

5. PROBLEMI DI DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE (3^a parte)

Problemi la cui risoluzione prevede l'uso dei principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto

Problema 5.1

Due corpi A e B di massa rispettivamente $m_A=4,5$ kg e $m_B=2,5$ kg sono inizialmente fermi su di un piano orizzontale privo di attrito. Essi sono appoggiati ad una molla di costante elastica $k=100$ N/m. La molla è compressa e i due corpi sono tra di loro collegati da un filo che passa all'interno della molla. Ad un certo istante il filo viene spezzato e la molla si estende. Quando i due corpi lasciano la molla lungo una traiettoria rettilinea disposta lungo la stessa direzione, si misura che la velocità del corpo A è $v_A=4$ m/s. Si determinino:

1. la velocità del corpo B nell'istante nel quale si misura quella di A;
2. di quanto era compressa la molla prima di spezzare il filo.



Soluzione

Quando lasciano la molla, i vettori velocità dei due corpi sono disposti lungo la stessa direzione ma hanno verso opposto. Inoltre, i due corpi abbandonano la molla quando essa, espandendosi, raggiunge la sua lunghezza di riposo. Per risolvere il problema si può applicare il principio di conservazione della quantità di moto. Essendo quella iniziale nulla, si ha:

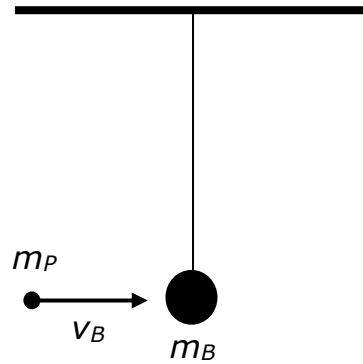
$$0 = m_B v_B + m_A v_A \quad \Rightarrow \quad v_B = -\frac{m_A v_A}{m_B} \approx -7,2 \text{ m/s}$$

Dalla conservazione della energia meccanica si ha:

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} k x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{m_A v_A^2 + m_B v_B^2}{k}} \approx 1,4 \text{ m/s.}$$

Problema 5.2

Un proiettile di massa $m_P=30$ g, urta con velocità v_0 un blocco di legno di massa $m_B=5$ kg collegato ad un vincolo verticale da un filo inestensibile e privo di massa. La direzione della velocità del proiettile è orizzontale, l'urto completamente anelastico ed il blocco di legno può considerarsi come un punto materiale. Dopo l'urto il blocco si sposta lungo un arco di circonferenza raggiungendo una altezza massima, contata dalla situazione iniziale, uguale ad $h=10$ cm. Trovare la velocità del proiettile. (Pendolo balistico)

**Soluzione**

L'urto tra i due corpi è completamente anelastico. Allora si può imporre soltanto la conservazione della quantità di moto che si scrive come:

$$m_P v_P = (m_P + m_B) v$$

dove v è la velocità del sistema dei due corpi dopo l'urto. Si hanno due incognite, la velocità di arrivo del proiettile e quella dopo il suo urto con il blocco di legno. Si può scrivere ora la condizione di conservazione dell'energia dell'intero sistema dopo l'urto, ottenendo:

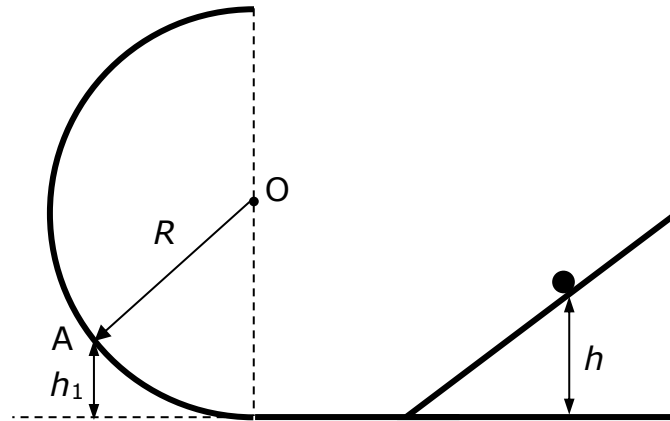
$$\frac{1}{2} (m_P + m_B) v^2 = (m_P + m_B) gh$$

La risoluzione delle due equazioni fornisce la velocità richiesta del proiettile, $v_P \approx 235$ m/s.

Problema 5.3

Un corpo di massa $m=1$ kg, assimilabile ad un punto materiale, parte da fermo su di un piano inclinato liscio da una altezza $h=1$ m rispetto al piano orizzontale. Giunto alla fine del piano inclinato, il corpo, dopo aver percorso un tratto privo di attrito rettilineo ed orizzontale, entra in una guida circolare verticale scabra, di raggio $R=1$ m. Sapendo che il corpo si ferma sulla guida circolare ad una altezza $h_1=0,6$ m, che il coefficiente di attrito statico è $\mu_s=0,6$, si trovi:

1. il lavoro fatto dalla forza d'attrito agente lungo la guida circolare;
2. se il corpo, una volta fermatosi sulla guida circolare, ha la possibilità di scendere di nuovo lungo la guida circolare. Se ciò avviene, si calcoli la nuova quota h_2 a cui il corpo si ferma una volta ritornato sul piano inclinato.

**Soluzione**

Applicando la conservazione dell'energia meccanica, è possibile scrivere la seguente relazione:

$$mgh_1 - mgh = W_a,$$

dove con W_a si è indicato il lavoro totale compiuto dalla forza di attrito agente durante il moto all'interno della guida circolare. Si ricava subito che $W_a = -3.9$ J. Dalla figura è immediato calcolare l'angolo β che si forma tra il raggio OA e la verticale passante per il centro della guida circolare:

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{R - h_1}{R}\right) \approx 66^\circ.$$

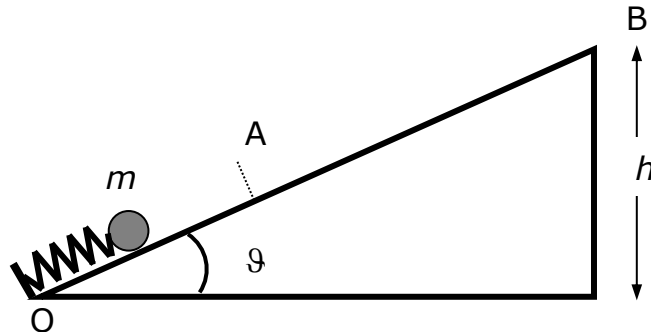
Affinché il punto possa muoversi di nuovo, la condizione che deve essere soddisfatta è $\tan \beta > \mu_s$. Dato che dai dati del problema risulta $\tan \beta \approx 2.25$, si conclude che questa condizione rimane soddisfatta. Allora il corpo ridiscende la guida circolare per poi fermarsi di nuovo su piano inclinato ad una altezza h_2 ricavabile dalla seguente relazione:

$$mgh_2 - mgh_1 = W_a,$$

da cui $h_2 \approx 0.2$ m.

Problema 5.4

Un corpo di massa $m=0,5$ kg, assimilabile ad un punto materiale, è appoggiato ad una molla compressa di un tratto $x=5$ cm, rispetto alla sua posizione di riposo, indicata con A nella figura. Molla e corpo sono appoggiati su di un piano inclinato alto complessivamente $h=10$ cm di angolo $\vartheta=10^\circ$. Facendo riferimento alla figura, il solo tratto AB è scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu=0,3$ ed il tratto OA, liscio, ha una lunghezza pari a $2x$. Trovare la costante elastica della molla ed il tempo che impiega il corpo per percorrere il tratto AB sapendo che il corpo ha velocità nulla quando arriva in B.

**Soluzione**

La differenza tra l'energia meccanica finale e quella iniziale fornisce il lavoro fatto dalla forza d'attrito lungo il tratto AB del piano inclinato. Allora si ha:

$$mg(h - x \sin \vartheta) - \frac{1}{2} kx^2 = W_a \quad ; \quad W_a = -AB\mu mg \cos \vartheta.$$

Il tratto $AB = OB - OA = \frac{h}{\sin \vartheta} - OA \approx 0,47$ m. Il valore della costante elastica si ricava dalla seguente relazione:

$$k = \frac{2mg}{x^2} [h - x \sin \vartheta + \mu AB \cos \vartheta] \approx 900 \text{ N/m}.$$

Per trovare il tempo impiegato dal corpo per percorrere il tratto AB, si ricorre all'equazione della cinematica:

$$v(B) = 0 = v(A) - at$$

dove $v(A)$ e $v(B)$ sono rispettivamente le velocità del corpo in A e B. Nella precedente equazione l'accelerazione è data da:

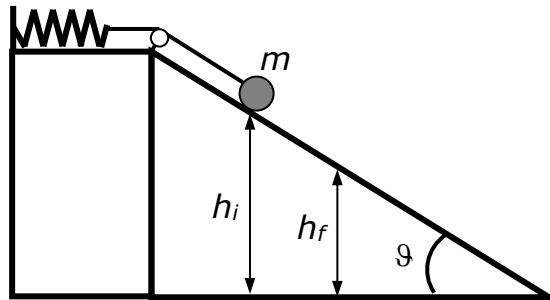
$$a = g(\sin \vartheta + \mu \cos \vartheta) \quad \text{e} \quad v(A) = \sqrt{\frac{k}{m} x^2 - 2gx \sin \vartheta}.$$

Da queste relazioni si ricava facilmente il tempo di percorrenza del tratto AB, che risulta:

$$t = \frac{\sqrt{\frac{k}{m} x^2 - 2gx \sin \vartheta}}{g(\sin \vartheta + \mu \cos \vartheta)} \approx 0,45 \text{ s}.$$

Problema 5.5

Un corpo di massa $m=2$ kg, da considerarsi come un punto materiale, è collegato ad una molla ed è disposto lungo un piano inclinato di un angolo $\vartheta=40^\circ$. Inizialmente il corpo è mantenuto fermo nella posizione di riposo della molla. Sapendo che la costante elastica della molla è $k=50$ N/m e che il corpo scende, prima di fermarsi, di un tratto $x=20$ cm, trovare il coefficiente di attrito tra il corpo ed il piano inclinato.

**Soluzione**

È possibile scrivere subito le relazioni della energia meccanica nell'istante iniziale ed in quello finale:

$$E_i = mgh_i \quad ; \quad E_f = mgh_f + \frac{1}{2}kx^2.$$

Il lavoro fatto dalla forza di attrito è $W_a = -F_a x = -\mu mgx \cos \vartheta$, con μ il coefficiente di attrito. La conservazione dell'energia comporta:

$$mg(h_f - h_i) + \frac{1}{2}kx^2 = -\mu mgx \cos \vartheta.$$

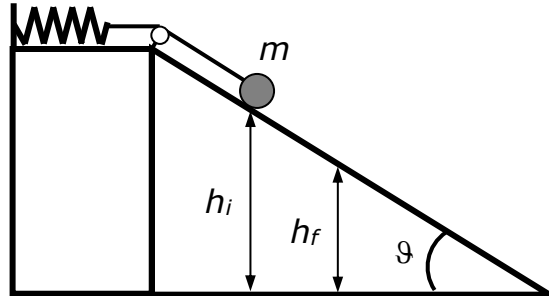
Essendo $h_i - h_f = x \sin \vartheta$, si ha:

$$\mu = \tan \vartheta - \frac{kx}{2mg \cos \vartheta} \approx 0,5$$

Problema 5.6

Un corpo di massa $m=2$ kg, da considerarsi come un punto materiale, è collegato ad una molla ed è disposto lungo un piano inclinato di un angolo $\vartheta=40^\circ$. Inizialmente il corpo è mantenuto fermo nella posizione di riposo della molla. Sapendo che il moto avviene in assenza di attrito e che la costante elastica della molla è $k=50$ N/m trovare:

1. la massima elongazione della molla;
2. il valore della velocità massima che il corpo raggiunge durante il suo moto;
3. il valore della accelerazione massima a cui il corpo è sottoposto durante il suo moto.

**Soluzione**

E' possibile scrivere subito le relazioni della energia meccanica nell'istante iniziale ed in quello finale:

$$E_i = mgh_i \quad ; \quad E_f = mgh_f + \frac{1}{2} kx^2,$$

dove si è indicato con x la massima elongazione della molla. Le uniche forze che agiscono sul corpo sono forze conservative per cui si ha:

$$mg(h_i - h_f) = \frac{1}{2} kx^2.$$

Essendo $h_i - h_f = x \sin \vartheta$ si ha:

$$x = \frac{2mg \sin \vartheta}{k} \approx 0,5 \text{ m}$$

Il moto del corpo è un moto armonico intorno alla posizione di equilibrio che è quella per la quale si ha l'uguaglianza tra la componente della forza peso del corpo lungo il piano inclinato e la forza elastica. Si può allora porre:

$$mg \sin \vartheta = k \frac{x}{2}.$$

Di conseguenza la velocità massima si ha proprio quando il valore della elongazione è $x/2$. La velocità si ricava quindi dalla seguente relazione:

$$mgh_{1,f} + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv_{\max}^2 = mgh_{1,i} \rightarrow v_{\max} = \sqrt{2g(h_{1,i} - h_{1,f}) - \frac{kx^2}{4m}} \approx 1,3 \text{ m/s}.$$

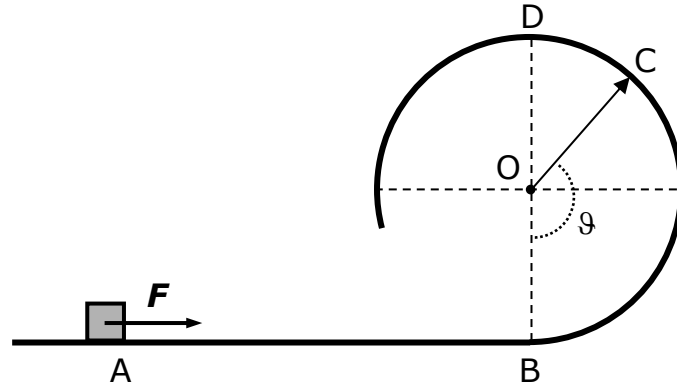
L'accelerazione massima si ha nell'istante iniziale per il quale $x=0$ e quando la molla raggiunge la massima elongazione $x=0,5$ m. Pertanto si ha che per $x=0$ $a_{\max}=g \sin \vartheta \approx 6,3 \text{ m/s}^2$. Per esercizio e verifica del risultato appena trovato, il valore dell'accelerazione nel punto di massima elongazione è:

$$a = \frac{mg \sin \vartheta - kx}{m} = -g \sin \vartheta.$$

Come ci si aspetta il valore della accelerazione è in modulo lo stesso. Il segno è negativo perché in questa posizione il corpo, dopo essersi fermato, inverte il senso del suo moto.

Problema 5.7

Ad un corpo di massa $m=0.2$ kg viene applicata per un tempo $\Delta t=0.1$ s una forza costante orizzontale in modulo uguale ad $F=20$ N, diretta come mostrato nella figura. L'azione della forza consente al corpo di muoversi lungo il piano orizzontale che si raccorda ad una guida circolare verticale di raggio $R=1.5$ m. Supponendo che il moto avvenga senza attrito, si trovi il valore della reazione vincolare nei punti C e D sapendo che l'angolo ϑ vale $\vartheta=135^\circ$. Nel caso in cui il tratto AB di lunghezza $L=1$ m fosse scabro con coefficiente d'attrito dinamico $\mu=0.5$, si calcoli nuovamente il valore della reazione vincolare nel solo punto C.



Soluzione

Cominciamo a trattare il problema nel caso di assenza di attrito. La velocità acquisita dal corpo alla fine dell'applicazione della forza F , si ottiene utilizzando la definizione di impulso. Si ha:

$$F\Delta t = m\Delta v \quad ; \quad v_A = \frac{F\Delta t}{m} = 10 \text{ m/s}$$

con v_A la velocità acquisita dal corpo. Facendo uso ora della conservazione dell'energia meccanica si può in generale porre:

$$v_f^2 = v_A^2 - 2gh_f. \quad (1)$$

In questa relazione v_f ed h_f sono le generiche velocità ed altezza finali del corpo durante il suo moto.

Prendiamo ora in considerazione la situazione nei punti C e D della guida. Si hanno i seguenti valori delle altezze finali del corpo:

$$h_C = R(1 + \sin \pi/4) \approx 2,6 \text{ m} \quad ; \quad h_D = 2R = 3 \text{ m}$$

Di conseguenza dall'equazione (1) si ottengono i valori delle velocità $v_C \approx 7$ m/s e $v_D \approx 6,4$ m/s. Per quanto riguarda il valore delle tensioni in C e D i loro valori sono:

Punto C
$$N_C + mg \sin \pi/4 = m \frac{v_C^2}{R} \quad \rightarrow \quad N_C \approx 5,2 \text{ N}$$

Punto D
$$N_D + mg = m \frac{v_D^2}{R} \quad \rightarrow \quad N_D \approx 3,5 \text{ N}$$

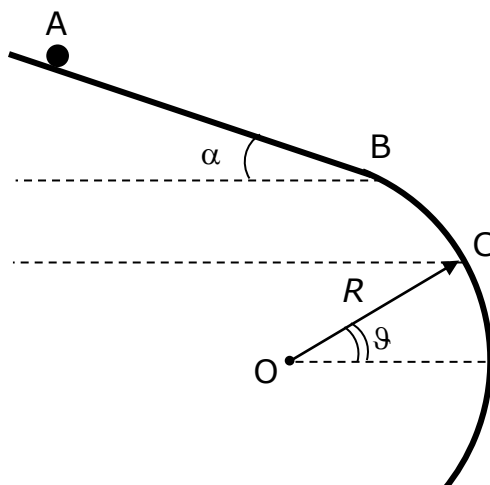
Nel caso di presenza di attrito nel tratto AB lungo $L=1$ m, va calcolata la velocità con cui il corpo affronta la guida circolare verticale nel punto B. Per fare ciò si utilizza il principio di conservazione dell'energia nel tratto AB, ottenendo:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -\mu mg L \quad \rightarrow \quad v_B^2 = v_A^2 - 2\mu g L \approx 90,2 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

La velocità in C si trova come si è fatto in precedenza, ottenendo $v_{1,C} \approx 6,3$ m/s. Analogamente il valore della reazione vincolare in C è $N_{1,C} \approx 3,9$ N.

Problema 5.8 (dal Mazzoldi, Nigro, Voci)

Un punto materiale parte dalla posizione A della figura con velocità iniziale nulla e scende lungo un piano inclinato, privo di attrito di angolo $\alpha=15^\circ$ rispetto ad un piano orizzontale. Nella posizione B il piano si raccorda ad una guida circolare di centro O e raggio $R=1$ m, anch'essa priva d'attrito. Il segmento AB è pertanto tangente alla guida circolare nel punto B. Si vuole che il punto si stacchi dalla guida in corrispondenza dell'angolo $\vartheta=60^\circ$ (punto C sulla guida). Si calcoli di quanto la quota di A deve superare quella di B, affinché si verifichi la condizione richiesta dal problema.

**Soluzione**

Prendendo come riferimento per l'energia potenziale la linea orizzontale passante per il punto C, l'energia meccanica iniziale e finale possono scriversi nel seguente modo:

$$E_i = mgh_{AC} \quad ; \quad E_f = \frac{1}{2}mv_C^2$$

Essendo $h_{AC} = h_{AB} + h_{BC}$, la conservazione dell'energia dà:

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - mg(h_{AB} + h_{BC}) = 0.$$

Dalla figura si ricava la seguente relazione per h_{BC} :

$$h_{BC} = R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - R \sin \vartheta = R(\cos \alpha - \sin \vartheta)$$

La conservazione della energia diviene:

$$h_{AB} = \frac{v_C^2}{2g} - R(\cos \alpha - \sin \vartheta).$$

La velocità v_C che deve avere il punto materiale per staccarsi dalla guida nel punto C si trova analizzando la situazione delle forze agenti sul punto materiale in quella posizione spaziale. Allora:

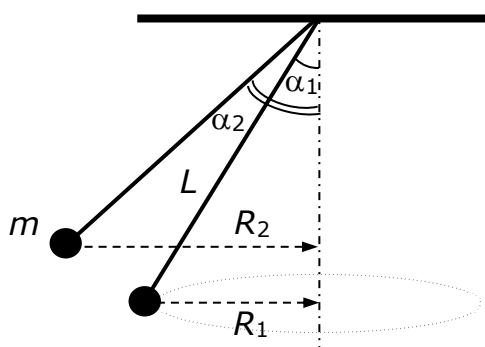
$$mg \sin \vartheta - N_C = m \frac{v_C^2}{R}$$

Si deve porre $N_C=0$, per cui $v_C^2 = Rg \sin \vartheta$.

Sostituendo il valore di v_C ora trovato nella equazione della conservazione dell'energia si trova il valore del dislivello tra il punto A e B che risulta pari a $h_{AB} \approx 0,33$ m.

Problema 5.9 (dal Mazzoldi, Nigro, Voci)

Un pendolo conico è composto da una massa puntiforme $m=2$ kg legata ad un filo inestensibile, di massa trascurabile e di lunghezza $L=0,5$ m. Il pendolo conico ruota con velocità angolare $\omega_1=5$ rad/s. Dopo un certo tempo, agendo in modo opportuno sul pendolo, la velocità angolare viene aumentata al valore $\omega_2=8$ rad/s. Calcolare la variazione totale di energia meccanica del pendolo.

**Soluzione**

Nella situazione iniziale, quando la velocità angolare del pendolo vale ω_1 , il secondo principio della dinamica permette di scrivere le seguenti equazioni scalari:

$$T \cos \alpha_1 = mg$$

$$T \sin \alpha_1 = m\omega_1^2 R_1$$

Sostituendo $R_1 = L \sin \alpha_1$, si ottiene la relazione $\cos \alpha_1 = \frac{g}{\omega_1^2 L}$. Analogamente nella

situazione in cui la velocità angolare è ω_2 , si ha $\cos \alpha_2 = \frac{g}{\omega_2^2 L}$. In ciascuna delle due

situazioni considerate dal problema, l'energia cinetica del pendolo conico si scrive:

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2$$

e la sua variazione nel passaggio tra le due situazioni dinamiche è pari a:

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m L^2 (\omega_2^2 \sin^2 \alpha_2 - \omega_1^2 \sin^2 \alpha_1).$$

D'altra parte, in generale, l'energia potenziale del pendolo conico calcolata rispetto alla sua posizione di riposo (velocità nulla) vale:

$$E_p = mgh = mgL \cos \alpha.$$

Di conseguenza la variazione di energia potenziale nel passaggio dalle due situazioni dinamiche può essere scritta come:

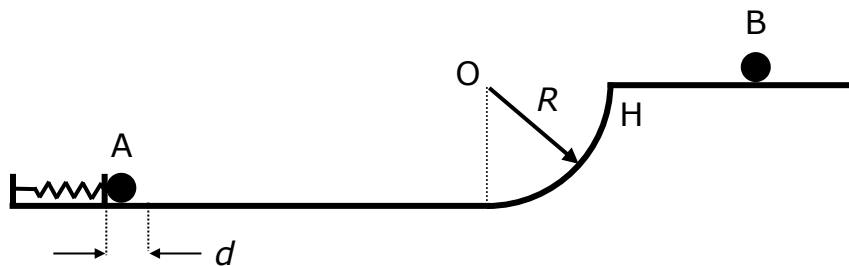
$$\Delta E_p = mgL (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Numericamente si ha $\Delta E_K \approx 12,1$ J e $\Delta E_p \approx 47$ J. Pertanto la variazione totale di energia meccanica vale $\Delta E_{TOT} = 16,8$ J.

Problema 5.10 (Problema d'esame: 10 punti)

Un corpo puntiforme A di massa $m=50$ g viene lanciato lungo la guida orizzontale mostrata in figura da una molla di costante elastica $k=200$ Nm^{-1} compressa di una quantità $d=10$ cm rispetto alla sua posizione di riposo. Il corpo percorre tutta la guida orizzontale che si raccorda con una curva che è uguale ad $1/4$ di arco di circonferenza di centro O e raggio $R=1$ m. Nel punto H la guida curva incontra un secondo piano orizzontale. Quando il corpo A giunge nel punto di raccordo H, urta in modo completamente anelastico con un secondo corpo puntiforme B di massa 5 volte maggiore che possiede una velocità parallela al piano orizzontale in modulo uguale a $v_B=4$ m/s. Nell'ipotesi di assenza di attrito, si calcoli,:

1. La velocità di arrivo del corpo A nel punto di raccordo H; (3 punti)
2. la velocità di impatto in modulo, direzione e verso dei due corpi che, una volta uniti dopo aver subito l'urto completamente anelastico, incontrano il piano orizzontale più basso. (7 punti)

**Soluzione**

Per conoscere il valore della velocità del punto materiale A una volta che raggiunge il punto H della guida, si fa semplicemente uso del principio di conservazione della energia meccanica, ottenendo:

$$\frac{1}{2}kd^2 = m_A gR + \frac{1}{2}m_A v_A^2.$$

Questa relazione è valida in assenza di forze d'attrito. Dalla questa relazione si ricava che il modulo della velocità vale $v_A=4,5$ m/s. L'urto tra i due punti materiali A e B è completamente anelastico ed avviene nel punto H di raccordo tra la guida circolare ed il piano orizzontale su cui si muove il punto B. Per questo tipo di urto possiamo solo far valere la conservazione della quantità di moto che si scrive:

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = (m_A + m_B) \vec{v}_0.$$

Il principio di conservazione della quantità di moto si deve scrivere utilizzando la notazione vettoriale dato che l'urto tra i due corpi non avviene lungo la stessa direzione. Pertanto la quantità di moto finale sarà la risultante delle due quantità di moto prima dell'urto che sono tra di loro perpendicolari. Ricordando che $m_B=5m_A$ si ricava subito il modulo della velocità v_0 iniziale del moto congiunto delle due masse che risulta:

$$v_0 = \frac{1}{6} \sqrt{v_A^2 + 25v_B^2} \approx 3,4 \text{ m/s}.$$

L'angolo rispetto al piano orizzontale del vettore $\vec{v}_0$ risulta essere uguale a:

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{p_A}{p_B}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{v_A}{5v_B}\right) \approx 12,7^\circ.$$

Per conoscere ora la velocità finale si applicano in modo opportuno le equazioni del moto parabolico per la velocità e lo spazio percorso dall'insieme dei due punti materiali. E' possibile allora scrivere:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \vartheta & x &= v_0 t \cos \vartheta \\ v_y &= v_0 \sin \vartheta - gt & y &= R + v_0 t \sin \vartheta - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} ;$$

Imponendo che nell'istante dell'impatto $y=0$ si ha risolvendo i due sistemi di equazioni si ha:

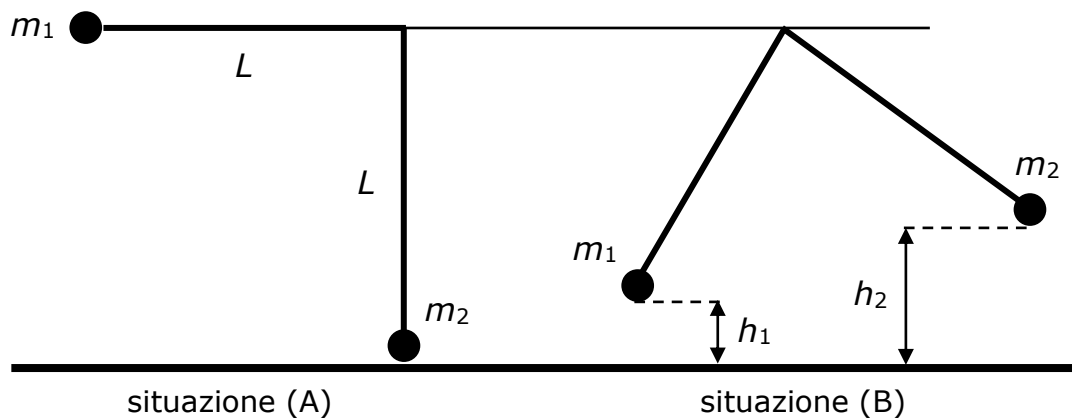
$v_x \approx 3,3$ m/s, $v_y \approx -4.7$ m/s, e la velocità finale in modulo $v_f = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 5.75$ m/s e l'angolo del vettore v_f rispetto al piano orizzontale risulta $\varphi = \tan^{-1}(v_y/v_x) \approx 54.8^\circ$.

Problema 5.11 (Problema d'esame 10 punti)

Si consideri il sistema meccanico nelle due situazioni riportate in figura. Nella parte (A) della figura è rappresentato il sistema nella situazione iniziale: a due fili inestensibili e di massa trascurabile di uguale lunghezza L , sono attaccati due corpi puntiformi, 1 e 2, rispettivamente di massa m_1 e m_2 . Il corpo 2 è fermo in posizione verticale; il corpo 1, con il filo teso, parte con velocità nulla urtando in modo completamente elastico il corpo 2 dopo aver percorso una traiettoria pari ad un quarto di circonferenza di raggio L . Facendo ora riferimento alla parte (B) della figura, dopo l'urto, si misura che il corpo 1 risale ad una quota $h_1=10$ cm ed il corpo 2 di una quota $h_2=2 h_1$.

Nell'ipotesi di assenza di ogni forma di attrito, si determini:

1. la lunghezza L del filo; (5 punti)
2. il rapporto $K=m_1/m_2$ tra le masse dei due corpi. (5 punti)

**Soluzione:**

Partendo dalla situazione (B) si possono ricavare le velocità dei due corpi puntiformi dopo l'urto. Infatti, applicando la conservazione dell'energia

$$v_{1,f} = \sqrt{2h_1g} \approx 1,4 \text{ m/s} \quad ; \quad v_{2,f} = \sqrt{2h_2g} \approx 2,0 \text{ m/s},$$

dove si è indicato con $v_{1,f}$ e con $v_{2,f}$ le velocità dei due corpi subito dopo l'urto e si è tenuto conto che il corpo 1 torna indietro. Essendo l'urto completamente elastico, si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica. Pertanto è possibile scrivere:

$$m_1 v = -m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \quad ; \quad m_1 v^2 = m_1 v_{1,f}^2 + m_2 v_{2,f}^2, \quad (1)$$

da cui si ottiene:

$$v = v_{1,f} + v_{2,f} = 3,4 \text{ m/s}, \quad \text{da cui} \quad L = v^2/2g \approx 0,58 \text{ m}.$$

Per trovare il rapporto tra le masse dei due corpi si utilizzino le equazioni (1). Si ha:

$$v_{1,f} = v \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \quad \text{e} \quad v_{2,f} = 2v \frac{m_1}{m_2 + m_1}.$$

Dalla prima si ottiene $K = \frac{m_1}{m_2} = \frac{v - v_{1,f}}{v + v_{1,f}} \approx 0,42$.

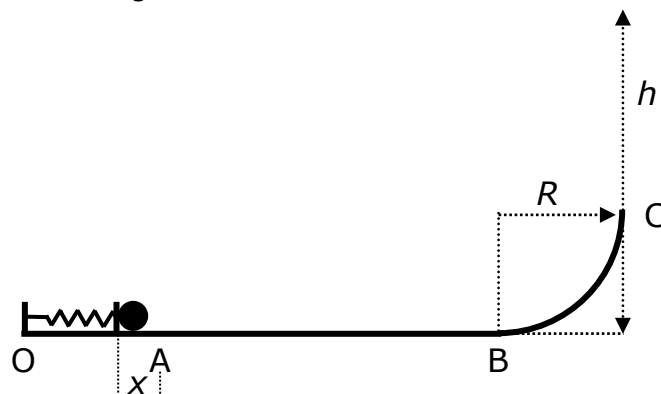
Problema 5.12 (Problema d'esame 10 punti)

Facendo riferimento alla figura, un corpo puntiforme di massa m è lanciato da una molla la cui lunghezza a riposo è uguale al tratto OA. Il punto materiale prosegue dapprima su di una guida orizzontale AB in cui agisce una forza di attrito tangenziale con coefficiente d'attrito dinamico $\mu=0.03$. Nel punto B la guida orizzontale si raccorda con una verticale BC a forma di un quarto di circonferenza di raggio R . Non è noto se nel tratto BC esista o meno una forza di attrito tangenziale. Si misura però che il corpo, una volta abbandonata la guida circolare BC, arriva ad una altezza massima $h=1.4$ m misurata rispetto al piano orizzontale.

Sapendo che la costante elastica della molla vale $K=200$ N/m, la massa $m=1$ kg, il raggio $R=0.5$ m, la distanza $AB=l=1$ m, la compressione della molla $x=0.4$ m, si chiede di:

1. verificare se lungo il tratto BC agisca una forza di attrito e, nel caso di risposta affermativa, si determini il lavoro fatto da questa forza; (5 punti)
2. calcolare il modulo della componente normale della reazione vincolare nel punto B (in cui si suppone che il raggio di curvatura della guida valga R). (5 punti)

Nota: lungo il tratto OA non agisce nessuna forza di attrito.

**Soluzione**

Per rispondere alla prima domanda si ipotizzi che non esista una forza di attrito tangenziale lungo il tratto BC. Di conseguenza, applicando il principio di conservazione dell'energia si ha:

$$mgh' - \frac{1}{2}Kx^2 = -\mu mgl \quad \rightarrow \quad h' = \frac{(1/2)Kx^2 - \mu mgl}{mg} \cong 1.6 \text{ m.}$$

Essendo $h' > h$, significa che una forza di attrito ha agito lungo il tratto BC il cui lavoro vale:

$$W(F_a)_{BC} = mg(h - h') \cong -1.96 \text{ J.}$$

La componente normale della reazione vincolare è massima nel punto B, proprio il punto di raccordo tra la guida orizzontale e quella circolare. Infatti in B si ha:

$$N - mg = m \frac{v_B^2}{R} \quad \rightarrow \quad N = m \left(g + \frac{v_B^2}{R} \right).$$

Il valore della velocità in B si ricava dall'applicazione della conservazione dell'energia meccanica:

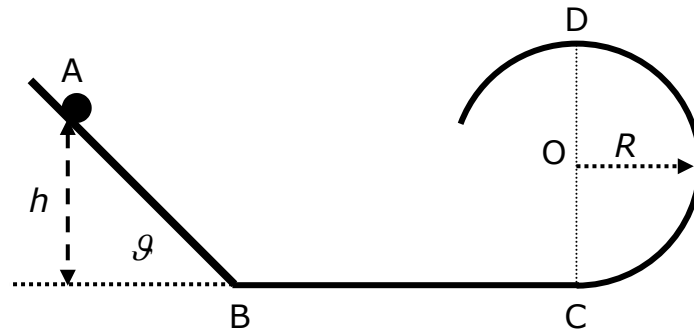
$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}Kx^2 = -\mu mgl \quad \rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{Kx^2 - 2\mu mgl}{m}} \cong 5.6 \text{ m/s.}$$

Sostituendo si ha $N \cong 72.5 \text{ N}$.

Problema 5.13 (Problema d'esame 10 punti)

Facendo riferimento alla figura, un corpo puntiforme di massa $m=1$ kg è inizialmente fermo su di un piano inclinato di angolo $\vartheta=45^\circ$ ad una quota h rispetto al piano orizzontale. Sui tratti AB e BC $L=1$ m è presente una forza di attrito tangenziale con un coefficiente di attrito dinamico $\mu=0.25$. Nel punto C la guida orizzontale si raccorda con una circolare liscia (assenza di attrito) di raggio $R=0.3$ m. Si chiede di:

3. calcolare la quota minima affinché il punto materiale rimanga sempre attaccato alla guida circolare; (5 punti)
4. calcolare il modulo della componente normale della reazione vincolare nel punto C (in cui si suppone che il raggio di curvatura della guida valga R). (5 punti)

**Soluzione**

Dalla teoria si conosce che il valore minimo della velocità del punto materiale in D (il punto critico del moto del punto sulla guida circolare verticale affinché rimanga attaccato ad essa) vale $v_D = \sqrt{Rg}$. Applicando la conservazione dell'energia si ha:

$$mgh_m - \mu mgL \cos \vartheta \frac{h_m}{\sin \vartheta} - \mu mgL - 2mgR = \frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}mRg.$$

Si trova:

$$h_m = \frac{\mu L + (5/2)R}{1 - (\mu / \tan \vartheta)} \cong 1.33 \text{ m.}$$

La componente normale della reazione vincolare è massima nel punto C dove la velocità vale $v_C = \sqrt{5Rg}$. Si ha:

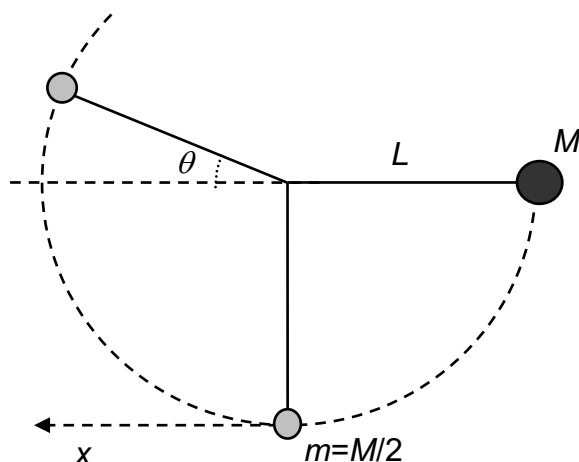
$$N - mg = m \frac{v_C^2}{R} = 6mg \cong 58.9 \text{ N.}$$

Problema 5.14 (Problema d'esame 10 punti)

Una pallina, assimilabile a un punto materiale, di massa $M=0.1$ kg, è sospesa ad un filo inestensibile di lunghezza $L=10$ cm, come in figura. L'angolo iniziale che il filo forma con la verticale è di 90° . Lasciata libera di cadere sotto l'azione della gravità, la pallina colpisce con un urto elastico una seconda pallina, di massa $m=M/2$, anch'essa ancorata a un filo inestensibile ancorato al medesimo punto.

Si calcoli:

1. la componente lungo l'asse delle x della figura delle velocità v_f e V_f delle due palline subito dopo l'urto, dicendo anche in quale verso si muovono; (6 punti)
2. l'angolo θ definito in figura in corrispondenza al quale la tensione del filo che sospende la pallina di massa m si annulla. (4 punti)

**Soluzione**

La velocità della prima pallina immediatamente prima dell'urto si calcola usando il principio di conservazione dell'energia meccanica, assumendo che la quota di riferimento del potenziale sia nel punto più basso della sua traiettoria:

$$MgL = \frac{1}{2} Mv_0^2 \quad \rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gL} \approx 1.4 \text{ m/s}$$

L'urto è elastico, quindi si conserva la quantità di moto delle due particelle nella direzione orizzontale, e l'energia cinetica (si potrebbe anche imporre la conservazione del momento angolare rispetto al punto di sospensione, e l'energia cinetica, e il risultato sarebbe lo stesso):

$$\frac{1}{2} Mv_0^2 = \frac{1}{2} mv_f^2 + \frac{1}{2} MV_f^2 \quad ; \quad Mv_0 = mv_f + MV_f.$$

Il risultato finale è

$$V_f = \frac{1}{3} v_0 = \frac{1}{3} \sqrt{2gL} \approx 0.47 \text{ m/s} \quad ; \quad v_f = \frac{4}{3} v_0 = \frac{4}{3} \sqrt{2gL} \approx 1.87 \text{ m/s}.$$

Dal segno positivo delle due velocità si può affermare che per entrambe le palline le velocità dopo l'urto sono dirette nel verso positivo dell'asse delle x .

La tensione del filo si annulla quando la componente della forza di gravità lungo il filo eguaglia il prodotto della massa per l'accelerazione centripeta:

$$mg \sin \theta = m \frac{v^2}{L},$$

La velocità si calcola dal principio di conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mg(L + L \sin \theta) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{v^2}{L} = \frac{v_f^2}{L} - 2g(1 + \sin \theta).$$

Uguagliando

$$g \sin \theta = \frac{v_f^2}{L} - 2g(1 + \sin \theta) \Rightarrow \sin \theta = \frac{v_f^2}{3gL} - \frac{2}{3} = \frac{32}{27} - \frac{2}{3} = \frac{4}{27},$$

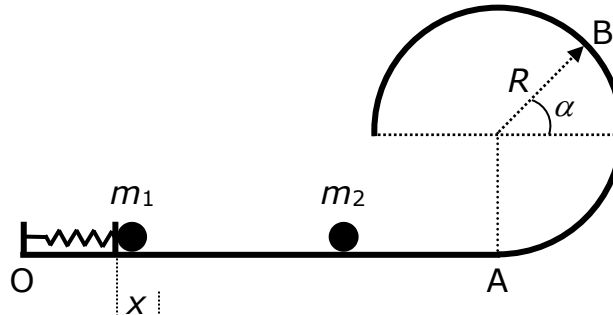
e quindi l'angolo vale $\theta \approx 31^\circ$.

Problema 5.15 (Problema d'esame 10 punti)

Facendo riferimento alla figura, una pallina di massa $m_1=0.1$ kg partendo da fermo viene lanciata da una molla di costante elastica $K=150$ N/m lungo un piano orizzontale privo di attrito. Ad un certo istante essa urta in modo completamente anelastico una seconda pallina di massa $m_2=0.05$ kg. Dopo l'urto l'insieme delle due palline impegna una guida circolare di raggio $R=1$ m anch'essa priva di attrito staccandosi da essa per il valore dell'angolo $\alpha=30^\circ$.

Considerando le due palline come punti materiali si chiede di calcolare:

3. la compressione della molla che ha permesso la situazione dinamica descritta dal problema; (6 punti)
4. la perdita di energia meccanica dovuta all'urto anelastico tra le due palline. (4 punti)

**Soluzione**

La conservazione dell'energia meccanica tra il punto A, inizio della guida circolare, e il punto B dove l'insieme delle due palline si stacca dalla guida vale:

$$v_A^2 = v_B^2 + 2gR(1 + \sin \alpha). \quad (1)$$

D'altro canto la condizione del distacco dalla guida comporta l'annullamento della componente normale della reazione vincolare. Pertanto si ha:

$$N + Mg \sin \alpha = Mv_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B^2 = gR \sin \alpha,$$

dove $M=m_1+m_2$. Sostituendo l'espressione trovata del quadrato della velocità del complesso delle due palline nel punto B nella eq. (1) si ha:

$$v_A^2 = gR(2 + 3 \sin \alpha)$$

La condizione di urto completamente anelastico permette di scrivere la seguente relazione sulla conservazione della quantità di moto:

$$v_A = \frac{m_1}{M} v_i,$$

dove v_i è la velocità di lancio della pallina m_1 fornita dalla molla.

Infine, la conservazione dell'energia meccanica applicata alla pallina di massa m_1 prima dell'urto permette di scrivere la seguente relazione:

$$\frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} m_1 v_i^2 \quad \rightarrow \quad x = M \sqrt{\frac{gR}{m_1 K}} (2 + 3 \sin \alpha) \approx 0.23 \text{ m.}$$

ottenuta dopo aver usato le espressioni precedentemente trovate.

La perdita di energia meccanica ΔE vale:

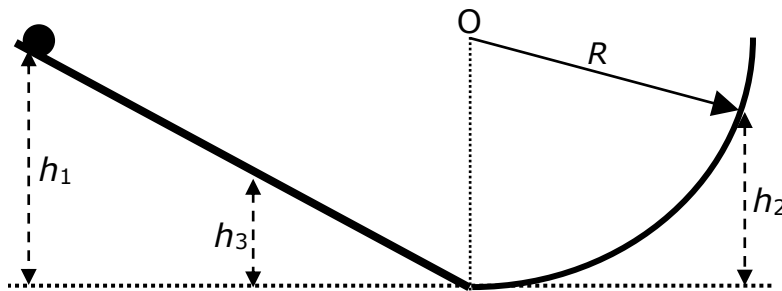
$$\Delta E = \frac{1}{2} Kx^2 - MgR(1 + \sin \alpha) - \frac{1}{2} Mv_B^2 \quad \rightarrow \quad \Delta E = \frac{1}{2} Kx^2 - MgR(1 + \frac{3}{2} \sin \alpha) \approx 1.4 \text{ J.}$$

Problema 5.16 (Problema d'esame 10 punti)

Un piano inclinato liscio si raccorda con una guida scabra circolare verticale di raggio $R=2$ m. Facendo riferimento alla figura, un punto materiale di massa $m=1$ kg partendo con velocità iniziale nulla da una altezza $h_1=2$ m raggiunge una quota h_2 sulla guida circolare scabra per poi ritornare sul piano inclinato fermandosi ad una altezza $h_3=1.6$ m. Si chiede di calcolare:

1. il lavoro compiuto dalla forza d'attrito presente sulla guida circolare; (3 punti)
2. la quota h_2 raggiunta dal punto materiale sulla guida circolare; (3 punti)
3. la quota limite h_{2lim} sulla guida circolare al di sotto della quale il punto materiale si ferma e non può più tornare sul piano inclinato se il coefficiente d'attrito statico vale $\mu_s=0.81$. (4 punti)

NOTA: si supponga la forza d'attrito indipendente dalla velocità del punto materiale lungo la guida circolare.

**Soluzione:**

Il lavoro fatto dalla forza d'attrito agente sulla guida circolare si ottiene dalla seguente relazione:

$$mg(h_3 - h_1) = W_a \quad \rightarrow \quad W_a = mg(h_3 - h_1) \approx -4.0 \text{ J}.$$

Di conseguenza la quota h_2 raggiunta dal punto materiale è uguale a:

$$mg(h_2 - h_1) = \frac{W_a}{2} \quad \rightarrow \quad h_2 = h_1 + \frac{W_a}{2mg} \approx 1.8 \text{ m}.$$

Il punto materiale non può più ripartire una volta fermatosi sulla guida circolare scabra se l'angolo α_{lim} formato dal raggio della guida con la verticale vale:

$$\alpha_{lim} = \tan^{-1} \mu_s \approx 39^\circ.$$

Questo è l'angolo per il quale la componente tangenziale locale della forza peso è uguale alla forza d'attrito statico locale. Pertanto, da semplici argomenti geometrici, si ha che l'altezza minima al di sotto della quale il punto si ferma senza poter più ritornare indietro è:

$$h_{2lim} = R(1 - \cos \alpha_{lim}) \approx 0.44 \text{ m}.$$

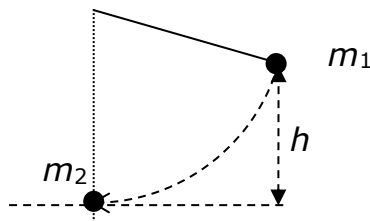
Problema 5.17 (Problema d'esame 10 punti)

Un punto materiale di massa $m_1=95$ kg è legato ad un filo di lunghezza $L=5.0$ m. Il punto materiale è lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza h . Nel punto più basso della traiettoria esso subisce un urto completamente anelastico con un secondo punto materiale inizialmente fermo e di massa $m_2=70$ kg. La tensione massima che il filo può sopportare è $T = 2500$ N.

Si chiede di calcolare:

1. la massima altezza h da cui è possibile lanciare il corpo di massa m_1 senza che il filo si spezzi subito dopo l'urto;
2. la massima altezza $h_{\max}$ che i due corpi raggiungeranno dopo l'urto, definita rispetto al punto più basso della traiettoria.

NOTA: si consideri il filo inestensibile e di massa trascurabile.

**Soluzione:**

La velocità del corpo di massa m_1 nel punto più basso della traiettoria è:

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = m_1gh \rightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

Nell'urto completamente anelastico, si conserva la quantità di moto orizzontale, ma non l'energia meccanica. La velocità dei due corpi dopo l'urto diventa:

$$(m_1 + m_2)v' = m_1v \rightarrow v' = \frac{m_1\sqrt{2gh}}{(m_1 + m_2)}.$$

Il medesimo risultato si poteva ottenere imponendo la conservazione della componente del momento angolare ortogonale al piano del moto. Il diagramma delle forze per il sistema dei due corpi una volta proiettato lungo un asse verticale nel punto più basso della traiettoria dove la velocità è massima, fornisce la seguente equazione:

$$T - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)\frac{v'^2}{L} = \frac{2m_1^2gh}{(m_1 + m_2)L} \rightarrow$$

$$h = \frac{(m_1 + m_2)L}{2m_1^2g} (T - (m_1 + m_2)g) \approx 4.1 \text{ m}.$$

Questo è il valore della massima altezza dalla quale può essere lasciato cadere il punto materiale di massa m_1 .

La massima quota raggiunta dai due corpi dopo l'urto si trova imponendo la conservazione dell'energia meccanica dopo l'urto:

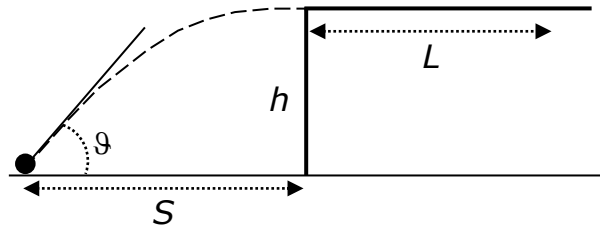
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = (m_1 + m_2)gh_{\max} \rightarrow h_{\max} = \frac{m_1^2h}{(m_1 + m_2)^2} \approx 1.36 \text{ m}.$$

Problema 5.18 (Problema d'esame 10 punti)

Un corpo puntiforme viene lanciato con velocità iniziale $v_0=8$ m/s da terra con un angolo di gittata ϑ . Il corpo, una volta raggiunta l'altezza massima della traiettoria, incontra un piano orizzontale scabro posto all'altezza $h=1.5$ m rispetto alla quota di partenza sul quale percorre una distanza pari a $L=2$ m.

Si chiede di calcolare:

1. l'angolo ϑ di lancio del corpo puntiforme;
2. la distanza S tra il punto di partenza e l'inizio del piano orizzontale;
3. il valore del coefficiente di attrito tra corpo e piano orizzontale scabro.

**Soluzione**

Dato che il corpo puntiforme raggiunge il piano orizzontale all'altezza h quando la traiettoria parabolica raggiunge il massimo si ha, per la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} v_0^2 \sin^2 \vartheta = gh \quad \rightarrow \quad \sin \vartheta = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} \approx 0.678 \quad \rightarrow \quad \vartheta = 42.7^\circ.$$

Il tempo impiegato dal punto materiale per raggiungere la sommità della traiettoria e, quindi, percorrere lo spazio S vale:

$$t = \frac{v_0 \sin \vartheta}{g}$$

e quindi si ha:

$$S = v_0^2 \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{g} \approx 3.25 \text{ m.}$$

La componente orizzontale della velocità è, pertanto, uguale a $v_x = v_0 \cos \vartheta \approx 5.88$ m/s.

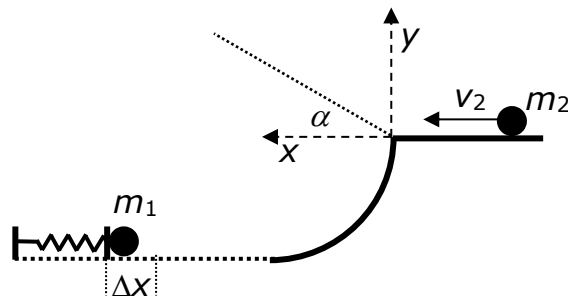
Riapplicando di nuovo il principio di conservazione dell'energia per il moto del corpo sul piano orizzontale si ha:

$$\frac{1}{2} m v_x^2 = mg \mu L \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{v_x^2}{2gL} \approx 0.88.$$

Problema 5.19 (Problema d'esame 10 punti)

Una pallina di massa $m_1=0.3$ kg è posta su di un tavolo **ORIZZONTALE** privo d'attrito, ed è libera di muoversi su di esso. Ad un certo istante è lanciata da una molla di costante elastica $K=10$ N/m lungo una traiettoria rettilinea prima di impegnare una guida a forma di arco di circonferenza con angolo sotteso pari a 90° e di raggio $R=0.1$ m, poggiata anch'essa sul piano **ORIZZONTALE** del tavolo. Alla fine della guida, la pallina urta in modo completamente anelastico una seconda pallina di massa $m_2=0.05$ kg che viaggia sul tavolo con velocità costante $v_2=0.5$ m/s lungo la direzione indicata in figura. Prendendo il sistema di riferimento indicato nella figura, si misura che, dopo l'urto, la direzione della traiettoria rettilinea percorsa dal sistema delle due palline forma con l'asse delle x un angolo $\alpha=35^\circ$. Si chiede di calcolare:

1. la velocità v_1 della pallina di massa m_1 immediatamente prima dell'urto;
2. il valore della reazione vincolare della guida immediatamente prima dell'urto, quando la pallina di massa m_1 è ancora sulla guida circolare;
3. la compressione della molla Δx dalla sua posizione di riposo necessaria per lanciare la pallina di massa m_1 .

**Soluzione**

Nell'urto si conserva la quantità di moto del sistema che, in forma vettoriale e scalare si scrive nel seguente modo:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = M \vec{v}; \quad M v_x = m_2 v_2; \quad M v_y = m_1 v_1,$$

dove $M=m_1+m_2$ è la massa totale e v_x e v_y le componenti cartesiane della velocità $\vec{v}$ dopo l'urto. Dalle equazioni scalari discende subito che:

$$v_y = v_x \tan \alpha.$$

Con i dati del problema si trova che le componenti della velocità dopo l'urto sono uguali a $v_x \approx 0.07$ m/s e $v_y \approx 0.05$ m/s. Da ciò si ricava che la velocità della particella di massa m_1 che vale $v_1 \approx 0.06$ m/s.

La reazione vincolare della guida circolare è data dalla relazione:

$$N = m_1 \frac{v_1^2}{R} \approx 1.1 \times 10^{-2} \text{ N}.$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha:

$$K \Delta x^2 = m_1 v_1^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = v_1 \sqrt{\frac{m_1}{K}} \approx 0.01 \text{ m}.$$

Problema 5.20 (Problema d'esame 10 punti)

Un punto materiale di massa m parte da fermo su di un piano inclinato LISCIO da un'altezza $h=3$ m rispetto al piano orizzontale. Giunto alla fine del piano inclinato, il punto materiale, dopo aver percorso un tratto orizzontale LISCIO, impegna un piano inclinato SCABRO che forma un angolo α con il piano orizzontale fermandosi a una quota $h_1=2.7$ m. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico vale $\mu_d = 0.20$ si determini:

3. il valore dell'angolo α ;
4. il valore del coefficiente di attrito statico minimo μ_s che è richiesto perché il punto materiale si fermi nel punto di quota h_1 , e non scivoli indietro.

**Soluzione**

Applicando la conservazione dell'energia meccanica, è possibile scrivere la seguente relazione:

$$mgh_1 = W_a + mgh$$

dove con W_a si è indicato il lavoro totale compiuto dalla forza di attrito $f_d = \mu_d mg \cos \alpha$ agente sul punto materiale lungo la salita del piano inclinato scabro di lunghezza $D = h_1 / \sin \alpha$,

$$W_a = -\mu_d mg \cos \alpha D = -\mu_d mg \cos \alpha \frac{h_1}{\sin \alpha}.$$

Sostituendo, si ottiene

$$mg(h - h_1) = \mu_d mg \cos \alpha \frac{h_1}{\sin \alpha},$$

e quindi

$$\alpha = \tan^{-1} \left[\frac{h_1 \mu_d}{(h - h_1)} \right] \approx 0.51 \text{ rad} = 61^\circ.$$

Una volta fermatosi, il punto materiale non riesce a tornare indietro se tra il punto materiale e il piano agisce una forza di attrito statico $\vec{f}_s$ uguale in modulo alla componente lungo il piano inclinato della forza peso $mg \sin \alpha$. Essendo il modulo della forza di attrito statico $f_s \leq \mu_s mg \cos \alpha$ il coefficiente di attrito minimo che impedisce al punto materiale di tornare indietro corrisponde al segno di uguaglianza, per cui si può scrivere:

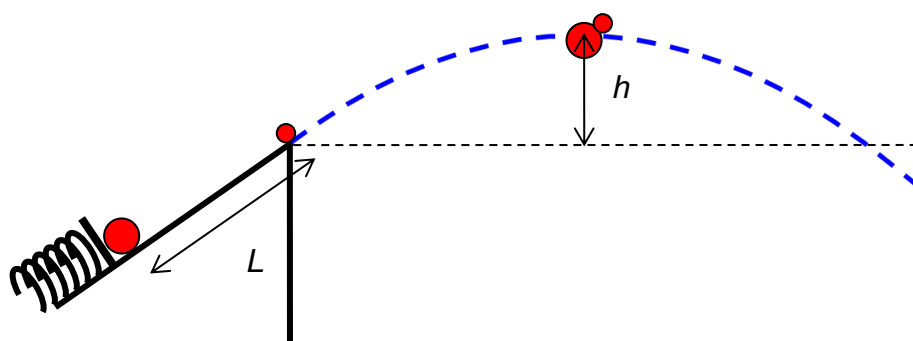
$$mg \sin \alpha = (\mu_s)_{\min} mg \cos \alpha \quad \rightarrow \quad (\mu_s)_{\min} = \tan \alpha = \frac{h_1 \mu_d}{(h - h_1)}.$$

Numericamente si ottiene $(\mu_s)_{\min} \approx 1.48$.

Problema 5.21 (10 punti) (17 giugno 2011)

Una particella di massa $M=0.1$ kg è posta su di una molla di costante elastica $k = 1000$ N/m con una compressione iniziale $\Delta x=0.1$ m. La molla è posta su di un piano scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.1$ che forma un angolo di 30° rispetto all'orizzontale. La posizione iniziale della particella si trova ad una distanza $L = 0.5$ m dalla fine del piano obliquo, ove si trova una particella ferma di massa $m = 0.05$ kg, con la quale la particella di massa M subisce un urto completamente anelastico.

- 1) Calcolare la velocità della particella di massa M immediatamente prima dell'urto; (4 punti)
- 2) Calcolare la velocità comune delle due particelle di massa m ed M subito dopo l'urto; (2 punti)
- 3) Calcolare la massima altezza h dal punto di lancio che le due particelle raggiungono dopo l'urto. (4 punti)

**Soluzione**

La forza di attrito dinamico che agisce sulla particella di massa M lungo il piano scabro vale in modulo

$$F_d = \mu Mg \cos 30^\circ$$

essendo 30° l'angolo che la guida forma con l'orizzontale. La conservazione dell'energia applicata al moto della particella di massa M prima dell'urto permette di scrivere

$$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2} M v_0^2 + MgL \sin 30^\circ + \mu MgL \cos 30^\circ,$$

e quindi di calcolare la velocità v_0 prima dell'urto

$$v_0 = \left[\frac{k \Delta x^2 - 2MgL(\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ)}{M} \right]^{1/2}.$$

Da questa relazione si ottiene $v_0 = 9.4$ m/s.

Nell'urto si conserva la quantità di moto del sistema dei due punti materiali che proiettata lungo la direzione del piano si scrive

$$M v_0 = (m + M) v_1$$

da cui si ottiene $v_1 = 6.3$ m/s.

La componente lungo la verticale della velocità è $v_1 \sin 30^\circ$. La massima altezza si ottiene da considerazioni energetiche e vale

$$\frac{1}{2} (m + M) (\sin 30^\circ v_1)^2 = (m + M) gh$$

da cui

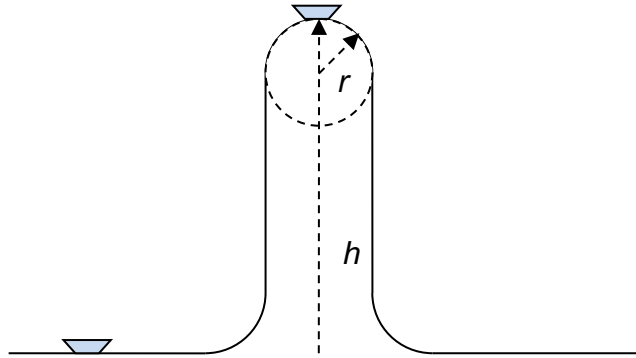
$$h = \frac{(\sin 30^\circ v_1)^2}{2g}$$

cioè $h = 0.5$ m.

Problema 5.22 (10 punti) (18 luglio 2011)

A Six Flags (New Jersey), nel rollercoaster Kingda Ka, un sistema idraulico lancia con accelerazione costante il vagoncino da 0 a $v = 206 \text{ km/h}$ in $t = 3.5 \text{ s}$. Il vagoncino si immette su di un tratto verticale, poi su di un binario circolare, raggiungendo l'altezza $h = 139 \text{ m}$. Supponendo che il tratto circolare abbia un raggio $r = 8 \text{ m}$, il vagoncino massa $m = 500 \text{ kg}$ e che gli attriti siano trascurabili, calcolare:

- 1) L'accelerazione del vagoncino nel tratto iniziale, esprimendola in frazione di $g = 9.8 \text{ m/s}^2$; (2 punti)
- 2) Lo spazio percorso durante questo tempo; (2 punti)
- 3) La velocità del vagoncino nel punto più alto del roller coaster; (3 punti)
- 4) La reazione vincolare nel punto più alto in modulo direzione e verso. (3 punti)

**Soluzione**

La velocità dopo l'accelerazione iniziale del vagoncino è:

$$v = 206 \text{ km/h} = 206 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 57.22 \text{ m/s}$$

La sua accelerazione (costante) vale $a = v/t = 16.34 \text{ m/s}^2$ che in termine di g è $a = 1,67g$

Lo spazio percorso vale: $s = \frac{1}{2}at^2 = 100 \text{ m}$.

La velocità v_0 nel tratto più alto si calcola usando la legge di conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \Rightarrow v_0 = \sqrt{v^2 - gh} = 23.4 \text{ m/s}.$$

Rimanendo il carrello attaccato al binario (per fortuna dei passeggeri) la reazione normale $\mathbf{N}$ nel punto più alto deve essere perpendicolare alla guida (non ci sono attriti) e diretta come la forza peso, cioè verso il centro della circonferenza di raggio r . Pertanto, il 2° principio della dinamica si scrive nel modo seguente:

$$N + mg = m \frac{v_0^2}{r} \Rightarrow N = m \left(\frac{v_0^2}{r} - g \right) = 29.45 \text{ kN}.$$

Dato che il segno del risultato numerico è positivo, l'ipotesi di partenza sui versi delle forze è valida.

Problema 5.23 (10 punti) (13 gennaio 2012)

Un grave di massa $m=20$ kg è appoggiato su un piano inclinato con inclinazione $\alpha=30^\circ$ rispetto al piano orizzontale, ed è vincolato a questo con un elastico di lunghezza a riposo $L=30$ cm e costante elastica $k=100$ N/m. Il grave parte da fermo e percorre la lunghezza L prima che l'elastico si tenda lungo la linea di massima pendenza.

Calcolare, nel caso di assenza di attriti:

- a) la velocità raggiunta dal grave quando l'elastico comincia a tendersi; (3 punti)
- b) il percorso x_1 , calcolato dal punto in cui l'elastico si inizia a tendere, compiuto dal grave scendendo lungo il piano con l'elastico in tensione, prima di invertire il senso del moto; (3 punti)

Supponendo ora che il piano inclinato presenti un coefficiente di attrito dinamico $\mu=0.30$, si calcoli, partendo dalla stessa situazione iniziale:

- c) la velocità raggiunta dal grave quando l'elastico comincia a tendersi; (2 punti)
- d) il percorso x_2 , calcolato dal punto in cui l'elastico si inizia a tendere, compiuto dal grave scendendo lungo il piano con l'elastico in tensione prima di invertire il senso del moto (2 punti)

Si tenga presente che l'elastico esercita sul grave una forza del tipo $F=-Kx$ ove x rappresenta l'allungamento della molla rispetto alla sua lunghezza a riposo L , e che pertanto la forza è nulla finché l'elastico non si tende.

Soluzione

- a) Dalla conservazione dell'energia nel tratto senza forza elastica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL \sin \alpha$$

da cui $v=1.72$ m/s;

- b) La conservazione dell'energia con l'elastico teso dà:

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = mgx_1 \sin \alpha + \frac{1}{2}mv^2$$

risolvendo si ottiene: $x_1 = \frac{mg \sin \alpha \pm \sqrt{(mg \sin \alpha)^2 + kmv^2}}{k}$.

Il valore numerico si ottiene scartando la soluzione negativa ed è uguale a $x_1=2.2$ m;

- c) Tenendo ora conto dell'attrito si ottiene ed applicando di nuovo il principio di conservazione dell'energia meccanica nel tratto iniziale senza forza elastica si ha:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 - mgL \sin \alpha = -\mu mgL \cos \alpha$$

da cui si ottiene $v_a=1.12$ m/s;

- d) nel tratto con attrito e forza elastica si ottiene analogamente:

$$\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}mv^2 - mgx_2 \sin \alpha = -\mu mg \cos \alpha$$

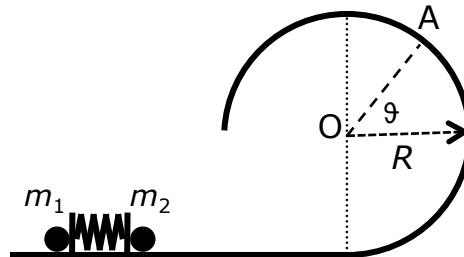
risolvendo l'equazione di 2° grado e scartando la soluzione negativa si ha $x_2=1.18$ m.

Problema 5.24 (10 punti) (30 gennaio 2012)

Due punti materiali di massa $m_1=0.1$ kg e $m_2=0.05$ kg inizialmente fermi vengono lanciati da una molla di costante $K=100$ N/m inizialmente compressa per un valore $x=0.16$ m rispetto alla sua posizione di riposo. La massa m_2 impegna una guida circolare verticale di raggio $R=1$ m e lascia la guida nel punto A, come indicato in figura.

Nell'ipotesi di assenza di attriti, si chiede di determinare:

1. le velocità v_1 e v_2 acquisite dai due punti a causa dell'elongazione della molla; (4 punti)
2. il valore dell'angolo ϑ che individua in figura la posizione del punto A di distacco del punto materiale di massa m_2 dalla guida circolare verticale; (3 punti)
3. la velocità v_A del punto materiale di massa m_2 al momento del distacco. (3 punti)

**Soluzione**

Per calcolare le velocità di lancio dei due punti materiali si scrivano le equazioni di conservazione della quantità di moto e dell'energia meccanica:

$$0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

da cui si ottiene:

$$v_2 = x \sqrt{\frac{K m_1}{m_2 (m_1 + m_2)}} = 5.84 \text{ m/s},$$

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 = 2.92 \text{ m/s}.$$

Nelle precedenti equazioni abbiamo preso per positivo il verso di percorrenza del punto materiale di massa m_2 . Nel punto di distacco A l'equazione del moto si scrive nel seguente modo:

$$N_A + m_2 g \sin \vartheta = m_2 \frac{v_A^2}{R} \Rightarrow N_A = 0 ; v_A^2 = R g \sin \vartheta$$

dato che la condizione limite di distacco è quella per la quale la componente normale della reazione vincolare nel punto A (N_A) sia nulla. Si scriva ora la conservazione dell'energia meccanica prendendo come valore nullo dell'energia potenziale il piano orizzontale di raccordo con la guida circolare verticale:

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + m_2 R g (1 + \sin \vartheta).$$

Sostituendo l'espressione trovata per v_A si ha:

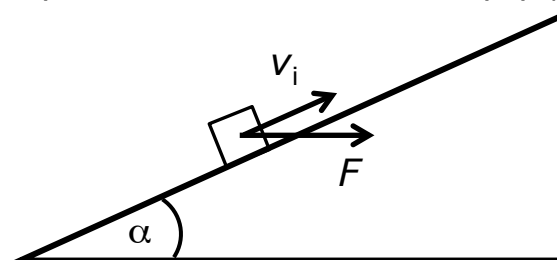
$$\vartheta = \sin^{-1} \left[\frac{v_2^2 - 2 R g}{3 R g} \right]$$

da cui si ricavano i valori di $v_A = 2.21$ m/s e $\vartheta = 29.5^\circ$.

Problema 5.25 (10 punti) (17 luglio 2012)

Su un piano inclinato di un angolo $\alpha=38^\circ$ rispetto all'orizzontale, è poggiato un blocco di massa $m=4.8$ kg, sul quale è applicata una forza $F=47$ N diretta orizzontalmente (vedi figura). Il coefficiente di attrito dinamico fra blocco ed il piano inclinato è $\mu_D=0.33$ ($\mu_S > \mu_D$). All'istante iniziale ($t=0$) il blocco è in moto lungo il piano inclinato con velocità $v_i=4.3$ m/s diretta verso l'alto. Si osserva che successivamente il blocco rallenta fino a fermarsi al tempo $t=T$. Si calcoli:

- 1) Il valore della forza di attrito dinamico tra blocco e piano inclinato; (2 punti)
- 2) La lunghezza s dello spostamento del blocco lungo il piano inclinato, dall'istante iniziale ($t=0$) fino all'istante $t=T$ in cui il blocco si ferma; (2 punti)
- 3) il lavoro compiuto dalla forza risultante delle forze agenti sul blocco nell'intervallo di tempo $\Delta t=T$; (2 punti)
- 4) il lavoro compiuto dalla forza di attrito nello stesso intervallo di tempo; (2 punti)
- 5) modulo, direzione e verso della forza d'attrito statico che il piano esercita sul blocco per tempi maggiori di T (T istante in cui il blocco si ferma). (2 punti)



Introducendo un sistema di riferimento con l'asse x lungo il piano inclinato e diretto verso l'alto, si ha:

$$R_x = F \cos \alpha - mg \sin \alpha - F_a ; \quad R_y = N = mg \cos \alpha + F \sin \alpha ; \quad F_a = \mu_D N$$

dove con R_x e R_y si sono indicate le componenti cartesiane della risultante delle forze applicate al blocco. Da queste equazioni si ottiene il valore del modulo della forza d'attrito, $F_a=21,8$ N. l'accelerazione a cui è sottoposto il blocco vale $a_x=R_x/m=-2.9$ m/s². Le equazioni del moto uniformemente decelerato sono:

$$v(t) = v_i + a_x t ; \quad s(t) = v_i t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Ponendo $v(T)=0$, si ha $T=1.5$ s e $s(T)= 3.2$ m.

Il lavoro compiuto della risultante delle forze è solo quello della componente R_x che vale:

$$W = -\frac{1}{2} m v_i^2 = -44 \text{ J.}$$

Il lavoro resistente compiuto dalla forza d'attrito, sempre parallela allo spostamento, vale:

$$W_a = F_a s = -\mu_D N s = -70 \text{ J}$$

Infine, la forza di attrito statico è uguale a:

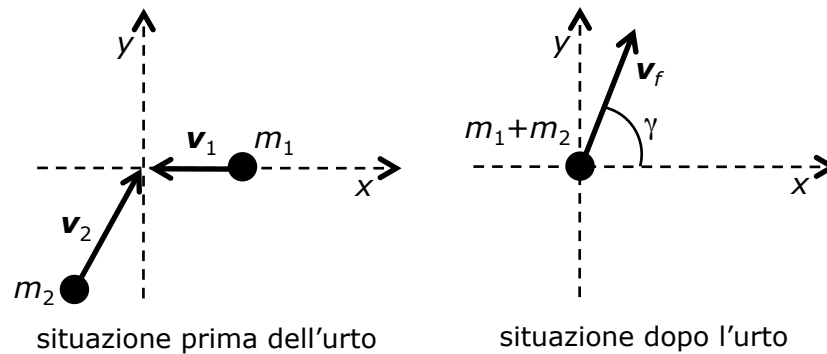
$$F_{as} = -R_x = F \cos \alpha - mg \sin \alpha = -8,0 \text{ N}$$

diretta lungo il piano inclinato verso l'alto.

Problema 5.26 (10 punti) (19 febbraio 2013)

Si prenda in considerazione la situazione fisica rappresentata nella parte sinistra della figura: due punti materiali di massa $m_1=1.2$ kg e $m_2=3$ kg sono posti su di un piano orizzontale liscio ed urtano in modo anelastico (la situazione dopo l'urto è quella indicata nella parte di destra della figura). Sapendo che la velocità prima dell'urto del punto di massa m_2 vale in modulo $v_2=0.5$ m/s e che l'angolo formato dalle direzioni delle due velocità iniziali è $\beta=120^\circ$, si chiede di determinare:

1. il modulo della velocità prima dell'urto, v_1 , del punto materiale di massa m_1 affinché DOPO l'urto la velocità finale del sistema abbia una direzione che forma un angolo $\gamma=65^\circ$ rispetto all'asse x della figura; (5 punti)
2. il modulo della velocità finale v_f del sistema dopo l'urto; (2 punti)
3. la perdita di energia meccanica occorsa nell'urto. (3 punti)

**Soluzione**

Per risolvere il problema si utilizzi la conservazione della quantità di moto che, nella sua forma vettoriale si scrive nel modo seguente:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

Scomponendo la precedente equazione nelle sue componenti cartesiane rispetto al sistema di assi coordinati riportati in figura si ottiene:

$$m_2 v_2 \sin \alpha - m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_{f,x} \quad ; \quad m_2 v_2 \cos \alpha = (m_1 + m_2) v_{f,y}$$

con $\alpha = \beta - 90^\circ$. La tangente dell'angolo γ è esprimibile in funzione del rapporto delle componenti y e x della velocità del sistema dopo l'urto:

$$\tan \gamma = \frac{v_{f,y}}{v_{f,x}} = \frac{m_2 v_2 \cos \alpha}{m_2 v_2 \sin \alpha - m_1 v_1}$$

da cui:

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 \left(\sin \alpha - \frac{\cos \alpha}{\tan \gamma} \right) = 0.12 \text{ m/s.}$$

Il modulo della velocità finale è, pertanto, uguale a:

$$v_f = \sqrt{v_{f,x}^2 + v_{f,y}^2} = 0.36 \text{ m/s.}$$

La perdita di energia meccanica è solo quella legata alla energia cinetica e vale:

$$\Delta E = E_{K,f} - E_{K,i} = \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_2) v_f^2 - (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \right] = -0.115 \text{ J.}$$

Problema 5.27 (10 punti) (30 gennaio 2013)

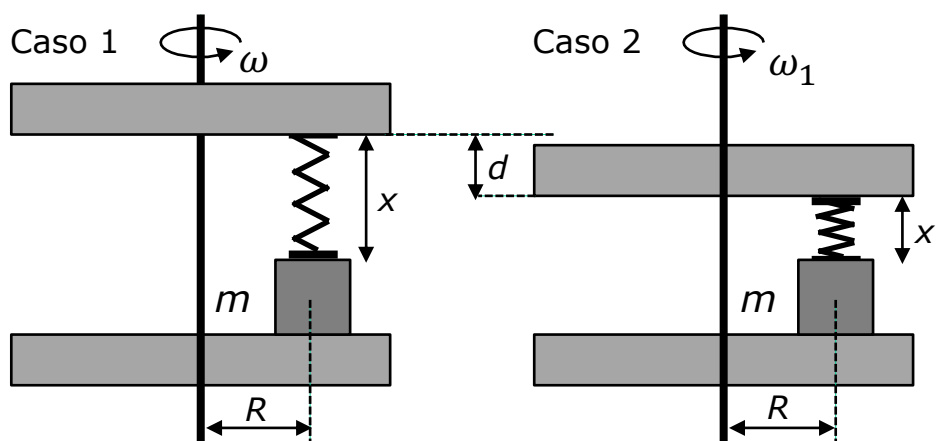
Un corpo di massa $m=200\text{ g}$ è poggiato sul disco inferiore scabro del sistema meccanico rotante riportato in figura ad una distanza $R=75\text{ cm}$ dall'asse di rotazione passante per il centro dei due dischi. Tra il disco superiore e il corpo si pone una molla di massa trascurabile, di costante elastica $K=400\text{ N/m}$ e lunghezza a riposo $x=25\text{ cm}$.

Una volta regolata la distanza tra disco superiore e corpo esattamente pari a x , la piattaforma viene messa in rotazione fino a raggiungere la velocità angolare costante $\omega=5\text{ rad/s}$ oltre la quale il corpo scivola sul disco. Si chiede di calcolare:

1. Il modulo della reazione vincolare normale N esercitata sul corpo (2 punti);
2. Il coefficiente di attrito statico μ_s tra le superfici del corpo e dei dischi (3 punti).

Successivamente si deve portare la piattaforma ad una velocità angolare $\omega_1=10\text{ rad/s}$. In queste condizioni e facendo riferimento alla figura, si chiede di calcolare:

3. Il valore della quota d per la quale bisogna abbassare il disco superiore comprimendo la molla per mantenere fermo il punto materiale; (3 punti).
4. Il modulo della reazione vincolare normale N' esercitata sul corpo. (2 punti)

**Soluzione**

Nel primo caso la reazione vincolare tra il disco superiore e il corpo è nulla, in quanto la molla è in posizione di riposo e ha massa trascurabile. Il disco inferiore reagisce al peso del corpo e quindi esercita una reazione vincolare normale pari a:

$$N = mg = 1.96\text{ N}$$

Una volta in rotazione, il corpo rimane fermo perché la forza di attrito con il disco inferiore è sufficiente a fornire la forza centripeta necessaria per non scivolare. Imponendo questa condizione, si ricava il coefficiente di attrito statico:

$$m\omega^2 R = \mu_s N \Rightarrow \mu_s = \frac{m\omega^2 R}{N} = 1.91.$$

Nel secondo caso presentato dal problema, dovendo il punto materiale rimanere fermo quando il sistema ruota ad una velocità angolare pari a $\omega_1=10\text{ rad/s}$, si deve aumentare la reazione vincolare normale agendo sulla forza elastica abbassando il disco superiore di una quota d . Pertanto la nuova reazione vincolare vale:

$$N' = mg + Kd$$

D'altro canto, si deve avere:

$$m\omega_1^2 R = \mu_s N' \Rightarrow d = \frac{m(\omega_1^2 R - \mu_s g)}{\mu_s K} = 1.5 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

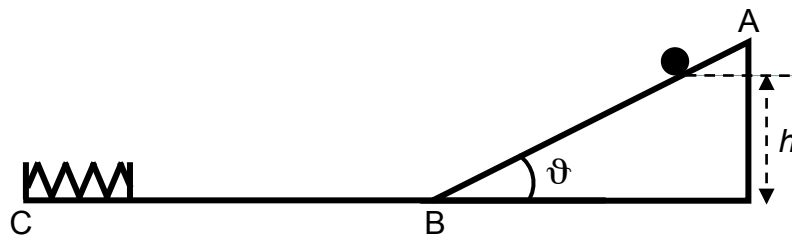
La nuova reazione vincolare è uguale a $N'=7.96\text{ N}$.

Problema 5.28 (10 punti) (11 gennaio 2013)

Un punto materiale di massa $m=0.2$ kg è posto su di un piano inclinato scabro di coefficiente d'attrito dinamico μ_d che forma con il piano orizzontale un angolo $\vartheta=30^\circ$. Il punto materiale, partendo da fermo da una altezza $h=0.8$ m rispetto al piano orizzontale, scende lungo il piano inclinato che si raccorda con un piano orizzontale liscio. Alla fine del piano orizzontale, il punto materiale si attacca ad una molla posta inizialmente nella sua posizione di riposo ed inizia un moto di oscillazione. Si misura che durante il moto di oscillazione la molla viene compressa di un tratto massimo $x_A=0.2$ m e che il periodo di oscillazione del sistema è uguale a $T=1$ s. Si chiede di determinare:

1. la costante elastica K della molla; (2 punti)
2. la velocità massima del moto di oscillazione; (2 punti)
3. l'accelerazione massima del moto di oscillazione; (2 punti)
4. il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra punto materiale e piano inclinato. (4 punti)

NOTA: riferendosi al testo del problema, nella figura il tratto AB è scabro mentre il tratto BC è liscio

**Soluzione**

Alla prima domanda si risponde ricordando che $K/m = \omega^2 = 4\pi^2/T^2$, per cui $K = 4\pi^2 m/T^2 = 7.9 \text{ N/m}$. L'accelerazione massima si ha nel punto di massima ampiezza (che corrisponde alla forza massima) e vale:

$$ma_A = Kx_A \Rightarrow a_A = Kx_A/m = 7.9 \text{ m/s}^2.$$

La massima velocità si ha quando l'energia cinetica è massima, cioè nel punto dove l'energia potenziale è zero e quindi anche l'ampiezza è zero, e vale:

$$\frac{1}{2}Kx_A^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = x_A\omega = 1.26 \text{ m/s}.$$

Si utilizzi il principio di conservazione dell'energia meccanica nel tratto AB del piano inclinato e tra la posizione di impatto del punto materiale con la molla e la posizione della sua compressione massima:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = W(\vec{F}_A) \rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = -\mu_d(mg \cos \vartheta) \frac{h}{\sin \vartheta} \quad ; \quad \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}Kx_A^2,$$

dove $W(\vec{F}_A)$ è il lavoro della forza d'attrito lungo il tratto AB del piano inclinato. In modo del tutto equivalente è possibile scrivere una sola equazione:

$$\frac{1}{2}Kx_A^2 - mgh = -\mu_d \frac{mgh}{\tan \vartheta}$$

Il coefficiente d'attrito dinamico vale quindi:

$$\mu_d = \tan \vartheta \left(1 - \frac{Kx_A^2}{2mgh} \right) = 0.52.$$