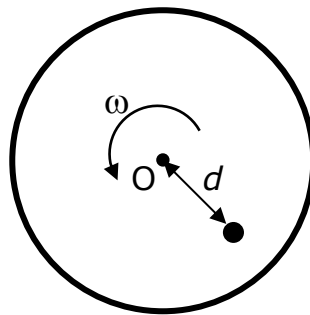


4. PROBLEMI DI DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE (2ª parte)

Problema No. 4.1

Su di un disco posto su di un piano orizzontale, che ruota attorno al suo centro con una velocità angolare di 33,3 giri/minuto, viene poggiata una moneta assimilabile ad un punto materiale. Tra moneta e disco esiste una forza di attrito. Si nota che la moneta rimane in quiete rispetto al sistema di riferimento del disco se la sua distanza dal centro di rotazione risulta minore di 12 cm. Si determini il coefficiente di attrito statico tra il disco e la moneta.



Soluzione

Per distanze della moneta dal centro del disco minori od uguali a $d=12$ cm, la forza d'attrito F_A sarà uguale alla forza centripeta. Il 2° principio della dinamica permette allora di scrivere:

$$F_A = m \frac{v^2}{d} = m\omega^2 d$$

Ricordando che la forza d'attrito è uguale a $F_A = \mu_s N = \mu_s mg$, il coefficiente di attrito statico μ_s risulta uguale a

$$\mu_s = \frac{\omega^2 d}{g}$$

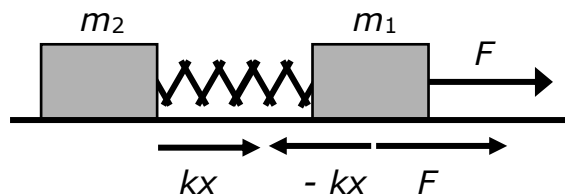
Essendo la velocità angolare uguale ad $\omega=33,3$ giri/minuto, equivalente ad $\omega \approx 3,5$ rad/s, si ha che il valore del coefficiente di attrito statico vale $\mu_s = 0,15$.

Problema 4.2

Su di un piano orizzontale, privo di attrito, due corpi puntiformi di massa $m_1=3$ kg ed $m_2=1$ kg, sono collegati tramite una molla di massa trascurabile e costante elastica $k=30$ N/m. I due corpi si muovono senza oscillare soggetti ad una forza costante $F=12$ N, applicata orizzontalmente al corpo di massa m_1 . Calcolare, in assenza di oscillazioni, di quanto si allunga la molla rispetto alla sua posizione di riposo.

**Soluzione**

Nella figura è riportato il diagramma delle forze applicate a ciascun corpo.



Il 2° principio della dinamica applicato separatamente ai due corpi porta alle due seguenti equazioni:

Corpo di massa m_1 : $F - kx = m_1 a$

Corpo di massa m_2 : $kx = m_2 a$

Sommando membro a membro le due precedenti equazioni si ottiene:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 3 \text{ m/s}^2.$$

Con il valore di a ora calcolato si ottiene l'allungamento della molla dalla sua posizione di riposo $x=0,1$ m.

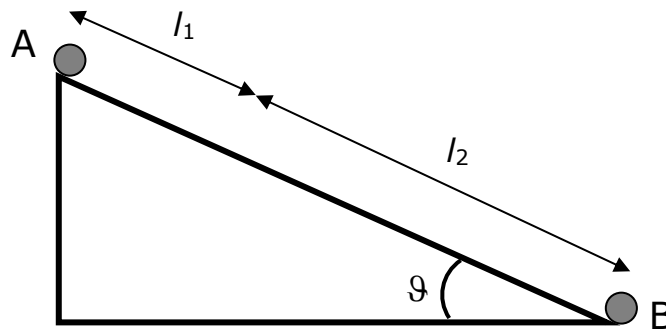
Problema 4.3

Due punti materiali, il punto A di massa $m_1=1$ kg ed il punto B di massa $m_2=2$ kg nella figura, sono posti rispettivamente nella posizione più alta e più bassa di un piano inclinato. Il punto A percorre lo spazio $l_1=0,5$ m del piano inclinato dove è presente una forza di attrito costante con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d=0,05$. Il punto B, invece, risale un tratto liscio del piano inclinato lungo l_2 essendo sottoposto ad una forza costante, parallela al piano inclinato, di modulo $F=20$ N. Lungo il tratto l_2 il moto del punto B avviene sotto la presenza di una forza di attrito viscosa $|F_v|=Kv$, dove v è la velocità del punto B. Sapendo che:

- i due punti si incontrano una volta che ciascuno di essi ha percorso il proprio tratto sul piano inclinato partendo nel medesimo istante;
- il punto B si muove sempre a velocità costante uguale a quella che il corpo A assume alla fine del tratto l_1 ;
- l'angolo del piano inclinato vale $\vartheta=30^\circ$,

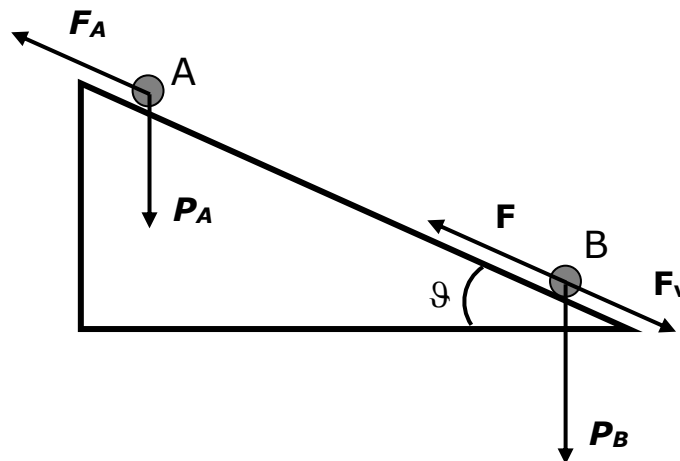
si determinino:

- la velocità del punto B;
- quanto deve valere la lunghezza $L=l_1+l_2$ del piano inclinato;
- il valore della costante K che compare nella espressione della forza viscosa.



Soluzione

Con riferimento alla figura, le forze agenti sul corpo A lungo la direzione del piano inclinato sono la forza d'attrito costante F_A e la componente della forza peso $m_1g \sin \vartheta$. Sul corpo B, sempre lungo la direzione del piano inclinato, agiscono la componente della forza peso, $m_2g \sin \vartheta$, la forza motrice costante F , la forza d'attrito viscoso F_v .



Conseguentemente, scegliendo come riferimento per il moto un asse parallelo al piano inclinato ed orientato dall'alto verso il basso, le equazioni della dinamica si scrivono nel modo seguente:

$$\begin{aligned} m_1 g \sin \vartheta - F_A &= m_1 a_1 \\ -F + m_2 g \sin \vartheta + K v_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

con $F_A = \mu_d m_1 g \cos \vartheta$ la forza d'attrito dinamica e v_1 la velocità di A alla fine del tratto l_1 che è, come stabilito dal testo del problema, la velocità costante di salita del corpo B. Dalla prima delle equazioni (1) si ricava il valore della accelerazione di A che risulta $a_1 \approx 4,5 \text{ m/s}^2$. Dalla seconda delle equazioni (1) si ricava l'espressione della costante K della forza viscosa:

$$K = \frac{F - m_2 g \sin \vartheta}{v_1}$$

Il valore della velocità v_1 è quello che si ricava dalle equazioni cinematiche che descrivono il moto del corpo A. Si ha:

$$v_1 = a_1 t_1 \quad ; \quad l_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

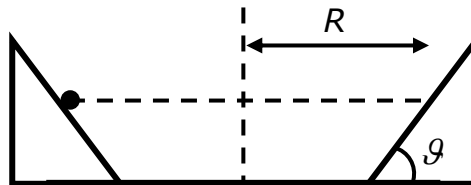
dove con t_1 si è indicato il tempo di percorrenza del tratto l_1 da parte del corpo A. I valori numerici che si ottengono dalla risoluzione del sistema sono $t_1 \approx 0,5 \text{ s}$ e $v_1 \approx 2,1 \text{ m/s}$.

La velocità calcolata è quella con la quale il corpo B sale il piano inclinato. Conseguentemente il valore della costante K è uguale a $K \approx 4,8 \text{ kg/s}$. Lo spazio percorso dal corpo B è $l_2 = v_1 t_1 \approx 1 \text{ m}$, per cui la lunghezza totale del piano inclinato deve essere $L = 1,5 \text{ m}$.

Problema 4.4

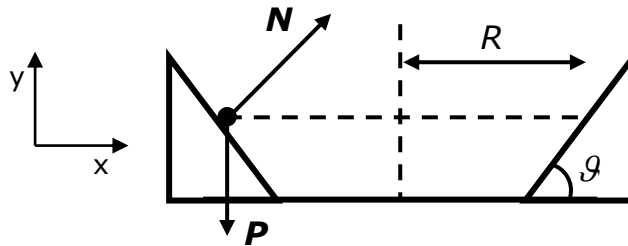
Una pallina puntiforme di massa $m=150$ g si muove a velocità costante all'interno di una guida liscia circolare il cui piano forma un angolo $\vartheta=60^\circ$ rispetto al piano orizzontale, compiendo 2,5 giri/s. Determinare:

1. la distanza R dal centro della guida circolare a cui si colloca la traiettoria della pallina;
2. la velocità lineare della pallina;
3. nel caso in cui la guida di diametro uguale a $2R$ fosse perfettamente verticale e ruotasse alla stessa velocità angolare della pallina, dire quale sarebbe il valore del coefficiente di attrito statico tra la guida e la pallina per ottenere che quest'ultima risulti ferma nel sistema di riferimento della guida ruotante.



Soluzione

Con la scelta effettuata del sistema di riferimento mostrato in figura, la componente N_x



della reazione vincolare deve uguagliare la forza centripeta, mentre, la componente N_y sarà uguale alla forza peso. Si può allora scrivere:

$$\begin{aligned} N_x &= N \sin \vartheta = m \omega^2 R \\ N_y &= N \cos \vartheta = mg \end{aligned}$$

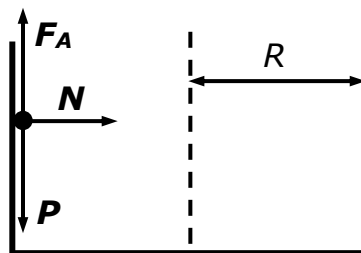
Dividendo membro a membro si ha:

$$\tan \vartheta = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

La velocità angolare nelle unità del S.I. vale $\omega=2,5 \times 2\pi \approx 15,7$ rad/s, per cui il raggio della traiettoria della pallina è $R \approx 7 \times 10^{-2}$ m.

La velocità lineare è conseguentemente $v=\omega R \approx 1,1$ m/s.

Se ora $\vartheta=\pi/2$, la situazione diventa uguale a quella della figura sottostante in cui si è anche indicato il diagramma delle forze applicate alla pallina.



Per la situazione di equilibrio della pallina nel sistema di riferimento solidale alla guida ruotante, si deve avere:

$$F_A = \mu_S N = mg$$

con

$$N = m\omega^2 R$$

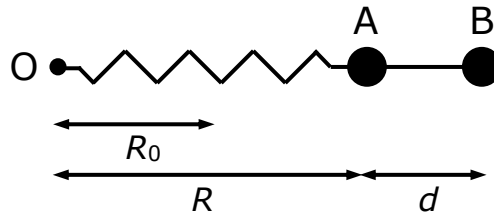
Dalle due precedenti equazioni si ricava il valore del coefficiente d'attrito statico che deve esistere tra guida e corpo per farlo rimanere fermo:

$$\mu_S = \frac{g}{\omega^2 R} \approx 0,57.$$

Problema 4.5

Due punti materiali A e B, rispettivamente di massa $m_A=1$ kg ed $m_B=0,5$ kg, sono vincolati a ruotare su di un piano orizzontale privo di attrito di moto circolare intorno ad un punto O. Il punto materiale A è collegato da una parte con il centro di rotazione O tramite una molla di costante elastica $k=100$ N/m e, dall'altra, al punto B tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile. Sapendo che la lunghezza a riposo della molla è $R_0=15$ cm, che il filo che collega i due punti materiali è lungo $d=10$ cm e che il sistema compie 1 giro/s, si determini:

1. l'allungamento della molla dalla sua posizione di riposo;
2. la tensione T del filo.



Soluzione

Sul punto materiale A agiscono, per quel che riguarda il moto del punto, la forza elastica e la tensione del filo. Per il punto B, invece, l'unica forza che interessa è la tensione del filo. Allora le equazioni della dinamica per i due punti si scrivono nel seguente modo:

$$\text{Punto A:} \quad k(R - R_0) - T = m_A \omega^2 R$$

$$\text{Punto B:} \quad T = m_B \omega^2 (R + d).$$

Si è scelto come sistema di riferimento l'asse delle x rivolto verso il punto O alla sinistra dei due punti materiali A e B. Sommando le due equazioni membro a membro si ottiene:

$$R = \frac{kR_0 + m_B \omega^2 d}{k - \omega^2 (m_A + m_B)} \approx 0,4 \text{ m}$$

per cui l'allungamento della molla rispetto alla posizione di riposo è $R - R_0 = 0,25$ m.

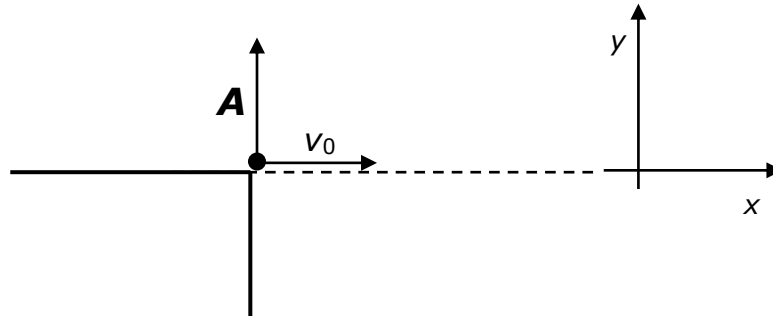
Dalla precedente equazione si ricava che un valore negativo R significherebbe che la molla non riesce a trattenere le due masse.

Infine, la tensione del filo vale $T = m_B \omega^2 (R + d) \approx 10$ N.

Problema 4.6 (Problema d'esame)

Un punto materiale arriva alla fine di un piano orizzontale con una velocità $v_0=3$ m/s. Nel momento in cui lascia il piano agisce su di esso, oltre alla forza peso, una forza verticale diretta verso l'alto della forma in modulo $A = \gamma \sqrt[3]{t^2}$. Sapendo che il punto ha massa $m=1$ kg e che $\gamma = 6 \text{ N/s}^{2/3}$ si trovi:

1. le coordinate della quota minima raggiunta dal punto materiale;
2. il tempo impiegato dal punto materiale per tornare alla altezza del piano orizzontale;
3. l'equazione oraria del punto materiale.

**Soluzione**

Il moto del punto materiale nel vuoto è descrivibile mediante le equazioni del moto del proiettile. In questo caso al punto materiale in volo sono applicate la forza peso e la forza **A**. Scegliendo il sistema di riferimento mostrato in figura si ha:

$$a_x(t) = 0 \quad ; \quad a_y(t) = \frac{A}{m} - g \quad \Rightarrow \quad a_x(t) = 0 \quad ; \quad a_y(t) = \delta t^{2/3} - g$$

dove si è posto per semplicità $\delta = \gamma/m$. Come è ben noto $a_y = dv_y/dt$ per cui si ha, ricordando le condizioni iniziali:

$$v_x(t) = v_0 \quad ; \quad v_y(t) = \frac{3}{5} \delta t^{5/3} - gt$$

Analogamente, dato che $v_y = dy/dt$, si ha:

$$x(t) = v_0 t \quad ; \quad y(t) = \frac{9}{40} \delta t^{8/3} - \frac{1}{2} gt^2. \quad (1)$$

La quota minima è quella per la quale $dy(t)/dt = 0$, cioè quando $v_y(t)=0$. Di conseguenza si ottiene:

$$t \left(\frac{3}{5} \delta t^{2/3} - g \right) = 0.$$

La soluzione per t significativa per rispondere al quesito del problema è:

$$t_1 = \left(\frac{5g}{3\delta} \right)^{3/2} \approx 4,5 \text{ s.}$$

Le coordinate corrispondenti alla quota minima raggiunta dal punto materiale sono:

$$x(t) \approx 13,5 \text{ m} \text{ e } y(t) \approx -24,8 \text{ m}.$$

Il tempo impiegato dal punto materiale per tornare alla quota di partenza corrispondente a quella del piano orizzontale si trova ponendo $y(t)=0$ nella seconda delle equazioni (1). Oltre alla soluzione banale $t=0$ si ha:

$$t_2 = \left(\frac{20g}{9\delta} \right)^{3/2} \approx 6,9 \text{ s}.$$

Infine, l'equazione della traiettoria può scriversi come:

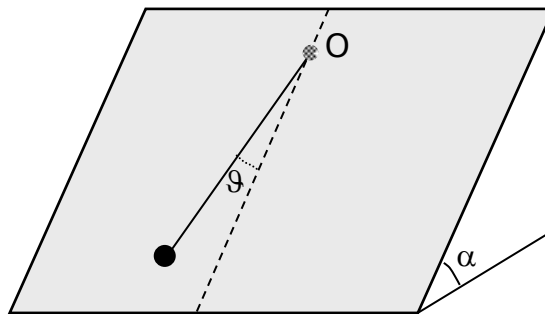
$$y(t) = \frac{9}{40} \delta \left(\frac{x(t)}{v_0} \right)^{8/3} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x(t)}{v_0} \right)^2$$

ottenuta direttamente operando sulle equazioni (1).

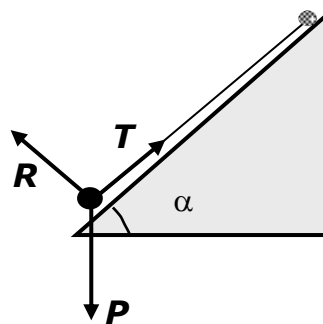
Problema 4.7 (Problema d'esame 10 punti)

Sopra un piano inclinato liscio un corpo puntiforme è vincolato ad un punto O mediante un filo inestensibile e di massa trascurabile. Il corpo puntiforme è posto in oscillazione. Sapendo che la lunghezza del filo è $L=50$ cm, che l'angolo formato dal piano inclinato con il piano orizzontale vale $\alpha=35^\circ$, si determini:

1. il periodo T_1 di oscillazione del pendolo nella ipotesi di piccole oscillazioni ($\vartheta \leq 5^\circ$);
2. la lunghezza L_2 di un pendolo libero di oscillare nello spazio che abbia lo stesso periodo T_1 del pendolo appoggiato sul piano inclinato precedentemente calcolato;
3. la lunghezza d di un pendolo composto (pendolo fisico) formato da un'asta sottile omogenea che oscilla intorno ad un suo estremo affinché il suo periodo sia uguale a T_1 . (Risolvere questa domanda una volta studiata la dinamica del corpo rigido).

**Soluzione**

Le forze che agiscono sul punto materiale sono la forza peso, la reazione vincolare del piano inclinato e la tensione del filo. Dato che il punto materiale rimane sul piano inclinato la componente della forza peso perpendicolare al piano inclinato, $mg \cos \alpha$ deve equilibrare la reazione vincolare. Mentre la componente della forza peso parallela al piano inclinato, $mg \sin \alpha$, è la forza che permette la oscillazione del pendolo sul piano inclinato. Per rendersi conto di quanto ora descritto si faccia riferimento alla seguente figura.



Quindi il pendolo semplice posto sul piano inclinato è equivalente ad un pendolo libero al patto di sostituire alla forza peso mg (pendolo libero nello spazio) la forza $mg \sin \alpha$. L'equazione di oscillazione del pendolo allora si scrive nel seguente modo:

$$mL \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -mg \sin \alpha \sin \vartheta$$

dove ϑ rappresenta l'angolo di oscillazione rispetto ad un asse passante per il punto O giacente sul piano inclinato e perpendicolare al che nella ipotesi di oscillazione per piccoli angoli la precedente equazione differenziale diventa:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -\frac{g \sin \alpha}{L} \vartheta$$

la cui soluzione è, in analogia al pendolo libero nello spazio:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g \sin \alpha}{L}} t + \varphi\right)$$

da cui si ricava il periodo di oscillazione T_1 :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g \sin \alpha}} \approx 1,87 \text{ s}$$

La lunghezza L_2 di un pendolo libero di oscillare nello spazio che abbia lo stesso periodo T_1 è dato dalla uguaglianza dei loro periodi:

$$\frac{L}{g \sin \alpha} = \frac{L_2}{g} \Rightarrow L_2 = \frac{L}{\sin \alpha} \approx 0,87 \text{ m}$$

Nel caso di un pendolo fisico formato da un'asta omogenea che oscilla intorno ad un suo estremo si ha:

$$\frac{L}{g \sin \alpha} = \frac{L_c}{g} \quad \text{con} \quad L_c = \frac{2I_z}{md} \quad \text{e} \quad I_z = \frac{md^2}{3}$$

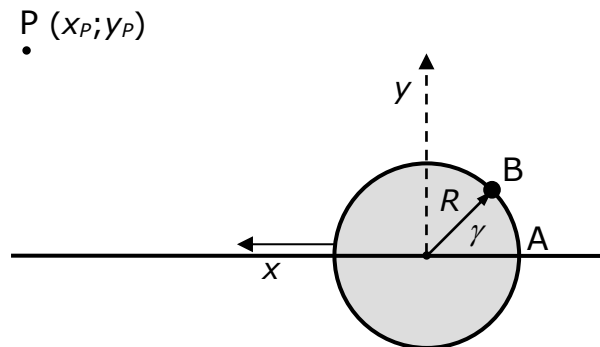
sostituendo l'espressione del momento di inerzia si ottiene:

$$d = \frac{3L}{2 \sin \alpha} \approx 1,3 \text{ m}$$

Problema 4.8 (Problema d'esame: 10 punti)

Un corpo puntiforme è vincolato sul bordo di un disco di raggio $R=20$ cm che ruota in un piano verticale in senso antiorario. Il disco parte da fermo dalla posizione A della figura con accelerazione angolare costante. Si vuole lanciare il punto materiale da una certa posizione B affinché raggiunga nel tempo $t=0,5$ s il punto P avente coordinate $x_P=2$ m ed $y_P=1$ m riferite al centro del disco e posto sul suo stesso piano verticale. Sapendo che il disco deve effettuare un giro completo, si determini:

1. il valore dell'angolo γ indicato in figura raggiunto il quale si deve lasciare libero il punto materiale affinché raggiunga il punto P nel tempo prestabilito; (7 punti)
2. il valore della accelerazione angolare costante a cui il disco deve essere sottoposto affinché il punto materiale raggiunga il punto P. (3 punti).

**Soluzione**

Una volta lasciato libero, il punto materiale segue un moto parabolico. Scegliendo un sistema di riferimento con l'origine nel centro del disco ed orientato come nella figura, le equazioni che esprimono la velocità e lo spazio percorso dal punto sono:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \sin \gamma \\ v_y(t) &= v_0 \cos \gamma - gt \end{aligned} \quad (1); \quad \begin{aligned} x(t) &= -x_0 + v_0 t \sin \gamma \\ y(t) &= y_0 + v_0 t \cos \gamma - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Nelle precedenti equazioni si sono indicati con v_0 , x_0 , e y_0 rispettivamente il modulo della velocità e le coordinate del punto materiale nell'istante nel quale esso abbandona il disco. Si ha subito che $x_0=R \cos \gamma$ ed $y_0=R \sin \gamma$. Dato che il punto materiale deve raggiungere il punto P, si devono imporre nelle precedenti equazioni le condizioni $x(t_f)=x_P$ e $y(t_f)=y_P$, dove t_f è il tempo di volo. Ricavando v_0 dalla prima delle equazioni (2) e sostituendolo nella seconda delle equazioni (2) si ottiene:

$$R \sin \gamma + \cos \gamma \frac{x_P + R \cos \gamma}{\sin \gamma} - A = 0$$

dove $A = \frac{1}{2}gt^2 - y_P$. La precedente equazione si può scrivere nel seguente modo:

$$x_P \cos \gamma - A \sin \gamma + R = 0$$

Facendo uso delle ben note relazioni trigonometriche

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \beta}{1 + \tan^2 \beta}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta} \quad \text{con } \beta = \gamma/2,$$

si ottiene l'equazione:

$$(R - x_p) \tan^2 \beta - 2A \tan \beta + (x_p + R) = 0.$$

La soluzione fisicamente accettabile fornisce il valore $\gamma=45,8^\circ$. Di conseguenza il valore della velocità lineare al momento del distacco del punto materiale dal disco deve valere $v_0 \approx 6$ m/s. Dalle equazioni della cinematica del moto di rotazione si ha:

$$\omega(t) = \alpha t \quad ; \quad \vartheta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2.$$

Al tempo t_l di lancio del punto materiale, essendo l'accelerazione costante e la velocità e l'angolo iniziali nulli, la velocità angolare ω_0 vale $\omega_0 = \frac{v_0}{R} \approx 30$ rad/s, per cui si ottiene il

valore $\alpha = \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\vartheta_0} \approx 63$ rad/s².

Problema 4.9 (problema d'esame: 10 punti)

In una macchina utensile, una parte di un organo di trasmissione è assimilabile ad un punto materiale di massa $m=75$ g soggetto ad una forza variabile nel tempo esprimibile come $\mathbf{F}(t)=F_0\sin\omega t$, dove F_0 è una costante che rappresenta l'ampiezza massima della forza ed $\omega=2$ rad/s la pulsazione. Il punto materiale si muove senza attrito lungo un binario orizzontale partendo da fermo nella posizione indicata dalla Fig.1. Indicando con x la generica coordinata del punto materiale, si risponda alle seguenti domande:

1. si scriva l'equazione oraria $x=f(t)$ del moto del punto materiale; (4 punti)
2. da quale dei due grafici mostrati nelle Figg. 2 e 3 il moto del punto materiale viene correttamente rappresentato. Si giustifichi la risposta; (2 punti)
3. trovare il valore di F_0 se si vuole che la forza $F(t)$ si annulli per ogni intervallo spaziale uguale a $\Delta x=7$ cm; (2 punti)
4. trovare i valori massimo e minimo della velocità che il punto materiale raggiunge nel suo moto. (2 punti)

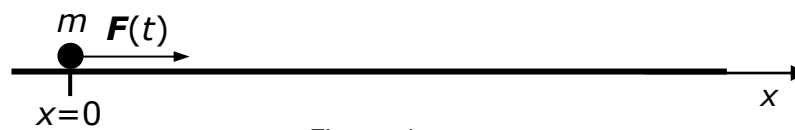


Figura 1

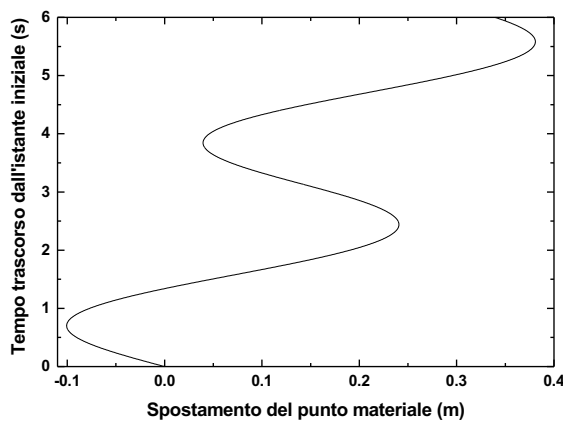


Figura 2

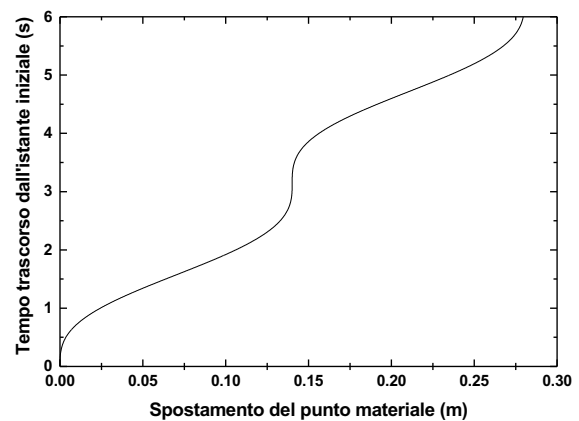


Figura 3

Soluzione

Le forze che agiscono sul punto materiale sono la forza peso, la reazione normale del vincolo (l'attrito è assente) e la forza variabile nel tempo $\mathbf{F}(t)$ diretta secondo il verso positivo dell'asse delle ascisse. Per quanto riguarda il problema, la forza responsabile del movimento del punto materiale è la sola $\mathbf{F}(t)$. Essendo il moto unidimensionale, il 2° principio della dinamica si scrive allora semplicemente come:

$$ma = m \frac{dv}{dt} = F_0 \sin \omega t \rightarrow \int_0^v dv' = \frac{F_0}{m} \int_0^t \sin \omega t' dt' \rightarrow v(t) = \frac{F_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t) \quad (1)$$

dove $v(t)$ è la velocità del punto materiale, m la sua massa e si è posto $v(t=0)=0$. Integrando l'ultima delle precedenti relazioni si trova l'equazione oraria del punto materiale:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega} t - \frac{F_0}{m\omega^2} \sin \omega t \quad (2)$$

dove si è posto l'origine del moto del punto nel punto di coordinata $x(t=0)=0$. Dalla equazione oraria si riconosce che il moto del punto materiale è dato dalla composizione di un moto uniforme e di un moto armonico. Si verifica subito che per ogni t il rapporto $F_0/m\omega$ è sempre maggiore di $F_0/m\omega^2$. Inoltre essendo il seno una funzione in modulo ≤ 1 , la $x(t)$ del punto materiale è sempre una quantità positiva. Di conseguenza il grafico della Fig.3 è quello che può rappresentare il moto del punto. E' possibile verificare, una volta calcolato il valore di F_0 che soddisfi la condizione posta dalla terza domanda, che anche numericamente questa affermazione è corretta. Un modo alternativo è quello di osservare che la derivata della equazione (2), cioè la velocità del punto materiale, è una grandezza sempre maggiore o uguale a zero. Anche in questo modo si giunge alla conclusione che la Fig.3 è quella che descrive il moto. Dalla espressione della $F(t)$ si vede che essa si annulla per ogni $t=n\pi/\omega$ con $n=0,1,2,\dots$. Ne consegue che dalla equazione oraria si può scrivere:

$$x_n(F(t) = 0) = \frac{n\pi F_0}{m\omega^2}$$

Il valore di F_0 per il quale la distanza tra due valori di Δx sia proprio uguale a 7 cm è data dalla relazione:

$$F_0 = \frac{m\omega^2 \Delta x}{\pi}$$

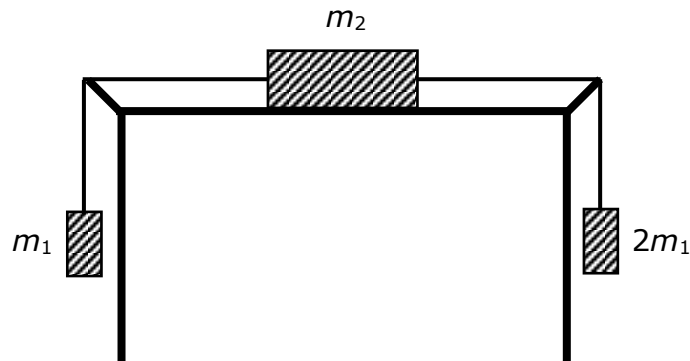
ottenuta dalla precedente equazione come differenza, per esempio, tra $x_{n=1}$ ed $x_{n=0}$. Il valore numerico è $F_0=6,7 \times 10^{-3}$ N. La velocità massima è raggiunta dal punto materiale per ogni $\omega t=n\pi$, con n un numero intero dispari diverso da zero. La velocità minima è uguale a zero e ciò avviene per ogni $\omega t=n\pi$, con n un numero intero pari, zero compreso. Dall'espressione della velocità del punto materiale espressa dall'equazione (1) si ottiene:

$$v_{\max} = \frac{2F_0}{m\omega} \approx 9 \times 10^{-2} \text{ m/s} \quad ; \quad v_{\min} = 0.$$

Problema 4.10 (Problema d'esame: 6 punti)

Tre corpi, tutti assimilabili a punti materiali, sono disposti come mostrato in figura. In assenza di ogni forma d'attrito e partendo con velocità iniziale nulla, la massa $m_2=6$ kg percorre sul piano orizzontale lo spazio di 20 cm in 0,6 s. In queste condizioni si determinino i valori:

1. della massa m_1 ; (4 punti)
2. delle tensioni dei fili; (2 punti)

**Soluzione:**

Le equazioni della dinamica applicate indipendentemente alle tre masse m_1 , m_2 e $2m_1$ sono riportate nel seguente sistema di 1° grado:

$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$

$$T_2 - 2m_1 g = -2m_1 a$$

$$T_2 - T_1 = m_2 a$$

avendo scelto un sistema di assi coordinati con l'asse delle ordinate rivolto verso l'alto ed avendo assunto i fili inestensibili. Il valore dell'accelerazione si ottiene dalla condizione cinematica indicata nel testo del problema. Essendo l'accelerazione costante si ha immediatamente che

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{2\Delta x}{t^2} \approx 1,1 \text{ m/s}^2.$$

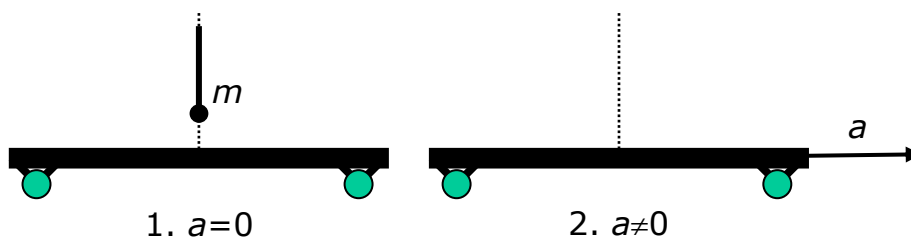
La risoluzione del sistema fornisce il valore della massa $m_1 = \frac{m_2 a}{g - 3a} \approx 1 \text{ kg}$.

Di conseguenza, i valori delle tensioni dei fili risultano uguali a $T_1=10,9 \text{ N}$ e $T_2=17,5 \text{ N}$.

Problema 4.11 (Problema d'esame 10 punti)

Un pendolo semplice di massa $m=1$ kg, è solidale ad una piattaforma che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato. In queste condizioni si fa oscillare il pendolo per angoli piccoli rispetto alla verticale. Sapendo che l'accelerazione del moto della piattaforma vale $a=2$ m/s², trascurando ogni forma di attrito, si risponda alle seguenti domande:

1. con riferimento alle figure, una volta scelto un appropriato sistema di riferimento, come si scrivono le componenti cartesiane delle equazioni del moto (2° principio della dinamica) nel caso in cui $a \neq 0$? (4 punti)
2. quale è il valore dell'angolo α_0 , riferito alla verticale, intorno al quale il pendolo oscilla? Si disegni nella figura sottostante (2. $a \neq 0$) la situazione fisica quando il pendolo passa per l'angolo α_0 ; (4 punti)
3. quanto vale in modulo la forza centripeta quando il pendolo passa per la posizione per la quale l'angolo di oscillazione è uguale proprio ad α_0 ? (2 punti)

**Soluzione:**

L'equazione del moto del pendolo si ricava prendendo in considerazione il fatto che esso è sottoposto non solo alla sua forza peso, ma anche ad una forza dovuta alla accelerazione a cui la piattaforma è sottoposta. In questo caso, l'accelerazione sulla massa m del pendolo è uguale in modulo e direzione ad a ma ha verso opposto (si veda la figura 2. $a \neq 0$). Allora, l'equazione vettoriale del moto è la seguente:

$$m\vec{g} + \vec{F}_a + \vec{T} = m\vec{a},$$

che, nelle sue componenti cartesiane x, y della figura, diviene:

$$-g \sin \alpha(t) + a \cos \alpha(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad ; \quad T - mg \cos \alpha(t) \pm ma \sin \alpha(t) = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \quad (1)$$

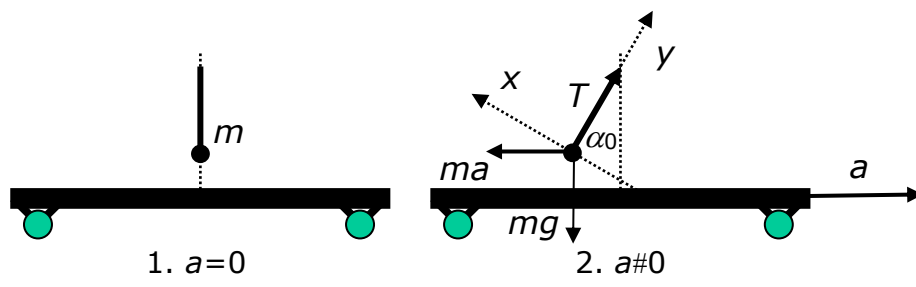
Con L la lunghezza del pendolo. Dalla prima delle equazioni (1) si ricava il valore dell'angolo α_0 quando si pone $d^2 s/dt^2 = 0$. Infatti l'angolo intorno al quale si ha oscillazione è quello per il quale l'accelerazione totale a cui la massa m è sottoposta risulta nulla. Pertanto si ha:

$$a/g = \tan \alpha_0 \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = \tan^{-1}(a/g) \approx 11,5^\circ.$$

Dalla seconda equazione (1) si può ricavare ora il valore della forza centripeta per $\alpha = \alpha_0$, ottenendo:

$$F_c = T - m(a \sin \alpha_0 + g \cos \alpha_0).$$

La situazione fisica per $\alpha = \alpha_0$ è riportata nella figura sottostante.



Problema 4.12 (Problema d'esame 10 punti)

Ad un certo istante $t_0=0$, un punto materiale di massa $m=1$ kg, muovendosi lungo una traiettoria rettilinea, entra con velocità v_0 all'interno di un mezzo che lo rallenta agendo su di esso con una forza viscosa lungo la direzione del moto del tipo $F_v=Kv(t)$, dove $v(t)$ è la velocità istantanea del punto materiale e K una costante. Sapendo che dopo un tempo $t_1=10$ s la velocità del punto materiale diviene $v(t_1)=v_0/3$ e che dopo aver percorso uno spazio $\Delta x = 50$ m all'interno del mezzo viscoso il punto materiale si ferma, si determini:

4. il valore della costante K ? (4 punti)
5. il valore della velocità v_0 ; (4 punti)
6. la forma della forza che si dovrebbe applicare al punto materiale affinché il suo moto all'interno del mezzo viscoso continui ad essere rettilineo uniforme con velocità v_0 . (2 punti)

Soluzione:

L'equazione del moto del punto materiale è semplicemente data dalla relazione:

$$ma = -Kv \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{K}{m} dt .$$

La soluzione di questa equazione differenziale è:

$$v(t) = v_0 \exp\left[-Kt / m\right]. \quad (1)$$

Dalla equazione (1) si trova il valore di K che vale:

$$\frac{v_0}{3} = v_0 \exp\left[-Kt_1 / m\right] \quad \rightarrow \quad K = -\frac{m}{t_1} \ln\left(1/3\right) \approx 0,11 \text{ kg/s}.$$

Dalla equazione (1) si può ricavare l'equazione oraria. Infatti si ha:

$$dx = \exp\left[-Kt / m\right] dt \quad \rightarrow \quad x - x_0 = \Delta x = \frac{mv_0}{K} \left[1 - \exp\left(-Kt\right)\right].$$

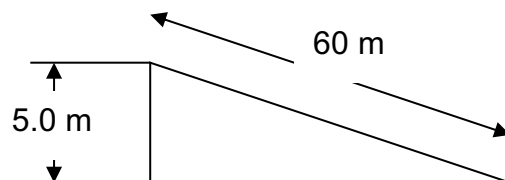
Imponendo $\Delta x = 50$, si ha per $t \rightarrow \infty$ $v_0 = 5,5$ m/s.

Affinché il moto del punto materiale prosegua nel mezzo viscoso mantenendo la sua velocità uguale a v_0 bisogna applicare una forza motrice istante per istante uguale alla stessa forza F_v data dal problema con la costante K uguale al valore trovato in precedenza.

Problema 4.13 (Problema d'esame 10 + 3 punti)

Il tunnel che collega il terminal di Collemaggio a piazza Duomo è lungo 500 m, dei quali 420 m sono coperti da 7 tappeti mobili (ognuno di 60 m di lunghezza) che viaggiano alla velocità di 1.0 m/s. Il dislivello tra piazza Duomo e il terminal di Collemaggio è di $h = 35$ m (piazza Duomo è in alto), ed essendo in piano le zone non coperte da tappeto mobile, ognuno dei tappeti mobili supera un dislivello di 5.0 m (vedi figura). La notte dei festeggiamenti per la vittoria dell'Italia ai mondiali, uno studente del peso di 80 kg percorre verso piazza Duomo il tunnel camminando a velocità costante di 1.5 m/s sia nelle zone non coperte da tappeto mobile, sia nelle zone coperte dal tappeto mobile (ovviamente, in un caso la velocità è rispetto al suolo e nell'altro la velocità è rispetto al tappeto mobile). Dopo i festeggiamenti, avendo bevuto qualche birra di troppo, lo studente segue il medesimo tragitto in senso inverso percorrendo però i tappeti mobili che viaggiano in direzione opposta a quella del suo moto sempre a velocità costante di 1.5 m/s (rispetto al suolo ed al tappeto mobile). Calcolare:

1. il tempo che esso impiega a raggiungere piazza Duomo; (3 punti)
2. il tempo che esso impiega nel tragitto di ritorno al terminal di Collemaggio; (3 punti)
3. l'impulso della forza che il motore che fa girare il tappeto deve fornire allo studente ogni volta che esso salta sul tappeto, sia nel viaggio di andata, sia nel viaggio di ritorno. (4 punti)
4. (facoltativo) l'energia spesa dallo studente per salire da Collemaggio a piazza Duomo. (3 punti)

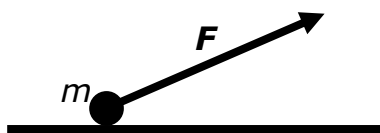
**Soluzione**

1. Lo studente percorre $s_1 = 80$ m alla velocità di $v_s = 1$ m/s, e $s_2 = 420$ m alla velocità di $v_s + v_t = 1.5$ m/s + 1.0 m/s = 2.5 m/s. Il tempo totale sarà la somma dei due, cioè $t_a = t_1 + t_2 = s_1 / v_s + s_2 / (v_s + v_t) = 53.3$ s + 168 s = 221 s.
2. Il viaggio di ritorno, la composizione di velocità sui tappeti avviene in verso opposto, e la velocità dello studente sarà $v_s - v_t = 1.5$ m/s - 1.0 m/s = 0.5 m/s. e quindi $t_r = t_1 + t_2 = s_1 / v_s + s_2 / (v_s - v_t) = 53.3$ s + 840 s = 893 s.
3. L'impulso è uguale alla variazione della quantità di moto, che è uguale nei due versi al prodotto della massa dello studente per la velocità del tappeto mobile $J = mv_t = 80$ kg $\times$ 1.0 m/s = 80 N s.
4. Nel sistema di riferimento solidale ai tappeti mobili, nei tratti in salita, che sono quelli coperti dai tappeti mobili, la **potenza** sviluppata dallo studente è la stessa che si svilupperebbe se i tappeti mobili non fossero in funzione, solo che in quest'ultimo caso detta potenza si svilupperebbe per un tempo maggiore. L'**energia** (potenza per tempo) spesa dallo studente è quindi quella che spenderebbe se i tappeti mobili non fossero in funzione, cioè mgh , diminuita del rapporto tra il tempo necessario per percorrere il tratto in salita con i tappeti mobili in funzione, ed il tempo necessario per percorrere lo stesso tratto con i tappeti mobili non in funzione, cioè $mgh \times [v_s / (v_s + v_t)] = 11.0$ kJ.

Problema 4.14 (Problema d'esame 10 punti)

Un punto materiale di massa $m=100$ kg è posto su di un piano orizzontale scabro. Al punto materiale viene applicata una forza $\mathbf{F}$ la cui retta di applicazione forma un angolo $\alpha=25^\circ$ con l'orizzontale e il verso è quello indicato in figura. Sapendo che applicando una forza in modulo pari a $F_1=365$ N il moto del punto materiale risulta rettilineo e uniforme si chiede di calcolare:

1. il valore del coefficiente di attrito dinamico μ tra piano e punto materiale; (5 punti)
2. il modulo della forza $\mathbf{F}$ affinché il moto del punto materiale sia rettilineo uniformemente accelerato con $a=2$ m/s²; (5 punti)

**Soluzione**

Indicando con R_t e R_n le componenti della reazione vincolare tangenziale e normale al piano orizzontale, e fissando un opportuno sistema di riferimento, le equazioni del moto del punto materiale nei due casi indicati dalle domande del problema si scrivono nel modo seguente:

$$F_1 \cos \alpha - R_t = 0 \quad ; \quad F_1 \sin \alpha + R_n = mg .$$

Ricordando ora che la componente R_t della reazione vincolare è proporzionale a quella normale secondo il coefficiente di attrito dinamico, $R_t = \mu R_n$ si ha:

$$F_1 = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \rightarrow \mu = \frac{F_1 \cos \alpha}{mg - F_1 \sin \alpha} \approx 0.4 .$$

Nel caso della seconda domanda, indicando ora con F_2 il valore incognito del modulo della forza $\mathbf{F}$ necessario affinché il moto del punto materiale sia uniformemente accelerato con $a=2$ m/s², e, inoltre, con R'_t e R'_n le nuove componenti della reazione vincolare tangenziale e normale al piano orizzontale, le equazioni del moto diventano:

$$F_2 \cos \alpha - R'_t = ma \quad ; \quad F_2 \sin \alpha + R'_n = mg ,$$

da cui:

$$F_2 = \frac{m(\mu g + a)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \approx 551 \text{ N} .$$