

3. PROBLEMI DI DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE (1ª parte)

I problemi di dinamica proposti sono divisi in due categorie: alla prima appartengono quei problemi per la cui risoluzione è sufficiente applicare la seconda legge di Newton (problemi di dinamica del punto materiale 1ª parte e 2ª parte). Alla seconda categoria appartengono invece quei problemi che sono risolvibili anche tramite l'uso del principio di conservazione dell'energia meccanica nella sua forma più generale (problemi di dinamica del punto materiale 3ª parte e 4ª parte). Questo modo di procedere segue il naturale apprendimento delle nozioni da parte degli studenti. Alcuni problemi, o parte di essi, appartenenti alla prima categoria possono essere riproposti una seconda volta perché si discuta la loro risoluzione mediante l'utilizzo dei concetti di energia potenziale e cinetica e del loro principio di conservazione.

Problema 3.1

Un punto materiale di massa $m=1$ kg è collocato su di un piano orizzontale scabro. Partendo da fermo, il punto materiale viene sottoposto all'azione di una forza motrice costante orizzontale $\mathbf{F}_m$, raggiungendo, dopo un tempo t_0 , una velocità pari a $v_0=20$ m/s. All'istante t_0 la forza motrice $\mathbf{F}_m$ cessa di agire ed il punto materiale si ferma dopo un tempo $\Delta t=20$ s.

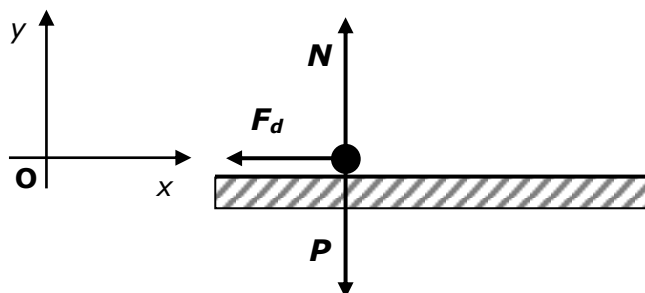
Si determini:

1. il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra corpo e piano orizzontale;
2. lo spazio percorso dal punto materiale prima di fermarsi;
3. il tempo impiegato dalla forza motrice costante per far raggiungere al punto materiale la velocità v_0 sapendo che lo spazio totale percorso è stato pari a $x_{TOT}=600$ m;
4. il valore della forza motrice costante $\mathbf{F}_m$ supponendo che la sua direzione sia parallela al piano orizzontale e che il corpo è .



Soluzione

Si prenda in esame la situazione dinamica del punto materiale dopo che è cessata l'azione della forza costante che muoveva il punto materiale. Dopo il tempo t_0 le forze applicate al punto materiale sono quelle indicate in figura:



Le forze **N** e **P** sono uguali e contrarie e non contribuiscono al moto. La forza di attrito **F_d** è l'unica forza parallela al piano orizzontale che frena la corsa del corpo. Si può allora scrivere rispetto all'asse delle ascisse la seconda equazione di Newton:

$$-F_d = -\mu_d mg = -ma \quad \Rightarrow \quad \mu_d = \frac{a}{g}, \quad (1)$$

dove con **a** si è indicata la decelerazione costante che subisce il punto materiale. La forza d'attrito è supposta costante e quindi il valore della decelerazione si trova dall'equazione della cinematica del moto uniformemente decelerato ponendo $\Delta t = 20$ s. Si ha:

$$v(\Delta t) = 0 = v_0 - a\Delta t \quad \Rightarrow \quad a = 1 \text{ m/s}^2.$$

La sostituzione del valore di **a** appena trovato nella equazione (1) permette di calcolare il coefficiente di attrito dinamico che risulta uguale a $\mu_d \approx 0,1$.

Lo spazio percorso durante il moto decelerato è dato semplicemente da:

$$x = v_0 \Delta t - \frac{1}{2} a \Delta t^2 = 200 \text{ m}.$$

La situazione dinamica che porta il corpo, partendo da fermo, ad avere una velocità di 20 m/s è quella per la quale alla forza motrice **F_m** si oppone la forza di attrito dinamico **F_d**. Entrambe le forze sono costanti e dirette lungo una stessa direzione (quella parallela al piano orizzontale) ma presentano versi opposti. Il tempo necessario e lo spazio percorso per portare il punto ad avere una velocità di 20 m/s si ricava dalle seguenti equazioni cinematiche:

$$x' = x_{TOT} - x = \frac{1}{2} a' t^2 \quad ; \quad v_0 = a' t,$$

dove con **x'** si è indicato lo spazio percorso quando al corpo si applica la forza motrice costante e la velocità del punto materiale raggiunge quella indicata dal problema, cioè $v_0 = 20$ m/s. Risolvendo il sistema di equazioni si ottiene:

$$a' = \frac{v_0^2}{2x'} = 0,5 \text{ m/s}^2 \text{ e } t = \frac{v_0}{a'} = 40 \text{ s}.$$

Quello trovato è quindi il valore della accelerazione del corpo a cui contribuiscono contemporaneamente la presenza della forza motrice e di quella di attrito. Il 2° principio della dinamica si scrive nel seguente modo:

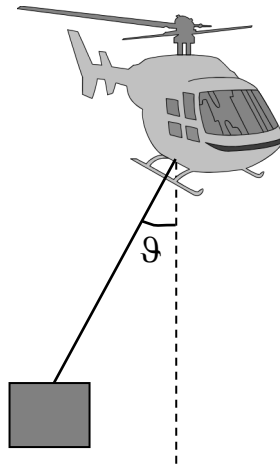
$$\vec{F}_m + \vec{F}_d = m\vec{a}',$$

da cui, infine, si trova il valore della forza motrice costante che risulta essere:

$$F_m = ma' + F_d = m(a' + \mu_d g) = 1,48 \text{ N}.$$

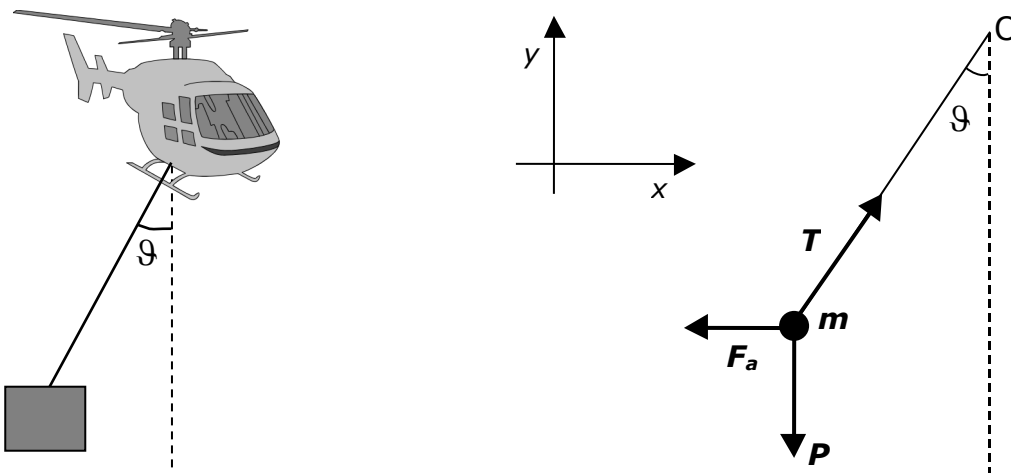
Problema 3.2

Un elicottero che viaggia ad una velocità costante e parallela rispetto al suolo, porta con sé, attaccato ad una fune di massa trascurabile lunga $L=20$ m, un recipiente vuoto di massa $m=600$ kg. Se un osservatore a terra misura un angolo $\vartheta=30^\circ$ formato dalla fune con la verticale, quale è il valore della resistenza dell'aria che agisce sul recipiente? In un secondo tempo, l'elicottero riempie il recipiente con dell'acqua. L'osservatore misura ora un angolo $\vartheta=15^\circ$. Assumendo che non ci sia ragione di credere che la resistenza dell'aria sia variata e che l'elicottero viaggi ancora alla stessa velocità v , si calcoli la massa di acqua contenuta nel recipiente. Si consideri il recipiente come un punto materiale.



Soluzione

Le forze applicate al corpo di massa m (il recipiente) sono schematizzate nella parte destra del disegno.



Le forze T , P ed F_a , sono rispettivamente la tensione del filo, la forza peso del recipiente e la forza di attrito dell'aria. Quest'ultima, pur essendo una forza viscosa, deve qui essere considerata costante dato che il testo del problema afferma che la velocità dell'elicottero è costante. La seconda legge di Newton permette di scrivere:

$$\vec{T} + \vec{F}_a + \vec{P} = m\vec{a} = 0 ,$$

dato che l'elicottero viaggia a velocità costante ($a=0$). La scomposizione delle forze in base al sistema di riferimento indicato in figura fornisce le seguenti due equazioni delle componenti cartesiane delle forze:

$$T_x - F_a = 0 \quad ; \quad T_y - P = 0$$

cioè

$$T \sin \vartheta = F_a \quad ; \quad T \cos \vartheta = mg .$$

Dividendo membro a membro le due ultime equazioni si ha:

$$F_a = mg \tan \vartheta \approx 3,4 \text{ kN}.$$

Con il recipiente carico l'angolo tra la fune e la verticale riferita al terreno diventa $\vartheta'=15^\circ$. Sotto le ipotesi del problema, le precedenti equazioni si possono scrivere come:

$$T \sin \vartheta' = F_a \quad ; \quad T \cos \vartheta' = (m + m_{ac})g$$

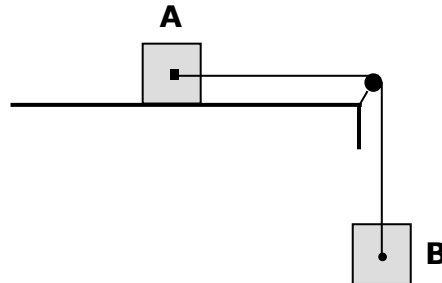
dove m_{ac} è la massa d'acqua contenuta nel serbatoio. Il suo valore si ricava facilmente dalla soluzione del sistema delle due equazioni ottenendo:

$$m_{ac} = \frac{F_a}{g \tan \vartheta'} - m \approx 700 \text{ kg}.$$

Problema 3.3

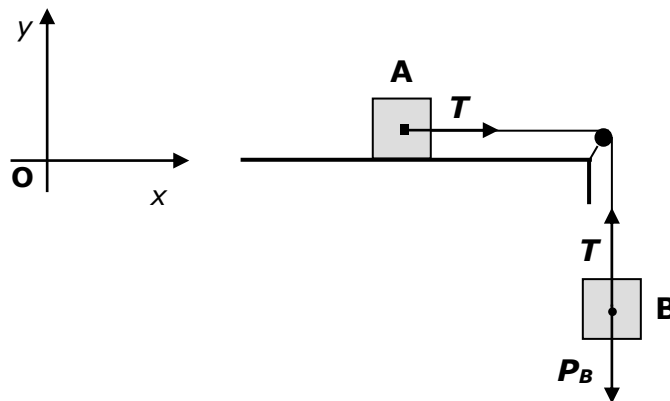
Un corpo A di massa $m_A=8$ kg è posto su di un piano orizzontale privo di attrito. Esso è collegato con un filo inestensibile di massa trascurabile ad un secondo corpo B di massa $m_B=3$ kg che si muove lungo una traiettoria verticale. Trovare l'accelerazione dei due corpi e la tensione del filo. Considerare i corpi come punti materiali.

Si supponga la carrucola della figura come un punto privo di massa.



Soluzione

Si scelga il sistema di riferimento mostrato nella figura per il moto dei due corpi. Le forze che permettono il moto dei due corpi sono la tensione del filo T e la forza peso P_B .



Essendo il filo inestensibile i due corpi A e B si muovono con la stessa accelerazione a e lo stesso valore della tensione del filo. Le equazioni del moto per il corpo A e B sono rispettivamente uguali a:

$$T = m_A a \quad ; \quad T - P_B = -m_B a.$$

Le altre due forze agenti sul corpo A, la forza peso P_A e la componente normale della reazione vincolare N_A , sono uguali ed opposte e non sono disegnate nella figura perché non intervengono nel moto dei due corpi. Esplicitando rispetto a T si ottiene

$$m_A a = m_B (g - a) \quad \rightarrow \quad a = \frac{m_B g}{m_A + m_B} \approx 2,7 \text{ m/s}^2$$

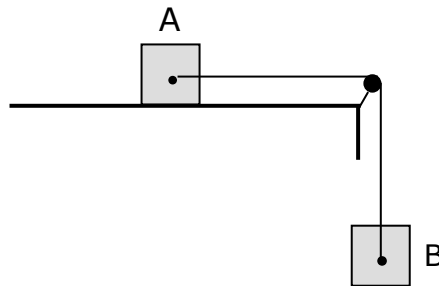
Di conseguenza si ha che la tensione del filo vale $T \approx 21,4$ N.

Problema 3.4

Un corpo A di massa $m_A=5$ kg è posto su di un piano orizzontale scabro. Esso è attaccato ad un secondo corpo B di massa m_B tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile che si muove lungo una direzione perpendicolare al piano orizzontale. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico vale $\mu_d=0,05$, trovare:

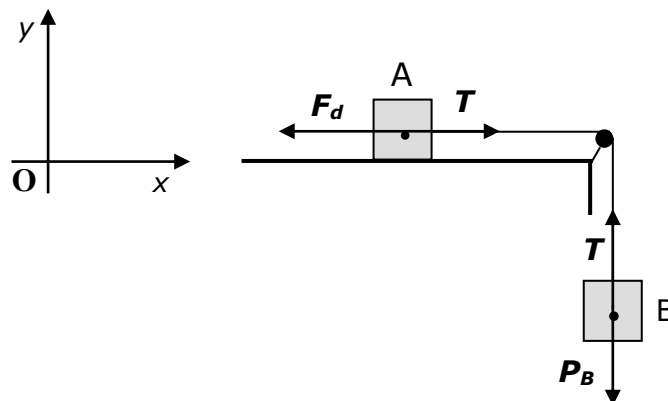
1. il valore di m_B affinché i due corpi si muovano di velocità costante;
2. il valore della tensione del filo nelle ipotesi della domanda precedente?

Considerare i due corpi come punti materiali. Si supponga inoltre la carrucola della figura come un punto materiale privo di massa.



Soluzione

Si scelga il sistema di riferimento mostrato nella figura per il moto dei due corpi. Le forze che intervengono nel moto dei due corpi sono la tensione del filo T la forza d'attrito dinamico F_d e la forza peso P_B .



Se il sistema composto dai due corpi A e B si muove a velocità costante, le equazioni del moto in forma scalare si scrivono nel seguente modo:

$$T - F_d = 0 \quad ; \quad T - P_B = 0.$$

Le altre due forze agenti sul corpo A, la forza peso P_A e la componente normale della reazione vincolare N_A , sono uguali ed opposte e non sono disegnate nella figura perché non intervengono nel moto dei due corpi.

Dalle precedenti equazioni del moto si ricava:

$$T = \mu_d m_A g \quad \Rightarrow \quad m_B = \mu_d m_A = 0,25 \text{ kg}$$

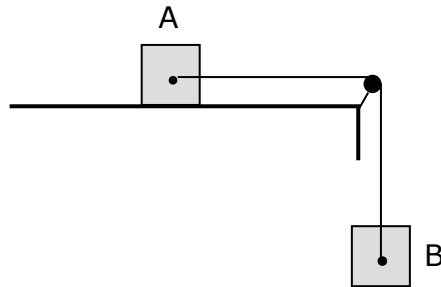
Dal valore di m_B si ricava che $T \approx 2,5$ N.

Problema 3.5

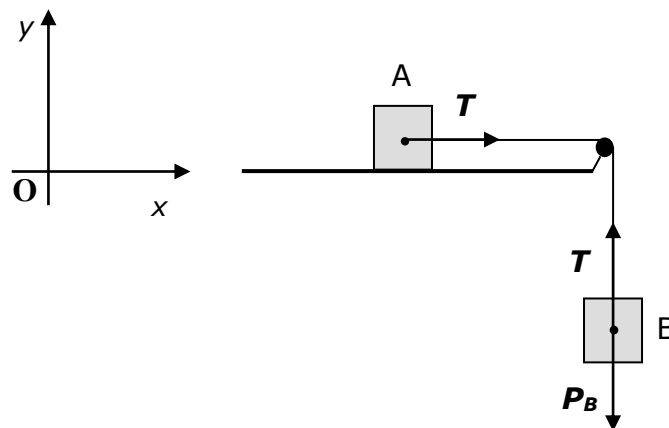
Un corpo B è legato mediante un filo inestensibile e di massa trascurabile ad un secondo corpo A che è appoggiato su di un piano liscio orizzontale. Sapendo che B si muove di moto uniformemente accelerato e che percorre uno spazio $s=0,5$ m in un tempo $\Delta t=1,3$ s, si calcoli:

1. la massa del corpo B sapendo che quella di A è $m_A=5$ kg;
2. la tensione del filo.

Si supponga la carrucola della figura come un punto privo di massa.

**Soluzione**

Si scelga il sistema di riferimento mostrato nella figura per il moto dei due corpi. Le forze che intervengono nel moto dei due corpi sono la tensione del filo $\mathbf{T}$ e la forza peso $\mathbf{P}_B$.



Dall'equazione oraria del moto uniformemente accelerato si ha per il corpo:

$$s = \frac{1}{2} a \Delta t^2 \quad \rightarrow \quad a \approx 0,6 \text{ s.}$$

Le equazioni della dinamica applicate separatamente ai due corpi sono:

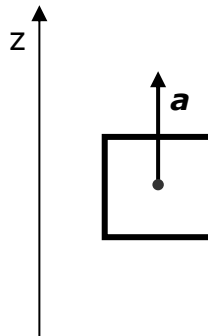
$$\begin{aligned} T &= m_A a \\ T - m_B g &= -m_B a \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si ottengono i valori di $T \approx 3$ N e $m_B \approx 0,3$ kg.

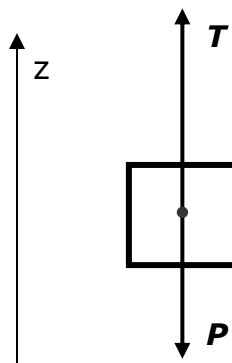
Problema 3.6

Un montacarichi ha una massa $M=600$ kg. Supponendo che alla partenza il motore imprima una accelerazione pari ad $a=0,2$ m/s, si calcoli la tensione del filo sotto queste condizioni dinamiche.

Si supponga l'assenza di attriti e che il cavo del montacarichi sia inestensibile e di massa trascurabile.

**Soluzione**

Il montacarichi nella situazione descritta dal problema non è un sistema di riferimento inerziale. Pertanto, nell'ipotesi di considerare la terra un sistema di riferimento inerziale, ad un osservatore posto sulla terra la situazione delle forze applicate al montacarichi appaiono come mostrato in figura.



Il secondo principio della dinamica si scriverà nel seguente modo:

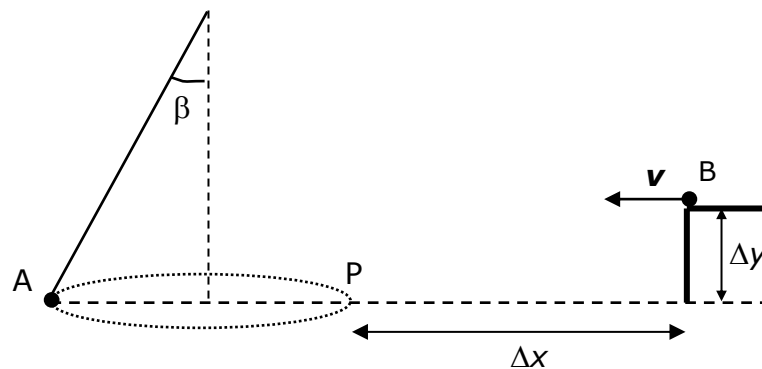
$$T - P = ma$$

da cui si ricava immediatamente il valore della tensione del filo che vale $T \approx 6$ kN.

Problema 3.7

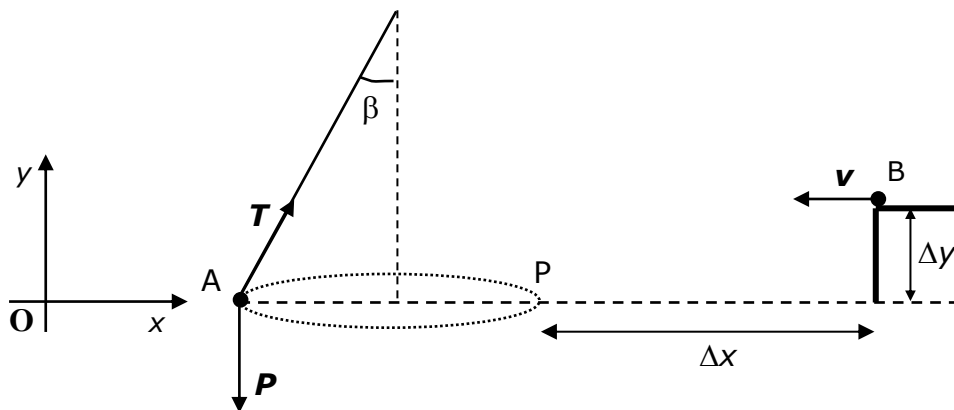
Un pendolo conico è formato da un corpo puntiforme A di massa $m=0,4$ kg legato ad un filo inestensibile e di massa trascurabile lungo $L=5$ m. Con riferimento alla figura, si vuole colpire il corpo A con un secondo corpo puntiforme B lanciato da una distanza $\Delta x=10$ m dal punto più vicino della traiettoria circolare del pendolo conico al punto di lancio di B. Indicando con P il punto di incontro tra i due corpi e sapendo che al momento del lancio di B i due corpi si trovano nel piano della figura, ciascuno nella posizione in essa indicata, si calcoli:

1. La velocità iniziale di B se l'angolo di lancio rispetto all'orizzontale è $\alpha=0$ e l'angolo che forma il filo del pendolo conico è $\beta=30^\circ$;
2. L'altezza Δy da cui il corpo B deve essere lanciato.



Soluzione

Le forze applicate al punto A sono indicate nella figura insieme alla scelta fatta per il sistema di riferimento.



Si scrivano dapprima le equazioni che governano il moto del pendolo conico in base al sistema di riferimento scelto. Si ha:

$$T \sin \beta = m \frac{v^2}{R} \quad ; \quad T \cos \beta = mg$$

dove R è il raggio della traiettoria circolare del pendolo composto.

Dividendo membro a membro le due precedenti equazioni si ottiene:

$$\tan \beta = \frac{v^2}{gL \sin \beta} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gL \sin \beta \tan \beta} \approx 3,8 \text{ m/s,}$$

essendo $R=L\sin\beta$. Nell'istante iniziale i due punti materiali si trovano nelle posizioni indicate nella figura.

Ora, affinché i due corpi si incontrino si deve avere che il punto A deve compiere un mezzo giro impiegando un tempo:

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi L \sin \beta}{v} \approx 2,1 \text{ s} ,$$

dove si è posto $v=\omega R=\omega L\sin\beta$.

Questo tempo deve essere anche il tempo di volo del corpo B il cui moto è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\Delta x = v_{0B} T \quad ; \quad \Delta y = -\frac{1}{2} g T^2 .$$

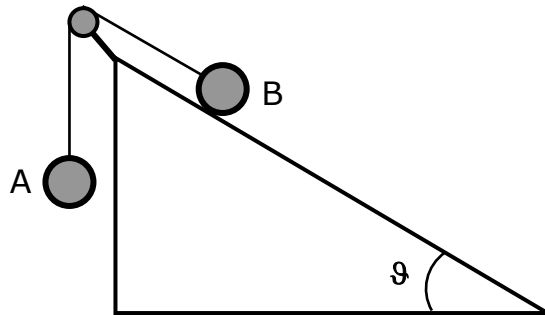
Dalla soluzione delle due precedenti equazioni si ottiene $v_{0B} \approx 4,8 \text{ m/}$ e $\Delta y \approx 21,4 \text{ m}$.

Problema 3.8

Un corpo B di massa $m_B=6$ kg è legato mediante un filo inestensibile e di massa trascurabile ad un secondo corpo A di massa $m_A=2$ kg, come è indicato nella figura. Nell'ipotesi in cui il corpo B si muova lungo un piano inclinato liscio di angolo $\vartheta=55^\circ$ rispetto all'orizzontale, si calcoli:

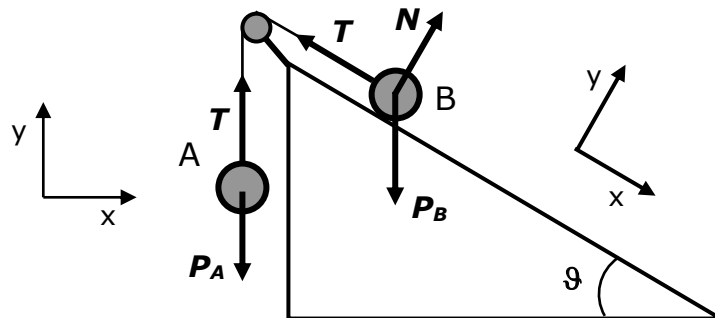
1. il valore della tensione del filo;
2. la velocità in modulo, direzione e verso di ciascun corpo, dopo un tempo $t=2$ s da un istante iniziale per il quale le velocità dei due corpi è nulla.

Si supponga la carrucola della figura come un punto privo di massa.



Soluzione

La situazione dinamica e i sistemi di riferimento scelti per la risoluzione del problema sono mostrati nella figura.



Il testo del problema non chiarisce in che verso si muovono i due corpi. Rispetto ai due sistemi di riferimento indicati nella figura supponiamo che il corpo A salga e quindi il corpo B deve scendere lungo il piano inclinato. Pertanto, con riferimento alla figura, il 2° principio della dinamica applicato a ciascuno dei due corpi porta alle seguenti tre equazioni scalari:

corpo A: $T - m_A g = m_A a$

corpo B: lungo x $m_B g \sin \vartheta - T = m_B a$

lungo y $N = m_B g \cos \vartheta$

Essendo il filo inestensibile e la carrucola di massa nulla, le tensioni del filo sui due corpi sono uguali ed entrambi possiedono la stessa accelerazione. Sommando membro a membro l'equazione del moto del corpo A con la corrispondente componente lungo x del corpo B si ha:

$$m_B g \sin \vartheta - m_A g = (m_A + m_B) a$$

da cui

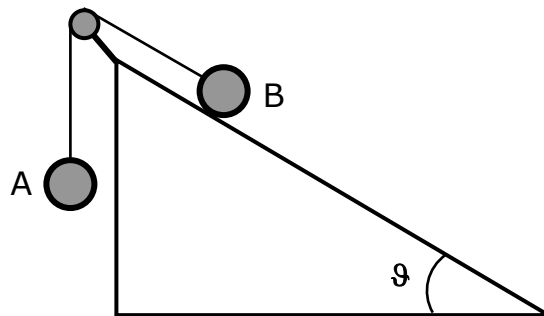
$$a = \frac{g(m_B \sin \vartheta - m_A)}{m_A + m_B} \approx 3,6 \text{ m/s}^2$$

Essendo l'accelerazione maggiore di zero, il corpo A sale ed il corpo B scende lungo il piano inclinato. Conosciuto il valore della accelerazione si trova subito il valore della tensione del filo che risulta $T \approx 27 \text{ N}$.

La velocità dei due corpi dopo 2 s dal tempo iniziale è $v=at \approx 7,2 \text{ m/s}$.

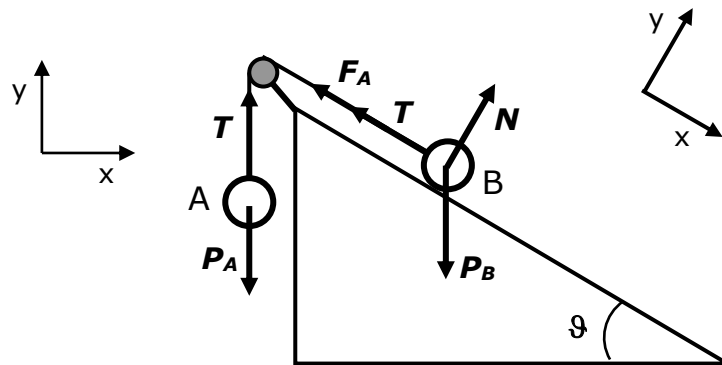
Problema 3.9

Si risolva il problema precedente nel caso in cui il piano inclinato sia scabro e che il coefficiente di attrito dinamico valga $\mu_d = 0,2$.



Soluzione

Questa volta la situazione dinamica deve tenere presente della esistenza di una forza d'attrito $\mathbf{F}_A$ tra il corpo B ed il piano inclinato. Come nel precedente problema i sistemi di riferimento scelti per la risoluzione del problema sono mostrati nella figura.



Con gli stessi argomenti esposti nella soluzione del precedente problema, Le componenti delle equazioni della dinamica diventano:

corpo A: $T - m_A g = m_A a$

corpo B: lungo x $m_B g \sin \vartheta - T - F_A = m_B a$

lungo y $N = m_B g \cos \vartheta$

Anche in questo caso, essendo il filo inestensibile e la carrucola priva di massa, la tensione è in ogni punto del filo la stessa ed entrambi i corpi possiedono la stessa accelerazione. Ricordando che la forza d'attrito si scrive come:

$$F_A = -\mu_d N = -\mu_d m_B g \cos \vartheta.$$

si sommi membro a membro l'equazione del moto del corpo A con quella corrispondente del corpo B lungo x. Si ottiene:

$$a = \frac{g(m_B \sin \vartheta - m_A - \mu_d m_B \cos \vartheta)}{m_A + m_B} \approx 2,7 \text{ m/s}$$

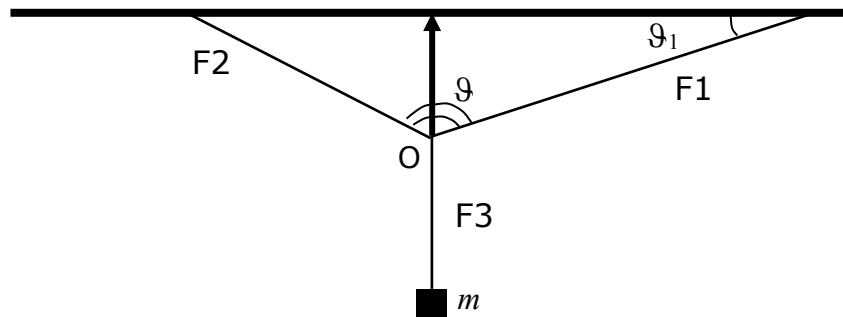
Anche in questo caso, essendo l'accelerazione una quantità positiva, il corpo A sale ed il corpo B scende lungo il piano inclinato. Conosciuto il valore della accelerazione si trova subito quello della tensione del filo che risulta $T \approx 25 \text{ N}$.

La velocità dei due corpi dopo 2 s dal tempo iniziale è $v=at \approx 5,4 \text{ m/s}$.

Problema 3.10

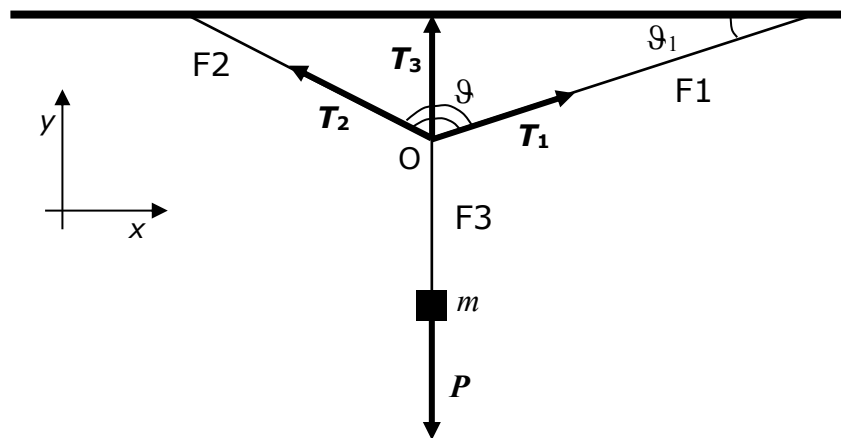
Si vuole appendere un corpo di massa $m=30$ kg nella posizione indicata nella figura in condizioni di equilibrio. Si conosce che il filo F1 ha un carico di rottura pari a $T_1=500$ N e che l'angolo ϑ_1 deve essere uguale a 10° . Considerando i fili inestensibili e privi di massa, si calcolino:

1. il valore dell'angolo ϑ tra i due fili F1 ed F2, discutendo se il valore di ϑ trovato rappresenta il valore minimo o massimo compatibile con il carico di rottura del filo F1;
2. il valore della tensione T_2 del filo F2;
3. il valore della tensione T_3 del filo F3.



Soluzione

Le forze agenti sul corpo di massa m sono quelle riportate in figura assieme al sistema di riferimento scelto.



Come si vede dalla figura, al corpo sono applicate la sua forza peso $\mathbf{P}$ e le tensioni dei due fili $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$. Essendo in situazioni di equilibrio, la somma vettoriale delle due tensioni $\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ deve essere bilanciata dalla forza peso.

Si ha quindi che la risultante delle forze applicate nel punto O deve soddisfare la condizione:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 \quad (1)$$

e, per il 3° principio della dinamica, deve porsi $\vec{P} = m\vec{g} = -\vec{T}_3$.

Le componenti x ed y delle forze che compaiono nella equazione (1) sono:

$$\begin{aligned} T_1 \cos \vartheta_1 &= T_2 \cos \vartheta_2 \\ T_1 \sin \vartheta_1 + T_2 \sin \vartheta_2 &= -T_3 = mg \end{aligned} \quad (2)$$

dove ϑ_2 è l'analogo dell'angolo ϑ_1 per il filo F2. Ora, esplicitando l'espressione di T_2 dalla prima delle equazioni (2) e sostituendola nella seconda equazione, si ottiene:

$$\tan \vartheta_2 = \frac{mg - T_1 \sin \vartheta_1}{T_1 \cos \vartheta_1} \quad \rightarrow \quad \vartheta_2 \approx 22,8^\circ. \quad (3)$$

Il valore numerico di ϑ_2 si è calcolato avendo usato per T_1 il valore corrispondente al carico di rottura del filo F1. Quindi l'angolo tra i fili F1 e F2 risulta pari a $\vartheta=147,2^\circ$. Questo rappresenta il più grande valore di ϑ compatibile con il carico di rottura del filo F1. Infatti dalla (3) si ha:

$$T_1 = \frac{mg}{\tan \vartheta_2 \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_1}$$

Da questa espressione di T_1 si osserva che, dovendosi mantenere costante il valore di $\vartheta_1=10^\circ$, come indicato dal testo del problema, il valore di T_1 diminuisce con l'aumentare di ϑ_2 , cioè con il conseguente diminuire di ϑ . Di conseguenza il valore di ϑ qui trovato è il massimo valore compatibile con il carico di rottura del filo F1 perché una diminuzione del valore di ϑ_2 , comporterebbe un aumento di T_1 . Si ricordi che ϑ_2 è stato calcolato usando per T_1 il valore corrispondente al carico di rottura.

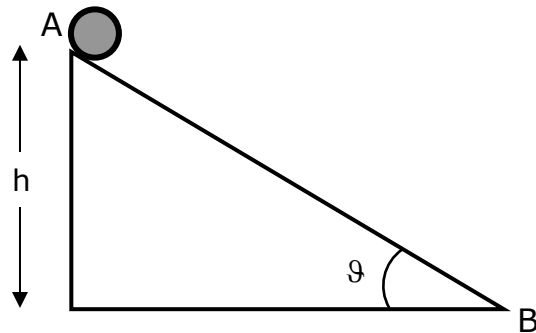
Il valore di T_2 si ricava dalla prima delle (2). Si ha $T_2 \approx 530$ N. Inoltre, essendo T_3 in modulo uguale a $P=mg$, si ottiene $T_3 \approx 290$ N.

Problema 3.11

Un blocco di legno, assimilabile ad un punto materiale di massa $m=1$ kg, è sul bordo di un tavolo scabro lungo $AB=77,3$ cm, inizialmente in posizione orizzontale. Si solleva ora il tavolo alzando solo una delle sue estremità. Raggiunta una altezza rispetto al piano orizzontale pari ad $h=20$ cm, si osserva che il blocco inizia a muoversi e percorre tutta la lunghezza del tavolo in un tempo $\Delta t=1,6$ s.

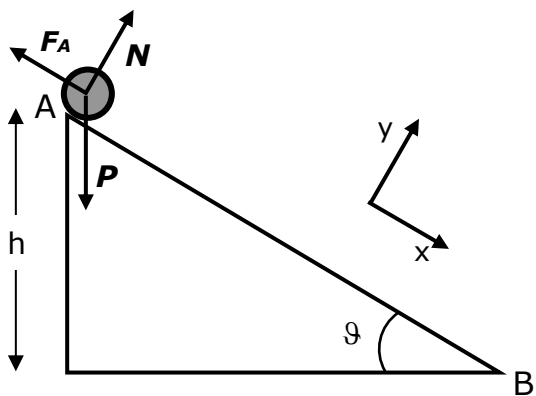
Si determini:

1. il coefficiente di attrito statico μ_s ;
2. il coefficiente di attrito dinamico μ_d ;
3. il valore dell'angolo ϑ per il quale la velocità di discesa del blocco è costante;
4. la forza perpendicolare al piano inclinato con quale forza si dovrebbe agire per mantenere fermo il blocco se l'angolo del piano inclinato aumentasse fino a $\vartheta_1=30^\circ$.



Soluzione

Le forze che agiscono sul corpo ed il sistema di riferimento scelto per la descrizione del moto sono riportate nella figura. La forza d'attrito tra il corpo e la superficie del tavolo è sempre presente. Solo che nel caso statico essa è proporzionale alla componente normale della reazione vincolare tramite il coefficiente di attrito statico, in quello dinamico al coefficiente di attrito dinamico.



Iniziamo con l'analizzare il caso statico per il quale si possono scrivere le seguenti equazioni lungo gli assi del sistema di riferimento scelto:

$$P_y = mg \cos \vartheta = N \quad ; \quad P_x = mg \sin \vartheta = F_A \quad (1)$$

Ricordando che il moto del corpo avviene non appena la componente lungo x della forza peso uguaglia il modulo della forza d'attrito $F_A = \mu_s N = \mu_s mg \cos \vartheta$, si ricava la ben nota relazione:

$$\tan \vartheta = \mu_s.$$

Dalla figura si ha $\vartheta = \sin^{-1}[h/AB] \approx 15^\circ$, da cui $\mu_s \approx 0,27$.

L'angolo ϑ trovato è l'angolo limite per il quale il blocco inizia a muoversi. Allora, lungo la direzione di discesa, è valida la seguente equazione del moto:

$$mg \sin \vartheta - \mu_d mg \cos \vartheta = ma$$

In questa equazione si hanno due incognite: il coefficiente di attrito dinamico μ_d e l'accelerazione a . Applicando le equazioni del moto uniformemente accelerato lungo il tratto AB si ottiene il valore della accelerazione di discesa del corpo:

$$a = \frac{2AB}{T^2} \approx 0,6 \text{ m/s}^2.$$

Sostituendo nell'equazione del moto si ricava:

$$\mu_d = \frac{g \sin \vartheta - a}{g \cos \vartheta} \approx 0,2$$

Nel caso in cui la velocità di discesa fosse costante si deve avere $a=0$, cioè deve valere la relazione

$$\mu_d mg \cos \alpha = mg \sin \alpha$$

con α l'angolo per il quale si verifica la condizione richiesta dal problema. Si ottiene $\alpha \approx 11,2^\circ$.

Per rispondere infine all'ultimo quesito posto dal problema, si scriva la condizione di equilibrio del blocco per un valore dell'angolo del piano inclinato uguale a $\beta = \vartheta_1 = 30^\circ$ usando la seconda delle equazioni (1):

$$mg \sin \beta = \mu_s (mg \cos \beta + F)$$

con F , la forza addizionale perpendicolare al piano inclinato indicata nella domanda posta dal problema, ha lo stesso verso della componente normale al piano inclinato della forza peso. In questo modo la forza F aumenta il valore della componente normale N della reazione vincolare al fine di tenere fermo il blocco. Si ha cioè $N = mg \cos \beta + F$.

Si calcola facilmente il valore di F deve essere uguale a:

$$F = mg \frac{\sin \beta - \mu_s \cos \beta}{\mu_s} \approx 9,6 \text{ N}.$$

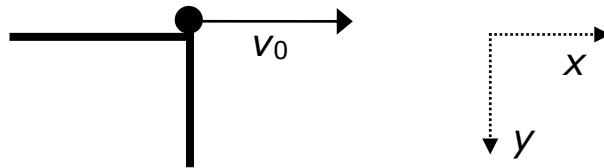
Problema 3.12 (Problema d'esame 10 punti)

Un punto materiale di massa $m=2$ kg lascia un piano orizzontale cadendo nel vuoto con una velocità $v_0=5$ m/s diretta orizzontalmente. Nella caduta il punto materiale è sottoposto non solo alla sua forza peso ma anche all'azione di una forza di attrito viscoso del tipo $\vec{F}_v = -\beta\vec{v}$, con $\beta=0,5$ kg/s un fattore costante.

Si determini:

1. la velocità in modulo direzione e verso del punto materiale dopo un tempo $t_1=2$ s dal momento in cui esso lascia il piano orizzontale; (6 punti)
2. il valore limite della componente della velocità lungo l'asse x , v_x . (2 punti)
3. il valore limite della componente della velocità lungo l'asse y , v_y . (2 punti)

Nota: si presti attenzione alla natura vettoriale della forza di attrito viscoso che ha sempre la stessa direzione del vettore velocità del punto materiale.

**Soluzione:**

L'equazione del moto del corpo durante la caduta è la seguente:

$$m\vec{g} + \vec{F}_v = m\vec{a},$$

che, nelle sue componenti cartesiane diviene:

$$-\beta v_x = m \frac{dv_x}{dt} \quad ; \quad mg - \beta v_y = m \frac{dv_y}{dt}.$$

Le condizioni iniziali per la velocità iniziale a $t=0$ sono $v_{0x}=v_0$ e $v_{0y}=0$. Pertanto si ha:

$$v_x(t) = v_{0x} \exp(-\beta t / m) \quad ; \quad v_y(t) = \frac{mg}{\beta} [1 - \exp(-\beta t / m)]. \quad (1)$$

Dopo un tempo $t_1=2$ s si ha $v_x(t_1) \approx 3$ m/ e $v_y(t_1) \approx 15,4$ m/s. Entrambe le velocità sono dirette come gli assi di riferimento scelti. La velocità in modulo del punto materiale è uguale a $v(t_1) \approx 15,7$ m/s e la sua direzione rispetto all'asse delle ascisse è definita dal valore del seguente angolo:

$$\vartheta = \tan^{-1}[v_y(t_1) / v_x(t_1)] \approx 79^\circ.$$

Dalle equazioni (1) si ha che le velocità limite lungo gli assi coordinati sono uguali a:

$$v_x(t \rightarrow \infty) = 0 \quad ; \quad v_y(t \rightarrow \infty) = \frac{mg}{\beta} \approx 39,2 \text{ m/s}.$$