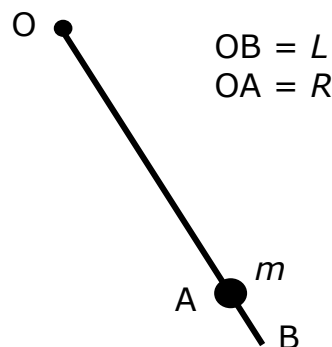


7. PROBLEMI DI STATICA E DINAMICA DEL CORPO RIGIDO
Quaderno 1/2

Problema 7.1

Un pendolo fisico è costituito da un'asta sottile omogenea di massa $M=1$ kg e lunghezza $L=1$ m che oscilla intorno ad un suo estremo. Una massa puntiforme $m=4M$ è fissata sull'asta ad una distanza $R=(3/4)L$ dall'asse di oscillazione. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni. Cosa accade al periodo di oscillazione se la massa m viene spostata di un tratto $\Delta x=10$ cm verso l'estremo libero dell'asta?



Soluzione

Il periodo delle piccole oscillazioni per il pendolo fisico è dato da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{m_T g h}}$$

dove I_z è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione ed h la distanza dell'asse di rotazione dal baricentro del sistema. Il momento d'inerzia è dato dalla somma di quello dell'asta e di quello della massa m , entrambi calcolati rispetto all'asse di rotazione O . Allora si ha:

$$I_z = \frac{1}{3} M L^2 + m R^2.$$

D'altra parte la posizione del centro di massa dell'intero sistema, calcolata sempre rispetto ad O , è data dalla seguente relazione:

$$h = \frac{M(L/2) + mR}{M + m}$$

dove si è rappresentata l'asta omogenea come un punto materiale di massa M , posto nella coordinata del suo centro di massa ($L/2$ rispetto all'asse di rotazione O). Sostituendo le due precedenti relazioni nella espressione del periodo T , si ha:

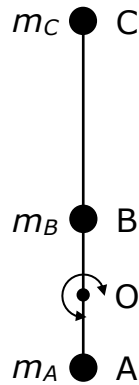
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1/3)ML^2 + mR^2}{\left(\frac{ML}{2} + mR\right)g}} \approx 1,7 \text{ s}$$

Se la distanza R della massa m variesse della quantità Δ , il periodo del pendolo aumenterebbe portandosi al valore $T_1 \approx 1,8 \text{ s}$.

Problema 7.2

Un metronomo è costituito da un'asta molto sottile che qui immaginiamo di massa trascurabile, che oscilla su di un piano verticale intorno ad un asse O (si veda la figura). Sull'asta si dispongono tre corpi puntiformi di massa m_A , m_B , e m_C , che possono essere facilmente spostati lungo l'asta. Si consideri la seguente disposizione delle tre masse: la massa $m_A=20$ g posta all'estremo inferiore A dell'asta; la massa $m_B=10$ g nel punto B simmetrico ad A rispetto all'asse di oscillazione O. Considerando la distanza $OA=3$ cm e $m_C=2$ g, si calcolino:

1. il periodo delle piccole oscillazioni imponendo $OC=6$ cm;
2. il valore della distanza OC affinché il periodo delle piccole oscillazioni sia uguale a $T=2,4$ s;
3. il valore del periodo del metronomo quando $OC=15$ cm.



Soluzione

Il sistema può essere considerato come un pendolo fisico in cui la massa dell'asta viene, per semplicità, trascurata. Il periodo delle piccole oscillazioni è allora:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{m_T g d}}$$

dove I_z è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione O e d la distanza dell'asse di rotazione dal baricentro del sistema. Trascurando, come ricordato, la massa dell'asticella, il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse di oscillazione è dato da:

$$I_z = I_A + I_B + I_C = m_A(OA)^2 + m_B(OB)^2 + m_C(OC)^2 \approx 0,34 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2.$$

Inoltre, l'applicazione della definizione di centro di massa fornisce la sua distanza d dal punto O di oscillazione. Si ottiene pertanto:

$$d = \frac{m_A(OA) - m_B(OB) - m_C(OC)}{m_A + m_B + m_C} \approx 0,56 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Nel calcolo di d , si è chiaramente supposto un sistema di riferimento costituito da un solo asse coincidente con l'asta del metronomo e con il verso positivo rivolto verso il basso. Con i valori trovati di d ed I_z si calcola che il periodo del metronomo è pari a $T \approx 0,86$ s.

Nel caso in cui si richieda un periodo uguale a 2,4 s il valore di OC si ricava dallo stesso periodo del pendolo fisico, ottenendo:

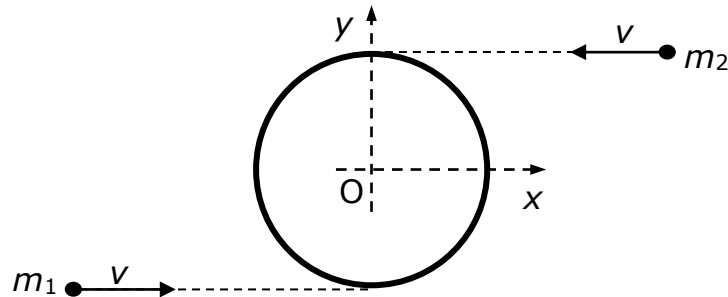
$$\frac{gT^2}{4\pi^2} = k = \frac{I_z}{md}.$$

Risolvendo l'equazione di 2° grado si trovano due valori di OC che sono: $OC_1 \approx 0,13 \text{ m}$ e $OC_2 \approx 1,56 \text{ m}$. Nei casi reali, è chiaro che solo il primo valore trovato di OC è accettabile. Nel caso in cui $OC = 15 \text{ cm}$, la distanza d del centro di massa dall'asse di rotazione diventa nulla e di conseguenza il periodo risulta infinito. Il sistema in queste condizioni è in una situazione di equilibrio indifferente.

Problema 7.3 (dal Mazzoldi, Nigro, Voci)

Un anello di massa $m_3=2,5$ kg e raggio $R=0,3$ m, è fermo su di un piano orizzontale liscio. Ad un certo momento, due masse $m_1=2$ kg ed $m_2=0,5$ kg urtano contro l'anello in due punti tra di loro diametralmente opposti (si veda la figura). Considerando che l'anello non è vincolato al piano orizzontale, che l'urto di entrambe le masse con l'anello è completamente anelastico e che la loro velocità prima dell'urto valga $v=2,9$ m/s, si calcoli:

1. la velocità del centro di massa dell'intero sistema dopo l'urto;
2. la velocità angolare del sistema dopo l'urto.

**Soluzione**

Non essendo l'anello vincolato al piano orizzontale, l'urto può essere studiato con la conservazione della quantità di moto. Scegliendo un sistema di riferimento come quello indicato nella figura, si ha:

$$(m_1 - m_2)v = (m_1 + m_2 + m_3)v_{CM} \quad \rightarrow \quad v_{CM} \approx 0,87 \text{ m/s}$$

Essendo il valore trovato di v_{CM} positivo, il centro di massa si sposta nel verso dell'asse positivo delle ascisse. Per trovare la velocità angolare del sistema, dobbiamo considerare che, avendo i due corpi masse differenti, la posizione del centro di massa si sposta dalla posizione del centro geometrico dell'anello lungo il diametro che unisce il punto di contatto delle due masse con l'anello. Considerando un sistema di riferimento in figura, la variazione della posizione del centro di massa del sistema dopo l'urto rispetto al centro O dell'anello (centro di massa dell'anello prima dell'urto), vale:

$$\Delta y_{CM} = \frac{(m_2 - m_1)R}{m_1 + m_2 + m_3} \approx -0,09 \text{ m.}$$

Il centro di massa si è quindi spostato dal centro O dell'anello verso la massa m_1 della quantità ora calcolata. Dalla precedente relazione si vede chiaramente che se le due masse fossero uguali, il centro di massa rimarrebbe in O. E' facile capire che il risultato ottenuto (spostamento del centro di massa verso i valori negativi di y) torna fisicamente dato che la massa m_1 è quattro volte maggiore della massa m_2 . I momenti angolari del sistema fisico in esame prima e dopo l'urto si scrive nel seguente modo:

$$L_{in} = m_1 R_1 v + m_2 R_2 v \quad ; \quad L_{fin} = I \omega$$

In questa relazione i momenti angolari sono, per convenienza, riferiti al centro di massa calcolato dopo l'urto delle due masse con l'anello. Questa assunzione è giustificata dal fatto che il momento angolare totale del sistema dopo l'urto prevede il momento d'inerzia totale del sistema calcolato rispetto alla nuova posizione del centro di massa. Ricordando il valore trovato di Δx_{CM} , si ha che le distanze delle due masse dal centro di massa del sistema sono uguali a:

$$R_1 = R - \Delta x_{CM} = 0,21 \text{ m e } R_2 = R + \Delta x_{CM} = 0,39 \text{ m.}$$

Il momento d'inerzia totale del sistema, calcolato rispetto al suo centro di massa dopo l'urto, è la somma dei momenti d'inerzia delle due masse e di quello dell'anello. Si ha:

$$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 (R^2 + \Delta x_{CM}^2) \approx 0,41 \text{ kgm}^2$$

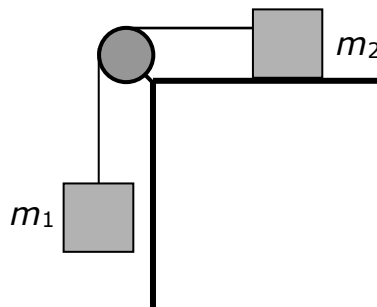
dove si è utilizzato il teorema di Huygens-Steiner per il calcolo del momento d'inerzia dell'anello. La conservazione del momento angolare fornisce infine il valore della velocità angolare del sistema che risulta:

$$\omega = \frac{v(m_1 R_1 + m_2 R_2)}{I} \approx 4,3 \text{ rad/s.}$$

Problema 7.4

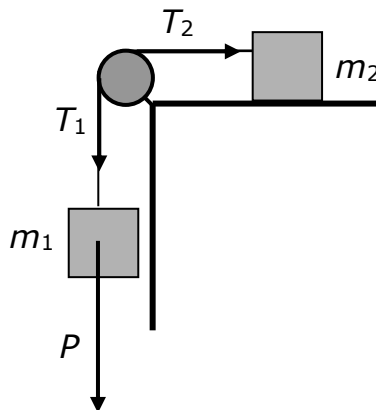
Due corpi puntiformi di massa $m_1=20$ kg ed $m_2=10$ kg, sono collegati come mostrato in figura tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile. La carrucola attorno alla quale il filo scorre senza strisciare ha massa $m_3=1$ kg e raggio $R=0,2$ m. Sapendo che il moto avviene in assenza di attrito, che la carrucola è schematizzabile come un disco omogeneo e che i corpi partono con velocità nulla, si calcoli:

1. l'accelerazione del sistema;
2. la velocità angolare della carrucola dopo un tempo $\Delta t=10$ s;
3. i valori delle tensioni del filo;
4. l'accelerazione del sistema se tra la massa m_2 ed il piano orizzontale agisse una forza d'attrito di coefficiente d'attrito $\mu=0,1$.



Soluzione

Le forze applicate al sistema sono mostrate nella figura sottostante.



Il 2° principio della dinamica applicato a ciascuno dei due corpi fornisce le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} m_1 g - T_1 &= m_1 a \\ T_2 &= m_2 a \end{aligned} \quad (1)$$

Non essendo la carrucola priva di massa, per descriverne il moto di rotazione si deve usare anche la seconda equazione cardinale della meccanica $\vec{M} = I\vec{\alpha}$. E' necessario quindi che sia applicato un momento alla carrucola. Dal diagramma delle forze si vede che questo momento è dato dalla differenza di due momenti: quello dovuto alla tensione del filo T_1 meno quello dovuto alla tensione del filo T_2 . La rotazione della carrucola allora implica due differenti valori della tensione del filo ai due lati della carrucola. Più precisamente, essendo uguale per i due momenti la distanza dal punto di applicazione (il centro della carrucola), si deve avere $T_1 > T_2$. Pertanto è possibile scrivere la seguente relazione:

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha$$

dove $I = \frac{1}{2} mR^2$ è il momento di inerzia della carrucola rispetto al suo centro di massa.

Inoltre, dato che il filo è inestensibile e non striscia intorno sulla carrucola, si può utilizzare la relazione tra l'accelerazione lineare e quella angolare, $a = \alpha R$.

La risoluzione del sistema composto dalle tre precedenti equazioni fornisce il valore della accelerazione lineare del sistema:

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + (I/R^2)} \approx 6,4 \text{ m/s}^2.$$

La velocità angolare della carrucola dopo 10 s dalla partenza è:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{a \Delta t}{R} \approx 320 \text{ rad/s}$$

Le tensioni del filo si ricavano dalle equazioni sopra scritte ottenendo $T_1 \approx 68,2 \text{ N}$ e $T_2 \approx 64 \text{ N}$. Nel caso della presenza di attrito tra il piano e la massa m_2 , si deve riscrivere la seconda delle due equazioni (1) nel seguente modo:

$$T_2 - F_a = m_2 a.$$

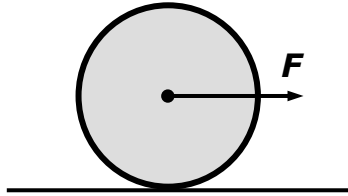
La nuova accelerazione del sistema si determina ponendo $F_a = \mu m_2 g$ e ripetendo il procedimento di calcolo appena descritto.

Problema 7.5

Su di un asse passante per il centro di una ruota inizialmente in quiete e schematizzabile come un disco omogeneo di massa $m=3$ kg e raggio $R=30$ cm, viene applicata, una forza motrice orizzontale costante $F=3$ N.

Calcolare lo spazio percorso dalla ruota in un tempo pari a $\Delta t=15$ s nei seguenti due casi:

1. in assenza di attrito tra il piano e la ruota;
2. nella situazione di puro rotolamento.



Soluzione

In assenza di attrito tra ruota e piano orizzontale, il moto è di puro trascinamento ed il moto della ruota sarà quindi quello del suo centro di massa. Essendo la forza applicata costante si ha semplicemente:

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

che per $\Delta t=15$ s fornisce $x(\Delta t) \approx 112,5$ m.

Nel caso di puro rotolamento, lo spazio percorso dopo 10 s può ricavarsi applicando le equazioni della dinamica oppure utilizzando considerazioni energetiche.

Iniziamo con l'applicare le equazioni della dinamica che si scrivono nel seguente modo:

$$F - f_a = m a_{CM}$$

$$f_a R = I \frac{a_{CM}}{R}$$

dove si è indicata con f_a la forza di attrito che rende nulla la velocità di traslazione del punto di contatto. Inoltre si è fatto uso della relazione $a_{CM} = \alpha R$.

La risoluzione di questo sistema fornisce il valore dell'accelerazione del centro di massa:

$$a_{CM} = \frac{F}{m + (I/R^2)} \approx 0,67 \text{ m/s}^2$$

Pertanto si ha:

$$x_{CM}(\Delta t) = \frac{1}{2} a_{CM} \Delta t^2 \approx 75 \text{ m.}$$

La risoluzione del problema da considerazioni energetiche parte col prendere in esame il fatto che il lavoro fatto dalla forza F per spostare la ruota può essere scritto come:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = F x(t).$$

In questa relazione il momento di inerzia va calcolato nel punto di contatto tra la ruota ed il piano orizzontale dato che si può pensare al movimento della ruota come il susseguirsi di rotazioni istantanee intorno al punto di contatto. Quindi, per il teorema di Huygens-Steiner, si ha:

$$I = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Rispetto al punto di contatto la velocità angolare istante per istante del centro di massa vale $\omega=v/R$. L'espressione per la velocità lineare risulta quindi essere:

$$v(t) = 2\sqrt{\frac{Fx}{3m}}.$$

Si noti che la velocità non è costante. Sostituendo quindi nella precedente relazione $v(t) = dx/dt$, si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{F}{3m}}dt$$

la cui soluzione è:

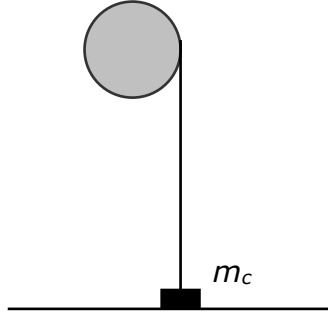
$$x(t) = \frac{F}{3m}t^2$$

Per $\Delta t=10$ s, si ottiene un valore dello spazio percorso dalla ruota pari a $x(\Delta t)\approx 75$ m, in accordo con quanto calcolato in precedenza.

Problema 7.6

Un carico di massa $m_c=20\text{kg}$ è collegato, tramite un cavo inestensibile, ad un argano costituito da un disco di massa $m_d=40\text{kg}$ e raggio $R=50\text{cm}$. Sull'argano agisce una coppia motrice costante in modulo uguale a $M_m=100\text{Nm}$ che solleva il carico da terra fino ad un'altezza $h=10\text{m}$. Supponendo di poter trascurare la massa del cavo, calcolare:

1. l'accelerazione a cui è soggetto il carico durante la salita;
2. la tensione che agisce sul cavo;
3. la potenza media sviluppata dalla coppia motrice durante il processo.

**Soluzione**

Le equazioni che descrivono il moto del carico e dell'argano sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} T - m_c g &= m_c a \\ M_m - TR &= I_d \alpha \end{aligned}$$

dove T è la tensione esercitata dal cavo.

Ricordando ora che il filo è inestensibile si può porre $a = \alpha R$. Dalla risoluzione del sistema delle equazioni del moto si ottiene:

$$a = \frac{M_m R - m_c g R^2}{I_d + m_c R^2} = 0,1 \text{ m/s}^2 \quad \text{dove} \quad I_d = \frac{1}{2} m_d R^2 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Di conseguenza la tensione che agisce sul cavo è pari a:

$$T = m_c (a + g) \approx 198 \text{ N}.$$

Per definizione, la potenza istantanea sviluppata dalla momento motore è:

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = M_m \omega(t).$$

La potenza media fornita dal momento motore risulta uguale a:

$$\bar{P} = \frac{\int P(t) dt}{\Delta t} = \frac{\int_{t_i}^{t_f} M_m \omega(t) dt}{\Delta t} = \frac{M_m \Delta \theta}{\Delta t} = \frac{M_m h}{R \Delta t} \approx 141 \text{ W},$$

dove $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{a}} \approx 14 \text{ s}$ è il tempo necessario per innalzare il carico di una quota pari ad $h=10\text{m}$ dalla posizione iniziale.

Problema 7.7

Una sfera di acciaio, assimilabile ad un punto materiale di massa $m_0=10$ g, è appoggiata ad una molla compressa di $d=30$ cm rispetto alla sua posizione di riposo. Una volta rilasciata la molla, la sfera si muove con velocità v_0 su di un piano orizzontale liscio e va ad urtare in modo completamente anelastico contro un'asta ferma posta in posizione verticale. L'asta di lunghezza $L=1$ m, da considerarsi omogenea, è costituita per una metà di rame e per l'altra di legno. L'asta è vincolata a ruotare su di un piano verticale intorno ad un asse orizzontale passante per l'estremo posto dalla parte del rame. Se un istante dopo l'urto la velocità angolare dell'asta è di $\omega=8,5$ rad/s, si determini:

1. La velocità v_0 della sfera prima dell'urto;
2. La costante elastica della molla;
3. La velocità del centro di massa del sistema asta più sfera subito dopo l'urto;

Densità lineare del rame $\rho_1 = 0,892$ kg/m; densità lineare del legno $\rho_2 = 0,041$ kg/m.



Soluzione

Nell'urto anelastico della sfera contro l'asta non si conserva né l'energia meccanica né la quantità di moto a causa della presenza del vincolo e della forza impulsiva che da esso deriva nel momento dell'urto. Si conserva invece il momento della quantità di moto rispetto all'asse di rotazione. Si può allora scrivere:

$$m_0 v_0 L = I_{TOT} \omega \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{I_{TOT} \omega}{m_0 L}$$

dove I_{TOT} è il momento d'inerzia dell'intero sistema asta più sfera riferito all'asse di rotazione dell'asta. Per trovare la velocità di impatto della sfera, v_0 , calcoliamo dapprima il momento di inerzia I_{TOT} :

$$I_{TOT} = I_{asta} + m_0 L^2 = \int_0^{L/2} x^2 dm_1 + \int_{L/2}^L x^2 dm_2 + m_0 L^2$$

dove con dm_1 e dm_2 si sono indicati gli elementi infinitesimi di massa riferiti rispettivamente alla parte di rame ed a quella di legno dell'asta.

Ricordando la definizione $\rho_l = dm/dx$ si ottiene:

$$I_{TOT} = \rho_1 \int_0^{L/2} x^2 dx + \rho_2 \int_{L/2}^L x^2 dx + m_0 L^2 = \frac{L^3}{24} (\rho_1 + 7\rho_2) + m_0 L^2 \approx 5,9 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2.$$

Il valore della velocità della prima dell'urto sfera è uguale a $v_0 \approx 50,1$ m/s.

Essendo il piano privo di attrito, dalla conservazione dell'energia meccanica prima dell'urto si ha:

$$\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 \quad \Rightarrow \quad k = m_0 \frac{v_0^2}{x^2} \approx 280 \text{ N/m}$$

La velocità del centro di massa è data da $v_{CM} = \omega x_{CM}$ dove x_{CM} è la posizione del centro di massa del sistema asta più sfera calcolato rispetto all'asse di rotazione. Conoscendo già il valore di ω , si tratta solo di calcolare il valore di x_{CM} , che è dato da:

$$x_{CM} = \frac{\int_0^{L/2} x dm_1 + \int_{L/2}^L x dm_2 + m_0 L}{m_1 + m_2 + m_0} = \frac{1}{4} \frac{L(\rho_1 + 3\rho_2) + 8m_0}{\rho_1 + \rho_2 + 2m_0/L} \approx 0,29 \text{ m}$$

utilizzando il valore appena calcolato della posizione del centro di massa del sistema si ricava che $v_{CM} \approx 2,4 \text{ m/s}$.

Nota: dato che l'asta è omogenea per ciascuna delle sue due componenti (rame e legno) si possono trovare il momento d'inerzia totale e la posizione del centro di massa calcolati entrambi rispetto all'asse di rotazione anche nel seguente modo (molto più semplice):

a) momento d'inerzia I_{TOT} :

$$I_{TOT} = \frac{1}{3} m_1 \frac{L^2}{4} + \frac{1}{12} m_2 \frac{L^2}{4} + m_2 \left(\frac{3}{4} L \right)^2 + m_0 L^2 = \frac{1}{12} m_1 L^2 + m_2 L^2 \left(\frac{1}{48} + \frac{9}{16} \right) + m_0 L^2$$

$$I_{TOT} = \frac{1}{24} L^3 (\rho_1 + 7\rho_2) + m_0 L^2$$

b) posizione del centro di massa x_{CM} :

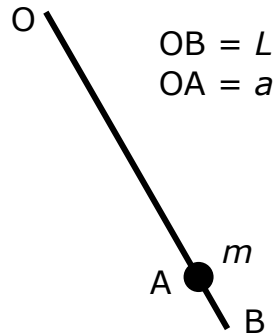
$$x_{CM} = \frac{m_1 \frac{L}{4} + \frac{3}{4} m_2 L + m_0 L}{m_1 + m_2 + m_0} = \frac{\rho_1 \frac{L^2}{8} + \rho_2 \frac{3L^2}{8} + m_0 L}{\rho_1 \frac{L}{2} + \rho_2 \frac{L}{2} + m_0} = \frac{1}{4} \frac{L(\rho_1 + 3\rho_2) + 8m_0}{\rho_1 + \rho_2 + 2m_0/L}$$

Problema 7.8 (Problema d'esame: 10 punti)

Un pendolo fisico è costituito da un'asta sottile rigida ed omogenea di lunghezza $L=1$ m e massa M che ruota intorno al suo estremo O. Sull'asta è collocata, ad una distanza $a=4L/5$ dall'estremo O, un corpo puntiforme di massa $m=5M$.

Si determinino:

1. il periodo del pendolo nell'approssimazione delle piccole oscillazioni; (3 punti)
2. la legge di variazione percentuale del periodo T del pendolo, dT/T , se il corpo uniforme si sposta di un tratto infinitesimo $da \ll a$; (5 punti)
3. Calcolare la variazione percentuale nel caso in cui $da=0,5$ cm. (2 punti)

**Soluzione**

Il momento di inerzia totale del sistema e la posizione del baricentro, entrambi calcolati rispetto al punto O, sono rispettivamente

$$I_O = \frac{1}{3}ML^2 + ma^2 \quad ; \quad x_O = \frac{\frac{1}{2}ML + ma}{M + m}$$

Il periodo del pendolo fisico nell'approssimazione delle piccole oscillazioni diventa:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{m_{TOT}gx_O}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2 + ma^2}{g\left(\frac{1}{2}ML + ma\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{106}{135} \frac{L}{g}} \approx 1,78 \text{ s},$$

dove si è posto $m_{TOT}=M+m$. Per trovare la legge di variazione percentuale del periodo del pendolo si deve porre:

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial a} da = \frac{1}{2} \frac{mMaL + m^2a^2 - \frac{1}{3}mML^2}{\left(\frac{1}{3}ML^2 + ma^2\right)\left(\frac{1}{2}ML + ma\right)} da$$

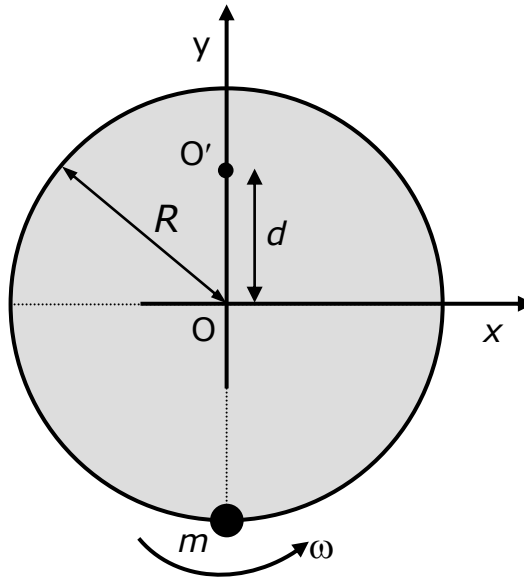
Nel caso del problema, per $da=0,5$ cm si ottiene: $\frac{dT}{T} = \frac{275}{318} \frac{da}{L} \approx 2,9 \times 10^{-3}$, cioè una variazione percentuale positiva del periodo del pendolo pari a circa 0,3%.

Problema 7.9 (Problema d'esame: 10 punti)

Un disco omogeneo di massa $M=1$ kg e raggio $R=0,5$ m, è libero di ruotare in un piano verticale intorno ad un asse orizzontale passante per il punto O' che dista $d=(2/3)R$ dal centro O del disco. Sul bordo del disco viene fissato un corpo puntiforme di massa $m=M/4$. Inizialmente il sistema è fermo in posizione di equilibrio stabile.

Calcolare:

1. la distanza d_{CM} tra il centro di massa del sistema ed il punto O' ; (3 punti)
2. il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione O' ; (2 punti)
3. la velocità angolare iniziale ω_0 che il sistema deve avere affinché dopo una rotazione di $\vartheta=180^\circ$ si abbia $\omega_\vartheta=2,6$ rad/s. (5 punti)

**Soluzione**

Prima di tutto fissiamo un sistema di assi cartesiani (x, y) con l'origine nel centro O del disco e con l'asse delle ordinate passante per l'asse O' . Essendo il corpo di massa m puntiforme e distante R dal centro del disco omogeneo, si ha che le coordinate del centro di massa del sistema rispetto al punto O sono:

$$X_{CM} = 0$$

$$Y_{CM} = \frac{0 - mR}{M + m} = -\frac{R}{5}$$

dato che la posizione del centro di massa di un disco omogeneo è situato nel suo centro O . La coordinata Y_{CM} è negativa, ciò significa che il centro di massa del sistema si è spostato al di sotto di O verso il corpo di massa m lungo l'asse delle ordinate. La distanza d_{CM} tra il centro di massa del sistema e l'asse di rotazione sarà allora semplicemente data dalla seguente somma:

$$d_{CM} = d + \frac{R}{5} \approx 0,43 \text{ m.}$$

Il momento di inerzia I_{TOT} del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per O' è:

$$I_{TOT} = I_{disco} + m(R + d)^2 \approx 0,43 \text{ kgm}^2 \text{ dove } I_{disco} = \frac{1}{2}MR^2 + Md^2.$$

Durante la rotazione del sistema l'energia meccanica si conserva, quindi per una rotazione di $\vartheta=180^\circ$ si ha:

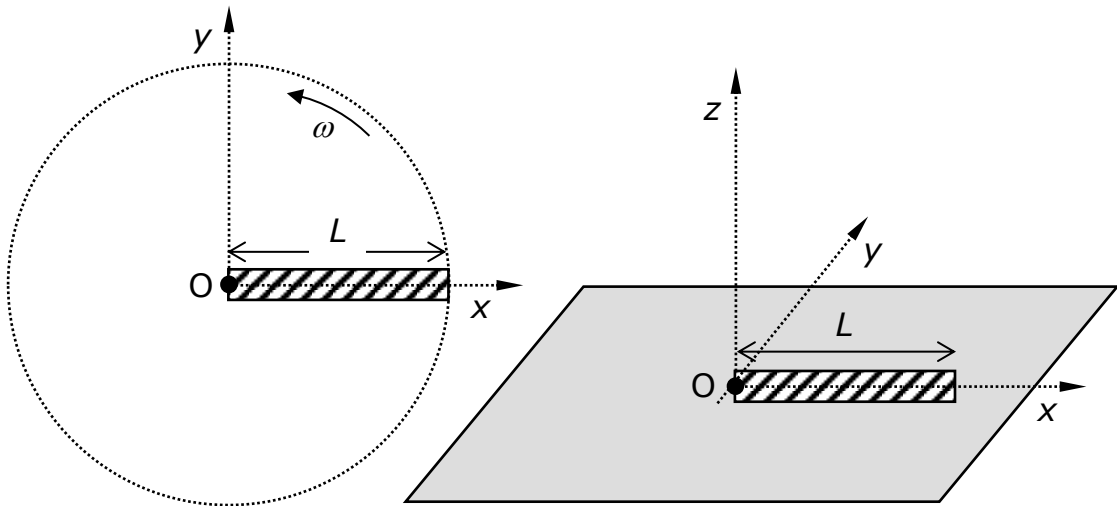
$$\frac{1}{2} I_{TOT} \omega_0^2 = \frac{1}{2} I_{TOT} \omega_\vartheta^2 + 2(M + m)gd_{CM}$$

Il termine di energia potenziale tiene conto del fatto che la rotazione del disco di un angolo $\vartheta=\pi$ ha come conseguenza che il centro di massa del sistema si è alzato di una altezza pari a $2d_{CM}$. Risolvendo la precedente equazione rispetto alla velocità angolare iniziale del disco si ottiene $\omega_0=7,5$ rad/s.

Problema 7.10 (Problema d'esame: 10+3 punti)

Un'asta omogenea di massa $M=1$ kg e lunghezza $L=1$ m, è in rotazione intorno ad un asse fisso passante per il suo estremo O su di un piano orizzontale scabro avente un coefficiente di attrito dinamico $\mu=0,25$. La velocità angolare iniziale dell'asta al tempo $t_0=0$ è ω_0 e si misura che dopo un certo tempo t_f l'asta si ferma. Sapendo che il lavoro totale fatto dalla risultante del momento delle forze di attrito è $W=68,9$ J, calcolare:

1. la risultante del momento delle forze di attrito in modulo direzione e verso che agisce sull'asta; (3 punti)
2. la velocità angolare iniziale ω_0 ; (3 punti)
3. il tempo impiegato dall'asta per fermarsi; (2 punti)
4. il numero di giri fatto dall'asta prima di fermarsi; (2 punti)
5. la risultante del momento delle forze esterne nel caso di un'asta identica alla precedente per lunghezza e massa ma avente una densità lineare data dalla relazione $\rho_l = Ax$ con A una costante ed x calcolato a partire dal punto O, asse di rotazione dell'asta. (domanda facoltativa: 3 punti)

**Soluzione**

La forza attrito può essere considerata come una forza esterna al sistema la cui azione porta l'asta a fermarsi. Prendendo un generico elemento dm dell'asta ad esso sarà associato la forza di attrito infinitesima in modulo $|dF_A| = \mu g dm$. Quindi la risultante del momento delle forze esterne si ricava dalla seguente relazione:

$$d\vec{M}_{est} = x\vec{u}_x \times (-\mu g dm)\vec{u}_y \rightarrow \vec{M}_{est} = -\vec{u}_z \mu g \int x dm,$$

dove si è preso un sistema di riferimento centrato sull'asse di rotazione O e che ruota solidalmente con l'asta. Ricordando che per definizione $\rho_l = dm / dx$, e che per un corpo omogeneo $\rho_l = M/L$, si ha che il momento delle forze esterne vale in modulo:

$$|\vec{M}_{est}| = \mu g \frac{M}{L} \int_0^L x dx = \frac{1}{2} \mu g ML \approx 1,2 \text{ Nm}.$$

Facendo riferimento al disegno, la direzione di $\vec{M}_{est}$ è perpendicolare al foglio con il verso entrante. Il momento della forza d'attrito si può trovare più semplicemente ricordando che

essa è la stessa per tutti i punti di massa dm dell'asta e che, inoltre, la massa di un'asta omogenea può pensarsi concentrata nel suo centro di massa che è posto al centro dell'asta stessa, cioè ad una distanza $L/2$ dall'asse z di rotazione. Il momento delle forze esterne risulta essere pertanto uguale a:

$$\vec{M}_{est} = (L/2)\vec{u}_x \times (-\mu mg)\vec{u}_y \rightarrow |M_{est}| = \mu g \frac{M}{L} \int_0^L x dx = \frac{1}{2} \mu gML ,$$

cioè si ricava in modo immediato la stessa espressione trovata in precedenza.

Il lavoro fatto dal momento delle forze esterne, W_{est} , deve essere uguale alla perdita di energia cinetica subita dall'asta nel moto di rotazione. Dato che alla fine l'asta si ferma si può scrivere:

$$W_{est} = \frac{1}{2} I \omega_0^2 \quad \text{con} \quad I = \frac{1}{3} ML^2 .$$

dove ω_0 ed I rappresentano rispettivamente la velocità angolare iniziale dell'asta ed il suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione z . Risolvendo rispetto ad ω_0 si ha $\omega_0 = 20,3$ rad/s.

Il tempo impiegato dall'asta per fermarsi si trova ricordando che essendo costante il momento delle forze esterne, si deve avere una decelerazione angolare costante data da:

$$M_{est} = I\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{\mu gML}{2I} .$$

Avendo ricavato l'espressione di α , si possono utilizzare le equazioni cinematiche del moto circolare, ottenendo:

$$\omega(t_f) = 0 = \omega_0 + \alpha t_f \Rightarrow t_f = \frac{2I\omega_0}{\mu gML} = \frac{2}{3} \frac{\omega_0 L}{\mu g} \approx 5,5 \text{ s} .$$

Il numero n di giri fatti dall'asta prima di fermarsi è dato da:

$$W_{est} = M_{est} \vartheta(t_f) = 2\pi n M_{est} \quad \text{da cui} \quad n = \frac{W_{est}}{2\pi M_{est}} \approx 9 .$$

Risposta alla domanda facoltativa.

Riprendendo gli argomenti utilizzati nel rispondere alla prima domanda del problema e facendo ora attenzione che l'asta ha una densità lineare della forma $\rho_l = Ax$, si ha:

$$\vec{M}_{est} = -\hat{z} \mu g \int_0^L x dm = -\hat{z} \mu g A \int_0^L x^2 dx = -\frac{1}{3} \hat{z} \mu g A L^3 .$$

Per trovare il valore della costante A osserviamo che la massa totale dell'asta può essere calcolata nel seguente modo:

$$M = \int dm = \rho_l \int_0^L dx = A \int_0^L x dx = \frac{AL^2}{2} .$$

Quindi il modulo del momento delle forze esterne sarà ora dato da:

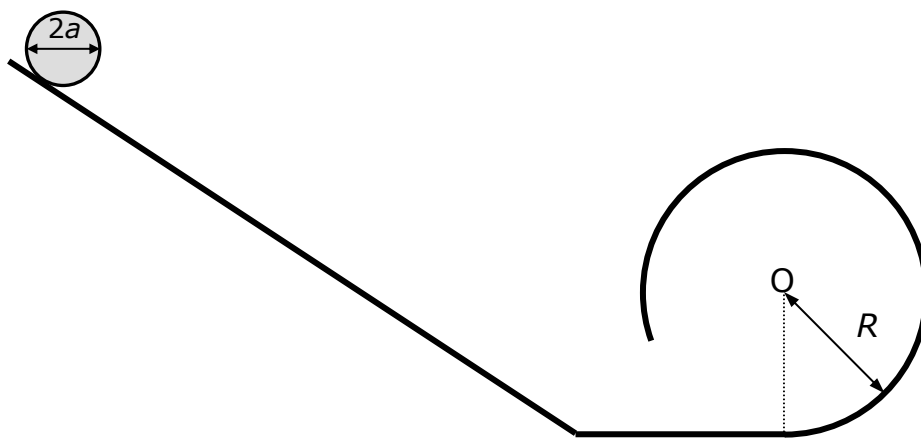
$$M_{est} = -\frac{2}{3} \mu gML \approx -1,63 \text{ Nm} .$$

Problema 7.11 (problema d'esame 10 punti)

Facendo riferimento alla figura, un cilindro pieno di raggio a è posto su di un piano inclinato che si raccorda con una guida circolare di raggio R . Si vuole rilasciare il cilindro con velocità iniziale nulla da una certa quota h che gli consenta di compiere un giro completo nella guida circolare nei seguenti due casi di moto del cilindro: 1° moto di puro rotolamento; 2° moto di trascinamento nell'ipotesi di assenza di forze d'attrito.

Sperimentalmente si trova che le quote minime iniziali, nelle due ipotesi di moto, sono differenti e che la loro differenza è pari a $\Delta h = 0,22$ m. Sapendo che $R = 10a$, si determini:

1. il raggio a del cilindro; (5 punti)
2. la velocità del cilindro nei due casi di moto descritti sulla sommità della guida circolare; (3 punti)
3. il raggio R della guida circolare. (2 punti)

**Soluzione**

La prima ipotesi di moto per il cilindro è quella di puro rotolamento. La conservazione dell'energia meccanica fornisce la seguente relazione:

$$mg(h_1 + a') = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(2R - a), \quad (1)$$

dove $a' = a/\cos\beta$ con β l'angolo del piano inclinato e v_A è la velocità del centro di massa del cilindro sulla parte più alta della guida circolare. Nell'ipotesi invece di moto di puro trascinamento del cilindro la conservazione dell'energia si scrive nel seguente modo:

$$mg(h_2 + a') = \frac{1}{2}mv_A^2 + mg(2R - a). \quad (2)$$

Nelle due precedenti equazioni, h_1 ed h_2 sono, nei due casi di moto qui analizzati, le quote minime iniziali tra il centro di massa del cilindro ed il piano orizzontale di appoggio della guida circolare per le quali il cilindro compie un intero giro nella guida circolare.

Facciamo notare che la velocità sulla sommità della guida circolare è la stessa nei due casi. Infatti scrivendo l'equazione della dinamica in quel punto e ponendo la componente normale della reazione vincolare uguale a zero si ha per entrambi i casi:

$$g = \frac{v^2}{R - a} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{g(R - a)}$$

Sottraendo la equazione (1) dalla (2) e ricordando che il momento d'inerzia di un cilindro pieno è $I = \frac{1}{2} ma^2$, si ottiene:

$$g(h_1 - h_2) = \frac{1}{4} a^2 \omega^2 \quad \rightarrow \quad g(h_1 - h_2) = \frac{1}{4} v^2 = \frac{1}{4} g(R - a).$$

Nel primo caso di moto di puro rotolamento per il quale vale la relazione $\omega = v/a$, si ha:

$$h_1 - h_2 = \Delta h = \frac{1}{4} (R - a).$$

Dato che $R=10a$ si ha $a \approx 0,1$ m e quindi $R=1$ m.

Infine il valore della velocità sulla sommità della guida circolare è in entrambi i tipi di moto

$$v = 2\sqrt{g\Delta h} \approx 9,2 \text{ m/s}.$$

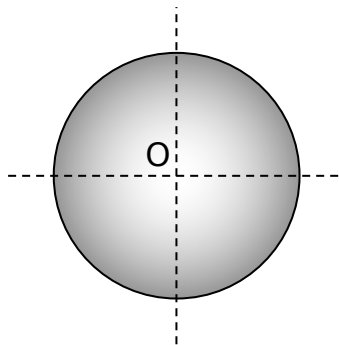
Problema 7.12

Un disco sottile di raggio $R=20$ cm e massa $M=3$ kg ha una densità superficiale che varia in funzione della distanza dal centro ed è esprimibile nella forma $\sigma=kr+a$, con r la distanza generica dal centro O del disco, k una costante ed $a=0,1$ kg/m² il valore della densità superficiale al centro del disco.

Il disco ruota su di un piano orizzontale senza attrito intorno al suo centro O con velocità angolare costante ω .

Si determini:

1. il valore della costante k che interviene nella espressione della densità superficiale;
2. il valore del momento d'inerzia I del disco;
3. il numero di giri al minuto che compie il disco quando possiede una energia cinetica pari a $E_k=150$ J.

**Soluzione**

Dalla espressione fornita della densità superficiale si ha $\sigma = kr + a = \frac{dm}{d\Sigma}$, essendo $d\Sigma = 2\pi r dr$. Da queste due relazioni si ottiene:

$$M = \int_M dm = 2\pi \left[k \int_0^R r^2 dr + a \int_0^R r dr \right] = \frac{\pi R^2}{3} [2kR + 3a]$$

Conoscendo il valore della massa M del disco si ricava immediatamente il valore della costante $k \approx 120$ kgm⁻³.

Il momento d'inerzia del disco si trova semplicemente partendo dalla definizione generale:

$$I = \int_M r^2 dm = 2\pi \left[k \int_0^R r^4 dr + a \int_0^R r^3 dr \right] = \frac{\pi R^4}{10} [4kR + 5a] \approx 4,85 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2.$$

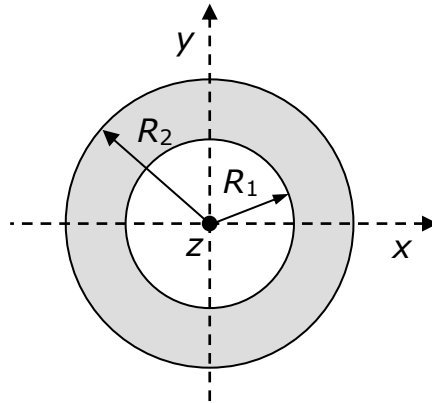
Dalla definizione di energia cinetica di un corpo in rotazione intorno ad un suo asse di simmetria si ha:

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_k}{I}} \approx 78,6 \text{ rad s}^{-1}.$$

Di conseguenza il numero di giri al minuto che sta compiendo il disco è pari a circa 750.

Problema 7.13

Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse z della figura di una lamina sottile rigida ed omogenea avente la forma di una corona circolare.

**Soluzione**

La lamina sottile della figura è, da un punto di vista geometrico, una corona circolare. Si vuole, pertanto, calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z . Essendo la lamina sottile la sua densità superficiale ed il suo momento d'inerzia rispettivamente sono:

$$\rho_S = \frac{dm}{dS} \quad ; \quad I_z = \rho_S \int_S R^2 dS$$

Troviamo ora l'elemento generico dS di superficie che risulta essere uguale, a meno di infinitesimi di ordine superiore, a:

$$dS = r dr d\varphi.$$

Questa espressione è chiaramente la stessa di quella utilizzata a lezione per calcolare il momento d'inerzia di un disco sottile. Con r si è indicata la generica distanza dell'elemento dS dal centro della corona circolare. Il momento d'inerzia della corona circolare diventa allora:

$$I_z = \rho_S \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \quad \Rightarrow \quad I_z = \rho_S \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4).$$

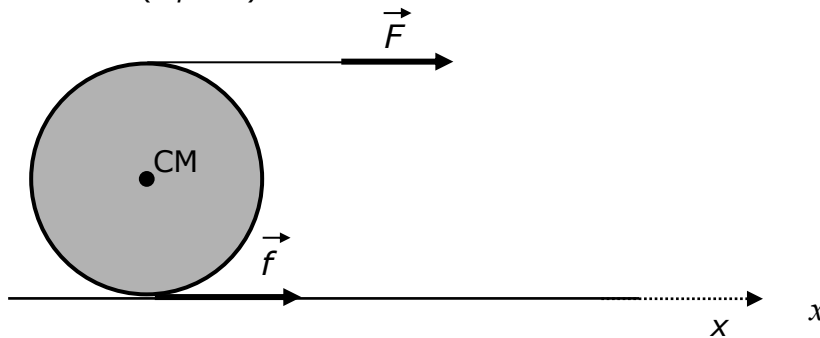
Essendo l'area della corona circolare $S = \pi(R_2^2 - R_1^2)$ e, per ipotesi, il corpo omogeneo, si ottiene la seguente espressione per il momento d'inerzia:

$$I_z = \frac{m}{2} (R_2^2 + R_1^2)$$

Problema 7.14 (problema d'esame: 10 punti)

Un disco omogeneo di massa $M=2$ kg e di raggio $R=20$ cm è posto in posizione verticale su di un piano orizzontale. Intorno al disco è arrotolato un filo inestensibile, di spessore e massa trascurabili. Tramite questo filo si applica una forza costante $F=10$ N che fa muovere il disco di un moto di puro rotolamento mantenendolo sempre in posizione verticale. Supponendo che il disco parta da fermo, si determini:

1. l'accelerazione del centro di massa, a_{CM} ; (4 punti)
2. il valore minimo che deve avere il coefficiente di attrito statico μ_s per consentire un moto di puro rotolamento con il valore della forza applicata al filo; (2 punti)
3. il valore della velocità angolare ω dopo un tempo $\Delta t=10$ s dall'inizio del moto di rotolamento del disco; (2 punti)
4. il valore dello spazio percorso dal disco dopo un tempo $\Delta t=10$ s dall'inizio del moto di rotolamento del disco. (2 punti)

**Soluzione**

Essendo applicata al disco una forza $\vec{F}$ costante in un punto distante R dal centro di massa del sistema, è come dire che al disco è applicato un momento. Di conseguenza la forza di attrito $\vec{f}$ che permette il moto di puro rotolamento deve avere lo stesso verso della forza $\vec{F}$.

Quindi, la componente lungo l'asse delle ascisse dell'equazione del moto del centro di massa è:

$$F + f = ma_{CM}. \quad (1)$$

La seconda equazione cardinale della meccanica permette di scrivere:

$$\vec{R} \times \vec{F} + \vec{R} \times \vec{f} = I\vec{\alpha},$$

che in modulo diviene:

$$F - f = \frac{1}{2} Ma_{CM}, \quad (2)$$

dove si è esplicitato il momento d'inerzia del disco ed usato la relazione $a_{CM} = \alpha R$.

Ricavando f dalla equazione (1) e sostituendo nella equazione (2) si ha:

$$F = \frac{3}{4} Ma_{CM} \quad \rightarrow \quad a_{CM} = \frac{4F}{3M} \approx 6,7 \text{ m/s}^2.$$

Una volta trovata l'accelerazione a_{CM} dalla equazione (1) il valore di f risulta essere $f \approx 3,4$ N. Ora, per garantire un moto di puro rotolamento, il modulo della forza $\vec{F}$ non può superare il massimo valore della forza di attrito statico. Deve cioè valere la seguente relazione:

$$f \leq \mu_s Mg \quad \rightarrow \quad \mu_s \geq \frac{f}{Mg} \quad \rightarrow \quad \mu_s \approx 0,17.$$

Il valore dell'accelerazione angolare è $\alpha = \frac{a_{CM}}{R} \approx 33,5 \text{ rad/s}^2$.

Essendo le forze applicate al sistema costanti, sarà costante anche l'accelerazione angolare α . Partendo il sistema da fermo, si ricava subito dalla relazione cinematica $\omega(t) = \alpha t$ che la velocità angolare vale dopo i primi 10 s $\omega=335 \text{ rad/s}$.

Analogamente, dalla relazione $\vartheta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2$ si ha che dopo i primi 10 s $\vartheta(t = 10\text{s}) \approx 1675\text{rad}$ e lo spazio percorso risulta pari a $\Delta s=335\text{m}$.

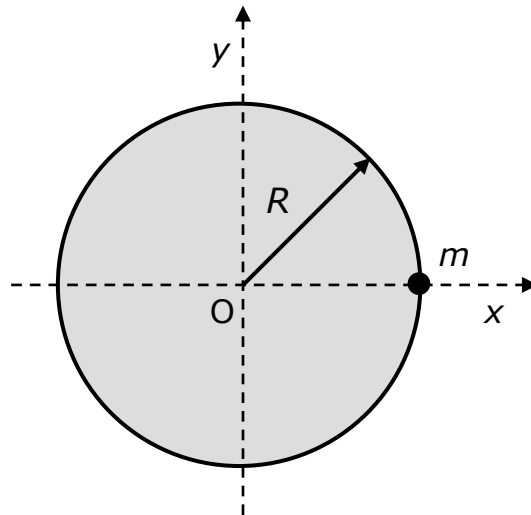
Problema 7.15 (Problema d'esame:10 punti)

Un grande disco di massa $M=200\text{kg}$ e raggio $R=3\text{m}$ è in posizione orizzontale ed è libero di ruotare senza attrito intorno al suo asse baricentrale O . Un uomo, assimilabile ad un punto materiale di massa $m=80\text{kg}$, è sul bordo del disco. Al tempo $t=0$ sia l'uomo che il disco sono fermi.

Ad un certo istante l'uomo inizia a camminare in senso orario rispetto all'asse baricentrale O del disco con una velocità costante $v=2\text{m/s}$.

Nella ipotesi che il piano del disco sia scabro, si determini:

1. la velocità angolare del disco in modulo direzione e verso; (4 punti)
2. la velocità angolare dell'uomo rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la Terra; (1 punto)
3. la velocità angolare dell'uomo rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il disco che ruota e con l'origine in O ; (2 punti)
4. il tempo necessario per l'uomo a ritornare nella stessa posizione di partenza sul disco; (2 punti)
5. il tempo necessario per l'uomo a compiere un intero giro se il disco fosse tenuto fermo; (1 punto)

**Soluzione**

La situazione iniziale è caratterizzata dal fatto che sia l'uomo che il disco sono fermi. Considerando le forze che agiscono come forze interne e osservando che l'uomo non è solidale con il disco, si ha che si deve conservare il momento della quantità di moto del sistema. Essendo nullo il momento della quantità di moto iniziale si ha:

$$0 = I\omega_d + mvR \quad \Rightarrow \quad \omega_d = -\frac{mvR}{I}$$

dove I è il momento d'inerzia del disco pari a $I = MR^2/2$ ed ω_d è la velocità angolare del disco. Si ha, sostituendo l'espressione per I :

$$\omega_d = -\frac{2mv}{MR} \approx 0,53\text{rad/s}.$$

Il vettore velocità angolare è perpendicolare al disco, passa per il suo baricentro ed il suo verso è tale da far ruotare il disco in senso antiorario.

La velocità angolare dell'uomo rispetto ad un riferimento fisso sulla Terra è semplicemente

$$\omega = \frac{v}{R} \approx 0,67 \text{ rad/s.}$$

Rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il disco (cioè ruota con la stessa velocità angolare del disco) la velocità angolare dell'uomo è $\omega' = \omega - \omega_d = 1,2 \text{ rad/s.}$

Il tempo necessario affinché l'uomo compia un giro completo vale $T = 2\pi/\omega' \approx 5,2 \text{ s.}$

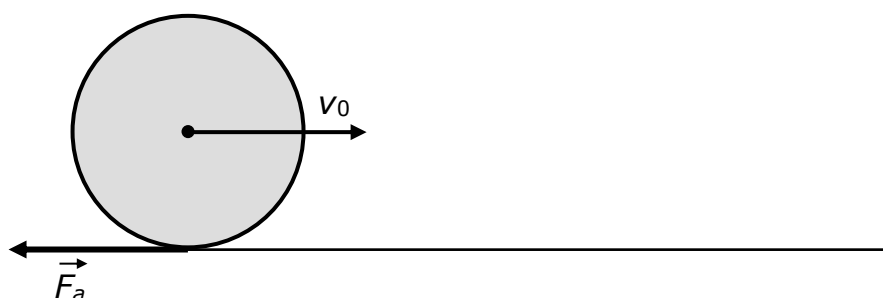
Mantenendo il disco fermo l'uomo compie un giro completo in un tempo pari a $T_1 = 2\pi R/v \approx 9,4 \text{ s.}$

Problema 7.16 (Problema d'esame: 10 punti)

Al tempo $t_0=0$, una sfera possiede una velocità iniziale $v_0=4$ m/s e continua a strisciare per un certo tempo su di un piano orizzontale scabro prima di iniziare un moto di puro rotolamento.

Sapendo che la massa della sfera è $m=0,1$ kg e che il coefficiente di attrito dinamico è $\mu=0,2$, si determini:

1. l'intervallo di tempo Δt che intercorre dall'istante t_0 prima che la sfera inizi un moto di puro rotolamento; (5 punti)
2. la velocità del centro di massa nelle condizioni di puro rotolamento; (2 punti)
3. il lavoro fatto dalla forza d'attrito fino al raggiungimento delle condizioni di puro rotolamento; (2 punti)
4. il lavoro che fa la forza d'attrito durante il moto di puro rotolamento. (1 punto)

**Soluzione**

Durante l'intervallo di tempo durante il quale la sfera striscia, la velocità diminuisce a causa del lavoro fatto dalla forza d'attrito che agisce nel punto di contatto tra la sfera ed il piano orizzontale. La forza d'attrito vale in modulo $F_a = -\mu_s mg$.

Il 2° principio della dinamica si scrive allora come:

$$-\mu mg = ma. \quad (1)$$

L'espressione della decelerazione che si ricava dalla equazione (1) viene inserita nell'equazione cinematica della variazione della velocità nel tempo di un moto uniformemente decelerato, ottenendo:

$$v(t) = v_0 - \mu_s g t. \quad (2)$$

Per definizione, la sfera si muove di moto di puro rotolamento quando per tutti i suoi punti vale la relazione $v = \omega d$, con ω uguale alla velocità angolare della sfera e d la distanza del punto generico dal centro della sfera avente raggio R . Chiamando con $\vec{f}$ la forza esercitata nel punto di contatto tra la sfera ed il piano, essa per garantire il moto di puro rotolamento deve rispettare in modulo la condizione $f \leq F_a = \mu_s mg$. Quindi il moto di puro rotolamento si avrà non appena $f = F_a$. In questo regime la forza d'attrito esercita un momento che è regolato dalla 2ª equazione cardinale della dinamica che, in forma scalare, si scrive nel seguente modo:

$$\mu_s mg R = I \alpha = \frac{2}{5} m R^2 \alpha, \quad (3)$$

dove si è esplicitata l'espressione del momento d'inerzia della sfera. Ricordando ora l'equazione cinematica che regola la variazione della velocità angolare nel tempo si ha:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = \alpha t \quad (4)$$

dove si è posto $\omega(t_0=0)=\omega_0 = 0$. Dalla equazione (3) si ottiene:

$$\alpha = \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R},$$

che sostituita nella equazione (4) fornisce la relazione:

$$\omega(t) = \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} t.$$

Nella condizione di puro rotolamento, si trova dunque che la velocità lineare deve valere:

$$\omega(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} t \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{5}{2} \mu g t$$

Sostituendo ora l'espressione di $v(t)$ trovata nella equazione (2) si determina il tempo necessario per iniziare il moto di puro rotolamento, cioè:

$$t = \frac{2v_0}{7\mu g} \approx 0,6 \text{ s.} \quad (5)$$

La velocità del centro di massa durante il moto di puro rotolamento si ricava direttamente dalla equazione (2) sostituendo il valore di t dalla (5). Si ha $v_{CM} \approx 2,8 \text{ m/s}$. La variazione della energia cinetica del centro di massa misura il lavoro fatto dalla forza d'attrito per ridurre la velocità della sfera. Si ha:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (v_{CM}^2 - v_0^2) \approx 0,5 \text{ J.}$$

Per definizione di moto di puro rotolamento, il lavoro fatto dalla forza d'attrito è sempre nullo, dato che il punto di contatto tra la sfera ed il piano orizzontale è, istante per istante, fermo.

Problema 7.17 (Problema d'esame: 8 punti)

Ad una ruota, assimilabile ad un disco omogeneo di raggio $R=20$ cm e massa $m=4$ kg, viene applicata nel suo centro di massa una forza $\vec{F}$ costante ed orizzontale al terreno. Nell'ipotesi di moto di puro rotolamento, partendo la ruota con velocità iniziale nulla, si misura che il suo centro di massa si sposta di un tratto orizzontale lungo $\Delta x=100$ m in un tempo $\Delta t=20$ s. Alla fine del tratto orizzontale la forza $\vec{F}$ smette di agire e la ruota impegna una salita assimilabile ad un piano inclinato privo di attrito.

Si determini:

1. il valore del modulo della forza $\vec{F}$; (2 punti)
2. il valore della forza di attrito del tratto orizzontale; (2 punti)
3. il valore della velocità angolare alla fine del tratto orizzontale; (1 punto)
4. il valore della quota massima raggiunta dal centro di massa della ruota rispetto al tratto orizzontale; (1 punto)
5. il valore della energia meccanica nel punto in cui la ruota si ferma sul tratto in salita privo di attrito. (2 punti)

**Soluzione**

Il moto del centro di massa è un moto uniformemente accelerato. Pertanto il valore della a_{CM} è dato dalla relazione $a_{CM} = 2\Delta x / t^2 \approx 0,5$ m/s². Le equazioni della dinamica che descrivono il moto della ruota sono:

$$F - f = ma_{CM}$$

$$fR = I\alpha = I \frac{a_{CM}}{R}$$

da cui si ottiene subito $f = \frac{1}{2} ma_{CM} = 1$ N e $F = a_{CM} \left(m + \frac{I}{R^2} \right) = \frac{3}{2} ma_{CM} = 3$ N.

Per conoscere il valore della velocità angolare ω alla fine del tratto Δx , bisogna conoscere l'accelerazione angolare che è data dalla relazione $\alpha = a_{CM} / R = 2,5$ rad/s², da cui si ottiene $\omega = \alpha \Delta t = 50$ rad/s.

Per sapere l'energia meccanica totale della ruota una volta arrivata nel punto più alto del tratto in salita, si usa il principio di conservazione della energia meccanica ottenendo:

$$\frac{1}{2} mv_{CM}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = mgh_{CM} + \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Si è intenzionalmente scritta l'energia cinetica di rotazione alla base del piano inclinato e sulla sua sommità per rimarcare il fatto che essa rimane invariata una volta che la ruota ha raggiunta la quota massima sul tratto in salita del piano inclinato essendo privo di attrito. Per conoscere l'energia potenziale finale occorre calcolare la velocità v_{CM} che è data da $v_{CM} = a_{CM} \Delta t = 10$ m/s.

La quota massima raggiunta dal centro di massa è allora $h_{CM} \approx 5,1$ m. Rispetto al tratto orizzontale si deve aggiungere il raggio della ruota. Per cui $h_f = 5,3$ m.

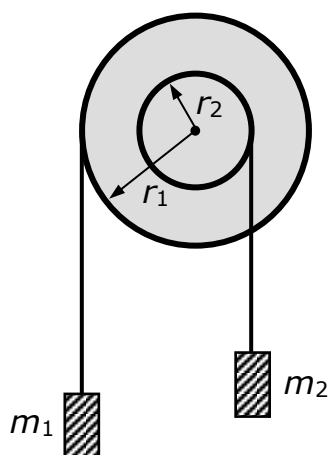
Infine, l'energia meccanica finale della ruota risulta uguale a:

$$E_{m,f} = \frac{1}{2} mv_{CM}^2 + \frac{1}{4} mR^2 \omega^2 = 300 \text{ J}.$$

Problema 7.18 (Problema d'esame: 8 punti)

Il rullo riportato in figura è composto da due cilindri omogenei uniti. Il momento di inerzia totale del rullo vale $I=1 \text{ kg m}^2$ ed è calcolato rispetto all'asse baricentrale orizzontale intorno al quale è libero di ruotare in senso antiorario. Le due masse m_1 ed m_2 sono appese a due fili inestensibili e di massa trascurabile arrotolati in verso opposto rispettivamente sul cilindro di raggio $r_1=40 \text{ cm}$ e sul cilindro di raggio $r_2=20 \text{ cm}$. Sapendo che la tensione T_1 del filo a cui è appesa la massa m_1 non deve superare del doppio la tensione T_2 del filo a cui è legata la massa m_2 e che l'accelerazione angolare del sistema vale $\alpha=2 \text{ rad/s}^2$, si determinino:

1. i valori delle tensioni dei due fili; (3 punti)
2. i valori delle due masse; (3 punti)
3. il valore del momento frenante costante che si deve applicare al rullo, una volta in movimento, affinché le due masse si muovano con velocità costante; (2 punti)

**Soluzione**

Le equazioni della dinamica applicate alle due masse forniscono il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} m_1 g - T_1 &= m_1 a_1 = m \alpha r_1 \\ m_2 g - T_2 &= -m_2 a_2 = -m \alpha r_2 \end{aligned}$$

dove $\alpha = a/r$ è l'accelerazione angolare costante del sistema (i fili non slittano durante il moto del sistema). A questa equazione si aggiunge la condizione che deve essere rispettata per il valore delle tensioni dei fili: $T_1 = 2T_2$. L'equazione cardinale della dinamica dei sistemi fornisce l'ulteriore equazione:

$$r_1 T_1 - r_2 T_2 = I \alpha \rightarrow T_2 = \frac{I \alpha}{2r_1 - r_2} \approx 3,3 \text{ N.}$$

Da questo risultato si ricava subito $T_1=6,6 \text{ N}$. Sostituendo ora i valori ottenuti per le tensioni dei due fili nel sistema di equazioni, si determinano i valori delle due masse che risultano valere $m_1 \approx 0,73 \text{ kg}$ ed $m_2 \approx 0,32 \text{ kg}$.

Il valore del momento frenante costante necessario per rendere nulla l'accelerazione angolare si trova direttamente dall'equazione dei momenti sfruttando, nel caso del presente problema, il fatto che $r_1=2r_2$.

Si ottiene:

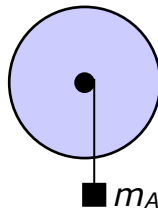
$$M = 3T_2 r_2 \approx 2 \text{ Nm.}$$

Problema 7.19 (10 punti)

Un cilindro omogeneo di massa $m=0,5$ kg e raggio $R=20$ cm può ruotare intorno al suo asse baricentrale passante per il centro O. Una puleggia di massa trascurabile e raggio $r=1$ cm, è attaccato al disco ed è coassiale rispetto all'asse di rotazione. Lungo la circonferenza della puleggia è avvolto e vincolato un filo inestensibile e di massa trascurabile al cui estremo libero è legata una massa puntiforme $m_A=0,3$ kg. Nella situazione iniziale la massa m_A è ad una certa altezza h dalla posizione più bassa che essa può raggiungere. Lasciando la massa m_A libera, essa scende della quota $h=2$ m per poi risalire fino ad una quota $h_1=1,8$ m. Dato che le due altezze sono disuguali, si suppone che esista un momento delle forze d'attrito costante M applicato direttamente all'asse di rotazione del sistema.

Si determini:

1. il valore del momento delle forze di attrito M ; (4 punti)
2. il valore della accelerazione di caduta della massa m_A ; (4 punti)
3. il valore della tensione del filo nella fase di caduta. (2 punti)

**Soluzione:**

In assenza del momento delle forze d'attrito, la quota di risalita della massa m_A sarebbe la stessa. Non essendo così, le equazioni del moto rispettivamente per la massa m_A e per il disco (la massa e quindi il momento d'inerzia della puleggia sono trascurabili) sono uguali a:

$$\begin{aligned} m_A g - T &= m_A a \\ Tr - M &= I \alpha = \frac{I}{r} a \end{aligned} \quad (1)$$

dove si è fatto uso della relazione $a = \alpha r$. Si applichi ora la conservazione della energia meccanica tra la situazione iniziale (la massa m_A sta ad una quota h dal punto più basso a cui può arrivare) e quella finale (la massa m_A risale fino alla quota h_1). Si ha:

$$m_A g h_1 - m_A g h = W_a = -M \int_0^{\vartheta_f} d\vartheta,$$

dove ϑ_f è l'angolo totale di cui è ruotato il disco avendo posto uguale a zero l'angolo iniziale.

Ricordando che $ds = r d\vartheta$ si ha:

$$m_A g (h_1 - h) = -\frac{M}{r} \int_0^{h+h_1} ds = -\frac{M}{r} (h + h_1)$$

da cui:

$$M = mgr \frac{h - h_1}{h + h_1} \approx 1,6 \times 10^{-3} \text{ Nm.}$$

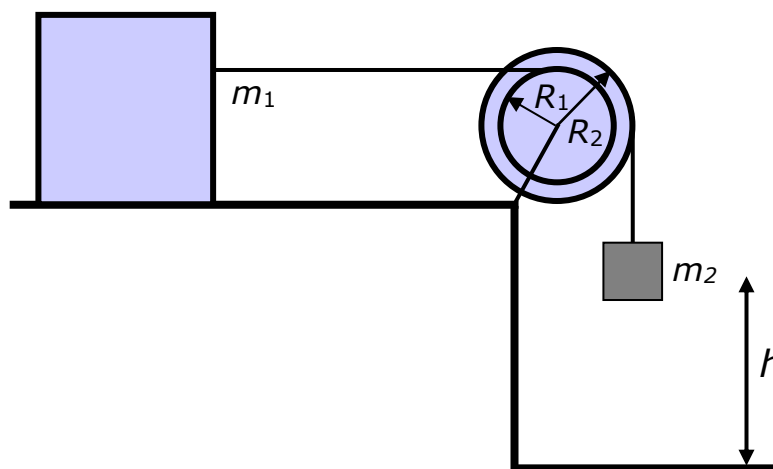
Ritornando alle equazioni (1) si ha:

$$a = 2 \frac{m_A g r^2 - Mr}{mR^2 + 2m_A r^2} \approx 1,3 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 \quad \text{e} \quad T \approx 2,9 \text{ N.}$$

Problema 7.20 (10 punti)

Si osservi il sistema fisico riportato nella figura sottostante. Una carrucola omogenea e di momento di inerzia totale $I=1 \text{ kgm}^2$ è formata da due dischi attaccati di raggio $R_1=15 \text{ cm}$ ed $R_2=20 \text{ cm}$. La carrucola ruota senza attrito intorno al suo baricentro. Sul bordo del disco di raggio maggiore R_2 è avvolto un filo collegato ad una sua estremità ad una massa m_2 . Sul bordo del disco di raggio inferiore R_1 è arrotolato un secondo filo a cui è attaccata una lastra metallica di massa $m_1=2,5 \text{ kg}$ che può strisciare su di un piano scabro. Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra lastra e piano vale $\mu_s=0,30$ e quello dinamico $\mu_d=0,10$, nell'ipotesi che i fili siano inestensibili e di massa trascurabile, si determini:

1. il valore della massa m_2 minima (m_{2min}) per il quale il sistema si mette in movimento; (4 punti)
2. dopo quanto tempo la massa m_2 raggiunge il suolo partendo da ferma nel caso in cui si colloca una massa $m_2=2 m_{2min}$ ad una altezza dal suolo pari ad $h=50 \text{ cm}$. (6 punti)

**Soluzione:**

Nella situazione di equilibrio si ha che le relazioni che forniscono il valore della tensione dei fili a cui sono rispettivamente collegate le masse m_1 ed m_2 , sono:

$$T_1 = \mu_s m_1 g \quad ; \quad T_2 = m_2 g .$$

Inoltre, per la condizione di equilibrio si deve avere l'uguaglianza dei momenti delle tensioni calcolati rispetto all'asse baricentrale di rotazione della carrucola. Si ottiene:

$$T_1 R_1 = T_2 R_2 .$$

Il movimento della lastra e quindi dell'intero sistema si ha non appena T_1 risulta maggiore di $\mu_s m_1 g$. Dalle precedenti equazioni si ha:

$$\mu_s m_1 g < T_1 = T_2 \frac{R_2}{R_1}$$

Si ha, pertanto che:

$$\mu_s m_1 g < m_{2min} g \frac{R_2}{R_1} \quad \rightarrow \quad m_{2min} > \frac{\mu_s m_1 R_1}{R_2} \approx 0,56 \text{ kg} .$$

Si ponga ora $m_2=2m_{2min}=1,125 \text{ kg}$ e si studi la situazione dinamica. Indicando con $\vartheta(t)$ l'angolo di rotazione della carrucola si ha:

$$\text{per la massa } m_1: \quad T_1 - \mu_d m_1 g = m_1 a_1$$

per la massa m_2 :

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

per il moto della carrucola:

$$T_2 R_2 - T_1 R_1 = I \alpha = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

Ricordando ora la relazione che lega l'accelerazione lineare a quella angolare $a = \alpha R$, con α una costante del moto, si ha:

$$a_1 = R_1 \alpha \quad ; \quad a_2 = R_2 \alpha$$

e

$$T_1 - \mu_d m_1 g = m_1 R_1 \alpha \quad ; \quad m_2 g - T_2 = m_2 R_2 \alpha \quad ; \quad T_2 R_2 - T_1 R_1 = I \alpha.$$

Dalle precedenti equazioni si ottiene il valore della accelerazione angolare:

$$\alpha = \frac{g(m_2 R_2 - \mu_d m_1 R_1)}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} \approx 1,67 \text{ rad/s}^2.$$

Di conseguenza il valore della accelerazione della massa m_2 vale $a_2 = \alpha R_2 \approx 0,33 \text{ m/s}^2$.

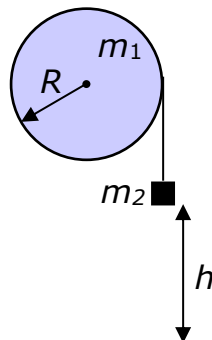
Dalle equazioni della cinematica si ottiene il valore del tempo impiegato dalla massa m_2 ad arrivare al suolo. Si ha, infatti, che:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_2}} \approx 1,73 \text{ s.}$$

Problema 7.21 (10 punti)

Un cilindro può ruotare intorno al suo asse baricentrale sotto l'azione della forza peso di un corpo puntiforme vincolato ad uno dei due capi di una fune che è arrotolata attorno al cilindro stesso (si veda la figura). All'inizio l'intero sistema è tenuto fermo. Una volta in moto, dopo che il corpo puntiforme è sceso di una quota pari ad $h=0,5\text{m}$, il filo si spezza ed il cilindro si ferma dopo un tempo $\Delta t=5,7\text{s}$ dal momento della rottura del filo. Sapendo che la massa del cilindro è $m_1=30\text{kg}$, quella del corpo puntiforme $m_2=2\text{kg}$ e che il raggio del cilindro vale $R=0,1\text{m}$, si determini:

1. il valore della velocità angolare del cilindro nel momento della rottura del filo; (5 punti)
2. il valore del momento delle forze di attrito M_A a cui è sottoposto il cilindro durante il suo moto di rotazione. (5 punti)

**Soluzione:**

Il problema può risolversi utilizzando la conservazione dell'energia meccanica: Le espressioni dell'energia meccanica nello stato iniziale (sistema fermo) e di quello finale (al momento della rottura del filo) sono le seguenti:

$$E_{in} = m_2gh \quad ; \quad E_{fin} = \frac{1}{2} I \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_2 v_0^2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 \omega_0^2.$$

La differenza tra questi valori di energia è pari al lavoro fatto dal momento delle forze di attrito che vale:

$$W_A = -M_A \int d\vartheta = -\frac{M_A}{R} \int_0^h ds = -\frac{M_A h}{R}.$$

Applicando il principio di conservazione della energia meccanica si ottiene:

$$M_A = m_2 g R - \frac{\omega_0^2 R^3}{4h} (m_1 + 2m_2). \quad (1)$$

Nella fase di rallentamento del moto di rotazione del cilindro, l'unico momento presente è proprio quello dovuto alle forze di attrito. Allora si ha:

$$-M_A = I \frac{d\omega}{dt} \quad \rightarrow \quad \omega(t) = \omega_0 - \frac{M_A}{\Delta t}$$

dato che alla fine il cilindro si ferma si ha:

$$\omega_0 = \frac{M_A \Delta t}{I}. \quad (2)$$

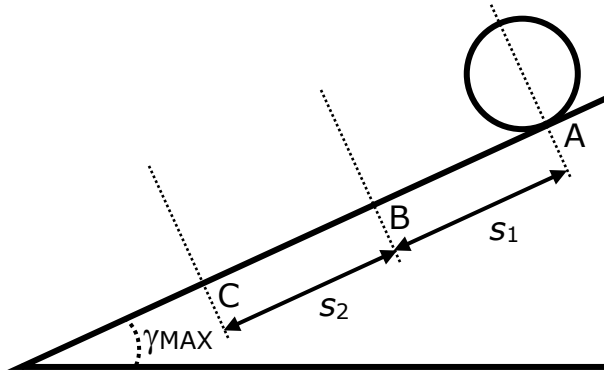
Mettendo a sistema le equazioni (1) e (2) si ottiene $M_A \approx 0,3 \text{ Nm}$ ed $\omega_0 \approx 10 \text{ rad/s}$.

Nel determinare il valore della velocità angolare non si sono ovviamente prese in considerazione le soluzioni che non hanno valore fisico.

Problema 7.22 (10 punti)

Un anello di raggio r e massa m , è su di un piano inclinato di angolo γ rispetto al piano orizzontale. Scendendo lungo il piano inclinato, l'anello percorre un primo tratto $AB=s_1=1$ m scabro (coefficiente di attrito statico $\mu_s=0,5$) ed un secondo tratto $BC=s_2=1$ m liscio ($\mu_s=0$). Si determini:

3. il valore massimo, γ_{MAX} , dell'angolo γ del piano inclinato affinché il moto di discesa dell'anello lungo il tratto AB sia di puro rotolamento; (4 punti)
4. la velocità del centro di massa dell'anello alla fine del tratto AB. (3 punti)
5. la velocità del centro di massa dell'anello alla fine del tratto BC. (3 punti)

**Soluzione:**

Le equazioni del moto di discesa dell'anello lungo il primo tratto AB sono le seguenti:

$$ma_{CM} = mg \sin \gamma - f \quad ; \quad fr = I \frac{d\omega}{dt},$$

dove f è la forza di attrito e a_{CM} l'accelerazione di centro di massa dell'anello. Dato che si vuole trovare il valore massimo dell'angolo γ affinché il moto dell'anello nel tratto AB sia di puro rotolamento, deve essere che $d\omega/dt = a_{CM}/r$. Risolvendo il sistema per trovare il valore della forza d'attrito, si ha:

$$a_{CM} = \frac{g \sin \gamma}{2} \quad ; \quad f = \frac{mg \sin \gamma}{2}.$$

La forza d'attrito trovata deve essere al massimo uguale alla componente normale al piano inclinato della forza peso moltiplicata per il coefficiente di attrito statico. Cioè si ha:

$$(mg/2) \sin \gamma_{MAX} = \mu_s mg \cos \gamma_{MAX} \rightarrow \gamma_{MAX} = \tan^{-1}(2\mu_s) = 45^\circ.$$

In queste condizioni, si può trovare il valore della velocità del centro di massa applicando la conservazione dell'energia meccanica per il moto lungo il tratto AB. Si ottiene:

$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_{CM,B}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh_B \rightarrow v_{CM,B} = \sqrt{gs_1 \sin \gamma_{MAX}} \approx 2,6 \text{ m/s},$$

dove si è indicato con $h_{A,B}$ le quote del centro di massa rispetto al piano orizzontale e si è posto $v_{CM} = \omega r$ e $h_A - h_B = s_1 \sin \gamma_{MAX}$. Analogamente per il tratto BC si ha:

$$mgh_B + \frac{1}{2}mv_{CM,B}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh_C + \frac{1}{2}mv_{CM,C}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

da cui:

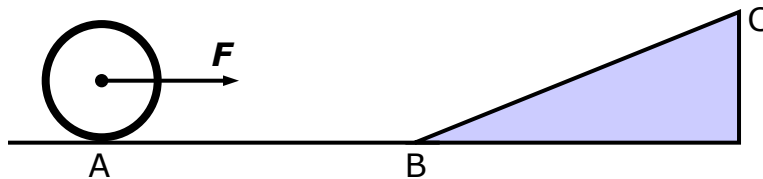
$$v_{CM,C} = \sqrt{2gs_2 \sin \gamma_{MAX} + v_{CM,B}^2} \approx 4,5 \text{ m/s}.$$

Problema 7.23 (10 punti)

Un anello di raggio R e massa $m=10$ kg è fermo nella posizione A di un piano orizzontale che si raccorda nel punto B con un piano inclinato rispetto al piano orizzontale di un angolo $\alpha=45^\circ$ e lungo BC. Sapendo che $AB=BC=L=10$ m, si applica al centro di massa dell'anello una forza F costante e parallela al piano orizzontale che agisce per un tempo Δt solo lungo il tratto AB e che consente all'anello di salire lungo il piano inclinato e di fermarsi esattamente nel punto C.

Supponendo che il moto dell'anello sia di puro rotolamento si determini:

6. il valore del modulo della forza F ; (4 punti)
7. il tempo Δt durante il quale la forza F deve agire; (3 punti)
8. la velocità $v_{CM,B}$ del centro di massa dell'anello alla fine del tratto AB. (3 punti)

**Soluzione:**

Le equazioni del moto dell'anello lungo il primo tratto AB sono le seguenti:

$$ma_{CM} = F - f \quad ; \quad fR = I \frac{d\omega}{dt} \rightarrow f = ma_{CM},$$

dove f è la forza di attrito e a_{CM} l'accelerazione di centro di massa dell'anello. Sostituendo il valore di f nella prima equazione si ha:

$$F = 2ma_{CM}.$$

Le equazioni della cinematica del punto materiale sono le seguenti:

$$v_{CM}(t) = a_{CM}t \quad ; \quad x_{CM}(t) = \frac{1}{2}a_{CM}t^2,$$

da cui si ha subito che:

$$x_{CM}(t) = \frac{v^2(t)}{2a_{CM}} \rightarrow x_{CM,B}(t_1) = \frac{v_B^2(t_1)}{2a_{CM}},$$

Dalla conservazione della energia meccanica tra i punti B e C si ha:

$$\frac{1}{2}mv_{CM,B}^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 = mgL \sin \alpha \rightarrow v_{CM,B} = \sqrt{gL \sin \alpha} \approx 8,3 \text{ m/s}.$$

Utilizzando il valore della velocità ora trovato si ha subito che:

$$a_{CM} = \frac{v_{CM,B}^2}{2L} \approx 3,4 \text{ m/s}^2 \quad ; \quad t_1 = \Delta t = \frac{v_{CM,B}}{a_{CM}} \approx 2,44 \text{ s} \quad ; \quad F = 2ma_{CM} \approx 68 \text{ N}.$$

Problema 7.24 (10 punti)

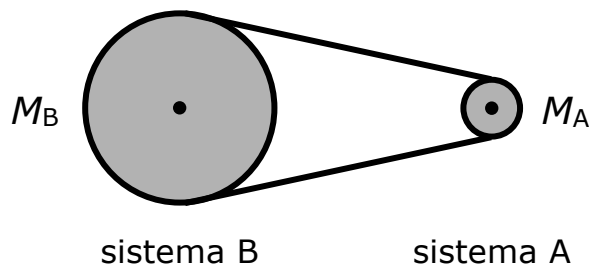
Un sistema rotante A è collegato ad un secondo sistema rotante B tramite una cinghia di trasmissione ben tesa. Mentre sull'asse del sistema A è applicato un momento motore M_A , sull'asse del sistema B è applicato un momento frenante costante M_B . Si misura che a regime il sistema A ruota ad una velocità angolare costante $\omega_A = 1200$ giri/minuto.

Nell'ipotesi che la cinghia non slitti, sapendo che:

- il momento di inerzia del sistema A è uguale a $I_A = 0,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$;
- i raggi dei due sistemi rotanti valgono $R_A = 0,15 \text{ m}$ e $R_B = 0,5 \text{ m}$;
- il valore della potenza a regime sviluppato dal motore applicato al sistema A è uguale a $P_A = 3 \text{ kW}$,

e ricordando che il lavoro del momento di una forza vale $dW = M d\vartheta$, si determini:

1. il valore della velocità angolare ω_B del sistema rotante B; (2 punti)
2. il valore del momento motore M_A ; (2 punti)
3. il valore del momento frenante M_B ; (2 punti)
4. il momento di inerzia del sistema B se esso, una volta annullato il momento motore e lasciando invece operante quello frenante, si ferma dopo aver effettuato 18 giri completi. (4 punti)

**Soluzione:**

Dal momento che la cinghia non slitta, il moto di rotazione si trasferirà integralmente dal sistema A a quello B. Pertanto, a regime, la velocità ω_B del sistema B sarà uguale a:

$$\omega_B = \omega_A (R_A / R_B) = 360 \text{ giri/min} \approx 37,7 \text{ rad/s} \quad (1)$$

A regime il lavoro fatto dal momento motore sarà uguale a quello eseguito dal momento frenante. Pertanto si può scrivere:

$$M_A d\vartheta_A = M_B d\vartheta_B \quad (2)$$

Sempre a regime, la potenza del motore applicato al sistema B si scrive come:

$$P_A = \frac{dW}{dt} = M_A \frac{d\vartheta_A}{dt} = M_A \omega_A$$

da cui si ha subito che $M_A \approx 23,9 \text{ Nm}$. Il valore del momento frenante è relazionato a quello motore tramite il rapporto tra i raggi. Dalla (2), ricordando che $ds = R d\vartheta$, si ha:

$$M_A = M_B \frac{R_A}{R_B} \rightarrow M_B = \frac{R_B}{R_A} M_A \approx 79,7 \text{ Nm}.$$

Un volta annullato il momento motore, quello frenante compie un lavoro pari a:

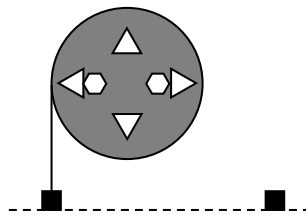
$$W_B = M_B 2\pi n = \frac{1}{2} (I_A \omega_A^2 + I_B \omega_B^2) \rightarrow I_B = \frac{M_B 4\pi n - I_A \omega_A^2}{\omega_B^2} \approx 7,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2,$$

dove con n si è indicato il numero di giri effettuato dal sistema B prima di fermarsi.

Problema 7.25 (10 punti)

Una carrucola di raggio $r_c = 0.10$ m ha la forma mostrata in figura. Dalla sua geometria si ricava che la massa si distribuisce in modo omogeneo rispetto ad un qualsiasi diametro. Dato che risulta problematico calcolarne il momento di inerzia, si opta per una soluzione dinamica. Avendo a disposizione solo un metro ed un cronometro, si pensa di arrotolare attorno alla carrucola un filo inestensibile e di massa trascurabile al cui estremo libero si lega un corpo puntiforme di massa $m = 2$ kg che risulta essere ad una quota $h = 2$ m dal suolo. Si prende poi un secondo corpo puntiforme identico al precedente e lo si pone alla stessa quota h dal suolo. Una volta lasciati liberi, si misura che i due corpi, partendo da fermo, arrivano al suolo contemporaneamente solo se il corpo in caduta libera viene lasciato $0,14$ s dopo l'inizio del moto del corpo legato alla carrucola. Nell'ipotesi di assenza di forze d'attrito, si determini:

1. il momento di inerzia I del disco; (4 punti)
2. la tensione T del filo; (2 punti)
3. l'energia meccanica della carrucola quando il corpo ad essa collegato tramite il filo ha percorso la distanza h . (4 punti)

**Soluzione**

Si inizi con lo scrivere le equazioni del moto del corpo collegato alla carrucola tramite il filo. Si ha:

$$mg - T = ma_1 \quad ; \quad Tr_c = I\alpha_1 = I \frac{a_1}{r_c},$$

dove a_1 , T , I sono rispettivamente l'accelerazione lineare del corpo, la tensione del filo e il momento di inerzia del disco. Ricavando ora dalla seconda delle due precedenti equazioni l'espressione della tensione T del filo e sostituendola nella prima si ottiene:

$$a_1 = \frac{mgr_c^2}{I + mr_c^2}.$$

Le equazioni cinematiche del moto per i due corpi in caduta sono per $x(t_1) = x(t_2) = h$ uguali a:

$$h = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{mgr_c^2}{I + mr_c^2} t_1^2 \quad ; \quad h = \frac{1}{2} g t_2^2$$

Dalle misure dinamiche sul moto dei due corpi si ha che $t_1 - t_2 = t_0 = 0,14$ s, da cui:

$$\sqrt{\frac{2h(I + mr_c^2)}{mgr_c^2}} - \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_0 \quad \rightarrow \quad I = mr_c^2 \left[\frac{g}{2h} \left(t_0 + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^2 - 1 \right] \approx 9.84 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2.$$

Una volta noto I , si trova $a_1 \approx 6.57 \text{ ms}^{-2}$, da cui $T \approx 6.5$ N. L'energia meccanica della carrucola è solo quella cinetica legata alla sua rotazione. Essa si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica del sistema corpo più carrucola. Di conseguenza si può scrivere:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 = mgh \quad \rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = mgh - \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Dalle precedenti relazioni si trova che $v_1 = a_1 t_1 \approx 5.1$ m/s da cui segue che $E_c \approx 10,1$ J.

Problema 7.26 (10 punti)

Su di una strada piana, una vettura Porsche Carrera GT accelera da 0 a 100 km/h in un tempo pari a $t_0 = 3.9$ s. Assumendo che il moto sia uniformemente accelerato, si calcoli:

1. La distanza percorsa durante l'accelerazione da 0 a 100 km/h; (2 punti)
2. Il tempo che la medesima automobile impiega per passare da 0 a 100 km/h lungo una salita che forma con l'orizzontale un angolo $\alpha = 15^\circ$; (3 punti)
3. Il tempo che essa impiega per passare da 0 a 100 km/h lungo una discesa che forma con l'orizzontale un angolo $\alpha = 15^\circ$; (2 punti)
4. Assumendo che la massa dell'automobile sia $M_0 = 1380$ kg e quella del conducente $m = 70$ kg, che l'auto abbia trazione posteriore e che le ruote posteriori abbiano un raggio $R = 25$ cm, calcolare il momento torcente, o momento motore, che l'asse posteriore, su cui sono applicate le ruote motrici, scarica a terra durante l'accelerazione. (3 punti)

Soluzione

Essendo il moto uniformemente accelerato, l'accelerazione vale:

$$a_0 = \frac{v}{t_0} = \frac{100 / 3,6 \text{ m/s}}{3,9 \text{ s}} \approx 7.1 \text{ m/s}^2.$$

Durante il tempo t_0 , l'automobile percorre uno spazio pari a: $x_0 = \frac{1}{2} a_0 t_0^2 \approx 54.1$ m.

La forza che agisce sulla autovettura (applicata ai punti di contatto dei pneumatici posteriori a terra) sarà $F = Ma_0$. Quando l'automobile accelera in salita, alla componente lungo la direzione del moto delle forze applicate si sottrarrà $Mg \sin \alpha$. La nuova accelerazione si calcolerà dalla 2ª legge di Newton:

$$F - Mg \sin \alpha = Ma_1 \Rightarrow Ma_0 - Mg \sin \alpha = Ma_1 \Rightarrow a_1 = a_0 - g \sin \alpha \approx 4.6 \text{ m/s}^2,$$

da cui:

$$t_1 = \frac{v}{a_1} = \frac{100 / 3,6 \text{ m/s}}{4,58 \text{ m/s}^2} \approx 6.1 \text{ s}.$$

Analogamente, quando l'automobile accelera in discesa si ha $a_2 = a_0 + g \sin \alpha \approx 9.7 \text{ m/s}^2$, da cui:

$$t_2 = \frac{v}{a_2} = \frac{100 / 3,6 \text{ m/s}}{9,66 \text{ m/s}^2} \approx 2.9 \text{ s}.$$

La massa totale che viene accelerata è $M = M_0 + m = 1450$ kg. La forza esercitata sulle ruote posteriori, al punto di contatto con il suolo, è $F = Ma_0 \approx 10.3$ kN. Il momento M_F esercitato sull'asse per produrre una tale forza al punto di contatto col suolo è $M_F = Fr \approx 2.6$ kN×m. La coppia massima sviluppata dal motore di una Porsche Carrera GT è circa 4 volte inferiore, il che significa che il motore è molto demoltiplicato durante l'accelerazione (cioè, durante la suddetta accelerazione sono in funzione le marce più basse).

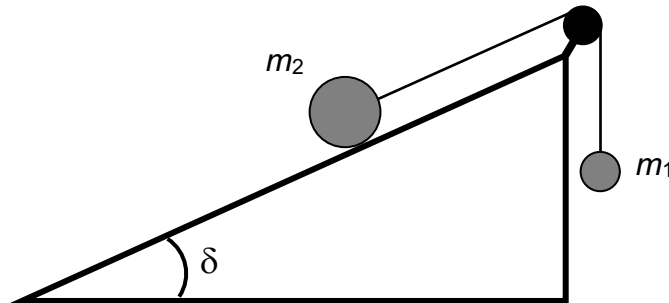
Problema 7.27 (10 punti)

Un sistema meccanico è composto da due masse $m_1=0,4$ kg ed $m_2=2$ kg disposte come in figura. La massa m_2 è posta su di un piano inclinato scabro di angolo variabile δ . Le due masse sono tra loro collegate da un filo inestensibile e di massa trascurabile che si avvolge attorno ad una carrucola di raggio R e massa $M=0,1$ kg assimilabile ad un disco sottile omogeneo. Un osservatore, variando l'angolo δ , misura che l'accelerazione massima con cui si muove il corpo di massa m_1 **dall'alto verso il basso** lungo una traiettoria verticale vale $a_{MAX}=1,2$ m/s².

Nelle condizioni della misura di a_{MAX} si determini:

1. per quale valore dell'angolo δ del piano inclinato l'osservatore trova il valore massimo della accelerazione; (2 punti)
2. il valore del coefficiente di attrito dinamico μ_d tra la massa m_2 ed il piano inclinato; (4 punti)
3. per quale angolo del piano inclinato l'accelerazione del sistema risulta nulla. (4 punti)

Nota: si assuma $\mu_d < 1$, $0 \leq \delta \leq \pi/2$ e il moto della massa m_1 sempre dall'alto verso il basso.

**Soluzione**

Le equazioni della dinamica applicate alle due masse forniscono il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} T_1 - m_1 g &= -m_1 a \\ T_2 - m_2 g \sin \delta - F_A &= m_2 a \\ (T_1 - T_2)R &= I\alpha = I \frac{a}{R} = \frac{1}{2} MRa \end{aligned}$$

dove $\alpha = a/r$ è l'accelerazione angolare della carrucola, $I = \frac{1}{2} MR^2$ il suo momento d'inerzia e $F_A = \mu_d m_2 g \cos \delta$. Dalla precedente equazione si ricava che la generica espressione della accelerazione del sistema (il filo è di massa trascurabile e inestensibile) è uguale a:

$$a = g \frac{m_1 - m_2(\mu_d \cos \delta + \sin \delta)}{(1/2)M + m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Avendo supposto $\mu_d < 1$ e $0 < \delta < \pi/2$, il valore minimo del termine $(\mu_d \cos \delta + \sin \delta)$ si ha per $\delta=0$. Operando una ispezione sul termine $(\mu_d \cos \delta + \sin \delta)$ in funzione dell'angolo δ si nota che essa presenta un massimo per $\delta = \sin^{-1} \sqrt{1/(1 + \mu_d^2)}$. Dalla eq.(1) si ha per

$a=a_{MAX}$:

$$\mu_d = \frac{m_1 g - a_{MAX}[(1/2)M + m_1 + m_2]}{m_2 g} \approx 0,05.$$

Sempre dalla eq.(1) l'accelerazione si annulla quando:

$$m_1 - m_2(\mu_d \cos \delta + \sin \delta) = 0.$$

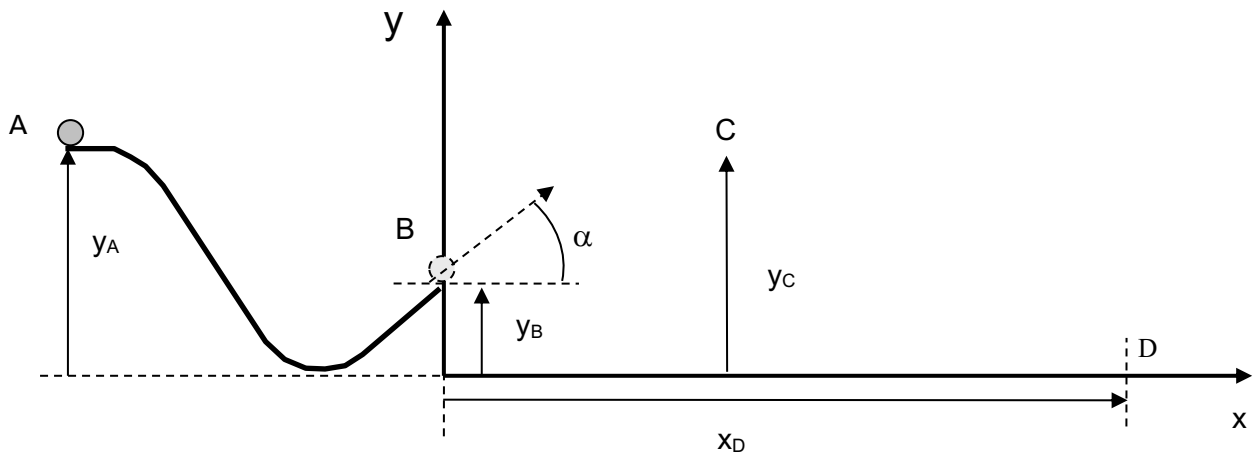
Risolvendo questa equazione si trovano due valori dell'angolo δ : $\delta_1 \approx 14.4$; $\delta_2 \approx 8.7$.
Il valore da assumere è quello minore $\delta_2 \approx 8.7$. Il valore $\delta_1 \approx 14.4$ corrisponde alla accelerazione nulla che si ottiene quando si inverte il moto del sistema.

Problema 7.28 (10 punti)

Una pallina da biliardo di raggio $r=3$ cm fatta di materiale omogeneo ed avente massa $M=200$ g *rotola senza strisciare* lungo la guida della figura partendo dal punto A avente una quota $y_A=97$ cm. Nel punto B, avente quota $y_B=7$ cm, la pallina si distacca dalla guida con un angolo $\alpha=30^\circ$ e segue una traiettoria libera soggetta alla sola forza di gravità (si trascuri la resistenza dell'aria). Calcolare:

1. la velocità della pallina nel punto B; (4 punti)
2. Il punto di massima altezza raggiunto dalla pallina nel moto libero; (2 punti)
3. Il punto D ove la pallina tocca terra e la velocità angolare di rotazione della pallina in tale punto. (4 punti)

Suggerimento: Per il punto 1, si utilizzi la conservazione dell'energia meccanica.

**Soluzione**

Il momento d'inerzia di una sfera omogenea vale $I = \frac{2}{5}Mr^2 \cong 7.2 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$. La conservazione dell'energia meccanica dà:

$$Mg(y_A + r) = Mg(y_B + r) + \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_A^2 = Mg(y_B + r) + \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_B^2}{r^2},$$

ove v_B è la velocità del centro di massa. Usando la condizione di puro rotolamento $\omega_B = v_B/r$ si ottiene:

$$Mg(y_A + r) = Mg(y_B + r) + \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_B^2}{r^2} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{10g(y_A - y_B)}{7}} \cong 3.55 \text{ m/s}.$$

A questo punto, la traiettoria del centro di massa della pallina diventa parabolica, con velocità angolare costante. Le equazioni parametriche della traiettoria parabolica riferite al punto di contatto tra pallina e guida sono:

$$x = v_B \cos(\alpha)t \quad ; \quad y = y_B + v_B \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

Il punto C è il punto in cui la componente della velocità lungo y si annulla oppure, detto in altre parole, è il punto in cui la derivata temporale di $y(t)$ si annulla (punto estremo di $y(t)$). Si ha

$$gt_C = v_B \sin(\alpha) \Rightarrow y_C = y_B + \frac{[v_B \sin(\alpha)]^2}{2g} \cong 0.23 \text{ m}.$$

Il punto D ha invece coordinata x_D che si ottiene annullando il valore di $y(t)$. Si ha:

$$0 = y_B + v_B \sin(\alpha)t_D - \frac{1}{2}gt_D^2 \quad \Rightarrow \quad t_D = \frac{v_B \sin(\alpha) \pm \sqrt{[v_B \sin(\alpha)]^2 + 2y_B g}}{g}$$

di cui solo il segno positivo del radicale dà luogo a $t_D > 0$ ed ha perciò significato fisico. La coordinata x_D vale:

$$x_D = \frac{v_B \cos(\alpha)}{g} \left\{ v_B \sin(\alpha) + \sqrt{[v_B \sin(\alpha)]^2 + 2y_B g} \right\} \cong 1.22 \text{ m.}$$

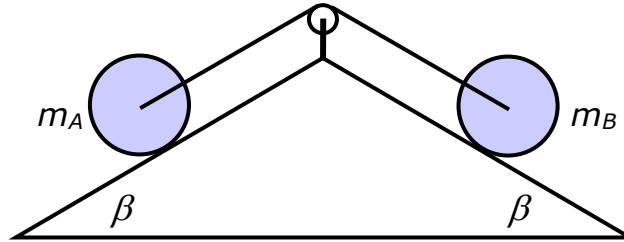
La velocità angolare nel punto D è la stessa che la pallina aveva nel punto B, cioè:

$$\omega_D = \omega_B = \frac{v_B}{r} \cong 118 \text{ rad/s.}$$

Problema 7.29 (10 punti)

Due dischi omogenei di massa $m_A=1\text{kg}$ e $m_B=1.5\text{kg}$ e raggio $R_B=R_A=R=0.2\text{m}$ sono posti su due piani inclinati scabbi contrapposti che formano lo stesso angolo $\beta=30^\circ$ con il piano orizzontale, come riportato in figura. I centri di massa dei due dischi sono collegati da un filo inestensibile e di massa trascurabile che passa all'interno della gola di una carrucola di massa $m_c=0.2\text{kg}$ e raggio $r_c=0.05\text{m}$. Nell'ipotesi di moto di puro rotolamento, si determini:

1. il valore della accelerazione del centro di massa dei dischi; (5 punti)
2. i valori delle forze di contatto f_A e f_B che agiscono rispettivamente sui punti di contatto dei dischi di massa m_A e m_B ; (2 punti)
3. i valori minimi dei coefficienti di attrito statico che ancora garantiscono il moto di puro rotolamento di due dischi; (3 punti)

**Soluzione:**

Le equazioni dinamiche che descrivono il moto dei due dischi e della carrucola sono:

$$\begin{aligned} T_A - m_A g \sin \beta - f_A &= m_A a_{CM} & m_B g \sin \beta - T_B - f_B &= m_B a_{CM} \\ f_A R = I_A \alpha = \frac{1}{2} m_A R a_{CM} & & f_B R = I_B \alpha = \frac{1}{2} m_B R a_{CM} & ; \\ T_B - T_A &= I_c \frac{\alpha_c}{r_c} = \frac{1}{2} m_c a_{CM} \end{aligned}$$

In queste equazioni T_A e T_B sono le tensioni del filo agenti sui centri di massa dei dischi di massa m_A e m_B , f_A e f_B le forze di contatto tra disco e piano. Le accelerazioni del centro di massa dei due dischi è la stessa dato che il filo è inestensibile e non striscia nella gola della carrucola. Dalle precedenti equazioni si ricava l'espressione del centro di massa che risulta essere uguale a:

$$a_{CM} = \frac{2g \sin \beta (m_B - m_A)}{3(m_A + m_B) + m_c} \cong 0.6 \text{ m/s}^2.$$

Dal valore di a_{CM} si ricavano subito quelli delle forze di contatto ottenendo $f_A \cong 0.3 \text{ N}$ e $f_B \cong 0.45 \text{ N}$. La condizione di puro rotolamento deriva dalla condizione generale:

$$f \leq \mu_s mg \cos \beta \rightarrow \mu_{sA,B} \geq \frac{f_{A,B}}{mg \cos \beta} \rightarrow \mu_{sA,B} \geq \frac{a_{CM}}{2g \cos \beta}$$

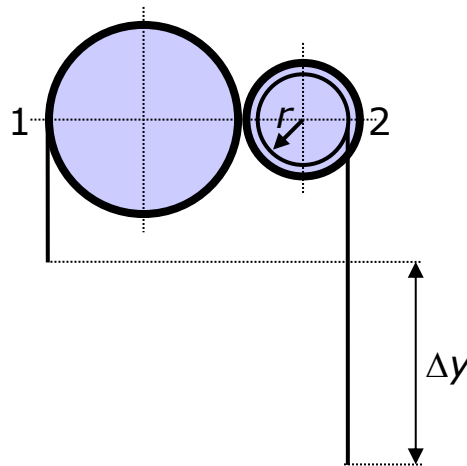
per cui si ha $\mu_{sA} = \mu_{sB} \geq 0.035$.

Problema 7.30 (10 punti)

Due dischi omogenei, 1 e 2 nella figura sottostante, sono posti in posizione verticale e ruotano intorno ad un asse passante per il loro baricentro. I due dischi sono perfettamente a contatto e ruotano senza strisciare. Sul diametro esterno del disco 1 è arrotolato un filo inestensibile e di spessore e massa trascurabile. Sul disco 2 è arrotolato un secondo filo di caratteristiche uguali a quello del disco 1 ad una distanza r variabile rispetto al centro del disco. Sapendo che sull'asse di rotazione del disco 1 viene applicato un momento motore in modulo pari a $M=0.1 \text{ Nm}$, che i raggi e le masse del disco 1 e 2 sono rispettivamente $R_1=15 \text{ cm}$, $R_2=12 \text{ cm}$ e $m_1=0.9 \text{ kg}$, $m_2=0.5 \text{ kg}$, si chiede di determinare:

1. le accelerazioni angolari α_1 e α_2 del disco 1 e del disco 2; (4 punti)
2. il modulo della forza f che agisce sul punto di contatto tra i due dischi; (2 punti)
3. il valore del raggio $r \leq R_2$ all'interno del disco 2 rispetto al quale bisogna arrotolare il filo per avere una distanza $\Delta y = 0.2 \text{ m}$ tra gli estremi liberi dei due fili dopo un tempo $\Delta t = 1 \text{ s}$ dalla partenza da fermo dei due dischi. (4 punti)

NOTA BENE: si consideri per il calcolo del momento di inerzia del disco 2 il solo raggio R_2 trascurando, quindi, la piccola scanalatura di raggio r attorno alla quale si arrotola il filo. Per quanto riguarda la domanda 3, nell'istante iniziale si consideri nulla la velocità dei due dischi e gli estremi liberi dei due fili alla stessa quota.

**Soluzione:**

Le equazioni dinamiche che descrivono il moto dei due dischi sono le seguenti:

$$M - fR_1 = I_1\alpha_1 \quad ; \quad fR_2 = I_2\alpha_2, \quad (1)$$

dove f è la forza agente nel punto di contatto tra i due dischi. La forza f è unica dato che, per il 3° principio della dinamica e per il fatto che i due dischi ruotano senza strisciare, la forza che il disco 1 esercita sul disco 2 deve essere la stessa della forza che il disco 2 esercita sul disco 1. Le relazioni che legano le accelerazioni angolari con quelle lineari sono:

$$\alpha_1 = a_1 / R_1 \quad ; \quad \alpha_2 = a_2 / R_2$$

dove $a_{1,2}$ sono le accelerazioni lineari riferite ad un punto posto ad una distanza $R_{1,2}$ dall'asse di rotazione del disco 1 e del disco 2 rispettivamente. Ora, queste due accelerazioni devono essere uguali dato che i due dischi non strisciano e una variazione ds sul primo disco è uguale a quella del secondo disco. Allora, dalle precedenti equazioni si ha che $\alpha_1 R_1 = \alpha_2 R_2$.

Dalle equazioni (1) si ottiene facilmente che:

$$M = I_1 \frac{a}{R_1} + I_2 \frac{R_1 a}{R_2^2} = \frac{1}{2} R_1 [m_1 + m_2] a$$

La accelerazione lineare vale:

$$a = \frac{2M}{(m_1 + m_2)R_1} \cong 0.95 \text{ m/s}^2.$$

Dal valore della accelerazione lineare segue che le accelerazioni angolari sono eguali a $\alpha_1 \cong 6.3 \text{ rad/s}^2$ e $\alpha_2 \cong 7.9 \text{ rad/s}^2$. Il valore della forza di contatto è uguale a $f = \frac{1}{2}m_2a \cong 0.24 \text{ N}$.

Per rispondere alla terza domanda si osservi che la velocità del filo che si arrotola attorno al disco 2 lungo una circonferenza di raggio r vale $a_{f2} = \alpha_2 r$. Partendo da fermi i capi liberi dei due fili dopo un secondo devono tra di loro distare $\Delta y = 1 \text{ m}$. Applicando le equazioni della cinematica agli estremi dei due fili si ottiene:

$$y_1(\Delta t) = \frac{1}{2}a\Delta t^2 = \frac{1}{2}\alpha_2 R_2 \Delta t^2 \quad ; \quad y_2(\Delta t) = \frac{1}{2}a_r \Delta t^2 = \frac{1}{2}\alpha_2 r \Delta t^2.$$

Pertanto si ottiene che:

$$y_1(\Delta t) - y_2(\Delta t) = \Delta y = \frac{1}{2}\alpha_2 \Delta t^2 [R_2 - r] \rightarrow r = \frac{\alpha_2 R_2 \Delta t^2 - 2\Delta y}{\alpha_2 \Delta t^2} \cong 0.07 \text{ m}.$$