

6. PROBLEMI DI DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE (4^a parte)

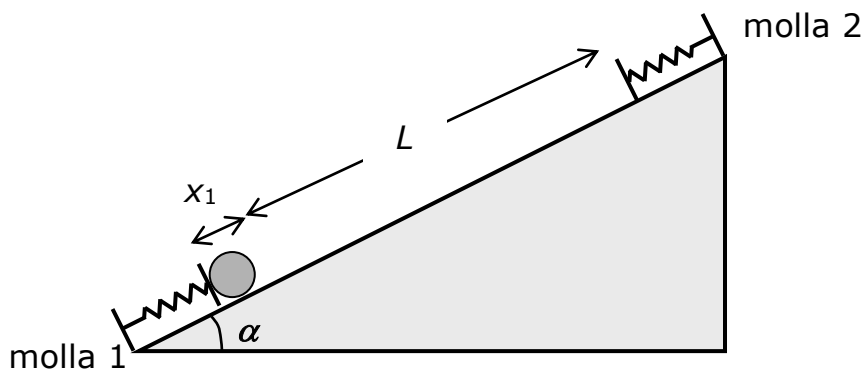
Problemi la cui risoluzione prevede l'uso dei principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto

Problema 6.1 (Problema d'esame 10 punti)

Ai due estremi di un piano inclinato sono collocate due molle (molla 1 e molla 2 della figura) di costante elastica rispettivamente $k_1=100$ N/m e $k_2=50$ N/m. Un corpo di massa $m=1$ kg è inizialmente appoggiato alla molla 1 che risulta compressa di un tratto $x_1=20$ cm rispetto alla sua posizione di riposo. Ad un certo istante $t_0=0$, la molla 1 viene rilasciata ed il corpo raggiunge la molla 2 posta più in alto comprimendola di un tratto $x_2=15$ cm rispetto alla sua posizione di riposo. Sapendo che la distanza tra le due molle quando si trovano nella loro situazione di riposo è $L=1$ m, si risponda alle seguenti domande:

1. quale è il valore dell'angolo α del piano inclinato nell'ipotesi in cui il moto avvenga del corpo avvenga in assenza di attrito?
2. assumendo per α il valore precedentemente calcolato, si determini la velocità del corpo nella posizione di equidistanza tra le due molle a riposo quando, dopo aver compresso la molla 2, scende di nuovo lungo il piano inclinato;
3. supponendo ora che ci sia attrito tra il corpo ed il piano inclinato e che in queste condizioni si misura una compressione della seconda molla $x'_2=5$ cm, si determini il

coefficiente μ della forza di attrito $F_A = -\mu \sqrt{x^2}$ dove x rappresenta lo spazio percorso dal corpo.



Soluzione

Lo spazio totale che avrà percorso il corpo sarà $L_T=L+x_1+x_2=1,35$ m. Trattando il corpo di massa m come un punto materiale, consideriamo come zero della energia potenziale il punto in cui esso si trova inizialmente. Quindi $h_i=0$; $h_f=L_T \sin \alpha$. Consideriamo le condizioni iniziali e finali da un punto di vista energetico. Si avrà:

$$E_{mi} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 \quad ; \quad E_{mf} = \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + mgh_f$$

In assenza di forze non conservative si deve avere $\Delta E_m = 0$. Allora si ha:

$$\sin \alpha = \frac{k_1 x_1^2 - k_2 x_2^2}{2mgL_T} \approx 0,108 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1}(0,108) \approx 6,2^\circ$$

Si calcoli ora la velocità v_m che avrà il corpo di massa m nella posizione $L_m = (L/2) + x_2 = 0,65$ m una volta che, compressa la molla 2 scende di nuovo lungo il piano inclinato. Applicando di nuovo il principio di conservazione dell'energia meccanica e ponendo come livello zero della energia potenziale il punto in cui la velocità deve essere calcolata, si ha:

$$E_{mi} = \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + mgh' \quad ; \quad E_{mf} = \frac{1}{2} m v_m^2$$

con $h' = L_i \sin \alpha \approx 7 \times 10^{-2}$ m. Di conseguenza si ottiene $v_m \approx 1,6$ m/s.

Per rispondere alla 3ª domanda si riparta dalla posizione più bassa e si consideri che tra il corpo ed il piano inclinato c'è attrito. Si vuole conoscere il coefficiente μ della forza di attrito. In questo caso si avrà $\Delta E_m = W_{nc}$, dove con W_{nc} si è indicato il lavoro della forza di attrito (forza non conservativa). Tale lavoro risulta essere uguale a:

$$W_{nc} = -\mu \int_0^{L_{nc}} x^{2/3} dx = -\frac{3}{5} \mu L_{nc}^{5/3} = -\frac{3}{5} \mu L_{nc} \sqrt[3]{L_{nc}^2}$$

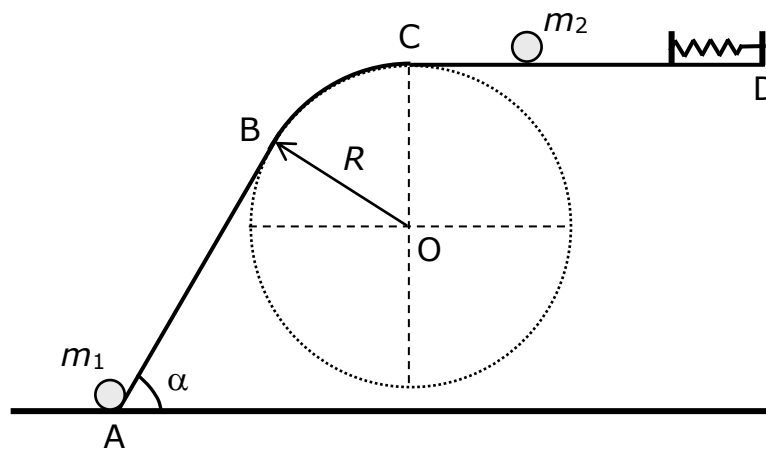
dove $L_{nc} = L + x_1 + x_2' = 1,25$ m. La quota finale raggiunta dal corpo sarà $h' = L_{nc} \sin \alpha \approx 0,14$ m. Con queste posizioni si ha:

$$\mu = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{2} k_1 x_1^2 - mgh' - \frac{1}{2} k_2 x_2'^2 \right) \frac{1}{L_{nc} \sqrt[3]{L_{nc}^2}} \approx 0,65 \text{ kg m}^{1/3} \text{ s}^{-2}$$

Problema 6.2

Un corpo di massa $m_1=0,5$ kg è posto all'inizio della guida rappresentata nella figura. Il tratto lineare AB della guida si raccorda con uno a forma di arco di circonferenza (arco AC) di raggio $R=1$ m ed è ad esso tangente nel punto B. Il successivo tratto piano CD è tangente all'arco di circonferenza ma nel punto C. L'angolo che il tratto lineare AB forma con il piano orizzontale è $\alpha=40^\circ$ e misura $AB=3,1$ m. Si risponda alle seguenti domande:

1. quale deve essere il valore della velocità iniziale del corpo di massa m_1 al di sopra della quale non rimane più vincolato alla parte circolare della guida?
2. utilizzando il valore della velocità iniziale precedentemente ottenuto e sapendo che sul tratto lineare CD il corpo di massa m_1 urta in modo elastico un secondo corpo di massa $m_2=0,6$ kg, si calcolino le velocità dei due corpi dopo l'urto;
3. quale sarà la compressione finale della molla di costante $k=50$ N/m posta alla fine del tratto CD della guida?
4. se il corpo di massa m_1 torna indietro, quale sarà la sua velocità nel punto A alla fine del tratto AB e l'eventuale perdita di energia cinetica?



Soluzione

1ª domanda: Il punto critico dove il corpo di massa m_1 può staccarsi dalla guida è il punto di tangenza B. Fisicamente questa affermazione può essere giustificata dal fatto che andando dal punto B al punto C la velocità del corpo di massa m_1 diminuisce. Quindi se non si stacca nel punto B a maggior ragione non potrà staccarsi dopo. Analiticamente si deve imporre nel punto B la uguaglianza della somma delle componenti delle forze peso e della reazione vincolare della guida lungo la normale alla guida stessa con la forza centripeta. Si ha allora:

$$m_1 g \cos \alpha - N = m_1 \frac{v_B^2}{R}.$$

Il caso limite di distacco è quello per il quale $N=0$. Quindi non si dovrà superare nel punto B il valore $v_B = \sqrt{Rg \cos \alpha}$. Il bilancio energetico tra la situazione iniziale nel punto A e quella finale nel punto B si scrive nel seguente modo:

$$\frac{1}{2} m_1 v_A^2 = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 + m_1 g h_{BA} \quad \Rightarrow \quad v_A^2 = v_B^2 + 2gh_{BA} \quad \text{con} \quad h_{BA} = AB \sin \alpha$$

per v_A si trova il valore $v_A \approx 6,8$ m/s.

2ª domanda: prima di affrontare il problema dell'urto elastico tra i corpi di massa m_1 ed m_2 , si calcoli la velocità del corpo di massa m_1 nel punto C in cui la guida torna ad essere piana. Applicando la conservazione della energia meccanica tra i punti B e C si ha:

$$\frac{1}{2} m_1 v_B^2 = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 + m_1 g h_{CB} \quad \text{con} \quad h_{CB} = R(1 - \cos \alpha)$$

dove con h_{CB} si è indicata la differenza di quota tra il punto B ed il punto C. Ricordando l'espressione per v_B dall'equazione precedente si ottiene $v_C \approx 1,7 \text{ m/s}$.

Nell'urto elastico unidimensionale con velocità iniziale nulla del corpo di massa m_2 , valgono le seguenti relazioni:

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_C}{m_1 + m_2} \approx 1,54 \text{ m/s} \quad ; \quad v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2) v_C}{m_1 + m_2} \approx -0,16 \text{ m/s}$$

dove con v_{1f} e v_{2f} si sono indicate le velocità dopo l'urto dei due corpi. Il fatto che v_{1f} sia negativa sta solo ad indicare che questa velocità del corpo di massa m_1 è opposta a quella che aveva prima dell'urto.

3ª domanda: il moto del corpo m_2 avviene senza attrito sul tratto orizzontale della guida. Quindi si avrà applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2} k x^2 \quad \Rightarrow \quad x = v_{2f} \sqrt{\frac{m_2}{k}} \approx 0,17 \text{ m.}$$

4ª domanda: per conoscere la velocità con cui il corpo di massa m_1 torna nel punto A, si applichi di nuovo il teorema della conservazione della energia meccanica. Si ha:

$$v_A'^2 = v_{1f}^2 + 2gh_{CA} \quad \text{con} \quad h_{CA} = h_{BA} + h_{CB}.$$

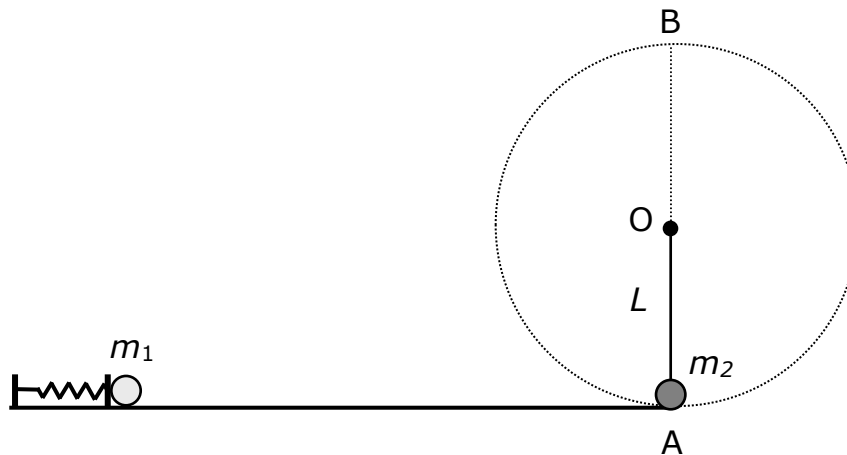
Sostituendo i valori numerici si trova $v_A' \approx 6,6 \text{ m/s}$. La perdita di energia cinetica è quindi:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m_1 (v_A'^2 - v_A^2) \approx -0,67 \text{ J.}$$

Problema 6.3

Un corpo di massa $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ è appoggiato ad una molla compressa di un tratto $x = 15 \text{ cm}$. Una volta rilasciata, la molla imprime una velocità v_1 al corpo di massa m_1 che si muove su di un piano orizzontale privo di attrito. Ad un certo istante $t_0 = 0$, esso urta in modo elastico un secondo corpo di massa $m_2 = 0,3 \text{ kg}$, inizialmente fermo, legato ad un filo inestensibile di massa trascurabile di lunghezza $L = 0,5 \text{ m}$. Si risponda alle seguenti domande:

1. quale deve essere la costante elastica k della molla affinché il corpo di massa m_2 compia un giro completo percorrendo una traiettoria circolare di raggio uguale ad L ?
2. quali sono le velocità dei due corpi dopo l'urto?
3. nelle condizioni precedentemente trovate per il valore della costante elastica k della molla e nel caso di urto completamente anelastico, quale sarà la massima quota raggiunta dai due corpi dopo l'urto?
4. nelle condizioni della domanda precedente, quanto vale la tensione del filo?



Soluzione

Per rispondere alla 1ª domanda è opportuno vedere da subito quale deve essere la minima velocità del corpo di massa m_2 nel punto B che gli permetta di compiere un giro completo lungo una traiettoria circolare di raggio L , lunghezza del filo a cui è vincolato. Il 2° principio della dinamica applicato nel punto B ci permette di scrivere:

$$T + m_2 g = \frac{m_2 v_B^2}{L}$$

Dovendo essere al minimo $T=0$ si ha $v_B^2 = Lg$.

Il principio di conservazione dell'energia tra il punto A ed il punto B fornisce la seguente relazione:

$$v_A^2 = 5Lg.$$

Chiaramente $v_A^2 = v_{2f}^2$, cioè proprio la velocità che deve avere il corpo di massa m_2 dopo l'urto con il corpo di massa m_1 . L'equazione che fornisce la v_{2f} si scrive nel caso di urto elastico in una sola dimensione come:

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

dove v_{1i} è la velocità del corpo di massa m_1 prima dell'urto. Non essendoci attrito sul piano, questa velocità è quella fornita dalla molla nella sua espansione. Si ha quindi:

$$kx^2 = m_1 v_{1i}^2$$

Operando le debite sostituzioni si ha:

$$k = \frac{5}{4} \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1 x^2} Lg \approx 340 \text{ N/m.}$$

2ª domanda: dalle precedenti equazioni, ricordando che nell'urto elastico in una dimensione si ha:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

si calcolano i seguenti valori per le velocità dopo l'urto: $v_{1f} \approx -1,24 \text{ m/s}$ e $v_{2f} \approx 5 \text{ m/s}$.

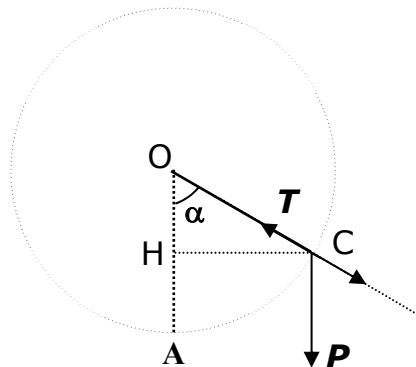
3ª domanda: se l'urto tra i due corpi è completamente anelastico si ha:

$$v'_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \approx 2,5 \text{ m/s}$$

Applicando il principio di conservazione della energia meccanica tra il punto A ed il generico punto C di arresto del sistema formato dai due corpi si ha:

$$v'^2_f = 2gh_{AC} \quad \Rightarrow \quad h_{AC} = \frac{v'^2_f}{2g} \approx 0,32 \text{ m}$$

4ª domanda: nella posizione C si ha il seguente diagramma delle forze:

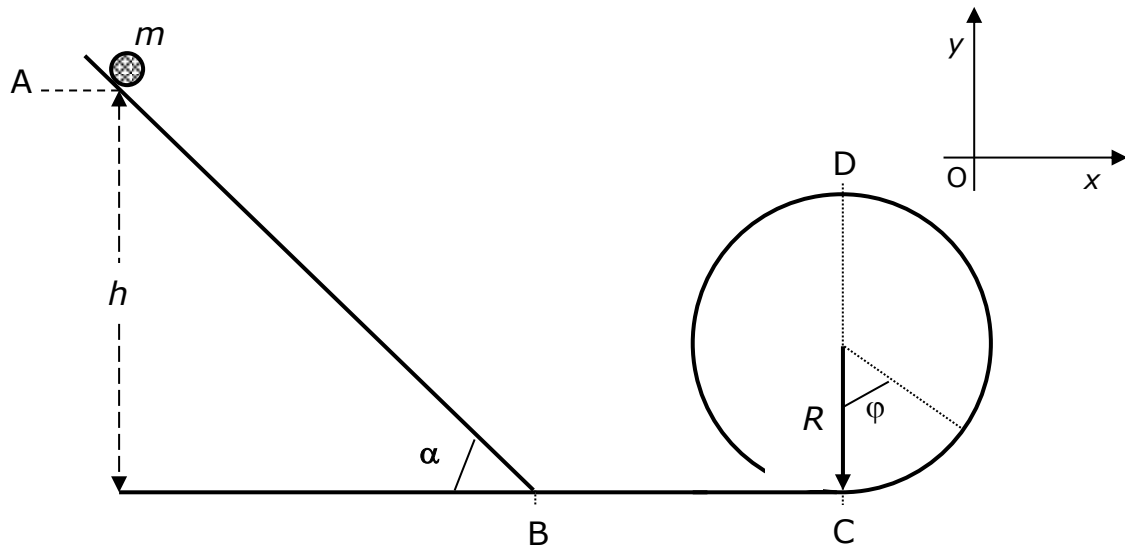


Pertanto si ha $T = (m_1 + m_2)g \cos \alpha$ con $\cos \alpha = \frac{OH}{L} \approx 69^\circ$ da cui il valore della tensione del filo vale $T \approx 1,8 \text{ N}$.

Problema 6.4

Un punto materiale di massa $m=1$ kg, partendo da fermo, percorre un primo tratto AB lungo un piano inclinato di angolo $\alpha=30^\circ$. Di seguito il punto materiale percorre il tratto orizzontale BC per poi immettersi in una guida circolare di raggio $R=0,2$ m. Sapendo che i tratti AB e BC sono entrambi scabbi, che la forza di attrito ha un coefficiente di attrito dinamico $\mu=0,3$ e che $BC=1$ m, determinare la quota h minima da cui il corpo deve partire per percorrere l'intera guida circolare senza mai staccarsi da essa.

Nelle condizioni precedentemente analizzate, quanto vale la reazione vincolare della guida circolare per $\varphi = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$?

**Soluzione**

Per determinare la quota minima h_{min} scriviamo l'equazione di Newton nel punto D della guida circolare corrispondente ad un valore dell'angolo pari a $\varphi=180^\circ$:

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

dove $\vec{N}$ e $\vec{P}$ sono rispettivamente la componente normale della reazione vincolare (l'attrito lungo la guida circolare è assente ed in ogni caso sarebbe sempre perpendicolare al raggio della traiettoria) e la forza peso. La precedente equazione ha solo componenti lungo l'asse delle ordinate. L'accelerazione sarà quindi centripeta e la condizione di non distacco dalla guida circolare si traduce nell'imporre $N=0$. Allora si ha:

$$mg = m \frac{v_{min}^2}{R} \Rightarrow v_{min} = \sqrt{Rg}$$

dove v_{min} è la velocità minima che deve avere il punto materiale quando $\varphi=180^\circ$.

Prendendo ora come situazione iniziale e finale rispettivamente quella nella quale il punto materiale è in A ed in D, il principio di conservazione dell'energia si scrive nel seguente modo:

$$mgh_{min} - 2mgR - \frac{1}{2}mv_{min}^2 = W_A$$

dove W_A rappresenta il lavoro fatto dalla forza d'attrito lungo i tratti AB e BC della guida. Questo lavoro vale:

$$W_A = W_{AB} + W_{BC} = mg\mu \overline{AB} \cos \alpha + mg\mu \overline{BC}$$

dove W_{AB} e W_{BC} rappresentano i lavori della forza di attrito rispettivamente lungo i tratti AB e BC e μ il coefficiente di attrito dinamico. Dato che $\overline{AB} = h/\sin \alpha$, si ottiene con semplici sostituzioni:

$$h_{\min} = \frac{\mu \overline{BC} + \frac{5}{2}R}{1 - \frac{\mu}{\tan \alpha}} \approx 1,7 \text{ m}$$

Calcoliamo ora il valore della componente normale della resistenza vincolare per i vari angoli φ indicati dal testo del problema. Il principio di conservazione della energia meccanica, applicato quando il punto materiale è nella posizione della guida per la quale l'angolo $\varphi = \pi/2$, fornisce la seguente equazione:

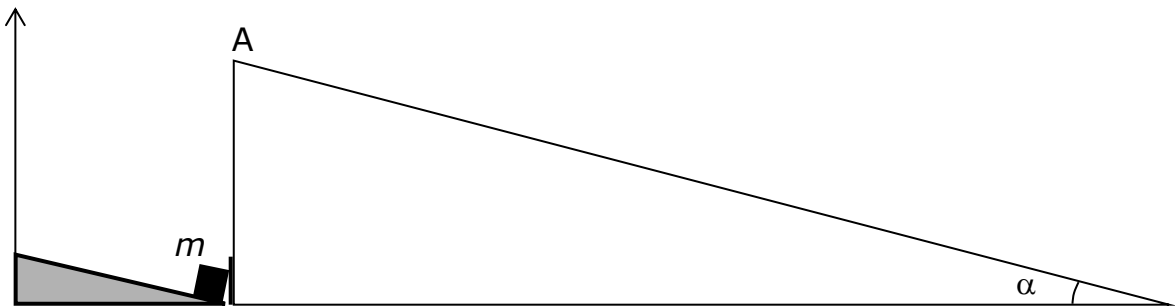
$$mgh_{\min} - W_A - mgR = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 \approx 6,2 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

da cui $v^2 \approx 6,2 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Per $\varphi = \pi/2$ la componente normale della reazione vincolare vale $N = m \frac{v^2}{R}$ da cui $N \approx 31 \text{ N}$. Per le ipotesi del problema si ha $N=0$ per $\varphi = \pi$. Infine per $\varphi = 3\pi/2$ si ottiene lo stesso valore di N trovato per $\varphi = \pi/2$, cioè $N \approx 31 \text{ N}$.

Problema 6.5

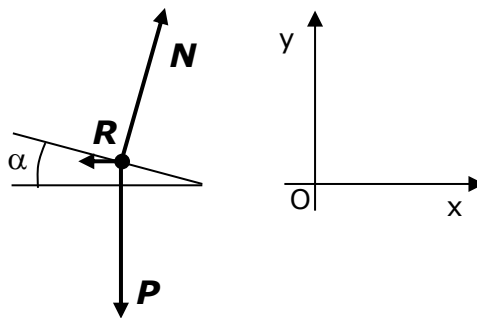
Un montacarichi ha il proprio piano inclinato di un angolo $\alpha=20^\circ$ rispetto all'orizzontale e trasporta un macigno a forma di cubo, assimilabile ad un punto materiale, di massa $m=50$ kg, come indicato nella figura. Il montacarichi, partendo da fermo, ha dapprima una accelerazione di $a_1=1$ m/s² per un tempo $t_1=2$ s, prosegue poi ad una velocità costante eguale a quella raggiunta al tempo t_1 per un secondo intervallo di tempo $t_2=8$ s, ed infine decelera per un tempo $t_3=2$ s con $a_2=-a_1$. Alla fine della corsa, quando il montacarichi raggiunge il punto A, la parete che sorregge il cubo si apre ed esso scivola giù lungo un piano inclinato avente un angolo α uguale a quello del piano del montacarichi. Si determini:

1. il lavoro fatto durante l'intero percorso dalla forza normale esercitata sul cubo dal pavimento del montacarichi;
2. il lavoro fatto durante l'intero percorso dalla forza peso del cubo;
3. Il valore della forza di attrito costante che esiste tra il cubo ed il piano inclinato se si misura una velocità alla fine del piano inclinato $v_f=1$ m/s.



Soluzione

1ª domanda: Seguendo le indicazioni del testo, assimiliamo il macigno ad un punto materiale e disegniamo il diagramma delle forze ad esso applicate quando si trova sul montacarichi.



Essendo il punto materiale fermo sul piano del montacarichi, un osservatore a terra (sistema di riferimento inerziale) deve imporre la seguente relazione tra le forze $\vec{R} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$. Questa relazione va scomposta lungo le direzioni degli assi cartesiani scelti. Dato che il corpo rimane fermo, si ha che, in ciascuna delle tre fasi della salita del montacarichi, si potrà scrivere:

$$N \cos \alpha - P = ma$$

$$N \sin \alpha = R$$

Nel primo tratto si ha una accelerazione $a_1=1$ m/s² per cui lo spazio percorso sarà $s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 2$ m. La velocità dopo il tempo t_1 sarà $v_1 = a_1 t_1 = 2$ m/s. Durante il tempo t_2 , la velocità rimane uguale a v_1 . Lo spazio percorso allora varrà $s_2 = v_1 t_2 = 16$ m. Infine

l'ultimo tratto percorso in decelerazione sarà $s_3 = v_1 t_3 - \frac{1}{2} a_1 t_3^2 = 2$ m. Lo spazio totale percorso è quindi $s_T = 20$ m. Con riferimento al diagramma delle forze applicate al punto materiale, nel primo tratto si ha:

$$N_{1y} = N_1 \cos \alpha = m a_1 + P = 540,5 \text{ N.}$$

Questo è il valore della componente di $\mathbf{N}$ parallela allo spostamento. Il lavoro svolto nel primo tratto sarà $W_1 = N_{1y} s_1 \approx 1,08 \text{ KJ}$. Nel secondo tratto la accelerazione è nulla per cui:

$$N_{2y} = N_2 \cos \alpha = P \approx 490,5 \text{ N.}$$

ed il lavoro sarà uguale a $W_2 = N_{2y} s_2 \approx 7,85 \text{ KJ}$.

Nella fase di decelerazione si ha $N_{3y} = -m a_2 + P \approx 440,5 \text{ N}$ ed il lavoro varrà $W_3 = N_{3y} s_3 \approx 881 \text{ J}$. Il lavoro totale sarà quindi dato dalla somma dei tre lavori così calcolati. Si ottiene: $W_T \approx 9,81 \text{ KJ}$.

2ª domanda: Il lavoro fatto dalla forza peso è uguale ed opposto a W_T .

3ª domanda: Dalla conservazione della energia meccanica in presenza di forze non conservative si ha: $\frac{1}{2} m v_f^2 - m g s_T = W_A \approx -9,79 \text{ KJ}$. Si può porre $W_A \approx \vec{F}_A \cdot \vec{s} = -F_A s$ dove si è indicato con $s = s_T / \sin \alpha$ lo spazio percorso dal punto materiale lungo il piano inclinato. Dalle precedenti equazioni si ottiene il valore della forza d'attrito $F_A \approx 167 \text{ N}$. Se si vuol passare attraverso la determinazione del coefficiente di attrito dinamico si pone $F_A = -\mu_d m g \cos \alpha$ ottenendo:

$$W_A = \frac{\mu_d m g s_T}{\tan \alpha} \Rightarrow \mu_d = \frac{W_A \tan \alpha}{m g s_T} \approx 0,36$$

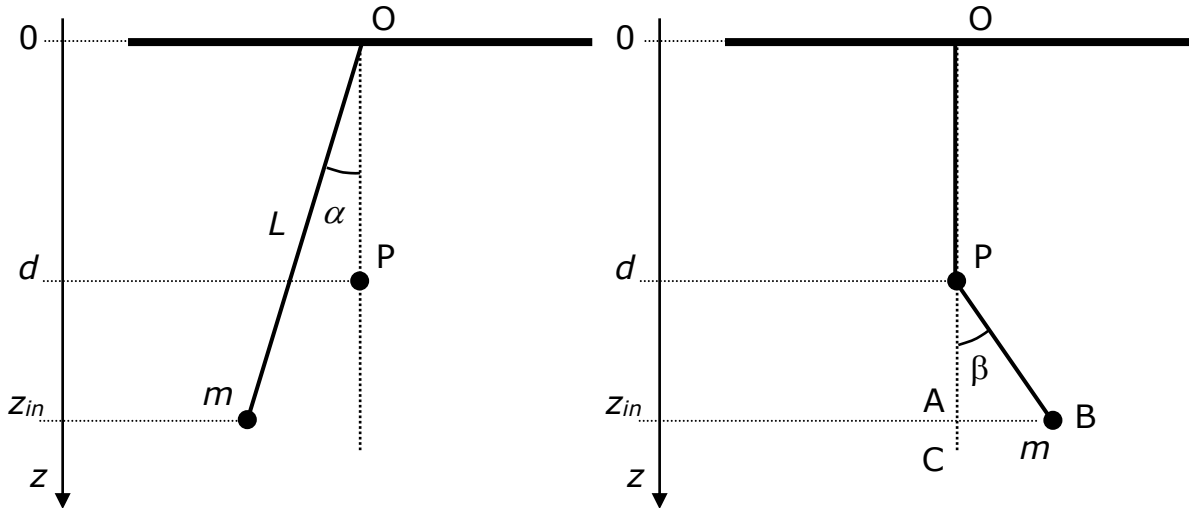
Si ricava anche in questo caso il valore in modulo della forza d'attrito $F_A \approx 167 \text{ N}$.

In alternativa: Si poteva rispondere alla prima ed alla seconda domanda semplicemente osservando che l'assenza di forze dissipative dal diagramma delle forze applicate al punto materiale permettere di affermare che il lavoro eseguito dalla forza normale esercitata dal pavimento del montacarichi deve risultare uguale ed opposto alla variazione dell'energia potenziale del punto materiale, cioè al lavoro fatto dalla forza peso $P = m g$ lungo il percorso in salita. E' quindi immediato trovare $W_T = m g s_T \approx 9,81 \text{ KJ}$.

Problema 6.6

Il pendolo della figura è un pendolo semplice. Una volta raggiunta la sua quota minima, il filo inestensibile di lunghezza L incontra un chiodo posto nel punto P ad una distanza $OP=d$ dal punto in cui il filo è vincolato. Di conseguenza l'oscillazione del pendolo nella parte destra della figura avviene come se il filo inestensibile fosse ora vincolato al punto P. Riferendosi alla figura, se l'angolo iniziale è $\alpha=\pi/10$ rad, $d=5$ m, $L=10$ m e considerando che non si perde energia quando il filo incontra il chiodo, si calcoli:

1. la quota massima raggiunta dal pendolo nella parte destra della figura;
2. nella situazione della prima domanda quale è l'angolo β che il filo forma con la verticale?
3. se l'angolo α di partenza fosse $\alpha=\pi/3$ rad, calcolare la minima distanza $OP=d$ affinché sia possibile per il pendolo di compiere un giro completo intorno al punto P?



Soluzione

Per conoscere la quota massima raggiunta dal pendolo una volta incontrato il chiodo, si può applicare il principio di conservazione dell'energia. Dato che non si ha perdita di energia nell'urto tra filo e chiodo, si può scrivere:

$$E_{m,fin} = E_{m,in} \quad \rightarrow \quad mg(L - z_{fin}) = mg(L - z_{in})$$

dato che le energie cinetiche sono nulle sia nella posizione iniziale che in quella finale. Nella precedente uguaglianza, z_{in} e z_{fin} sono le quote iniziali e finali riferite all'asse z della figura. Come è ben evidente si ha $z_{fin} = z_{in}$. Basta quindi trovare il valore di z_{in} . Dato che $\alpha=\pi/10$ si ha che la quota massima, calcolata rispetto al punto più basso della traiettoria del pendolo, è $L - z_{in} = L(1 - \cos \alpha) \approx 0,49$ m. Facendo riferimento alla figura di destra, si ha che l'angolo β formato dal pendolo quando raggiunge la sua quota massima alla destra del chiodo è:

$$\cos \beta = \frac{PA}{PB} = \frac{(L - d) - (L - z_{in})}{L - d} \quad \rightarrow \quad \beta = \cos^{-1} \left[1 - \frac{L - z_{in}}{L - d} \right] \approx 25,6^\circ.$$

Per rispondere alla 3ª domanda, osserviamo che possiamo applicare di nuovo il principio di conservazione dell'energia prendendo come posizione iniziale quella di partenza del pendolo e come posizione finale quella per la quale la massa m si trova in posizione verticale ed opposta al punto C, con riferimento al punto P. Si può allora scrivere:

$$mgL(1 - \cos \alpha) = 2mg(L - d) + \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad d = \frac{1}{2} \left[L(1 + \cos \alpha) + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \right] \quad (1)$$

dove v è la velocità della massa m nella posizione finale considerata e d è ora una grandezza incognita. Per rispondere al quesito del problema, dobbiamo trovare la minima velocità v che deve avere la massa m per compiere un intero giro. Applicando il 2° principio della dinamica nella posizione finale, corrispondente al culmine della traiettoria, si ha:

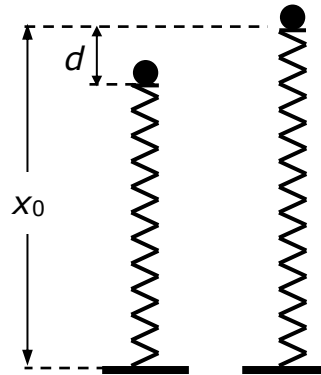
$$mg + T = m \frac{v^2}{L - d} \quad \text{da cui} \quad v^2 = g(L - d)$$

dato che il valore minimo che deve assumere la tensione T del filo è zero, affinché il punto sia in grado di compiere un intero giro. Sostituendo il valore di v^2 trovato nella eq. (1) si trova:

$$d = \frac{1}{2} \left[L(1 + \cos \alpha) + \frac{1}{2}(L - d) \right] \approx 8,75 \text{ m.}$$

Problema 6.7

Un corpo puntiforme di massa $m=2$ kg si trova in equilibrio appoggiato su di una molla collocata in posizione verticale, comprimendola di un tratto $d=15$ cm. In un secondo tempo il corpo di massa m viene appoggiato sulla molla e lasciato libero quando la molla si trova nella sua posizione di riposo. Trascurando ogni forma di attrito, si determini, in questa seconda situazione, la compressione massima raggiunta dalla molla, la velocità massima raggiunta dal corpo e la accelerazione massima a cui è sottoposto supponendo nulla la velocità iniziale.



Soluzione

Dall'analisi delle forze in gioco, la forza peso e la forza elastica, si comprende subito che nella seconda situazione, quella dinamica quando il corpo viene lasciato sulla molla nella situazione a destra della figura, la massima compressione sarà di $x=2d=0,3$ m. Infatti la molla oscillerà intorno alla posizione di equilibrio delle due forze applicate che è quella per la quale $P=kd$ (situazione alla sinistra della figura). Un possibile modo per dimostrare questa affermazione, è quello di applicare il principio di conservazione dell'energia. L'altro è quello di applicare l'equazione del moto armonico. Considerando il bilancio energetico, si osserva che l'energia meccanica iniziale e quella finale considerata nel punto di massima compressione della molla si scrivono come:

$$E_{m,i} = mgx_0 \quad ; \quad E_{m,f} = mg(x_0 - nd) + \frac{1}{2}kn^2d^2$$

dove n sta ad indicare un numero reale qualsiasi. Dalla condizione di equilibrio si ricava subito che $k = mg/d$, per cui si ha dalla conservazione della energia $n=2$, come ci si aspettava.

Il moto del punto materiale è un moto armonico e la massima velocità si raggiunge quando la molla si è compressa della quantità d , quando cioè la forza peso è uguale alla forza elastica. Riscriviamo in questo caso il principio di conservazione dell'energia:

$$E_{m,i} = mgx_0 \quad ; \quad E_{m,f} = mg(x_0 - d) + \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

ottenendo $v = \sqrt{gd} \approx 1,2$ m/s.

Infine l'accelerazione massima si ha, ricordando sempre il moto armonico, quando la velocità è nulla. Ciò avviene nel caso del problema quando la molla è nella sua posizione di riposo e quando è nella situazione di massima compressione. Pertanto la massima accelerazione è proprio quella di gravità.

Per esercizio vediamo come si scrive il 2° principio della dinamica nella situazione di massima compressione della molla. Si ha:

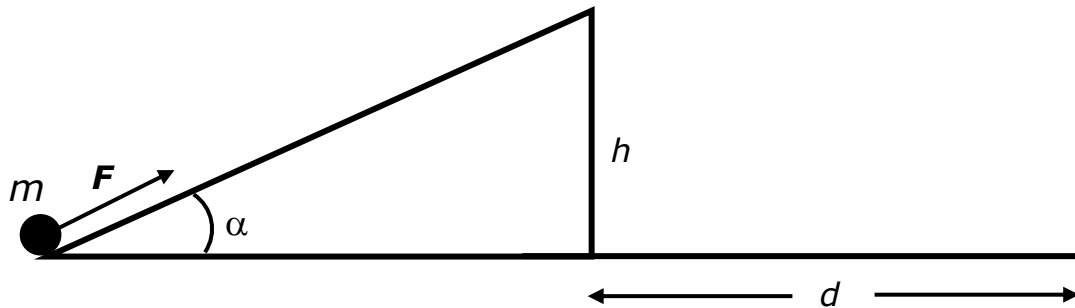
$$mg - 2kd = ma_{\max}$$

avendo scelto l'asse di riferimento rivolto verso il basso e con l'origine nella posizione di riposo della molla. Ricordando l'espressione della costante elastica della molla si ha $a_{\max} = -g$. Il segno meno sta ad indicare che l'accelerazione nel punto considerato è rivolta verso l'alto come ci si attende.

Problema 6.8 (Problema d'esame: 8 punti)

Un punto materiale di massa $m=0,1$ kg, inizialmente fermo, è posto all'inizio di un piano inclinato liscio di angolo $\alpha=30^\circ$ alto $h=5$ m. Sul punto materiale è applicata una forza F parallela al piano inclinato. Essa agisce sul punto materiale solo lungo il tragitto per portarlo fino alla sommità del piano inclinato. Se si vuole che il punto materiale cada esattamente ad una distanza $d=10$ m dalla base del piano inclinato, si determini:

1. la velocità v_0 con la quale il punto materiale deve abbandonare il piano inclinato; (4 punti)
2. il valore in modulo della forza F . (4 punti)

**Soluzione**

Una volta abbandonato il piano inclinato, la forza F smette di agire ed il punto materiale si muove di moto parabolico. Le equazioni sulla velocità e sullo spazio percorso pertanto risultano essere:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos \alpha & x &= v_0 t \cos \alpha \\ v_{0y} &= v_0 \sin \alpha & y &= h + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

dove si è indicata con v_0 la velocità di distacco del punto materiale dal piano inclinato. Ponendo $x=d$ e $y=0$ come condizioni finali per il moto parabolico, si ricava il tempo di volo t_d e la velocità v_0 :

$$t_d = \frac{d}{v_0 \cos \alpha} \quad ; \quad v_0^2 = \frac{g d^2}{2(h + d \tan \alpha) \cos^2 \alpha} \approx 61 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Da cui $v_0 \approx 7,8$ m/s.

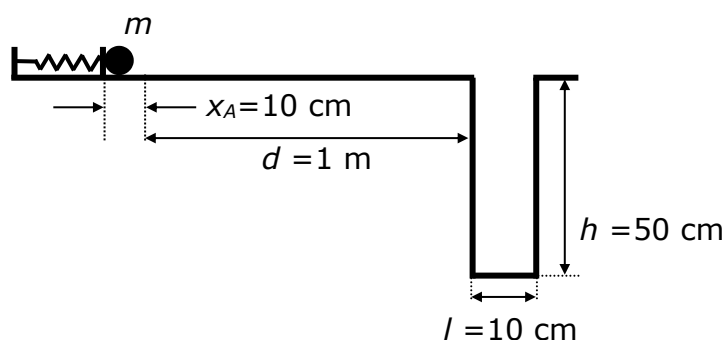
Per determinare il valore del modulo della forza F , si prenda in considerazione il fatto che il lavoro fatto dalla forza F e dalla componente della forza peso lungo il piano inclinato deve essere uguale alla variazione di energia cinetica del punto materiale. Si ha, quindi:

$$(F - mg \sin \alpha) \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \rightarrow \quad F = m \sin \alpha \left[g + \frac{v_0^2}{2h} \right] \approx 0,8 \text{ N}$$

Problema 6.9 (Problema d'esame: 10 punti)

Un corpo puntiforme di massa $m=50$ g si muove al di sopra di un piano orizzontale dopo essere stato spinto da una molla di costante elastica $K=5$ Nm^{-1} compressa di una quantità $x_A=10$ cm rispetto alla sua posizione di riposo. Tra il piano ed il corpo agisce una forza resistente che, in modulo, vale $F_A = b\sqrt{x}$, dove x è la coordinata che descrive il moto rettilineo del corpo sul piano (vedi figura) e b è una costante. In queste condizioni il corpo si ferma sul bordo di un buco a sezione quadrata indicato nella figura sottostante. Il bordo è ad una distanza $d=1$ m dalla posizione di riposo della molla. Se si utilizza ora una seconda molla, identica alla precedente, ma di costante elastica K_1 anch'essa compressa della stessa quantità $x_A=10$ cm rispetto alla sua posizione di riposo, si nota che il corpo puntiforme cade nella buca raggiungendone il fondo nella sua posizione centrale dopo aver effettuato sette rimbalzi sulle pareti della buca. Ipotizzando che gli urti con le pareti della buca siano perfettamente elastici, che la larghezza della buca sia $l = 10$ cm e che infine la sua profondità sia $h=50$ cm, si calcoli:

1. il valore della costante b della forza d'attrito; (4 punti)
2. il valore della costante elastica K_1 della seconda molla; (4 punti)
3. il tempo impiegato dalla pallina per arrivare in fondo alla buca. (2 punti)

**Soluzione**

Nel caso della prima molla di costante elastica $K=5$ Nm^{-1} , si nota che il corpo si ferma al bordo della buca. Questa osservazione ci permette di determinare il valore della costante b . Infatti, applicando il principio di conservazione dell'energia, si ha:

$$E_{m,f} - E_{m,i} = W_A$$

cioè

$$\int_0^{x_A} Kx dx = \int_0^{d+x_A} b\sqrt{x} dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} Kx_A^2 = \frac{2}{3} b \left[x^{3/2} \right]_0^{d+x_A} = \frac{2}{3} b (d+x_A)^{3/2}$$

da cui

$$b = \frac{3}{4} Kx_A^2 \frac{1}{(d+x_A)^{3/2}}$$

dove si è posta l'energia meccanica finale del sistema, $E_{m,f}=0$, perché è calcolata al bordo del buco dove il corpo si ferma. Sostituendo i valori numerici delle grandezze fisiche si trova $b=3,2 \times 10^{-2}$ $\text{Nm}^{-1/2}$. Per calcolare ora il valore della costante K_1 della seconda molla, è opportuno esaminare la caduta del corpo dentro la buca. Essendo tutti gli urti con la parete del buco perfettamente elastici ed ponendo la massa della parete infinita se comparata a quella della pallina, la caduta della pallina è del tutto analoga al moto di un proiettile. Assumendo un sistema di riferimento (x, y) con l'origine posta sul bordo della buca da cui cade il corpo, le equazioni del moto si scrivono come:

$$x(t) = v_0 t \quad ; \quad y(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

L'asse delle ordinate è orientato verso il basso e la velocità iniziale v_0 è parallela all'asse delle ascisse. Il corpo, per raggiungere la sua posizione finale in fondo al centro della buca, compie 7 rimbalzi. Quindi si ha:

$$x_f = 7l + \frac{l}{2} = 0,75 \text{ m} \quad \text{e} \quad y_f = h = 0,5 \text{ m}.$$

Eliminando la dipendenza dal tempo nelle equazioni del moto ed utilizzando i valori numerici appena ricavati di x_f e y_f , si ottiene:

$$v_0 = x_f \sqrt{\frac{g}{2y_f}} \approx 2,35 \text{ m/s}$$

Questa deve essere la velocità che deve avere il corpo una volta raggiunto il bordo del buco una volta spinto dalla molla di costante elastica K_1 . Possiamo ora riscrivere il principio di conservazione dell'energia in presenza di forze non conservative:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}K_1x_A^2 = -\frac{2}{3}b(d+x_A)^{3/2} \quad \rightarrow \quad K_1 = \frac{mv_0^2 + \frac{4}{3}b(d+x_A)^{3/2}}{x_A^2} \approx 32,5 \text{ Nm}^{-1}.$$

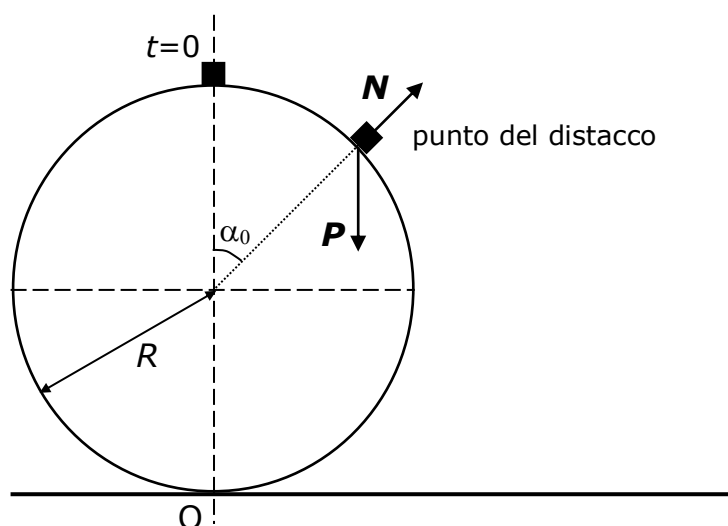
Il tempo t_f impiegato dalla pallina per raggiungere il fondo del buco si trova facilmente dalle equazioni del moto:

$$x_f = v_0 t_f \quad \rightarrow \quad t_f = \frac{x_f}{v_0} \approx 0,32 \text{ s}.$$

Problema 6.10 (Problema d'esame: 10 punti)

Sulla parte più alta di una sfera di legno molto ben levigata è appoggiato un corpo materiale puntiforme che è in una situazione di equilibrio instabile. Ad un certo istante, il corpo si mette in movimento con velocità iniziale nulla. Ipotizzando assenza di attrito tra il corpo e la superficie della sfera, si risponda alle seguenti domande:

1. si dimostri che l'angolo α_0 per il quale si ha il distacco del corpo dalla sfera è indipendente dal raggio della sfera; (4 punti)
2. se ora si suppone che la sfera abbia un raggio $R=1$ m, si determinino le coordinate del punto di impatto del corpo con il piano orizzontale contenente il punto di appoggio O della sfera preso come origine del sistema di riferimento per la soluzione del problema; (3 punti)
3. si calcoli la velocità di impatto con il piano orizzontale in modulo, direzione e verso. (3 punti)

**Soluzione**

Indichiamo con $\mathbf{N}$ la reazione vincolare che, in assenza di forze d'attrito, è sempre diretta lungo il raggio della sfera che unisce il suo centro con il corpo puntiforme. In queste condizioni il 2° principio della dinamica si scrive come:

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Questa relazione può essere scomposta nelle sue componenti tangenziali e perpendicolari alla traiettoria del punto materiale prima del suo distacco dalla superficie della sfera. Allora si ha:

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha &= ma_t \\ mg \cos \alpha - N &= ma_n = m\omega^2 R \end{aligned}$$

Il punto materiale abbandona il vincolo quando è soddisfatta la relazione $N=0$. Dalle precedenti equazioni si nota che ciò avviene quando la velocità angolare ω raggiungerà il valore:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cos \alpha_0}{R}},$$

dove α_0 rappresenta il valore dell'angolo α (vedi figura) al momento del distacco. Si può scrivere ora la conservazione dell'energia meccanica rispetto alla posizione di partenza ed a quella di distacco del corpo dalla sfera. Se si prende lo zero dell'energia potenziale riferito alla retta orizzontale passante per il centro della sfera, si può scrivere:

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \alpha_0 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{R}(1 - \cos \alpha_0)}$$

uguagliando le due espressioni trovate di ω trovate, si ottengono i valori del seno e del coseno dell'angolo di distacco che risultano indipendenti da R :

$$\sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad : \quad \cos \alpha_0 = \frac{2}{3}.$$

Nel rispondere alla 3ª domanda, si ponga per semplicità di calcolo l'origine del sistema di riferimento proprio coincidente con il punto di distacco del corpo dalla superficie della sfera. Il moto del corpo diventa quello parabolico le cui equazioni si scrivono nel seguente modo:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos \alpha_0 \\ y(t) &= -v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

da cui, eliminando la variabile tempo, si ottiene l'equazione della traiettoria

$$y(x) = -\left(x \tan \alpha_0 + \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0} \right)$$

Il corpo toccherà terra quando la sua coordinata sarà $y_f = -R(1 + \cos \alpha_0)$. Eseguendo i calcoli si trova che l'unica soluzione per x che abbia significato fisico è $x_f \approx 0,72$ m. Rispetto al punto O di contatto della sfera con il piano orizzontale si ha che le coordinate del punto di contatto del punto materiale con il terreno sono:

$$x_0 = x_f + R \sin \alpha_0 \approx 1,46 \text{ m} \quad \text{e} \quad y_0 = 0.$$

Le equazioni delle componenti della velocità sono:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha_0 \\ v_y &= -(v_0 \sin \alpha_0 + gt) \end{aligned}$$

Ora la velocità $v_0 \approx 2,6$ m/s è quella di distacco e si ricava dall'equazione della conservazione dell'energia, mentre il tempo di caduta si ottiene dalla prima delle equazioni del moto:

$$t_f = \frac{x_f}{v_0 \cos \alpha_0} \approx 0,42 \text{ s}.$$

Sostituendo i valori trovati si ha: $v_{xf} \approx 1,7$ m/s e $v_{yf} \approx -6,0$ m/s. Il modulo della velocità finale di impatto è $v_f \approx 6,3$ m/s. Il verso della velocità v_f è rivolta verso il basso e la sua direzione è data da:

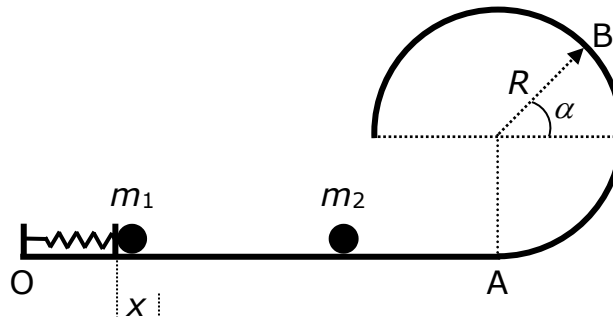
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) \approx -74^\circ.$$

Problema 6.11 (Problema d'esame: 10 punti)

Facendo riferimento alla figura, una pallina di massa $m_1=0.1$ kg partendo da fermo viene lanciata lungo un piano orizzontale privo di attrito da una molla di costante elastica $K=140$ N/m essendo compressa di un tratto $x=0.26$ m rispetto alla sua posizione iniziale. La pallina di massa m_1 urta in modo completamente anelastico una seconda pallina di massa $m_2=0.05$ kg. Dopo l'urto l'insieme delle due palline impegna una guida circolare di raggio $R=1$ m anch'essa priva di attrito staccandosi da essa per un certo valore dell'angolo α indicato in figura.

Considerando le due palline come dei punti materiali si chiede di calcolare:

1. l'angolo α oltre il quale l'insieme delle due palline si stacca dalla guida; (6 punti)
2. la perdita di energia meccanica totale dovuta all'urto anelastico tra le due palline. (4 punti)

**Soluzione**

Dalla conservazione dell'energia meccanica si può calcolare la velocità iniziale della pallina di massa m_1 prima dell'urto con la seconda pallina. Si ha:

$$\frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} m_1 v_i^2 \quad \rightarrow \quad v_i = x \sqrt{\frac{K}{m_1}} \approx 9.7 \text{ m/s.}$$

La condizione di urto completamente anelastico permette di scrivere la seguente relazione sulla conservazione della quantità di moto:

$$v_A = \frac{m_1}{M} v_i \approx 6.5 \text{ m/s,}$$

dove $M=m_1+m_2$ e v_A è la velocità del complesso delle due palline dopo l'urto.

La conservazione dell'energia meccanica tra il punto A, inizio della guida circolare, e il punto B dove l'insieme delle due palline si stacca dalla guida vale:

$$v_A^2 = v_B^2 + 2gR(1 + \sin \alpha). \quad (1)$$

D'altro canto la condizione del distacco dalla guida comporta l'annullamento della componente normale della reazione vincolare. Pertanto si ha:

$$N + Mg \sin \alpha = Mv_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B^2 = gR \sin \alpha,$$

Sostituendo l'espressione trovata del quadrato della velocità del complesso delle due palline nel punto B nella eq. (1) si ha:

$$v_A^2 = gR(2 + 3 \sin \alpha) \quad \rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1} \left(\frac{v_A^2 - 2gR}{3gR} \right) \approx 50.3^\circ.$$

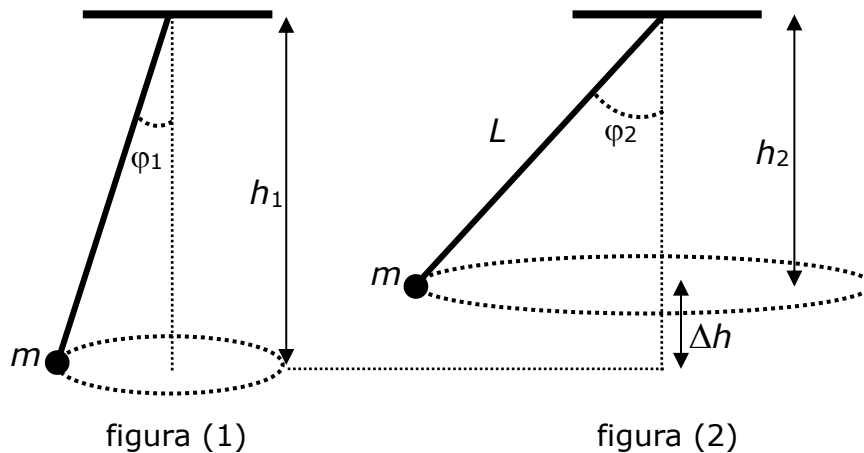
La perdita totale di energia meccanica ΔE vale:

$$\Delta E = \frac{1}{2} Kx^2 - MgR(1 + \sin \alpha) - \frac{1}{2} Mv_B^2 \rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} Kx^2 - MgR(1 + \frac{3}{2} \sin \alpha) \approx 1.56 \text{ J.}$$

Problema 6.12 (Problema d'esame: 10 punti)

La massa puntiforme di un pendolo conico vale $m=0.2$ kg. Nella situazione iniziale della figura (1), il pendolo sta ruotando ad una velocità angolare $\omega_1=3.36$ rad/s. Applicando una accelerazione angolare costante α per un tempo $\Delta t=1$ s, il pendolo passa nella situazione finale della figura (2). Sapendo che rispetto alla situazione iniziale la traiettoria circolare del pendolo si è alzata di una quota $\Delta h=h_1-h_2=0.2$ m, si chiede di calcolare:

1. la velocità angolare finale ω_2 ; (5 punti)
2. il valore della accelerazione angolare α ; (2 punti)
3. la variazione di energia cinetica del sistema. (3 punti)

**Soluzione**

Le equazioni della dinamica del sistema nella sua situazione iniziale (1) e finale (2) si scrivono nel seguente modo:

$$T_{x,1,2} = mR_{1,2}\omega_{1,2}^2 \quad ; \quad T_{y,1,2} = mg,$$

dove con $R_{1,2}$ si è indicato il raggio delle traiettorie circolari del pendolo conico nelle due situazioni prese in considerazione. Indicando con $\varphi_{1,2}$ gli angoli che il filo del pendolo forma con la retta normale al piano di rotazione nelle due situazioni, e dopo qualche passaggio si ottengono la nota relazione:

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{g}{\omega_{1,2}^2 L}.$$

Dalla figura si ha subito che $h_{1,2} = L \cos \varphi_{1,2}$ e, utilizzando la precedente relazione si ottiene:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = g \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \rightarrow \frac{1}{\omega_2^2} = \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{\Delta h}{g} \rightarrow \omega_2 \approx 3.83 \text{ rad/s}.$$

Conoscendo ora le due velocità angolari è possibile calcolare l'accelerazione angolare costante a cui il pendolo è stato sottoposto. Si ha:

$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha \Delta t \rightarrow \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} \approx 0.47 \text{ rad/s}^2.$$

La variazione dell'energia cinetica del sistema vale semplicemente $mg\Delta h=0.39$ J.

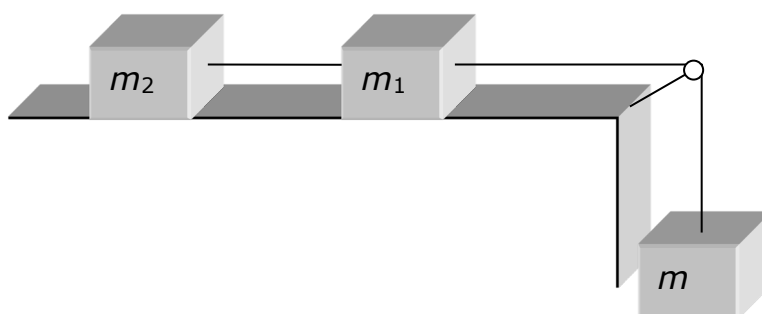
Problema 6.13 (Problema d'esame: 10 punti)

Nel sistema in figura le tre masse sono collegate tra di loro con fili inestensibili e di massa trascurabile. Tra m_2 ed il tavolo c'è un coefficiente di attrito dinamico μ mentre tra il tavolo ed m_1 il coefficiente di attrito è nullo. All'istante $t = 0$, la velocità delle masse è nulla. A $t=t_1$ il filo che congiunge m a m_1 si rompe.

Si chiede di calcolare:

1. la velocità di m_1 ed m_2 all'istante di rottura $t=t_1$; (2 punti)
2. il valore della tensione del filo T_{12} che congiunge m_1 a m_2 prima e dopo la rottura del filo che congiunge m a m_1 ; (5 punti)
3. la distanza d percorsa dalle due masse m_1 e m_2 dall'istante di rottura del filo al momento in cui le masse si arrestano (supponendo che ci sia abbastanza spazio prima del bordo del piano orizzontale). (3 punti)

Dati del problema: $m_1=m_2= 5 \text{ kg}$, $m= 1 \text{ kg}$, $\mu=0.1$, $t_1=1 \text{ s}$.

**Soluzione**

L'applicazione del secondo principio della dinamica al sistema delle tre masse prima della rottura dà:

$$mg - T_{10} = ma \quad ; \quad T_{10} - T_{12} = m_1 a \quad ; \quad T_{12} - \mu m_2 g = m_2 a$$

Avendo indicato con T_{10} la tensione del filo tra la massa m e quella m_1 , T_{12} la tensione del filo tra le masse m_1 ed m_2 . Essendo i fili inestensibili e di massa trascurabile i tre corpi si muovono con la stessa accelerazione a .

Mettendo a sistema le precedenti tre equazioni si ottiene:

$$a = \frac{m - \mu m_2}{m + m_1 + m_2} g \approx 0.45 \text{ m/s}^2.$$

L'accelerazione è, come ci si aspetta costante nel tempo e, pertanto, il moto del sistema è un moto rettilineo uniformemente accelerato. Allora la velocità delle masse al tempo $t=t_1$ vale:

$$v(t_1) = at_1 = \frac{m - \mu m_2}{m + m_1 + m_2} gt_1 \approx 0.45 \text{ m/s}.$$

Il valore della tensione T_{12} del filo che unisce le masse m_1 e m_2 prima della rottura del filo tra le masse m ed m_1 è uguale a:

$$T_{12} = m_2 \frac{m - \mu m_2}{m + m_1 + m_2} g + \mu m_2 g \approx 7.2 \text{ N}.$$

Dopo la rottura del filo che unisce le masse m ed m_1 , le equazioni del moto per le due masse sul piano orizzontale diventano:

$$-T'_{12} = m_1 a' \quad ; \quad T'_{12} - \mu m_2 g = m_2 a',$$

avendo ora indicato con T'_{12} e con a' i valori della tensione del filo e dell'accelerazione del sistema dopo la rottura del filo, cioè per tempi maggiori di t_1 . Risolvendo si ottiene:

$$T'_{12} = \frac{\mu m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \approx 2.45 \text{ N.}$$

La distanza d percorsa dalle due masse m_1 ed m_2 prima di fermarsi si ottiene semplicemente imponendo che tutta l'energia cinetica dei due blocchetti sia dissipata come lavoro della forza d'attrito. Si ha:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1^2 = \mu m_2 g d \quad \rightarrow \quad d = \frac{(m_1 + m_2)v_1^2}{2\mu m_2 g} \approx 0.21 \text{ m.}$$

Problema 6.14 (Problema d'esame: 10 punti)

Una cassa piena di sabbia, di massa $M = 50$ kg, poggia su un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.7$ ed è in quiete. Contro la cassa viene sparato orizzontalmente un proiettile di massa $m = 1$ kg. Il proiettile si conficca nella cassa alla velocità $v_0 = 300$ m/s e ne emerge dalla parete opposta alla velocità (sempre orizzontale) $v_1 = 50$ m/s. La cassa, invece, dopo l'urto, si mette in moto.

Determinare:

- a) l'energia ΔE_1 dissipata nel processo d'urto; (4 punti)
- b) il tempo impiegato dalla cassa per fermarsi; (3 punti)
- c) l'energia ΔE_2 dissipata per attrito con il piano orizzontale, da immediatamente dopo l'urto al momento in cui la cassa si ferma. (3 punti)

Soluzione

Nell'urto centrale tra proiettile e cassa si conserva la quantità di moto e quindi possiamo scrivere:

$$mv_0 = mv_1 + MV$$

da cui

$$V = (m/M)(v_0 - v_1) = 5 \text{ m/s,}$$

dove V è la velocità della cassa subito dopo la fuoriuscita del proiettile. In tali condizioni l'energia dissipata nel processo d'urto è pari a:

$$\Delta E_1 = E_{k,f} - E_{k,in} = \frac{1}{2}(mv_1^2 + MV^2) - \frac{1}{2}mv_0^2 \approx -43.1 \text{ kJ.}$$

Dopo l'urto, la cassa si muove di moto uniformemente decelerato con velocità iniziale V e accelerazione $a = -\mu_d g$. Il tempo in cui essa si ferma è uguale a:

$$\Delta t = \frac{V}{\mu_d g} \approx 0.73 \text{ s.}$$

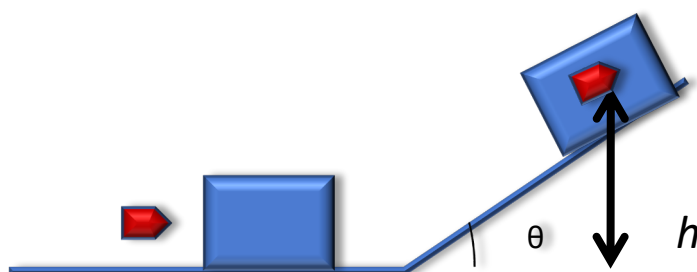
Infine, l'energia dissipata per attrito è pari all'energia cinetica della cassa subito dopo l'urto:

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2}MV^2 \approx 625 \text{ J.}$$

Problema 6.15 (problema d'esame: 10 punti)

Un proiettile di massa $m=10$ g colpisce un blocco di legno di massa $M=90$ g inizialmente fermo e ne rimane conficcato. L'insieme proiettile massa percorre un piano inclinato che forma con l'orizzontale un angolo $\theta=30^\circ$ e si ferma dopo aver percorso un dislivello $h=10$ m. Sapendo che il coefficiente di attrito tra il blocco e il piano inclinato è $\mu_d=0.5$ (il piano orizzontale è liscio), calcolare:

1. La velocità del sistema blocco + proiettile immediatamente dopo dell'urto; (4 punti)
2. La velocità iniziale del proiettile; (3 punti)
3. Detta E_i l'energia meccanica del sistema blocco + proiettile prima che il proiettile si conficchi nel blocco, ed E_f l'energia meccanica del sistema blocco + proiettile immediatamente dopo l'urto, calcolare la frazione di energia meccanica che è dissipata nell'urto $\eta = (E_i - E_f)/E_i$. (3 punti)

**Soluzione**

L'energia cinetica del sistema proiettile + blocco subito dopo l'urto si trasforma in parte in energia potenziale, in parte è dissipata dalla forza d'attrito. Si ha:

$$\frac{1}{2}(M+m)v_f^2 = (M+m)gh + (M+m)g\mu_d x \cos \theta,$$

ove abbiamo usato che la forza normale che determina l'attrito vale $N = (m+M)g \cos \theta$. Essendo $x = h/\sin \theta$, si ottiene:

$$v_f^2 = 2gh \left[1 + \frac{\mu_d \cos \theta}{\sin \theta} \right], \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh \left(1 + \frac{\mu_d}{\tan \theta} \right)} = 19.1 \text{ m/s}$$

La velocità iniziale del proiettile si ottiene con la conservazione della quantità di moto:

$$mv_i = (m+M)v_f \Rightarrow v_i = \frac{m+M}{m} v_f = 191 \text{ m/s}.$$

L'energia meccanica dissipata è:

$$E_i - E_f = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}m \left(\frac{m}{m+M} \right) v_i^2 = \left(\frac{M}{m+M} \right) \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{M}{m+M} E_i$$

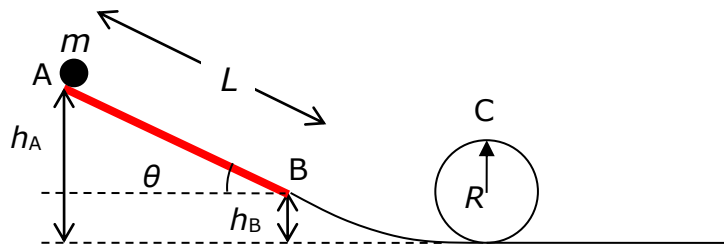
Si ottiene:

$$\eta = \frac{E_i - E_f}{E_i} = \frac{M}{m+M} = 0.9 = 90 \text{ \%}.$$

Problema 6.16 (problema d'esame: 10 punti)

Un punto materiale di massa $m = 8 \text{ kg}$ parte da fermo ed inizia a scendere lungo una guida rettilinea. Nel tratto AB di lunghezza L la guida, che forma con l'orizzontale un angolo $\theta = 30^\circ$, è scabra ed ha coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.1$. Nei tratti successivi, la guida è liscia (cioè priva di attrito) e si raccorda con un giro della morte circolare di raggio $R = 1.0 \text{ m}$ anch'esso liscio. Il punto B si trova ad un'altezza $h_B = R$ dalla base del giro della morte. Calcolare

1. La velocità minima v_C che il punto materiale deve avere nel punto più alto C del giro della morte per non cadere; (3 punti)
2. La velocità minima che, nelle medesime condizioni, deve avere nel punto B; (3 punti)
3. L'altezza minima h_A da cui deve partire da fermo nel punto A sempre per non cadere. (4 punti)

**Soluzione**

Nel punto più alto, la seconda equazione della dinamica diventa

$$m \frac{v_C^2}{R} = mg + N$$

Essendo $N \geq 0$, la velocità minima corrisponde a $N = 0$, e vale

$$v_C = \sqrt{Rg} = 3.13 \text{ m/s}$$

Utilizzando la conservazione dell'energia meccanica si ottiene

$$E_B = E_C \Rightarrow mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh_C + \frac{1}{2}mv_C^2,$$

cioè

$$mgR + \frac{1}{2}mv_B^2 = mg(2R) + \frac{1}{2}mRg \Rightarrow v_B = \sqrt{3Rg} = 5.42 \text{ m/s}.$$

La forza di attrito tra A e B vale

$$F_d = \mu N = \mu mg \cos \theta,$$

ed il suo lavoro tra A e B,

$$W_d = \mu mg \cos \theta L = \mu mg \cos \theta \frac{h_B - h_A}{\sin \theta} = \frac{\mu mg(h_A - h_B)}{\tan \theta}.$$

La conservazione dell'energia generalizzata tra A e B si scrive

$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B + W_d,$$

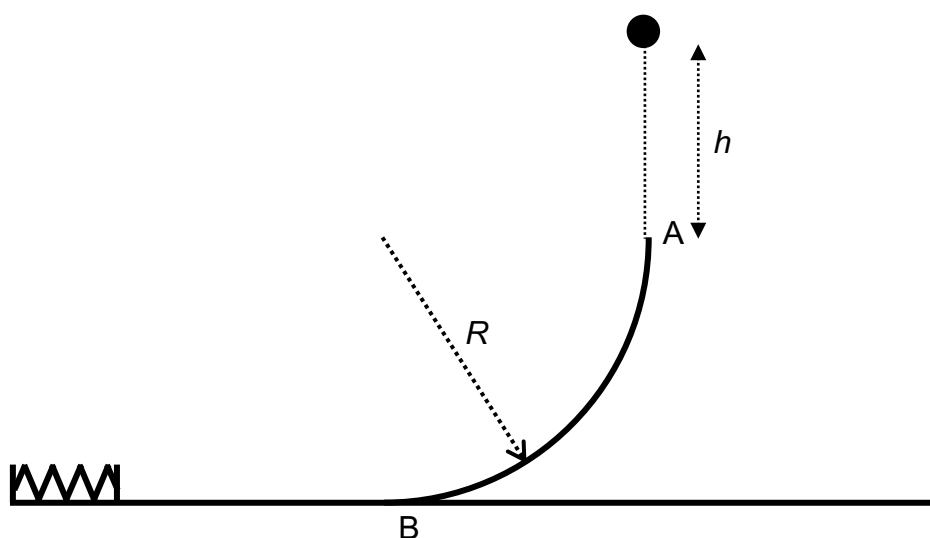
cioè

$$h_A = \frac{\frac{5}{2}R - \frac{\mu R}{\tan \theta}}{1 - \frac{\mu}{\tan \theta}} = 2.81 \text{ m}.$$

Problema 6.17 (10 punti) (14 gennaio 2011)

Un punto materiale di massa $m=0.1$ kg è lanciato verticalmente dall'altezza $h=1$ m (vedi figura) lungo una traiettoria che si raccorda con una guida scabra a forma di un quarto di circonferenza di raggio $R=1$ m. La guida, a sua volta, si raccorda con un piano orizzontale liscio alla fine del quale il punto materiale si attacca ad una molla di costante elastica K comprimendola di un tratto $\Delta x=0.2$ m. Si misura che il periodo di oscillazione della molla con il punto materiale attaccato vale $T=0.62$ s. Considerando che nell'urto con la molla non si dissipa energia, si chiede di calcolare:

- 1) il valore della costante K della molla; (2 punti)
- 2) Il valore della velocità del punto materiale nel punto B di raccordo della guida con il piano orizzontale; (3 punti)
- 3) Il valore del lavoro delle forze d'attrito che agiscono sulla guida circolare. (5 punti)

**Soluzione**

Il periodo di oscillazione della molla vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \rightarrow K = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \cong 10.3 \text{ N/m.}$$

Il valore della velocità in B è data dalla conservazione dell'energia dal punto B alla compressione della molla:

$$mv_B^2 = K\Delta x^2 \rightarrow v_B = \Delta x\sqrt{\frac{K}{m}} \cong 2 \text{ m/s.}$$

Applicando di nuovo la conservazione dell'energia meccanica tra il punto A e il punto B si ha:

$$\text{Energia meccanica in A: } E_{m,A} = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgR ; \text{ Energia meccanica in B: } E_{m,B} = \frac{1}{2}mv_B^2.$$

Ricordando che $v_A = \sqrt{2gh}$ si ottiene: $E_{m,A} = mgh + mgR = mg(h + R)$, da cui:

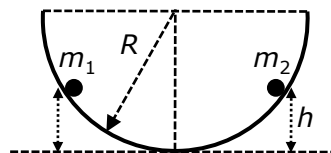
$$E_{m,B} - E_{m,A} = W(F_A) \rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - mg(h + R) = W(F_A)$$

Inserendo i valori numerici si trova $W(F_A) \cong -1.76$ J.

Problema 6.18 (10 punti) (31 gennaio 2011)

Due punti materiali di massa $m_1=1$ kg e $m_2=0.8m_1$ sono inizialmente posti ad un'altezza $h=0.15$ m rispetto alla base di una guida circolare di raggio $R=0.5$ m. Partendo da fermi, i due punti materiali si urtano sul fondo del semiguscio sferico in modo completamente anelastico. Il sistema dei punti materiali inizia poi ad oscillare intorno al fondo del semiguscio. Nella ipotesi che non vi sia alcun attrito tra la guida e le due particelle sia prima, sia dopo l'urto, si determini:

- 1) il modulo, direzione, e verso della velocità del sistema immediatamente dopo l'urto; (3 punti)
- 2) la perdita totale di energia meccanica nell'urto; (2 punti)
- 3) il valore della reazione vincolare che la parete della guida esercita sul sistema immediatamente dopo l'urto, assumendo che il sistema composto dalle due particelle connesse si possa considerare ancora puntiforme; (3 punti)
- 4) si verifichi che il moto oscillatorio è nelle condizioni di piccole oscillazioni, cioè si calcoli l'angolo massimo di oscillazione del sistema composto dalle due particelle dopo l'urto e si verifichi che sia $\leq 6^\circ$. (2 punti)

**Soluzione**

Per entrambi i punti la velocità prima dell'urto, in modulo, è uguale a $v_i = \sqrt{2gh} \cong 1.72$ m/s. Dalla conservazione della quantità di moto del sistema si ha:

$$m_1 v_i - m_2 v_i = (m_1 + m_2) v_f \rightarrow 0.2 v_i = 1.8 v_f \rightarrow v_f \cong 0.19 \text{ m/s.}$$

La velocità del sistema dopo l'urto ha direzione e verso uguali a quella della massa m_1 prima dell'urto.

La perdita di energia meccanica nell'urto vale:

$$E_{m,f} - E_{m,i} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_i^2 \rightarrow \frac{1.8}{2} m_1 (v_f^2 - v_i^2) \cong -2.63 \text{ J.}$$

Per la determinazione del valore della reazione vincolare, N , si può scrivere applicando il secondo principio della dinamica:

$$N - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2) \frac{v_f^2}{R} \rightarrow N = 1.8 m_1 \left(g + \frac{v_f^2}{R} \right) \cong 17.8 \text{ N.}$$

dato che dopo l'urto la velocità del sistema dei due punti materiali è minore di quella prima dell'urto.

Per verificare, infine, che il moto oscillatorio è nelle condizioni di piccole oscillazioni si inizi con il calcolare l'altezza h_f alla quale il sistema dopo l'urto anelastico arriva. Per fare ciò si applichi il principio di conservazione dell'energia:

$$(m_1 + m_2)gh_f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 \rightarrow h_f = \frac{v_f^2}{2g} \cong 1.8 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

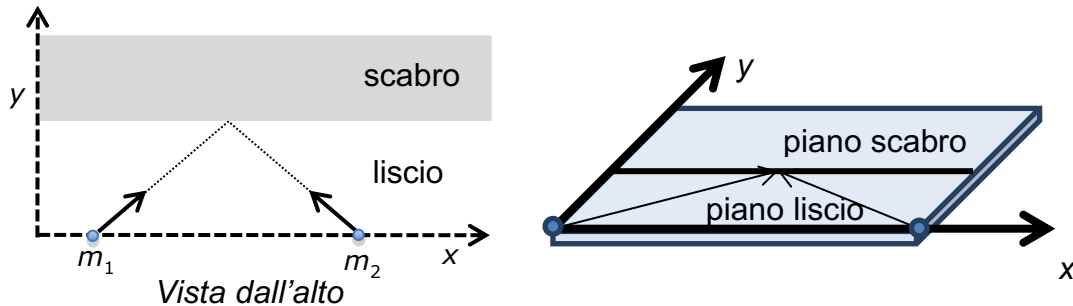
Infine, da semplici considerazioni geometriche si ha:

$$(R - h_f) = R \cos \vartheta \rightarrow \vartheta = \cos^{-1} \left[\frac{R - h_f}{R} \right] \cong 4.9^\circ.$$

Problema 6.19 (10 punti) (17 febbraio 2011)

Due punti materiali di massa m_1 e $m_2=0.5m_1$ sono di un piano orizzontale liscio fino alla posizione nella quale essi urtano in modo completamente anelastico. I due punti materiali hanno velocità iniziali uguali in modulo ($v_i= 0.5$ m/s) e direzioni orientate a 45° rispetto all'asse delle ascisse mostrato in figura. Dopo l'urto, il sistema dei due punti materiali prosegue su una parte di piano scabro fermandosi dopo aver percorso una distanza pari a $L=0.1$ m. Si chiede di determinare:

- 1) le due componenti lungo gli assi x ed y della velocità delle due particelle attaccate dopo l'urto, ed il suo modulo; (4 punti)
- 2) la perdita di energia meccanica per unità di massa verificatasi nell'urto; (2 punti)
- 3) il coefficiente di attrito dinamico della parte di piano percorsa dal sistema dei due punti materiali dopo l'urto. (4 punti)

**Soluzione**

Nell'urto si conserva la quantità di moto del sistema dei due punti materiali che si scrive in forma vettoriale come segue:

$$m_1 \vec{v}_i + m_2 \vec{v}_i = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

con $\vec{v}_f$ la velocità del sistema dopo l'urto. La precedente equazione vettoriale può essere facilmente scomposta nelle sue componenti scalari con riferimento al piano cartesiano riportato in figura:

$$(m_1 - m_2)v_{i,x} = (m_1 + m_2)v_{f,x} \quad ; \quad (m_1 + m_2)v_{i,y} = (m_1 + m_2)v_{f,y} \quad \text{con} \quad v_{i,x} = v_{i,y} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_i$$

Dalle precedenti equazioni è facile ricavare le componenti scalari della velocità dopo l'urto:

$$v_{f,x} = \frac{v_{i,x}}{3} \approx 0,12 \text{ m/s} \quad ; \quad v_{f,y} = v_{i,y} \approx 0,35 \text{ m/s}.$$

Pertanto, il modulo della velocità finale vale:

$$|\vec{v}_f| = \sqrt{v_{f,x}^2 + v_{f,y}^2} \approx 0,37 \text{ m/s}.$$

La perdita di energia meccanica per unità di massa vale:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_i^2 \rightarrow \frac{\Delta E_m}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}(v_f^2 - v_i^2) \approx -0,057 \text{ J/kg}.$$

Per trovare il coefficiente di attrito dinamico che il sistema sperimenta nel muoversi dopo l'urto nel semipiano scabro, si utilizzi il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$-\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = W(F_A) \rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = \mu_d(m_1 + m_2)gL$$

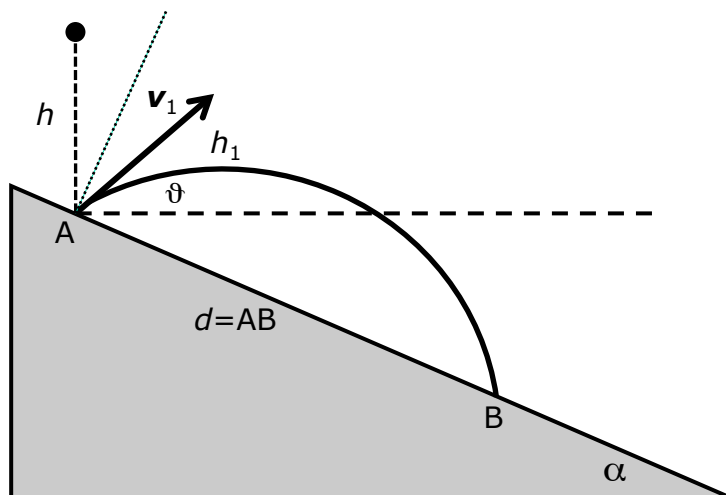
da cui:

$$\mu_d = \frac{v_f^2}{2gL} \approx 0,07.$$

Problema 6.20 (10 punti) (12 settembre 2012)

Un grave si trova fermo a un'altezza $h=30$ cm da un piano inclinato di angolo $\alpha=30^\circ$ rispetto al piano orizzontale. Ad un certo istante il grave viene lasciato cadere (partendo da fermo) sul piano inclinato sul quale rimbalza elasticamente. Calcolare:

1. la velocità v_0 con la quale il grave urta il piano nel punto A; (2 punti)
2. la velocità v_1 con la quale il grave rimbalza dal piano inclinato (dopo l'urto elastico) e l'angolo ϑ che tale velocità forma con la direzione orizzontale (2 punti).
3. la massima quota h_1 raggiunta dal grave nel primo rimbalzo, calcolata rispetto alla quota del punto d'impatto A col piano inclinato; (2 punti);
4. la distanza $d=AB$, lungo il piano inclinato, del punto di secondo rimbalzo B dal punto del primo rimbalzo A; (2 punti);
5. la velocità v_2 con la quale il grave arriva alla posizione B; (2 punti).

**Soluzione**

Alla prima domanda si risponde subito utilizzando la conservazione dell'energia meccanica:

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 2.4 \text{ m/s}$$

$v_0 = \sqrt{2gh} = 2.4 \text{ m/s}$ Essendo l'urto elastico si ha che $v_1 = v_0$ e $\vartheta = 90^\circ - 2\alpha = 30^\circ$. Infatti, l'angolo che $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_1$ formano con la normale al piano inclinato sono uguali, entrambi uguali ad α .

Utilizzando ora la conservazione dell'energia (urto elastico) si ha:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 \sin^2 \vartheta = mgh_1 \rightarrow h_1 = \frac{v_1^2 \sin^2 \vartheta}{2g} = h \sin^2 \vartheta = 0.075 \text{ m.}$$

$$mgh = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 \cos^2 \vartheta$$

Lo stesso risultato si ottiene ovviamente, applicando l'equazione del moto del grave che parte dalla posizione A con velocità $\mathbf{v}_1$. L'equazione della traiettoria del grave, rispetto a un sistema cartesiano con origine in A, è:

$$y = x \tan \vartheta - \frac{gx^2}{2v_1^2 \cos^2 \vartheta}$$

$y = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v_1^2 \cos^2 \theta}$ che, messa a sistema con l'equazione della linea di

massima pendenza del piano inclinato $y = -x \tan \alpha$, $y = -x \tan \alpha$ fornisce le coordinate del punto B:

$$x_B = \frac{2 v_1^2 \sin 2\theta}{g} = 1.02 \text{ m e } y_B = -x_B \tan \alpha = -0.59 \text{ m,}$$

avendo tenuto conto che $\theta = \alpha$. La distanza tra B ed A vale $d = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = 1.2 \text{ m}$.

Infine, dalla conservazione dell'energia meccanica si ha:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2} m v_{B,y}^2 + m g y_B \rightarrow v_{B,y}^2 = v_1^2 \sin^2 \theta + 2 g y_B = 13.01 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Pertanto la velocità in B vale $v_B = \sqrt{v_{B,y}^2 + v_1^2 \cos^2 \theta} = 4.2 \text{ m/s}$.

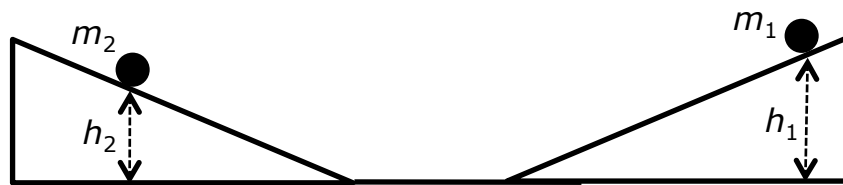
Più semplicemente considerando come stato iniziale quello dato dal problema:

$$m g (h - y_B) = \frac{1}{2} m v_B^2 \rightarrow v_B^2 = 4.2 \text{ m/s}.$$

Problema 6.21 (10 punti) (14 giugno 2013)

Due punti materiali di massa $m_1=0.2$ kg e $m_2=0.4$ kg sono collocati su due piani inclinati dello stesso angolo $\alpha=30^\circ$ (si veda la figura). Rispetto al piano orizzontale, il punto 1 di massa m_1 è posto ad una altezza $h_1=1$ m e il punto 2 di massa m_2 ad una altezza $h_2=0.8$ m. I due punti materiali si urtano in modo completamente anelastico una volta impegnato il piano orizzontale che si raccorda con i due piani inclinati. In assenza di attriti e supponendo che i due punti materiali partano allo stesso tempo iniziale e, inoltre, che il solo punto materiale di massa m_1 parta con velocità iniziale nulla, si chiede di determinare:

1. la velocità iniziale (modulo, direzione e verso) del punto materiale 2 affinché arrivi contemporaneamente al punto materiale 1 in fondo al rispettivo piano inclinato; (3 punti)
2. il modulo, la direzione e il verso della velocità finale v_f del sistema dei due punti materiali dopo l'urto anelastico; (3 punti)
3. la quota alla quale il sistema dei due punti materiali risale dopo l'urto; (2 punti)
4. la perdita di energia meccanica dissipata nell'urto anelastico. (2 punti)

**Soluzione**

Ponendo uguale a zero la coordinata iniziale del punto di massa m_2 , le equazioni cinematiche del suo moto sono:

$$v_2(t) = v_0 + at \quad ; \quad x_2(t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2,$$

con $a=g\sin\alpha$. Dovendo i due punti arrivare contemporaneamente nel punto di raccordo dei piani inclinati con il piano orizzontale al tempo t_f , le precedenti equazioni diventano:

$$v_2(t_f) = v_0 + at_f \quad ; \quad x_2(t_f) = L_2 = v_0 t_f + \frac{1}{2} at_f^2.$$

Dato che il tempo di discesa del punto m_1 vale $t_f = \sqrt{2L_1/a} = 0.90$ s, si ottiene $v_0 = -0.43$ m/s e $v_2(t_f) = 3.98$ m/s. Il segno meno della velocità iniziale sta ad indicare che, come ci si aspetta ($h_2 < h_1$, cioè $L_2 < L_1$), la velocità v_0 da imprimere ad m_2 al tempo iniziale $t=0$ deve essere rivolta verso l'alto.

Dalla conservazione della quantità di moto per l'urto completamente anelastico si ha:

$$v_f = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -1.18 \text{ m/s.}$$

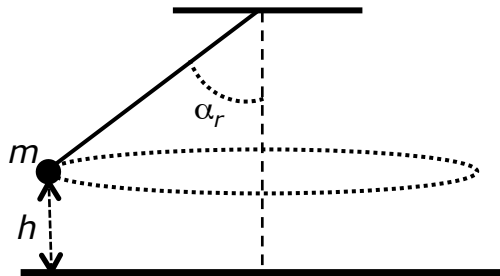
dove $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 4.43$ m/s e v_2 sono le velocità dei due punti prima dell'urto e v_f la velocità subito dopo l'urto del sistema. Riferendosi alla figura, essa ha la direzione della retta orizzontale e, dal valore numerico, si ricava che v_f è diretta come v_2 , cioè da sinistra a destra. L'altezza h_f a cui arriva il sistema dopo l'urto si ricava dalla conservazione dell'energia dopo l'urto e l'energia dissipata ΔE nell'urto valgono rispettivamente:

$$h_f = \frac{v_f^2}{2g} = 7.1 \times 10^{-2} \text{ m} \quad ; \quad \Delta E = E_{K,fin} - E_{K,in} = \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_2) v_f^2 - (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \right] = -4.72 \text{ J.}$$

Problema 6.22 (10 punti) (20 novembre 2013)

Una sfera puntiforme di massa $m=1$ kg è vincolata ad un filo elastico di costante elastica $K=50$ N/m e lunghezza a riposo $L_0=0.5$ m. Il sistema viene fatto ruotare come un pendolo conico. Si misura che, quando l'angolo con la verticale misura $\alpha_r=70^\circ$, il filo elastico si spezza. In queste condizioni, si determini:

1. l'allungamento del filo elastico rispetto alla sua posizione di riposo; (3 punti)
2. la velocità della sfera nel momento della rottura del filo elastico; (2 punti)
3. la velocità di impatto della sfera con il piano orizzontale sottostante e il tempo di caduta sapendo che quando il filo elastico si spezza la sfera è ad una altezza $h=1$ m rispetto ad esso; (5 punti)

**Soluzione**

Nelle condizioni di rottura del filo elastico, dalla scomposizione della forza elastica F_e si ricava che la sua componente verticale deve bilanciare la forza peso. E' quindi possibile scrivere:

$$F_e \cos \alpha_r = mg \rightarrow F_e = K(L_r - L_0) = \frac{mg}{\cos \alpha_r} \rightarrow (L_r - L_0) = \frac{mg}{K \cos \alpha_r} = 0.57 \text{ m},$$

dove si è indicato con L_r è la lunghezza del filo elastico all'istante della sua rottura. Analogamente, la componente orizzontale della forza elastica (quella sul piano di rotazione del pendolo conico) rappresenta la forza centripeta. Pertanto si ha:

$$F_e \sin \alpha_r = m \frac{v_r^2}{R} \rightarrow v_r = \sin \alpha_r \sqrt{\frac{L_r F_e}{m}},$$

dove si è fatto uso del fatto che il raggio dell'orbita al momento della rottura del filo elastico vale $R = L_r \sin \alpha_r$. Ricordando ora che $F_e = K(L_r - L_0)$, la precedente equazione diviene:

$$v_r = \sin \alpha_r \sqrt{\frac{L_r K (L_r - L_0)}{m}} = 5.19 \text{ m/s}.$$

Essendo la velocità v_r parallela al piano orizzontale sottostante il pendolo composto, la velocità di impatto della sfera si trova applicando la conservazione dell'energia meccanica:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{f,y}^2 \rightarrow v_{f,y} = \sqrt{2gh} = 4.43 \text{ m/s},$$

dove $v_{f,y}$ è la componente verticale della velocità finale d'impatto, mentre quella orizzontale è proprio uguale a v_r precedentemente ricavata. Il modulo della velocità finale è:

$$v_f = \sqrt{v_r^2 + v_{f,y}^2} = 6.82 \text{ m/s}.$$

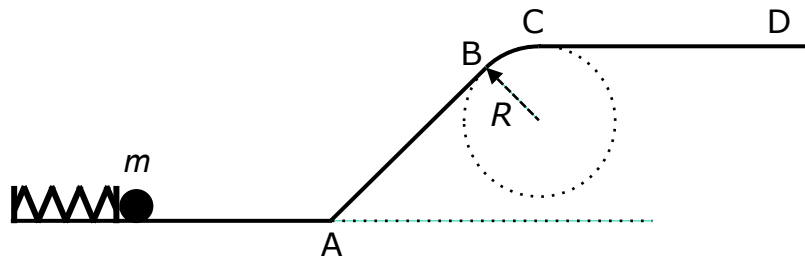
Nel momento della rottura del filo, la componente verticale della velocità è nulla (è parallela al piano orizzontale). Di conseguenza il tempo impiegato dalla sfera per raggiungere il piano orizzontale è:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.45 \text{ s}.$$

Problema 6.23 (10 punti) 10 gennaio 2014

Con riferimento alla figura, un punto materiale di massa $m=0,1$ kg è posto a contatto di una molla di costante elastica $K=100$ N/m che si trova su di una guida orizzontale che si raccorda nel punto A con una inclinata tangente nel punto B ad una guida circolare di raggio $R=1$ m. Infine, una seconda guida orizzontale si raccorda nel punto C con quella circolare di raggio R (il segmento CD della figura è, quindi, tangente alla guida circolare nel punto C). Ipotizzando che il solo tratto CD sia scabro, e che il tratto lineare $AB=3$ m forma un angolo $\alpha=40^\circ$ con la guida orizzontale, si chiede di determinare il valore:

5. della compressione della molla affinché la velocità acquistata dal punto materiale sia quella minima per non farlo mai distaccare dalla guida (4 punti);
6. della velocità del punto materiale in C (2 punti);
7. del coefficiente d'attrito dinamico nel tratto $CD=1$ m, sapendo che il punto materiale si ferma una volta raggiunto il punto D (4 punti).

**Soluzione**

Il punto critico dove il corpo di massa m può staccarsi dalla guida è il punto di tangenza B dove si può scrivere, lungo la direzione del raggio della circonferenza:

$$mg \cos \alpha - N = m \frac{v_B^2}{R}.$$

Il caso limite di distacco è quello per il quale $N=0$. Quindi, non si dovrà superare nel punto B il valore della velocità pari a $v_B = \sqrt{Rg \cos \alpha}$. Il bilancio energetico tra la situazione nel punto A e quella finale nel punto B si scrive nel seguente modo:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_{BA} \quad \Rightarrow \quad v_A^2 = g(R \cos \alpha + 2h_{BA}) \quad \text{con} \quad h_{BA} = AB \sin \alpha$$

da cui $v_A=6.73$ m/s. Di conseguenza:

$$\frac{1}{2}K\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 \quad \rightarrow \quad \Delta x = v_A \sqrt{\frac{m}{K}} = 0.2 \text{ m}.$$

La velocità in C si trova applicando la conservazione dell'energia meccanica tra i punti B e C:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_{CB} \quad \text{con} \quad h_{CB} = R(1 - \cos \alpha); \quad v_C = \sqrt{Rg(3 \cos \alpha - 2)} = 1.7 \text{ m/s},$$

dove con h_{CB} si è indicata la differenza di quota tra il punto B ed il punto C.

Eguagliando l'energia cinetica del punto materiale in C e il lavoro compiuto dalla forza di attrito, si ricava il coefficiente d'attrito dinamico nel tratto CD:

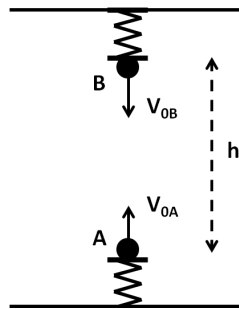
$$\mu_d = \frac{v_C^2}{2gCD} = 0.15.$$

Problema 6.24 (10 punti) (18 febbraio 2014)

Due punti materiali di massa $m_A=0.1$ kg e $m_B=0.3$ kg vengono lanciati lungo la verticale da due molle, come mostrato in figura. Entrambe le molle hanno costante elastica $K=100$ N/m e sono inizialmente compresse per una lunghezza $x=10$ cm. La distanza tra l'estremità delle molle in posizione di riposo è pari ad $h=1$ m. Le molle vengono fatte scattare in modo che raggiungano la posizione di riposo allo stesso istante quando i due punti materiali si distaccano dalle rispettive molle con velocità v_{0A} e v_{0B} , andando ad urtarsi dopo un tempo t' . Si chiede di calcolare:

1. Le velocità v_{0A} e v_{0B} (3 punti);
2. Il tempo t' e la rispettiva altezza h' in cui avviene l'urto (4 punti);
3. Assumendo un urto completamente anelastico, si calcoli la velocità del sistema dopo l'urto in modulo, direzione e verso (3 punti).

NOTA: Si assuma che l'urto avvenga quando il punto A è ancora in fase ascendente.

**Soluzione**

La velocità al momento del distacco dalle rispettive molle si può calcolare utilizzando la conservazione dell'energia meccanica, ricordandosi anche del contributo dato dalla variazione dell'energia potenziale gravitazionale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Kx^2 &= \frac{1}{2} m_A v_{0A}^2 + m_A g x & \Rightarrow & v_{0A} = \sqrt{\frac{Kx^2 - 2m_A g x}{m_A}} = 2.8 \text{ m/s} \\ \frac{1}{2} Kx^2 + m_B g x &= \frac{1}{2} m_B v_{0B}^2 & \Rightarrow & v_{0B} = \sqrt{\frac{Kx^2 + 2m_B g x}{m_B}} = 2.3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Scegliendo un asse di riferimento verticale, con origine nel punto di distacco di A dalla molla e direzione positiva verso l'alto, la legge oraria per i due punti materiali si può scrivere:

$$\begin{aligned} y_A(t) &= v_{0A}t - \frac{1}{2}gt^2 & (1a) & \quad e \quad v_A(t) = v_{0A} - gt \\ y_B(t) &= h - v_{0B}t - \frac{1}{2}gt^2 & & \quad v_B(t) = v_{0B} + gt & (1b) \end{aligned}$$

Al momento dell'impatto t' , i due punti avranno la stessa coordinata spaziale, quindi:

$$v_{0A}t' - \frac{1}{2}gt'^2 = h - v_{0B}t' - \frac{1}{2}gt'^2 \Rightarrow t' = \frac{h}{v_{0A} + v_{0B}} = 0.2 \text{ s.}$$

Sostituendo il tempo t' in una delle (1a), otteniamo l'altezza, rispetto al punto di distacco di A, del punto di impatto:

$$h' = y_A(t') = v_{0A}t' - \frac{1}{2}gt'^2 = 0.36 \text{ m.}$$

Nell'urto anelastico si conserva la quantità di moto del sistema, quindi la velocità finale può essere calcolata come:

$$m_A v_A(t') - m_B v_B(t') = (m_A + m_B) v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_A v_A(t') - m_B v_B(t')}{m_A + m_B} = -3.0 \text{ m/s}$$

dove le velocità di A e B al tempo t' vengono calcolate utilizzando le equazioni (1b). Il segno negativo indica che il sistema dopo l'urto si muove verso il basso.

Problema 6.25 (10 punti) (prova scritta d'esame del 30.01.2020)

Un punto materiale di massa m si muove su un piano orizzontale (x,y) sottoposto ad una forza costante $\mathbf{F}=(F; 0)$ partendo con velocità iniziale $\mathbf{v}=(0;v_0)$. Calcolare:

1. Il vettore accelerazione al tempo iniziale e al tempo t_1 (1 punto);
2. Il vettore velocità al tempo t_1 (3 punti);
3. La distanza del punto materiale dall'origine al tempo t_1 (2 punti);
4. Il lavoro della forza $\mathbf{F}$ fra l'istante iniziale e i
5. Il tempo t_1 verificando che il risultato è consistente con il teorema dell'energia cinetica (2 punti).
6. Stabilire se la forza $\mathbf{F}$ sia conservativa motivando la risposta (2 punti).

(Dati: $m=20$ kg, $F=20$ N, $v_0=1$ m/s, $t_1=3$ s)

Soluzione

Date le condizioni poste dal problema, l'accelerazione a cui è sottoposto il punto materiale è costante nel tempo e le sue componenti cartesiane sono:

$$a_x = \frac{F}{m} = 1 \text{ m/s}^2 \quad ; \quad a_y = 0$$

Scomponendo il moto nelle direzioni (x,y) si ottiene il vettore velocità:

$$v_x(t) = a_x t \quad ; \quad v_y(t) = v_0$$

Al tempo $t=t_1$ si ha:

$$v_x(t_1) = a_x t_1 = 3.0 \text{ ms}^{-1} \quad ; \quad v_y(t_1) = v_0 = 1.0 \text{ ms}^{-1}$$

Pertanto, il modulo e la direzione del vettore velocità valgono:

$$v(t_1) = 3.16 \text{ ms}^{-1} \quad ; \quad \varphi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = 18.4^\circ$$

La distanza dal punto di partenza al tempo t_1 si trova ricavando prima le coordinate x e y del punto materiale:

$$x(t_1) = \frac{1}{2} a_x t_1^2 \quad ; \quad y(t_1) = v_0 t_1 \quad \rightarrow \quad s = \sqrt{x(t_1)^2 + y(t_1)^2} = 5.41 \text{ m.}$$

Il lavoro della forza $\mathbf{F}$ vale:

$$W = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Fx(t_1) = 90 \text{ J.}$$

Come si vede, l'integrale dipende solo dalle coordinate iniziali e finali del punto di applicazione della forza, cioè quelle del punto materiale. La forza è costante ed è conservativa. Come ulteriore prova si calcoli la variazione di energia cinetica del punto materiale dall'istante iniziale a quello finale:

$$W = \Delta E_K = \frac{1}{2} m(v(t_1)^2 + v_0^2) = 90 \text{ J.}$$

Problema 6.26 (10 punti) (prova scritta d'esame del 22.07.2019)

Un punto materiale di massa m è lasciato cadere verticalmente da fermo da un'altezza h in un mezzo viscoso che esercita una forza d'attrito che dipende dalla velocità del punto secondo la legge $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$, dove b è una costante. Dopo un breve transiente, il punto raggiunge la velocità limite v_∞ e la mantiene fino a quando non raggiunge il suolo. Determinare:

1. Il valore della costante b con le opportune unità di misura (2 punti);
2. Il lavoro compiuto dalla forza peso durante la caduta (2 punti);
3. Il lavoro compiuto dalla forza di attrito durante la caduta (3 punti);
4. L'accelerazione ai tempi $t_0=0$ e $t_1=0.1\text{s}$ (3 punti).

Dati del problema: $m=1.5\text{g}$, $h=0.50\text{m}$, $v_\infty=0.87\text{m/s}$.

Soluzione

1. Applicando il secondo principio della dinamica si ha:

$$mg + bv = ma \rightarrow mg - bv = ma \rightarrow mg - bv_\infty = 0 \rightarrow b = \frac{mg}{v} = 1.7 \times 10^{-2} \text{kg s}^{-1},$$

dove si è preso per riferimento un asse verticale con il verso positivo in basso e si è posta l'accelerazione nulla una volta che il punto materiale ha raggiunto la sua velocità limite.

2. Il lavoro compiuto dalla forza peso è semplicemente uguale a:
- 3.

$$W(\mathbf{p}) = mgh = 7.4 \text{ mJ}.$$

4. Essendo la forza d'attrito viscoso non costante fino a che non si è raggiunta la velocità limite, per il calcolo del lavoro da essa compiuto si può ricorrere alla conservazione dell'energia meccanica che si scrive nel seguente modo:

$$\Delta E_m = \Delta E_{m,fin} - \Delta E_{m,in} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - mgh = W(\mathbf{F}_A) = -6.8 \text{ mJ}.$$

5. Dalla equazione del moto si ha:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \rightarrow \int_0^{v(t)} \frac{dv}{v - \frac{mg}{b}} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt$$

da cui:

$$\log\left(\frac{v(t) - \frac{mg}{b}}{-v(t)}\right) = -\frac{b}{m}t \rightarrow v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right).$$

Pertanto, l'accelerazione vale:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = ge^{-\frac{bt}{m}}$$

da dove si ricava che $a(t=0)=g$ e $a(t=0.1\text{s})=3.2\text{ms}^{-1}$.