posizione rispetto alla situazione di riposo del centro di massa della sola asta e con Δx_0 quella del corpo di massa m_0 . Dalla precedente relazione si ha $\alpha_{\text{MAX}} \approx 4.37$ gradi. Il valore trovato è compatibile con l'ipotesi di piccole

oscillazioni del sistema intorno all'asse di rotazione. Per calcolare il valore del periodo è necessario determinare la posizione del centro di massa del sistema rispetto all'asse di rotazione che risulta essere uguale a:

$$x_0 = \frac{m_a L / 2 + m_0 L}{m_a + m_0} \cong 0.27 \text{ m.}$$

Pertanto si ha $T \cong 1.2 \text{ s.}$

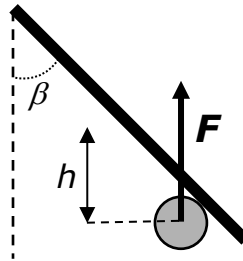
Problema 7.35 (12 punti)

Un disco omogeneo di massa $m=1$ kg è posto su di una guida che forma un angolo $\beta=45^\circ$ con la verticale. Sul centro di massa del disco, oltre la forza peso, agisce una forza costante $\vec{F}$ parallela alla retta verticale, come riportato nella figura. Il disco è tenuto fermo fino a quando al tempo $t=0$ viene lasciato libero di ruotare lungo la guida. Dopo che il centro di massa si è alzato di una quota $h=2$ m, si misura che la velocità del centro di massa del disco è uguale a $v_{CM}=3.7$ m/s.

Nell'ipotesi di moto di puro rotolamento, si determini:

1. il modulo della forza $\vec{F}$; (4 punti)
2. il tempo impiegato dal disco per alzare il suo centro di massa della altezza h ; (4 punti)
3. il valore minimo che deve avere il coefficiente di attrito statico μ_s tra disco e guida affinché il moto del disco rimanga di puro rotolamento. (4 punti)

Nota: si ricordi che il lavoro delle forze è uguale alla variazione della energia cinetica.

**Soluzione:**

Oltre alla forza F sul centro di massa agisce anche la forza peso del disco. Inoltre, considerando una retta parallela alla guida (asse x) su cui si muove il disco con il verso dal basso verso l'alto, l'equazione del moto del centro di massa e del momento angolare valgono:

$$F \cos \beta - (f + mg \cos \beta) = ma_{CM} \quad ; \quad fR = I\alpha \quad (1)$$

D'altro canto, ricordando che è nullo il lavoro della forza f , la variazione della energia cinetica del disco dalla posizione iniziale a quella finale quando il centro di massa si è alzato della quota h è uguale a:

$$W_F + W_P = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \rightarrow \quad h(F - mg) = \frac{3}{4}mv_{CM}^2,$$

dove W_F e W_P sono i lavori della forza $\mathbf{F}$ e della forza peso $\mathbf{P}$, $I = (1/2)mR^2$ con R il raggio del disco e si sono usate le seguenti relazioni:

$$v_{CM} = \omega R \quad ; \quad \vec{F} \cdot \vec{x} = \frac{F \cos \beta h}{\cos \beta} = Fh \quad ; \quad \vec{P} \cdot \vec{x} = -\frac{F \cos \beta h}{\cos \beta} = -mgh,$$

Il valore del modulo della forza F è:

$$F = m \left(\frac{3v_{CM}^2}{4h} + g \right) \cong 14.9 \text{ N}.$$

Ricordando che $a_{CM} = \alpha R$, dalle equazioni del moto (1) si ha:

$$f = \frac{1}{2}ma_{CM} \quad ; \quad a_{CM} = \frac{2 \cos \beta (F - mg)}{3m} \approx 2.46 \text{ m/s}^2.$$

Il tempo impiegato per far salire il centro di massa del disco della quota h si ricava subito utilizzando la relazione cinematica:

$$\frac{h}{\cos \beta} = \frac{1}{2} a_{CM} t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a_{CM} \cos \beta}} \cong 1.5 \text{ s}$$

Per trovare il valore minimo di μ_s che permetta di mantenere il moto di puro rotolamento si deve imporre la condizione:

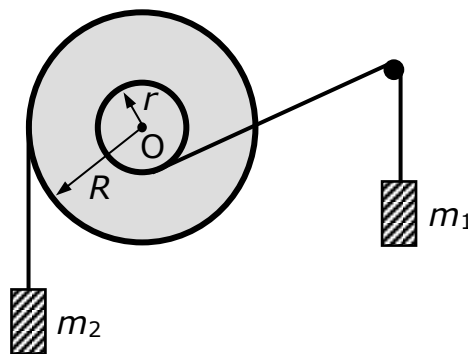
$$f_{MAX} \leq \mu_s N \quad \rightarrow \quad F_{MAX} \cos \beta - f_{MAX} - mg \cos \beta = 2f_{MAX} \quad \rightarrow \quad F_{MAX} = \frac{3\mu_s N + mg \cos \beta}{\cos \beta}$$

La componente normale della reazione vincolare vale $N = \sin \beta (F_{MAX} - mg)$, per cui, sostituendo si ha $\mu_s \geq 1/3$.

Problema 7.36 (12 punti)

Un cilindro di raggio $R=1$ m e massa $m=5$ kg è libero di ruotare senza attrito intorno al suo asse baricentrale O. Facendo riferimento alla figura, al cilindro sono collegate mediante due funi di caratteristiche identiche e di massa trascurabile due masse puntiformi $m_1=2$ kg e $m_2=1$ kg. La fune della massa m_1 è arrotolata intorno ad una scanalatura del cilindro di raggio $r=0.3$ m rispetto al centro O. La fune della massa m_2 , invece, è arrotolata attorno alla circonferenza esterna del cilindro. Nell'ipotesi di assenza di attriti, di non slittamento delle funi e di velocità iniziale nulla del sistema, si chiede di determinare:

1. l'accelerazione angolare del cilindro e quelle lineari delle due masse m_1 e m_2 ; (4 punti)
2. la tensione minima di rottura delle funi affinché il moto abbia luogo; (3 punti)
3. il valore del momento M riferito ad O che bisogna applicare per ottenere il moto del sistema a velocità costante; (3 punti)
4. nelle condizioni della precedente domanda, il nuovo valore della tensione minima di rottura delle funi. (2 punti)

**Soluzione:**

Per rispondere alla prima domanda è necessario scrivere le equazioni dinamiche delle due masse puntiformi e del disco. Dato che le due masse scendono, il disco si muoverà in senso antiorario. Scegliendo un asse z parallelo alla direzione della fune della massa m_2 , rivolto verso il basso, per le due masse e per il cilindro si ha:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad ; \quad m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad ; \quad T_1 r + T_2 R = I \alpha = \frac{1}{2} m R^2 \alpha. \quad (1)$$

T_1 e T_2 sono le tensioni delle funi e si è posto, come è ovvio, il centro di massa del disco fermo. Sostituendo T_1 e T_2 dalle prime due equazioni nella terza e ricordando che:

$$a_1 = \alpha r \quad ; \quad a_2 = \alpha R$$

si ottiene:

$$\alpha = \frac{2g(m_1 r + m_2 R)}{m R^2 + 2m_1 r^2 + 2m_2 R^2} \cong 4.26 \text{ rad/s}^2,$$

da cui $a_1 \cong 1.28 \text{ m/s}^2$ e $a_2 \cong 4.26 \text{ m/s}^2$.

Dalla prima e seconda delle equazioni (1) si ottiene:

$$T_1 = m_1(g - a_1) \cong 17.1 \text{ N} \quad \text{e} \quad T_2 = m_2(g - a_2) \cong 5.6 \text{ N}.$$

Di conseguenza la tensione minima vale 17.1 N perché se le funi ne possedessero una inferiore, quella legata alla massa m_1 si romperebbe a causa del moto del sistema.

Il momento delle forze che serve per rendere costante la velocità del sistema è uguale e contrario a quello esercitato dalle tensioni delle funi. Pertanto, dalla terza equazione delle (1) si ha:

$$T_1 r + T_2 R + M = 0 \quad \rightarrow \quad M = -(T_1 r + T_2 R) \cong -10.7 \text{ Nm}.$$

Il momento ***M*** è diretto lungo l'asse di rotazione con verso opposto a quello generato dalle tensioni dei due fili. Nelle condizioni per le quali $\alpha=0$ si avrà sempre dalle prime due equazioni delle (1):

$$m_1g - T_1 = 0 \quad ; \quad m_2g - T_2 = 0$$

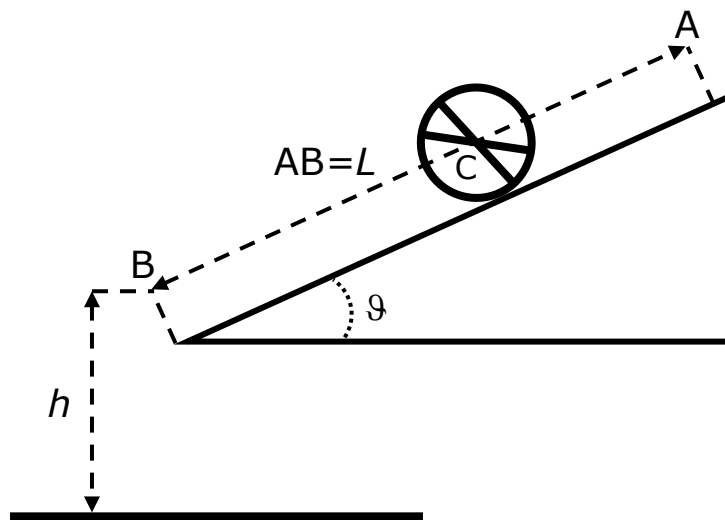
da cui $T_1 \cong 19.6$ N e $T_2 \cong 9.8$ N. In queste condizioni la tensione minima di rottura che devono avere le funi è ancora quella della fune a cui è legata la massa m_1 .

Problema 7.37 (10 punti)

Un corpo rigido è formato da due aste ideali omogenee di lunghezza $2r=0.2$ m, la prima di massa $m_1=m$, la seconda $m_2=2m$, e da un anello di raggio r e massa $m_3=3m$. Come indicato in figura, le due aste sono saldate tra di loro al centro e agli estremi con l'anello. Il corpo parte da fermo con il centro di massa C (corrispondente al centro dell'anello) in A e scende ruotando senza strisciare lungo un piano inclinato di angolo $\vartheta=10^\circ$. Quando il centro di massa C raggiunge il punto B distante $L=2$ m da A e che si trova ad una quota $h=5$ m dal suolo, termina il piano inclinato e il corpo prosegue in caduta libera.

Nell'ipotesi di assenza di attrito dell'aria, si chiede di calcolare:

1. la velocità del centro di massa $\vec{v}_C$ in modulo, direzione e verso nel punto B; (4 punti)
2. il tempo t_f che impiega il corpo per toccare il suolo, avendo posto $t=0$ l'istante iniziale quando il centro di massa C transita per il punto B; (2 punti)
3. la velocità angolare del corpo subito prima dell'impatto col suolo. (2 punti)
4. Se le saldature che legano l'anello alle due aste venissero improvvisamente a mancare durante la caduta libera del corpo, quale sarebbe l'effetto sul moto delle due parti ora libere del sistema meccanico? (2 punti)

**Soluzione**

Dato che il sistema parte da fermo la velocità del centro di massa è facilmente ricavabile dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$3mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = 6mgL \sin \vartheta.$$

Il momento di inerzia del sistema è la somma di momenti di inerzia delle due barre e dell'anello:

$$I = m(2r)^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \right) + 3mr^2 = \frac{12}{3}mr^2.$$

Sostituendo si trova immediatamente l'espressione della velocità del centro di massa:

$$v_C = \sqrt{\frac{6}{5}gL \sin \vartheta} \cong 2.02 \text{ m/s}.$$

La direzione è quella parallela al piano inclinato e il verso è rivolto verso il basso.

Nella fase di caduta libera, il corpo si comporta come un punto materiale (il centro di massa) in caduta libera con una velocità iniziale pari a v_C che ha direzione e verso appena discussi. Dato che la quota di caduta h del centro di massa è nota, il valore del tempo si trova usando l'equazione del moto:

$$y(t) = h - (v_C \sin \vartheta)t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow y(t_f) = r = h - (v_C \sin \vartheta)t_f - \frac{1}{2}gt_f^2.$$

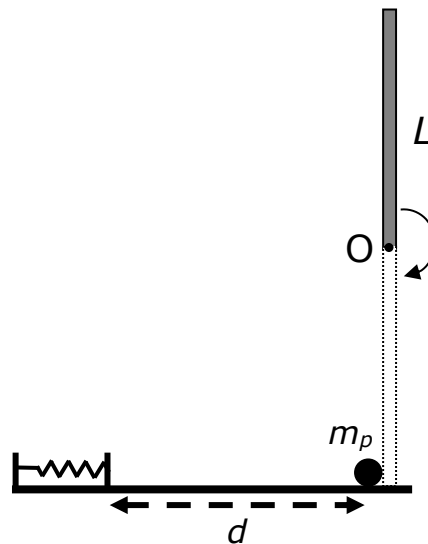
Scartando come non fisica la soluzione negativa, si ottiene $t_f \cong 0.96$ s. Poiché durante la caduta l'unica forza che agisce sul sistema è la forza peso che ha momento nullo rispetto al suo centro di massa, si ha che la velocità angolare rimane invariata a quella che aveva il sistema al momento del distacco dal piano inclinato. Pertanto si ha che un istante prima dell'urto la velocità angolare vale $\omega = v_C/r \cong 20.2$ rad/s. Se la struttura delle due aste si distacca dall'anello durante la caduta, anello e sistema delle due aste continuerebbero a ruotare con la velocità angolare ω appena calcolata.

Problema 7.38 (10 punti)

Un'asta omogenea di lunghezza $L=0.5$ m e massa M_a , è vincolata a ruotare senza attrito intorno al suo estremo O. Come è mostrato nella figura, l'asta è inizialmente ferma in una posizione verticale di equilibrio instabile. Ad un certo istante l'asta inizia a ruotare in senso orario e, dopo aver ruotato di un angolo pari a π radianti, urta in modo completamente elastico un punto materiale di massa m_p , inizialmente fermo. Dopo l'urto, mentre l'asta rimane ferma nella posizione verticale raggiunta, il punto materiale si mette in movimento su di un piano orizzontale scabro. Dopo aver percorso un tratto $d=2$ m, esso raggiunge una molla di costante elastica $K=200$ N/m comprimendola, rispetto alla sua posizione di riposo, di un tratto $x=0.3$ m. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra punto materiale e piano orizzontale è $\mu_d=0.3$, si chiede di calcolare:

4. il valore della velocità angolare dell'asta subito prima dell'urto; (3 punti)
5. il valore della massa m_p del punto materiale; (5 punti)
6. il valore della massa M_a dell'asta. (3 punti)

Nota: si ricordi che l'urto elastico avviene tra un punto materiale libero e l'asta che è vincolata in O. Pertanto, non si conserva la quantità di moto del sistema.

**Soluzione**

Applicando dapprima il principio di conservazione dell'energia per determinare, prima dell'urto, la velocità angolare dell'asta si ottiene:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = M_a g L .$$

Essendo il momento d'inerzia dell'asta, nelle condizioni del problema pari a $I = \frac{1}{3} M_a L^2$, dalla precedente equazione si ha:

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{L}} \cong 10.85 \text{ rad/s.}$$

Essendo l'urto elastico e tenendo in considerazione la nota del problema, è possibile imporre la conservazione dell'energia e quella del momento della quantità di moto. Pertanto si può scrivere:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_p v^2 \quad , \quad I \omega = m_p v L \quad (1)$$

dato che dopo l'urto l'asta rimane ferma e dove si è indicata con v la velocità acquistata dal punto materiale dopo l'urto. Dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene la seguente condizione tra le masse dell'asta e del punto materiale:

$$m_p = \frac{M_a}{3}. \quad (2)$$

Ora, sfruttando il fatto di conoscere di quanto la molla viene compressa dal punto materiale dopo che esso ha percorso uno spazio pari a d sul piano scabro, si può scrivere il seguente bilancio energetico:

$$\frac{1}{2} m_p v^2 - \frac{1}{2} K x^2 = \mu_d m_p g d ,$$

da cui si ottiene

$$m_p = \frac{K x^2}{v^2 - 2 \mu_d g d} .$$

Ora, utilizzando la seconda delle (1) e la (2), la precedente relazione si scrive:

$$m_p = \frac{K x^2}{\omega^2 L^2 - 2 \mu_d g d} \cong 1 \text{ kg} .$$

Dalla relazione (2) si ha subito che $M_p = 3 \text{ kg}$.

NB. Non essendo specificato nel problema, non si è considerato, per semplicità, la presenza dell'attrito durante la compressione della molla. Se si considera la presenza della forza di attrito la eq. (3) diviene:

$$\frac{1}{2} m_p v^2 - \frac{1}{2} K x^2 = \mu_d m_p g (d - x) .$$

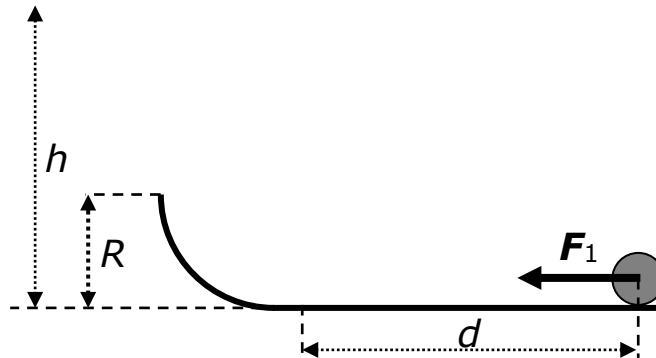
Problema 7.39 (10 punti)

Un disco di massa $M=1$ kg e raggio $r=0.1$ m è posto sulla guida riportata nella Figura. La guida è formata da un primo tratto orizzontale che si raccorda ad un secondo tratto verticale a forma di un quarto di arco di circonferenza di raggio $R=0.4$ m. Sul centro di massa del disco, inizialmente a riposo, agisce una forza F_1 costante in modulo e diretta in modo parallelo alla guida che rimane attiva solo per il tratto orizzontale della guida lungo $d=1$ m. Supponendo che il moto del disco sia di puro rotolamento sul tratto orizzontale e su quello verticale della guida, si chiede di calcolare:

5. il valore minimo del modulo della forza F_1 affinché il centro di massa del disco, una volta abbandonata la guida verticale, raggiunga l'altezza $h=1$ m dal piano orizzontale; (5 punti)
6. la velocità angolare del disco quando il centro di massa raggiunge la quota h ; (2 punti)

Nel caso in cui la guida descritta in precedenza sia ora liscia (assenza di attrito tra disco e piano) e il moto del disco avvenga sempre partendo da fermo, si calcoli:

7. il valore minimo del modulo della forza $F_2 \neq F_1$, parallela sempre al piano orizzontale, da applicare al disco lungo il solo tratto orizzontale d affinché il centro di massa del disco, una volta abbandonata la guida verticale, raggiunga l'altezza $h=1$ m dal piano orizzontale. (3 punti)

**Soluzione**

Il problema del moto del disco può risolversi utilizzando i principi di conservazione. Lungo il tratto d , dove agisce la forza costante F_1 , si può scrivere che la variazione di energia cinetica dl disco inizialmente è fermo) è data dalla seguente relazione:

$$\frac{1}{2} M v_d^2 + \frac{1}{2} I \omega_d^2 = F_1 d \quad \rightarrow \quad v_d^2 = \frac{4 F_1 d}{3 M},$$

dove v_d e ω_d sono rispettivamente la velocità del centro di massa e quella di rotazione del disco alla fine dl tratto d e, comunque, prima dell'inizio del tratto verticale della guida. In questo tratto, sul centro di massa del disco agisce la forza peso la cui componente tangenziale alla guida, istante per istante, è una forza resistente. Essendo la forza peso una forza conservativa si può utilizzare il principio di conservazione dell'energia meccanica e si ottiene:

$$\frac{1}{2} M v_d^2 + \frac{1}{2} I \omega_d^2 = M g (R - r) + \frac{1}{2} M v_R^2 + \frac{1}{2} I \omega_R^2,$$

dove v_R e ω_R sono rispettivamente la velocità del centro di massa e quella di rotazione dl disco alla fine del tratto verticale della guida. Dalla presedente relazione si ha:

$$v_R^2 = v_d^2 - \frac{4}{3} g (R - r) = \frac{4}{3} \left[\frac{F_1 d}{M} - g (R - r) \right].$$

A questo punto il disco abbandona la guida e il suo moto procede lungo una traiettoria verticale fino a che il suo centro di massa raggiunge la quota h . Anche in questo caso è possibile utilizzare la conservazione dell'energia meccanica che diventa:

$$\frac{1}{2} M v_R^2 = Mg(h - R) \rightarrow F_1 = \frac{1}{2} Mg \frac{3h - R - 2r}{d} \cong 11.8 \text{ N.}$$

Con questo valore della forza F_1 si ha che la velocità v_R del centro di massa vale $v_R \cong 3.7$ m/s si ha che la velocità angolare di rotazione del disco quando esso raggiunge la quota h è uguale a $\omega_R = v_R/r \cong 34.4$ rad/s.

Per rispondere alla terza domanda si ripercorre il ragionamento fatto per il disco ma, ora, non esistendo alcuna velocità di rotazione si ha semplicemente che:

$$F_2 d = Mg(h - r) \rightarrow F_2 = \frac{Mg(h - r)}{d} \cong 8.82 \text{ N.}$$

Nota: per trovare la velocità v_d è possibile, ovviamente, usare le equazioni del moto e quelle cinematiche del moto accelerato del centro di massa del disco: Cioè:

$$\begin{array}{ll} F_1 - f = M a_{CM} & v_d = a_{CM} t_d \\ fr = I \frac{a_{CM}}{r} & d = \frac{1}{2} a_{CM} t_d^2 \end{array} \quad \text{e}$$

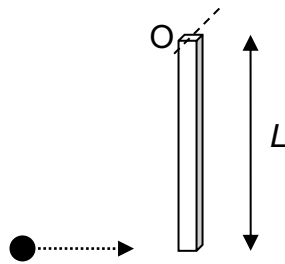
dove f è la forza di contatto disco-guida, a_{CM} l'accelerazione del centro di massa e t_d il tempo che impiega il disco per percorrere il tratto di guida orizzontale d , cioè è anche il tempo in cui agisce la forza costante F_1 . Usando queste equazioni e i principi di conservazione dell'energia si è in grado di risolvere il problema.

Problema 7.40 (10 punti)

Una particella di massa m urta con velocità $v = 60$ m/s, a un suo estremo, un'asta, inizialmente ferma e in posizione verticale, di lunghezza $L = 10$ cm e massa $M = m = 0.1$ kg vincolata a ruotare senza attrito attorno ad all'altro estremo O. Dopo l'urto, la particella rimane attaccata all'asta, formando con essa un unico corpo rigido. Calcolare,

1. la velocità angolare di rotazione dell'asta subito dopo l'urto; (5 punti)
2. l'energia meccanica dissipata durante l'urto. (5 punti)

Suggerimento: si faccia attenzione che essendo l'asta vincolata, non è possibile conservare la quantità di moto del sistema dato che agisce durante l'urto la forza impulsiva del vincolo.

**Soluzione**

La velocità angolare si calcola dalla conservazione della componente assiale del momento angolare rispetto all'asse di rotazione:

$$mvL = I_0\omega + m(\omega L)L,$$

da cui, usando $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$, si ottiene

$$\omega = \frac{mvL}{\frac{1}{3}ML^2 + mL^2} = \frac{3mv}{ML + 3mL} \cong 450 \text{ rad/s.}$$

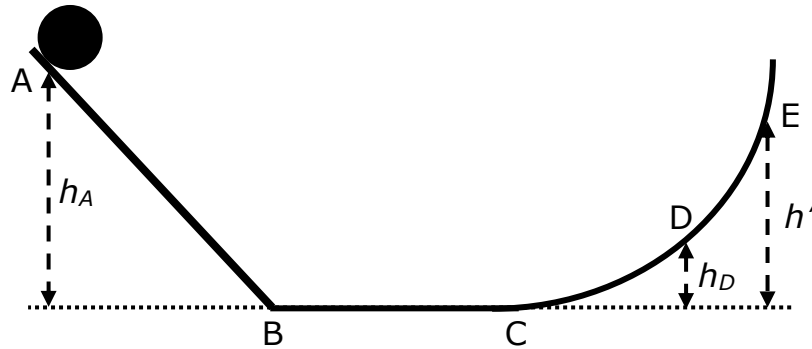
La differenza tra l'energia cinetica iniziale e finale dà l'energia meccanica dissipata durante l'urto

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2\right)\omega^2 \cong 45 \text{ J.}$$

Problema 7.41 (10 punti)

Con riferimento alla figura, un disco omogeneo di massa $m=1$ kg, parte da una quota $h_A=2$ m di un piano inclinato e scende con moto di puro rotolamento partendo con velocità iniziale nulla. Dopo il punto C il disco risale lungo una guida parabolica sempre con moto di puro rotolamento fino a sorpassare il punto D oltre il quale la guida diventa liscia (cioè il tratto DE è privo di attrito). Sapendo che l'altezza $h_D=0.6$ m, si determini:

1. la velocità v_D del disco nel punto D; (4 punti)
2. l'altezza h' sul secondo piano inclinato alla quale arriva il disco; (4 punti)
3. L'energia meccanica del disco nel punto E. (2 punti)

**Soluzione**

Applicando il principio di conservazione dell'energia e prendendo come stato finale quello in A di partenza e finale quello in D si ha:

$$mgh_A = mgh_D + \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}I\omega_D^2 \Rightarrow gh_A = gh_D + \frac{3}{4}v_D^2$$

dato che $I = (1/2)mR^2$ e $v_D = \omega_D R$.

Dalla precedente relazione abbiamo che:

$$v_D^2 = \frac{4}{3}g(h_A - h_D) \rightarrow v_D = 2\sqrt{\frac{1}{3}g(h_A - h_D)} \approx 4.3 \text{ m/s.}$$

Applicando di nuovo la conservazione dell'energia tra il punto D e il punto finale E al quale il disco si ferma si può scrivere:

$$mgh_D + \frac{3}{4}mv_D^2 = mgh' + \frac{1}{2}I\omega_D^2 \Rightarrow gh_D + \frac{1}{2}v_D^2 = gh'.$$

Esplicitando rispetto ad h' si ottiene:

$$h' = \frac{2}{3}h_A + \frac{1}{3}h_D \approx 1.53 \text{ m.}$$

L'energia meccanica finale è semplicemente uguale a quella iniziale perché non ci sono forze dissipative che compiono lavoro. Si ha, pertanto che:

$$E_{finale} = mgh' + \frac{1}{2}I\omega_D^2 = mgh_A \approx 19.6 \text{ J.}$$

Problema 7.42 (10 punti)

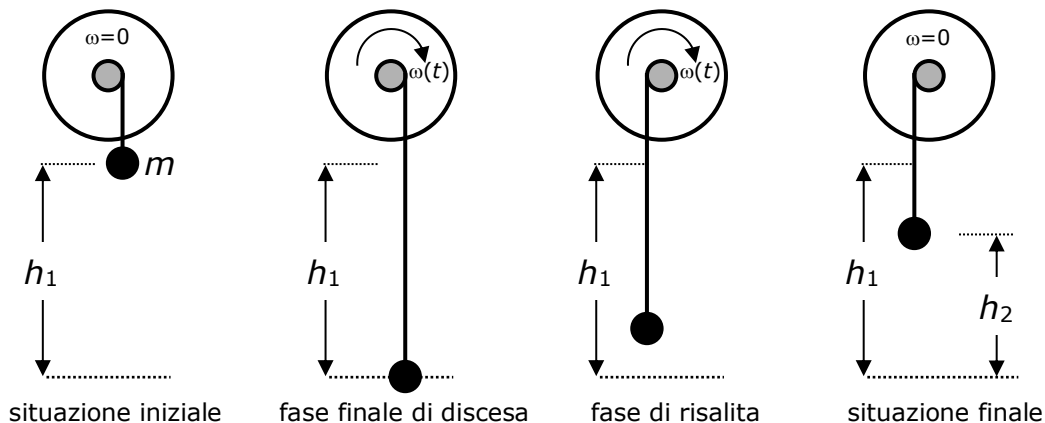
Un disco omogeneo di massa $M=1$ kg e raggio $R=0.5$ m è coassiale ad una puleggia di raggio $R_p=0.05$ m e massa $m_p=0.1$ kg. Sulla puleggia è avvolto un filo inestensibile e di massa trascurabile che vincola un corpo puntiforme di massa $m=1$ kg. Se partendo da fermo il corpo è lasciato libero di scendere lungo una direzione verticale, il suo moto fa ruotare il disco (fase di discesa). Una volta raggiunto il massimo allungamento del filo, che corrisponde a uno srotolamento del filo stesso pari ad $h_1=2$ m, il corpo risale finché il disco ruota per poi fermarsi. Se sull'asse di rotazione comune al disco e alla puleggia agisce un momento costante delle forze d'attrito, M_A , si osserva che l'altezza finale raggiunta dal corpo è minore di quella iniziale di partenza, e vale $h_2=1.5$ m.

Si determini:

4. il modulo del momento delle forze passive M_A ; (6 punti)
5. la velocità del corpo di massa m alla fine della fase di discesa; (4 punti)

Nota: si supponga che l'unica perdita di energia meccanica del sistema sia dovuta al lavoro del momento delle forze di attrito. Il momento d'inerzia del sistema disco + puleggia vale

$$I_{TOT} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}m_p R_p^2.$$

**Soluzione**

Applicando la conservazione dell'energia al sistema nella situazione iniziale e in quella finale si ha:

$$mgh_2 - mgh_1 = W(M_A),$$

dove si è indicato con $W(M_A)$ il lavoro svolto dal momento delle forze passive sull'asse comune di rotazione disco-puleggia. Dalla definizione di $W(M_A)$ si ha:

$$mg(h_2 - h_1) = -M_A \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_{fin}} d\vartheta \rightarrow mg(h_2 - h_1) = -\frac{M_A}{R_p} \int_0^{h_1+h_2} ds \rightarrow -mg(h_1 - h_2) = -\frac{M_A}{R_p} (h_1 + h_2)$$

dove si è usata la relazione $ds=R_p d\vartheta$.

Dalla precedente relazione si ottiene facilmente che:

$$|M_A| = mgR_p \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \approx 7 \times 10^{-2} \text{ Nm}.$$

Ora per trovare la velocità del corpo di massa m alla fine della fase di discesa si utilizza di nuovo la conservazione dell'energia meccanica ottenendo:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{TOT}\omega^2 - mgh_1 = W'(M_A)$$

dove

$$I_{TOT} = I_{disco} + I_{puleggia} = \frac{1}{2}[MR^2 + m_p R_p^2] \approx 0.125 \text{ kgm}^2.$$

Operando come precedentemente per trovare il lavoro del momento delle forze passive e usando la relazione $v=\omega R_p$ si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{2R_p h_1 (mgR_p + M_A)}{mR_p^2 + I_{TOT}}} \approx 0.94 \text{ m/s}.$$

Problema 7.43 (10 punti)

Un cilindro omogeneo di massa $m=0.5$ kg e raggio $r=0.5$ m, è posto all'interno della superficie cilindrica rigida di raggio $R=2$ m (si veda la figura 1). Nella sua posizione iniziale A individuata nella figura dall'angolo $\varphi_0=45^\circ$, il cilindro è fermo. Una volta lasciato libero, il cilindro si muove di moto di puro rotolamento. Facendo riferimento alla figura 2, si chiede di scrivere:

1. la relazione che esprime la velocità del centro di massa del cilindro $v(\varphi)$ in funzione dell'angolo φ per $\varphi_0 \geq \varphi \geq 0$ e verificare che per $\varphi=0$ essa vale $v(\varphi=0) \approx 2.4$ m/s; (6 punti)
2. il valore della reazione vincolare nel punto B, cioè per $\varphi=0$; (4 punti).

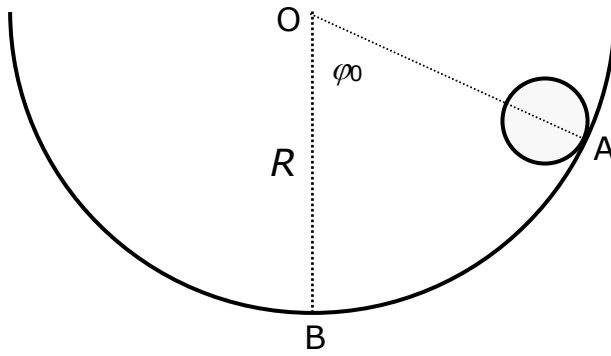


figura 1

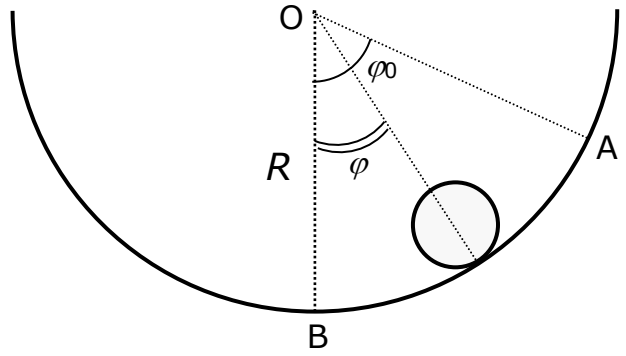
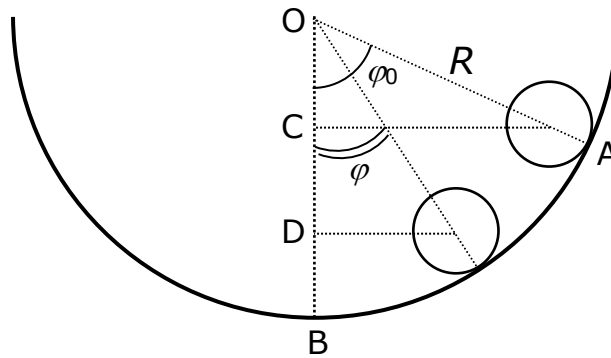


figura 2

Soluzione

Per rispondere alla prima domanda si prenda in esame la seguente figura per utilizzare in modo corretto il principio di conservazione dell'energia:



Assumendo come zero dell'energia potenziale il punto B più basso della superficie cilindrica di raggio R si come valore iniziale dell'energia potenziale $E_{p,i}$ e per quello all'angolo generico φ , $E_{p,\varphi}$ le seguenti relazioni:

$$E_{p,i} = mg(\overline{CB}) \quad ; \quad E_{p,\varphi} = mg(\overline{DB}),$$

con

$$\overline{CB} = R - (R - r) \cos \varphi_0 \quad ; \quad \overline{DB} = R - (R - r) \cos \varphi$$

Con queste relazioni è possibile ora scrivere la conservazione dell'energia nel seguente modo:

$$E_{p,i} = E_{K,\varphi} + E_{p,\varphi} \quad \rightarrow \quad mg[R - (R - r) \cos \varphi_0] = \frac{1}{2}mv^2(\varphi) + \frac{1}{2}I\omega^2(\varphi) + mg[R - (R - r) \cos \varphi]$$

Ricordando il momento d'inerzia del cilindro e la relazione $v=\omega r$, si ha, con semplici passaggi:

$$v(\varphi) = \sqrt{\frac{4}{3} g(R-r)(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}.$$

Come richiesto dal problema, questa relazione per $\varphi=0$ fornisce:

$$v(\varphi) = \sqrt{\frac{4}{3} g(R-r)(1 - \cos \varphi_0)} \approx 2.4 \text{ m/s}.$$

Dalla equazione della dinamica sulle forze applicate al centro di massa del cilindro si ha:

$$\vec{F}_c + m\vec{g} = m\vec{a},$$

che proiettata lungo una generica direzione formante un angolo φ con la verticale OB fornisce la seguente relazione:

$$F_c(\varphi) = ma_n + mg \cos \varphi = mg[\cos \varphi + (R-r)(\cos \varphi - \cos \varphi_0)]$$

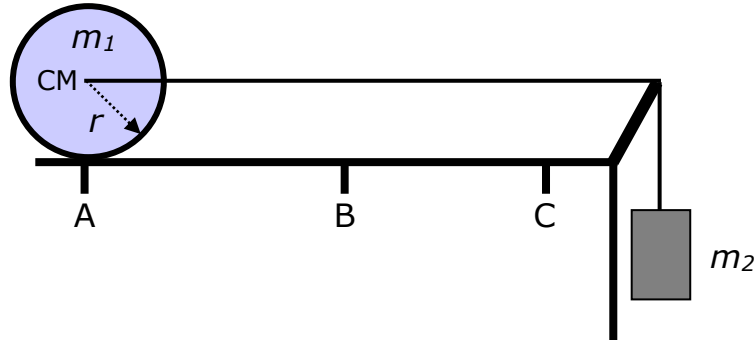
dove $a_n(\varphi) = v^2(\varphi)/(R-r)$. Per $\varphi=0$ si ha:

$$F_c(\varphi = 0) = mg[1 + (R-r)(1 - \cos \varphi_0)] \approx 7 \text{ N}.$$

Problema 7.44 (10 punti)

Un cilindro omogeneo di massa $m_1 = 3 \text{ kg}$ e raggio r , si muove su di un piano orizzontale. Il moto del cilindro si produce perché un corpo di massa $m_2 = 1 \text{ kg}$, legato con un filo inestensibile e di massa trascurabile al suo centro di massa CM, scende seguendo una traiettoria verticale (si veda la figura). Sapendo che il moto del cilindro è di puro rotolamento solo nel tratto AB, essendo il tratto BC privo di attrito, si chiede di calcolare:

3. l'accelerazione del centro di massa del cilindro quando percorre il tratto AB; (3 punti)
4. l'accelerazione del centro di massa del cilindro quando percorre il tratto BC; (3 punti)
5. il valore minimo della tensione del filo affinché esso non si spezzi. (4 punti)

**Soluzione**

Lungo il tratto AB le equazioni del moto del sistema sono le seguenti:

$$T_1 - f = m_1 a_{1,CM} \quad ; \quad fr = I \frac{a_{1,CM}}{r} \quad ; \quad m_2 g - T_1 = m_2 a_{1,CM} \quad (1)$$

dove T_1 è la tensione del filo nel tratto AB, $I = (1/2)m_1 r^2$ il momento d'inerzia del cilindro e $a_{1,CM}$ l'accelerazione del sistema (il filo è inestensibile e di massa trascurabile).

Lungo il tratto BC privo di attrito il cilindro continua a ruotare con la stessa velocità angolare che aveva alla fine del tratto AB e le equazioni del moto del sistema diventano:

$$T_2 = m_1 a_{2,CM} \quad ; \quad m_2 g - T_2 = m_2 a_{2,CM} \quad (2)$$

dove, ora, T_2 e $a_{2,CM}$ sono la tensione del filo e il valore della accelerazione del sistema nel tratto BC. Dalle equazioni (1) e (2) si ricava facilmente:

$$a_{1,CM} = g \left[\frac{m_2}{m_2 + (3/2)m_1} \right] \cong 1.78 \text{ m/s}^2 \quad ; \quad a_{2,CM} = g \left[\frac{m_2}{m_2 + m_1} \right] \cong 2.45 \text{ m/s}^2.$$

Per conoscere il valore minimo che deve avere la tensione del filo affinché non si spezzi è necessario esaminare i valori delle tensioni che derivano dalle equazioni (1) e (2). Si ha:

$$T_1 = \frac{3}{2} m_1 a_{1,CM} = m_2 (g - a_{1,CM}) \cong 8 \text{ N} \quad ; \quad T_2 = m_1 a_{2,CM} \cong 7.35 \text{ N}.$$

Pertanto, al minimo, la tensione del filo non può essere inferiore a 8 N.

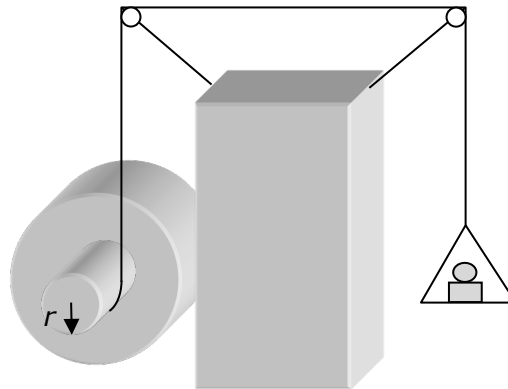
Problema 7.45 (10 punti)

Sul piatto (di massa trascurabile) a destra della figura possono essere posti dei pesi variabili. Sulla sinistra uno yo-yo composto da due cilindri coassiali, ha massa M , momento d'inerzia I e raggio r del cilindro interno su cui scorre senza strisciare il filo inestensibile. Si pone sul piatto una massa m , scegliendola in modo tale che il piatto stesso rimanga immobile mentre il filo avvolto sul cilindro interno dello yo-yo si srotola.

Si chiede di calcolare:

1. l'accelerazione a_{CM} del centro di massa dello yo-yo; (3 punti)
2. il valore della tensione del filo avvolto intorno al cilindro interno dello yo-yo; (3 punti)
3. il valore della massa m posta sul piatto a destra della figura. (4 punti)

Dati del problema: $M = 0.1 \text{ kg}$, $I = 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $r = 0.01 \text{ m}$.

**Soluzione**

Le equazioni dello yo-yo nella configurazione del punto a sono (asse y verso l'alto, z che esce dal foglio):

$$T - Mg = -Ma_{CM} \quad ; \quad Tr = I\alpha$$

con $a_{CM} = \alpha r$.

Risolvendo si ottiene:

$$a_{CM} = \frac{g}{1 + I/Mr^2} \approx 0.1 \text{ m/s}^2 \quad ; \quad T = \frac{Ig/r^2}{1 + I/Mr^2} \approx 0.97 \text{ N}.$$

Dato che il piatto di destra è fermo, dal secondo principio della dinamica si ha:

$$T - mg = 0$$

Sostituendo l'espressione di T si ottiene:

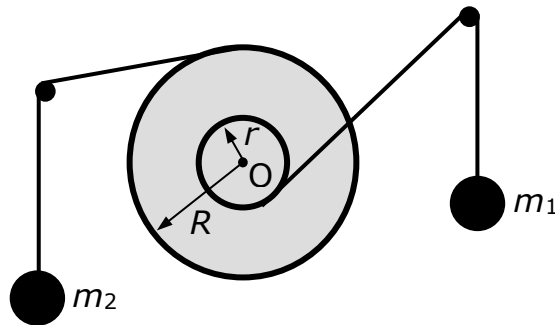
$$m = \frac{I/r^2}{1 + I/Mr^2} = \frac{1}{1/M + r^2/I} \approx 0.1 \text{ kg}.$$

Problema 7.46 (10 punti)

Un disco di raggio $R=1$ m e massa m è libero di ruotare senza attrito intorno al suo asse baricentrale O. Facendo riferimento alla figura, al disco sono collegate mediante due fili identici e di massa trascurabile, due masse puntiformi $m_1=2$ kg e $m_2=1$ kg. Il filo della massa m_1 passa all'interno di una scanalatura del disco di raggio $r=0.3$ m rispetto al centro O. Il filo della massa m_2 è invece arrotolato attorno alla circonferenza esterna del disco. Nell'ipotesi di assenza di attriti e di velocità iniziale nulla del sistema, si misura che dopo un tempo $t=1$ s la massa m_2 è scesa di una quota $h_2=0.7$ m. Si chiede di determinare:

5. l'accelerazione angolare α del disco;
6. la massa m del disco;
7. l'energia meccanica del sistema al tempo $t=1$ s.

NOTA: si assuma, per semplicità, il momento d'inerzia del disco pari a $I=(1/2)mR^2$.

**Soluzione:**

Essendo il moto delle due masse uniformemente accelerato si ha che l'accelerazione della massa m_2 vale:

$$a_2 = \frac{2h_2}{t^2} = 1.4 \text{ m/s}^2.$$

Pertanto, dalla relazione $a_2 = \alpha R$ si ha che l'accelerazione angolare vale $\alpha = 1.4 \text{ rad/s}^2$. Analogamente, dalla relazione $a_1 = \alpha r$ si trova l'accelerazione lineare della massa m_1 $a_1 \approx 0.42 \text{ m/s}^2$. Per trovare la massa del disco si possono scrivere le equazioni dinamiche per le due masse puntiformi e il disco stesso. Scegliendo l'asse z parallelo alla direzione verticale dei due fili e rivolto verso il basso, si ha:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad ; \quad m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad ; \quad T_2 R + T_1 r = I \alpha = \frac{1}{2} m R^2 \alpha,$$

dove T_1 e T_2 sono le tensioni dei fili. Sostituendo le loro espressioni ottenute dalle prime due equazioni nella terza si ottiene:

$$m = \frac{2[m_2 R(g - a_2) + m_1 r(g - a_1)]}{\alpha R^2} \approx 20.0 \text{ kg}.$$

L'energia meccanica del sistema al tempo $t=1$ s deve essere uguale a quella al tempo $t=0$ dato che non agiscono forze non conservative. Pertanto si ha:

$$E_{mi} = m_2 g h_2 + m_1 g h_1.$$

Dato che le energie potenziali di entrambe le masse contribuiscono al movimento del disco. Il valore di h_1 si trova immediatamente dalla relazione del moto uniformemente accelerato per la massa m_1 : $h_1 = (1/2)a_1 t^2 = 0.21$ m. Pertanto si ha $E_{mi} \approx 11$ J.

In modo alternativo, ma più laborioso, si può scrivere l'energia meccanica finale al tempo $t=1$ s nel seguente modo:

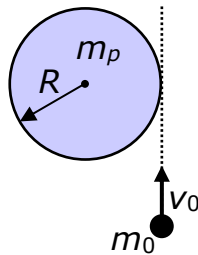
$$E_{fi} = \frac{1}{2} I \omega^2(t) + \frac{1}{2} m_1 v_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 v_2^2(t)$$

con $\omega = \alpha t$ e si sono prese nulle le energie potenziali delle due masse. Le velocità si possono calcolare e il risultato numerico è uguale a quello trovato in precedenza.

Problema 7.47 (10 punti)

Una piattaforma circolare di massa $m_p=20$ kg e raggio $R=1$ m, posta su di un piano orizzontale, è libera ruotare intorno ad un asse passante per il baricentro. Un corpo di massa $m_0=5$ kg e avente una velocità $v_0=2$ m/s si muove lungo una traiettoria tangente alla circonferenza della piattaforma. Raggiunta la piattaforma, la urta in modo anelastico conficcandosi su di essa. Si chiede di calcolare:

1. la velocità angolare della piattaforma dopo l'urto;
2. il momento di attrito costante che agisce sull'asse di rotazione della piattaforma se dopo un tempo $t=100$ s essa si ferma;
3. il tempo T che impiega la piattaforma a compiere il primo giro completo dopo l'urto.

**Soluzione**

Il principio di conservazione del momento angolare vale: $m_0 v_0 R = I_{TOT} \omega_0$ dove

$$I_{TOT} = \frac{m_p R^2}{2} + m_0 R^2 \approx 15 \text{ kgm}^2. \text{ Quindi si ha } \omega_0 \approx 0.67 \text{ rad/s.}$$

Il momento M delle forze d'attrito si ricava ricordando che:

$$I \frac{d\omega}{dt} = -M.$$

Integrando si ha:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{Mt}{I_{TOT}} \rightarrow M = \frac{\omega_0 I_{TOT}}{t} \approx 0.1 \text{ Nm.}$$

dato che al tempo $t=100$ s la velocità angolare del sistema è nulla.

Dalla precedente equazione su ω si ha che per il primo giro si ha:

$$\varphi(T) = 2\pi = \int_0^T \omega(t) dt = \int_0^T \omega_0 dt - \frac{M}{I_{TOT}} \int_0^T t dt \rightarrow 2\pi - \omega_0 T + \frac{M}{2I_{TOT}} T^2 = 0.$$

Dalla precedente equazione algebrica di 2° grado si ottiene:

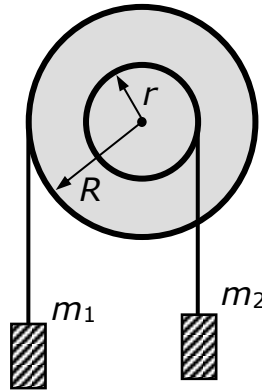
$$T = I_{TOT} \frac{\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - 4\pi M / I_{TOT}}}{M}.$$

La soluzione fisica è quella con il segno negativo per la quale $T \approx 9.91$ s.

Problema 7.48 (10 punti)

Il sistema riportato in figura è composto da due dischi tra di loro saldati di massa $M=2m$ ed m e raggi rispettivamente pari a $R=2r$, con $r=0.4$ m. Le due masse $m_1=m_2=m=0.5$ kg, sono legate a due fili inestensibili e di massa trascurabile che si arrotolano sul diametro esterno dei due dischi. Partendo il sistema da fermo, si chiede di determinare:

1. le accelerazioni lineari di m_1 ed m_2 ;
2. l'accelerazione angolare del disco;
3. la tensione dei fili T_1 e T_2 .

**Soluzione**

Assumendo un opportuno sistema di riferimento, le equazioni del moto del sistema sono: $ma=mg-T$; $-m'a'=m'g-T'$ e $I\alpha=RT-rT'$, dove $\alpha=a/R=a/r$.

$$ma_1 = mg - T_1 \quad ; \quad ma_2 = T_2 - mg \quad ; \quad RT_1 - rT_2 = I\alpha \quad (1)$$

essendo $m_1=m_2=m$ e il momento d'inerzia I è dato da:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 = \frac{9}{2}mr^2.$$

Essendo il sistema solidale, i due cilindri hanno la stessa velocità angolare ma le due masse hanno accelerazioni lineari differenti. In particolare si ha:

$$\alpha = \frac{a_1}{R} = \frac{a_2}{r}; \quad a_1 = 2a_2$$

Risolvendo il sistema (1) si ha:

$$a_2 = (2/19)g \approx 1.03 \text{ m/s}^2; \quad a_1 = 2.06 \text{ m/s}^2; \quad \alpha = 2.57 \text{ rad/s}^2$$

e

$$T_1 = m(g - a_1) \approx 3.88 \text{ N}; \quad T_2 = m(a_2 + g) \approx 5.42 \text{ N}.$$

Problema 7.49 (10 punti)

Un cilindro di massa M e raggio R è posizionato su un piano orizzontale scabro. All'inizio è fermo, sul suo asse agisce un momento torcente τ . Determinare a) il coefficiente di attrito statico minimo (μ_s) che assicura il moto di puro rotolamento; b) l'accelerazione del centro di massa, nel caso di puro rotolamento; c) il tempo impiegato dal cilindro per raggiungere la velocità v_0 . Appena raggiunta la velocità v_0 , la rotazione del cilindro attorno al proprio asse viene bruscamente interrotta, ovvero il cilindro non ruota più attorno al proprio asse, si determini in questo caso: d) lo spazio di frenata se il coefficiente di attrito statico è $\mu_d = \mu_s/2$; e) il lavoro fatto dalla forza di attrito. [$\tau = 3\text{ N}\cdot\text{m}$, $R = 0.5\text{ m}$, $M = 2\text{ kg}$, $v_0 = 10\text{ m/s}$]

Soluzione

Le equazioni che governano il moto del cilindro (momento di inerzia $I_{CM} = MR^2/2$) sono:

$$\tau - fR = I\alpha \quad ; \quad f = Ma_{CM}$$

dove f è la forza di contatto tra cilindro e piano. Per il moto di puro rotolamento si ha $a_{CM} = \alpha R$.

Dalle precedenti equazioni si ha subito che:

$$a_{CM} = \frac{2\tau}{3MR} = 2 \text{ ms}^{-2} \quad ; \quad f = \frac{2\tau}{3R}$$

Le condizioni di puro rotolamento richiedono anche che:

$$f \leq \mu_s N = \mu_s Mg \quad \rightarrow \quad \frac{2\tau}{3R} \leq \mu_s Mg \quad \rightarrow \quad \mu_s \geq \frac{2\tau}{3RMg} \geq 0.2.$$

Pertanto il valore minimo del coefficiente d'attrito che garantisce il moto di puro rotolamento del cilindro nelle condizioni date vale $\mu_s = 0.2$. Il moto del centro di massa è rettilineo uniformemente accelerato. Di conseguenza si possono sfruttare le equazioni cinematiche ottenendo $t = v_0/a_{CM} = 5 \text{ s}$ essendo la velocità iniziale del sistema nulla.

Nell'ipotesi del problema secondo al quale una volta raggiunta la velocità v_0 il moto di rotazione si arresta istantaneamente, la decelerazione e lo spazio di frenata valgono rispettivamente:

$$Ma = \mu_d Mg \quad \rightarrow \quad a = 1 \text{ m/s}^2 \quad ; \quad x_F = v_0 t - (1/2)at^2 \quad ; \quad v(t_F) = 0 = v_0 - at \quad \rightarrow \quad x_F = 50 \text{ m}.$$

Per trovare lo spazio di frenata e il lavoro della forza d'attrito si poteva più facilmente usare anche la conservazione dell'energia meccanica ottenendo:

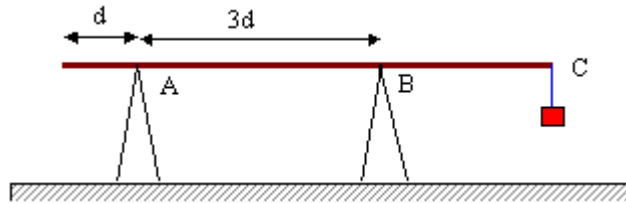
$$W(F_A) = (1/2)Mv_0^2 = 100 \text{ J} \quad ; \quad W(F_A) = \mu_d Mg x_F \quad \rightarrow \quad x_F = 50 \text{ m}.$$

Problema 7.50 (10 punti)

Un'asta omogenea di massa $3M$ e lunghezza $6d$ poggia su due supporti lisci in A e B, ed è in equilibrio statico. All'estremità C dell'asta è appeso un filo con un corpo di massa M .

a) Si determinino le reazioni vincolari in A e B.

b) Si calcoli in quale punto dell'asta bisogna appoggiare un corpo di massa M_o , affinché le reazioni vincolari in A e B siano uguali in modulo. [$M=1$ kg, $d=2$ m, $M_o=4$ kg].

**Soluzione**

Le condizioni di equilibrio del sistema fisico (non essendo un punto materiale) richiedono che la risultante delle forze e dei momenti siano entrambe nulle. Assumendo, per esempio, l'estremo dell'asta come il punto rispetto al quale calcolare i momenti e ricordando la definizione di centro di massa si ha:

$$N_A + N_B = 3Mg + Mg \quad ; \quad N_A d + 4N_B d = 9Mgd + 6Mgd ,$$

dove N_A e N_B sono le reazioni vincolari nei punti A e B. Da queste equazioni si ottengono i valori $N_A=3.3$ N e $N_B=36.7$ N.

Per rispondere alla seconda domanda le due precedenti equazioni diventano:

$$N + N = 4Mg + M_o g \quad ; \quad Nd + 4Nd = 15Mgd + 6M_o g d'$$

dove d' è la distanza incognita richiesta che vale:

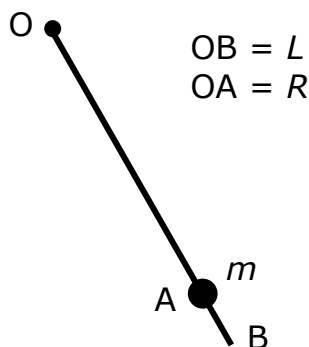
$$d' = \frac{5d}{2} \left(1 - 2 \frac{M}{M_o} \right) \approx 2.5 \text{ m.}$$

Problema 7.51 (10 punti)

Un pendolo fisico è costituito da un'asta sottile omogenea di massa $M=1$ kg e lunghezza $L=1$ m che oscilla intorno ad un suo estremo, e da una massa puntiforme $m=4M$ fissata sull'asta ad una distanza x dall'asse di oscillazione.

Si chiede di:

1. calcolare la posizione del baricentro del sistema rispetto al punto O per $x = 0.75$ m;
2. calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo fisico sempre per $x = 0.75$ m;
3. ripetere gli stessi calcoli per $x = 0.8$ m. Cosa si può dedurre sulla dipendenza della distanza di m da O (almeno con questi valori dei parametri)?

**Soluzione**

Il periodo delle piccole oscillazioni per il pendolo fisico è dato da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{m_T g h}} \quad (1)$$

dove I_z è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, h la distanza dell'asse di rotazione dal baricentro del sistema e m_T la massa totale del sistema. Il momento d'inerzia è dato dalla somma di quello dell'asta e di quello della massa m , entrambi calcolati rispetto all'asse di rotazione O. Allora si ha:

$$I_z = \frac{1}{3} M L^2 + m x^2 = \frac{31}{12} M L^2 \approx 2.58 \text{ kgm}^2.$$

Dato che $x = (3/4)L$.

D'altra parte la posizione del centro di massa dell'intero sistema, calcolata sempre rispetto ad O, è data dalla seguente relazione:

$$h = \frac{M(L/2) + m x}{M + m} = \frac{7}{10} L = 0.7 \text{ m},$$

dove si è considerata l'asta omogenea come un punto materiale di massa M posto nella coordinata del suo centro di massa ($L/2$ rispetto all'asse di rotazione O). Sostituendo le due precedenti relazioni nella espressione del periodo T , si ha:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{31L}{42g}} \approx 1.721 \text{ s}$$

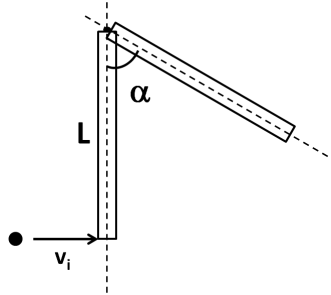
Ripetendo gli stessi calcoli per $x = 0.8$, si ottiene $T = 1.775$ s. Con questi valori numerici, aumentare la distanza x aumenta il periodo delle piccole oscillazioni.

Attenzione: il problema proposto alla prova d'esame aveva nel testo $x = 0.7$ m. Indipendentemente dal valore di x la soluzione è quella sopra riportata.

Problema 7.52 (10 punti)

Un'asta di lunghezza $L=1$ m e massa $m_A=1$ kg è incernierata con un perno ad una sua estremità e collocata, a riposo, in posizione verticale. Un punto materiale di massa $m=50$ g e colpisce con velocità v_i l'estremità libera dell'asta come indicato in figura. Sapendo che l'urto è completamente anelastico, si nota che il sistema si ferma formando un angolo $\alpha=60^\circ$ rispetto alla posizione verticale di riposo dell'asta. In assenza di attriti, si chiede di determinare:

1. la posizione del centro di massa del sistema dopo l'urto; (2 punti)
2. il modulo della velocità iniziale v_i del punto materiale; (3 punti)
3. il modulo della velocità angolare del sistema dopo l'urto; (2 punti)
4. la perdita totale di energia meccanica dovuta all'urto anelastico. (3 punti)

**Soluzione**

La posizione del nuovo centro di massa, una volta avvenuto l'urto anelastico vale:

$$x_{CM} = \frac{m_A(L/2) + mL}{m + m_A} = 0.524 \text{ m.}$$

avendo preso come origine l'asse di rotazione dell'asta. Essendo l'urto anelastico e il sistema vincolato, si conserva il solo momento angolare. Pertanto si ha:

$$mv_i L = I_{TOT} \omega$$

Con

$$I_{TOT} = \frac{1}{3} m_A L^2 + mL^2 = 0.383 \text{ kgm}^2.$$

Inoltre, sapendo che il sistema dopo l'urto (asta e punto materiale) descrive un angolo massimo $\vartheta=60^\circ$ rispetto alla posizione verticale, si ha, applicando principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} I_{TOT} \omega^2 = (m_A + m) g x_{CM} (1 - \cos \alpha)$$

Ricordando quanto trovato con l'applicazione del principio di conservazione del momento angolare si ha:

$$v_i = \frac{I_{TOT} \omega}{mL} = \frac{1}{mL} \sqrt{2 I_{TOT} (m_A + m) g x_{CM} (1 - \cos \alpha)} = 28.8 \text{ m/s.}$$

Di conseguenza, dalla conservazione del momento angolare si trova il valore della velocità angolare del sistema subito l'urto $\omega = 3.76 \text{ rad/s}$.

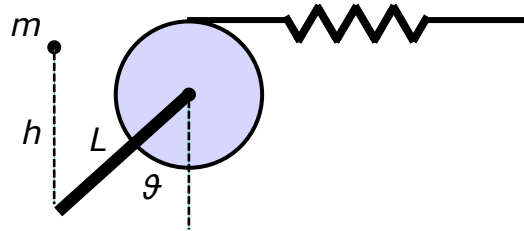
La perdita totale di energia meccanica si ricava dalla conservazione dell'energia:

$$\Delta E_m = (m_A + m) g x_{CM} (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} m v_i^2 = -18.04 \text{ J.}$$

Problema 7.53 (10 punti)

Un disco omogeneo di massa $m_d=2$ kg e raggio $R=0.3$ m è vincolato a ruotare senza attrito intorno all'asse passante per il suo centro di massa (nella figura questo asse è perpendicolare al foglio). Facendo riferimento alla figura, un filo inestensibile e di massa trascurabile ha un capo vincolato al bordo esterno del disco mentre l'altro è collegato ad una molla di costante elastica $K=15$ N/m fissata ad una parete verticale. Sull'asse di rotazione è vincolata anche un'asta omogenea di lunghezza $L=0.6$ m e massa $m_b=0.05$ kg. Nelle condizioni di equilibrio l'asta forma un angolo $\vartheta = 60^\circ$. Ad un certo istante, viene lasciato cadere da una altezza h un punto materiale di massa $m=0.05$ kg che urta in modo completamente anelastico l'asta nel suo estremo libero. Si chiede di calcolare:

1. l'allungamento della molla dalla sua posizione iniziale nelle condizioni di equilibrio; (4 punti)
2. l'altezza minima h da cui lasciar cadere il punto materiale affinché, dopo l'urto con l'asta, quest'ultima riesca a portarsi lungo una direzione verticale ($\vartheta=0^\circ$ con velocità angolare nulla del sistema meccanico); (5 punti)
3. nelle condizioni della domanda 2, la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto. (1 punto)

**Soluzione**

Nelle condizioni iniziali in cui il sistema è all'equilibrio, le forze peso dell'asta e del disco sono bilanciate dal vincolo rappresentato dall'asse di rotazione. Inoltre, si devono equilibrare i momenti della forza elastica della molla e quello della forza peso dell'asta, entrambe riferite al centro di massa del disco:

$$KR\Delta x = \frac{L}{2}m_b g \sin \vartheta \rightarrow \Delta x = \frac{Lm_b g \sin \vartheta}{2KR} = 2.83 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

Nel processo di urto si conserva il solo momento angolare rispetto all'asse di rotazione:

$$mvL \sin \vartheta = I_{TOT} \omega \rightarrow \omega = \frac{mL \sin \vartheta \sqrt{2gh}}{I_{TOT}}$$

dove la velocità del punto materiale è $v = \sqrt{2gh}$ e $I_{TOT} = \frac{1}{2}m_d R^2 + \frac{1}{3}m_b L^2 + mL^2 = 0.11 \text{ kgm}^2$.

Si consideri ora la conservazione dell'energia meccanica dopo l'urto ipotizzando, come riportato nel testo, che la velocità angolare del sistema sia nulla quando l'asta raggiunge la posizione verticale:

Energia meccanica dello stato iniziale:

$$\frac{1}{2}I_{TOT}\omega^2 + \frac{1}{2}K\Delta x^2 + 2mg\overline{OA}(1 - \cos \vartheta)$$

dove $\overline{OA} = \frac{3}{4}L$ è la posizione del nuovo centro di massa del sistema asta e punto materiale dopo l'urto. L'ultimo termine rappresenta quindi l'energia potenziale del sistema misurata rispetto alla quota finale del centro di massa del sistema asta-punto materiale.

Energia meccanica finale:

$$\frac{1}{2}K\left(\Delta x + \frac{\pi R}{3}\right)^2$$

dove $\pi R/3$ è l'arco di circonferenza sotteso all'angolo di 60° . Pertanto si ha:

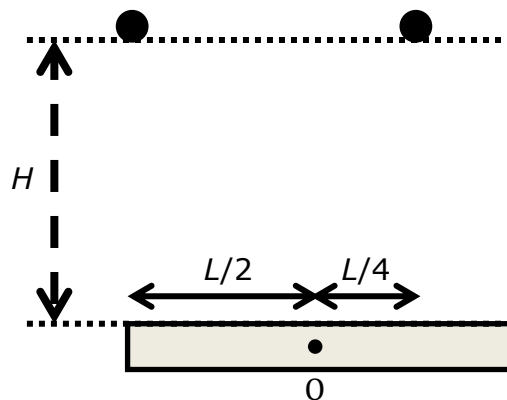
$$h = I_{TOT} \frac{\left[K\left(\Delta x + \frac{\pi R}{3}\right)^2 - K\Delta x^2 - 3mgL(1 - \cos \vartheta)\right]}{2gm^2g^2\sin^2\vartheta} = 10.8 \text{ m}$$

Dal valore di h trovato è possibile determinare la velocità angolare subito dopo l'urto che vale $\omega = 3.45 \text{ rad/s}$.

Problema 7.54 (10 punti)

Un'asta di lunghezza $L=50$ cm e massa $M=1$ kg è impernata nel suo centro di massa ed è posta in posizione di quiete orizzontale. Da un'altezza $H=2$ m rispetto al centro dell'asta, vengono lasciate cadere allo stesso istante due palline, ciascuna di massa $m=100$ g. Le palline urtano l'asta in modo completamente anelastico, una alla distanza $L/2$ dal centro, l'altra alla distanza $L/4$ dall'altro lato rispetto al centro O (vedi figura). Si chiede di calcolare:

1. La velocità angolare ω dell'asta dopo l'urto in modulo direzione e verso; (3 punti)
2. L'impulso $\mathbf{J}$ esercitato dal perno al momento dell'urto in modulo, direzione e verso; (3 punti)
3. Il momento $\mathbf{M}_p$ della forza peso applicata al sistema dopo l'urto rispetto al polo O in modulo direzione e verso; (2 punti)
4. Si osserva che l'asta compie un quarto di giro dopo l'urto, poi si arresta a causa dell'attrito con il perno. Calcolare il momento della forza di attrito costante $\mathbf{M}_a$. (2 punti)

**Soluzione**

La velocità delle palline prima dell'urto si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gH} = 6.3 \text{ m/s}$$

Il momento di inerzia del sistema asta più palline dopo l'urto, rispetto al polo O, vale:

$$I_O = \frac{1}{12}ML^2 + m\frac{L^2}{4} + m\frac{L^2}{16} = 0.029 \text{ kgm}^2$$

Durante l'urto vincolato si conserva il momento angolare rispetto al perno O, da cui si ricava la velocità angolare dell'asta dopo l'urto, positiva, cioè uscente dal foglio. Il verso di rotazione è, conseguentemente, antiorario:

$$mv\frac{L}{2} - mv\frac{L}{4} = I_O\omega \Rightarrow \omega = \frac{mvL}{4I_O} = 2.72 \text{ rad/s}$$

Dal teorema dell'impulso si ricava il vettore $\mathbf{J}$. Per conoscere la quantità di moto finale, è necessario conoscere la posizione del centro di massa del sistema rispetto all'asse di rotazione in O. La distanza del CM rispetto ad O, prendendo come positivo il verso destro, si ottiene da:

$$x_{CM} = \frac{-m\frac{L}{2} + m\frac{L}{4}}{m + m + M} = -0.01 \text{ m}$$

Quindi il nuovo CM si trova 1 cm a sinistra del centro O dell'asticella. Tornando all'impulso e considerando come positivo il verso alto dell'asse verticale:

$$\mathbf{J} = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_{fin} - \mathbf{p}_{in} = -(2m + M)\omega|x_{CM}| + 2mv = 1.22 \text{ Ns}$$

con $\mathbf{J}$ diretto verticalmente e verso l'alto.

Il momento della forza peso dopo l'urto si calcola semplicemente come:

$$M_p = (2m + M)g|x_{CM}| = 0.12 \text{ Nm}$$

positivo (perpendicolare al foglio e in verso uscente) in quanto tende a fare ruotare il sistema in senso antiorario.

Il momento della forza di attrito, invece può essere calcolato dalla relazione tra lavoro delle forze non conservative e variazione di energia meccanica. Ricordando che la barra dopo l'urto gira in senso antiorario, il suo CM, posto ad una distanza x_{CM} dall'asse O di rotazione, si abbasserà proprio di questa quota una volta che ha compiuto una rotazione di 90° . Prendendo la quota finale del CM come quella di riferimento per l'energia potenziale si ha:

$$E_{m,i} = (2m + M)g|x_{CM}| + \frac{1}{2}I_O\omega^2 \quad ; \quad E_{m,f} = 0.$$

Essendo il lavoro del momento d'attrito costante pari a $W_a = M_a \pi/2$, si ha:

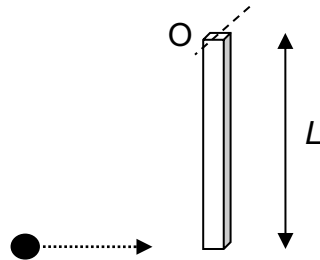
$$M_a \frac{\pi}{2} = -(2m + M)g|x_{CM}| - \frac{1}{2}I_O\omega^2 \Rightarrow M_a = -\frac{2}{\pi} \left((2m + M)g|x_{CM}| + \frac{1}{2}I_O\omega^2 \right) = -0.12 \text{ Nm}$$

Il segno è negativo in quanto si oppone alla rotazione antioraria.

Problema 7.55 (10 punti)

Una particella di massa $m=0.1$ kg urta con velocità $v=0.6$ m/s, a un suo estremo, un'asta, inizialmente ferma e in posizione verticale, di lunghezza $L=10$ cm e massa $M=0.1$ kg vincolata a ruotare senza attrito attorno ad all'altro estremo O. Dopo l'urto, la particella rimane attaccata all'asta, formando con essa un unico corpo rigido. Calcolare:

1. La velocità angolare di rotazione dell'asta subito dopo l'urto; (3 punti)
2. l'energia meccanica dissipata durante l'urto; (2 punti)
3. La reazione vincolare del supporto in O; (3 punti)
4. L'angolo formato con la verticale quando l'asta si ferma dopo l'urto. (2 punti)

**Soluzione**

La velocità angolare si calcola dalla conservazione della componente assiale del momento angolare rispetto all'asse di rotazione:

$$mvL = I_0\omega + m(\omega L)L, \text{ ovvero } mvL = I_{0,TOT}\omega,$$

$$\text{dove } I_{0,TOT} = I_0 + mL^2 = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2 = 1.33 \times 10^{-3} \text{ Kg m}^2.$$

Dalla precedente equazione si ottiene:

$$\omega = \frac{mvL}{I_{0,TOT}} = 4.5 \text{ rad/s.}$$

La differenza tra l'energia cinetica iniziale e finale dà l'energia meccanica dissipata durante l'urto:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I_{0,TOT}\omega^2 = 4.8 \times 10^{-3} \text{ J.}$$

La posizione del CM dopo l'urto, misurata rispetto all'asse di rotazione è:

$$x = \frac{ML/2 + mL}{m + M} = 7.5 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

e la sua velocità vale:

$$v_{CM} = \omega x = 0.3375 \text{ m/s.}$$

Da questa relazione si ricava la reazione vincolare, positiva da sinistra verso destra, vale:

$$J = (m + M)v_{CM} - mv = 0.0075 \text{ Ns.}$$

L'angolo formato si trova imponendo che tutta l'energia cinetica dopo l'urto si trasformi in energia potenziale:

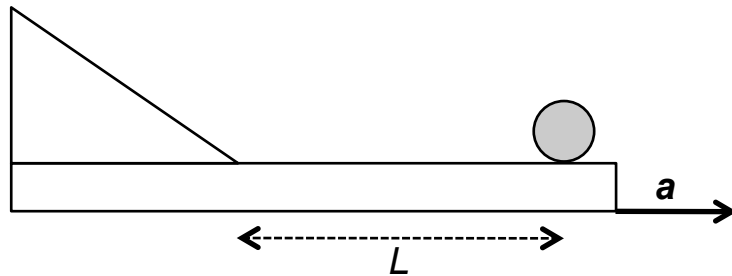
$$\frac{1}{2}I_{0,TOT}\omega^2 = (m + M)gx(1 - \cos\theta) \Rightarrow \theta = \arccos\left[1 - \frac{I_{0,TOT}\omega^2}{2(m + M)gx}\right] = 0.43 \text{ rad} = 24,7^\circ.$$

Problema 7.56 (10 punti)

Una sfera è ferma sulla piattaforma nella posizione indicata nella figura. Ad un certo istante, al piano viene impressa un'accelerazione $\mathbf{a}$ di verso e direzione come indicato in figura. Sapendo che la massa della sfera vale $m=0.5$ kg e che il coefficiente di attrito statico tra sfera e piano vale $\mu=0.3$, si chiede di calcolare:

1. il valore massimo dell'accelerazione $\mathbf{a}$ per il quale il moto della sfera rimanga di puro rotolamento; (3 punti)
2. l'accelerazione del centro di massa della sfera nelle condizioni date; (2 punti)
3. il tempo impiegato dalla sfera per percorrere il tratto $L=1$ m che la separa dall'inizio del piano inclinato indicato in figura; (3 punti)
4. l'altezza massima raggiunta dalla sfera una volta che ha impegnato il piano inclinato che presenta lo stesso coefficiente di attrito statico $\mu=0.3$. Per semplicità, si assuma che durante la salita NON agisca più l'accelerazione $\mathbf{a}$ e che la piattaforma si muova alla medesima velocità costante che aveva nel momento in cui la sfera inizia la salita. (2 punti)

Nota: Nel sistema di riferimento non inerziale solidale alla piattaforma, la sfera si muove sollecitata da una forza apparente $\mathbf{F}=\mathbf{ma}$ applicata al suo centro di massa a causa della presenza dell'accelerazione $\mathbf{a}$ impressa alla piattaforma nel sistema di riferimento inerziale del laboratorio.

**Soluzione**

Prendendo, per esempio, come positivo il verso dell'accelerazione $\vec{a}$, la sfera è soggetta alla forza apparente $|\vec{F}| = -m|\vec{a}|$ e alla forza d'attrito di contatto $\vec{F}_A$ diretta come $\vec{a}$.

Pertanto, le equazioni cardinali applicate alla sfera sono:

$$-ma + F_A = -ma_c \quad ; \quad F_A = I_c \alpha,$$

dove $I_c = \frac{2}{5} mR^2$ è il momento d'inerzia di una sfera di raggio R , a_c l'accelerazione del centro di massa e α l'accelerazione angolare della sfera. Sviluppando il sistema si arriva facilmente alle espressioni delle incognite richieste dal problema:

$$a_c = \frac{5 F_A}{2 m} \quad ; \quad a = \frac{7 F_A}{2 m}.$$

Ora, il valore di F_A deve essere al massimo uguale alla forza d'attrito statico:

$$F_A \leq \mu mg \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{7} ma = \mu mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{7}{2} \mu g = 10,3 \text{ ms}^{-2}.$$

Di conseguenza, si ha $a_c = \frac{5}{7} a = 7,35 \text{ ms}^{-2}$. Per trovare il tempo impiegato dalla sfera per percorrere la distanza L è necessario utilizzare le seguenti equazioni della cinematica applicate al moto del centro di massa della sfera:

$$v_c(t) = a_c t \quad ; \quad s(t) = \frac{1}{2} a_c t^2.$$

La soluzione del sistema fornisce il tempo di percorrenza t_f e la velocità v_f della sfera subito prima che essa salga lungo il piano inclinato:

$$t_f = \sqrt{\frac{2L}{a_c}} = 0,52 \text{ s} \quad ; \quad v_f = \sqrt{2a_c L} = 3,83 \text{ m/s}.$$

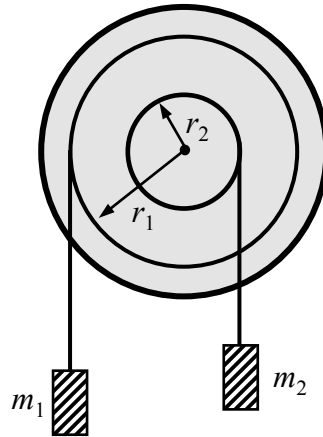
Infine, applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica, si trova l'altezza massima raggiunta dalla sfera sul piano inclinato:

$$\frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 = mgh_f \quad \Rightarrow \quad h_f = \frac{7}{10} \frac{v_c^2}{g} = 1,05 \text{ m}.$$

Problema 7.57 (10 punti)

Un disco di momento di inerzia I è libero di ruotare intorno ad un asse orizzontale. Su due gole poste alla distanza $R_1=0.4$ m e $R_2=0.25$ m dal centro del disco sono arrotolati due fili inestensibili e di massa trascurabile alle cui estremità sono legate due masse puntiformi $m_1=4$ kg e $m_2=2$ kg. Per la misura del momento di inerzia del disco si lascia libero il sistema con velocità iniziale nulla e si misura dopo un giro la velocità della massa m_1 che risulta uguale a $v_1=4.3$ m/s. In assenza di attriti, si calcoli il valore:

1. del momento d'inerzia I del disco; (3 punti)
2. della velocità v_2 della massa m_2 dopo un giro del disco; (2 punti)
3. della accelerazione angolare del disco; (2 punti)
4. il valore della tensione T_1 e T_2 dei due fili nelle condizioni di misura della velocità v_1 ; (3 punti)

**Soluzione**

Si scriva la conservazione dell'energia meccanica nelle condizioni poste dal problema:

$$2\pi m_1 g R_1 - 2\pi m_2 g R_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1)$$

Nell'ipotesi del problema vale la seguente relazione $\omega = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2}$, che permette di esplicitare la eq. 1 in termini solo della velocità v_1 :

$$2\pi g(m_1 R_1 - m_2 R_2) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{R_2^2}{R_1^2} v_1^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_1^2}{R_1^2} \quad \text{da cui} \quad I = 0.41 \text{ mkg}^2.$$

La velocità della massa m_2 vale $v_2 = v_1 \frac{R_2}{R_1} = 2.69$ m/s.

Le tensioni dei due fili e l'accelerazione angolare del disco si ricavano dalle equazioni cardinali:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad ; \quad -m_2 g + T_2 = m_2 a_2 \quad ; \quad T_1 R_1 - T_2 R_2 = I \alpha$$

Essendo $\alpha = \frac{a_1}{R_1} = \frac{a_2}{R_2}$ si ha:

$$m_1 g - T_1 = m_1 R_1 \alpha \quad ; \quad -m_2 g + T_2 = m_2 R_2 \alpha \quad ; \quad T_1 R_1 - T_2 R_2 = I \alpha$$

da cui

$$\alpha = \frac{g(m_1 R_1 - m_2 R_2)}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I} = 1.5 \text{ rad/s}^2.$$

Pertanto i valori delle tensioni dei fili valgono $T_1=37$ N e $T_2=20$ N.