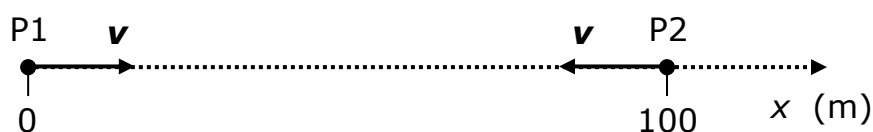


1. PROBLEMI DI CINEMATICA IN UNA DIMENSIONE

Problema 1.1

Due punti materiali distano tra loro $d=100$ m. Essi si muovono lungo una traiettoria rettilinea uno contro l'altro alla stessa velocità $v=2$ m/s. Trovare:

1. il punto di incontro se i due punti partono allo stesso tempo t con velocità iniziale nulla;
2. il punto di incontro se il punto P2 parte con un tempo $\Delta t=10$ s in ritardo rispetto a P1.
3. nelle due situazioni sopra considerate, dopo quanto tempo i due punti si incontrano?



Soluzione:

Il moto dei due punti è rettilineo uniforme. Si può allora scrivere:

$$\begin{aligned} \text{per P1} &\rightarrow x_{P1} = vt \\ \text{per P2} &\rightarrow x_{P2} = x_0 - v(t - t_0), \end{aligned}$$

dove $x_0=100$ m ed il tempo t_0 rappresenta il ritardo con cui P2 parte rispetto a P1. Al tempo $t=0$ è come se P2 fosse distante $x_0 + vt_0$ da P1. Quando i due punti si incontrano sarà passato lo stesso tempo t dall'inizio del moto e le loro coordinate saranno uguali, cioè $x_{P1} = x_{P2}$. Per calcolare l'istante temporale in cui i due punti si incontreranno si fa uso della seconda delle due condizioni precedentemente indicate. Se invece, come chiede il problema, si vuole sapere la coordinata del punto di incontro si deve usarle entrambe. Allora si ha:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v} \\ t &= \frac{(x_0 - x + vt_0)}{v} \end{aligned} ;$$

da cui si ricava con qualche passaggio algebrico:

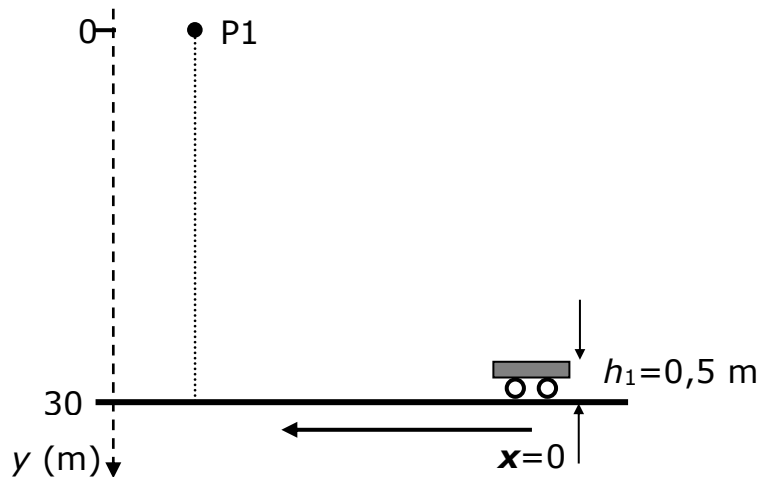
$$x = \frac{1}{2}(x_0 + vt_0).$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene: $x_{1,P1} = 50$ m per $t_0=0$ e $x_{2,P2}=60$ m per $t_0=10$ s. L'istante temporale in cui i due punti si incontrano riferito al moto del punto P1 rispetto al quale si misura il tempo (all'istante $t=0$ la coordinata x_{P1} è nulla in entrambe le situazioni cinematiche considerate dal problema) si trova nei due casi sostituendo x_1 e x_2 in una delle due precedenti equazioni, ottenendo $t_1=25$ s e $t_2=30$ s.

Problema 1.2

Un punto materiale P1 è lasciato cadere con velocità iniziale nulla da una altezza $h=30$ m dal suolo. Si vuole che P1 cada sul pianale di un carrello posto alla distanza $d=10$ m dalla verticale di caduta. Determinare la velocità costante che bisogna fornire al carrello affinché questa condizione sia soddisfatta se il pianale è ad una altezza $h_1=0,5$ m dal suolo e se carrello e punto P1 iniziano a muoversi contemporaneamente.

Con il valore della velocità del carrello trovata in queste condizioni, si determinino le condizioni del moto per il punto P1 nel caso in cui esso inizi a muoversi dopo un tempo $t_0=0,2$ s dalla partenza del carrello. Si consideri il carrello come un punto materiale.



Soluzione:

Il moto del punto P1 è un moto rettilineo uniformemente accelerato e quello del carrello è rettilineo uniforme.

Nella prima parte del problema, entrambi i corpi hanno velocità iniziale nulla ed i due moti risultano contemporanei. In queste condizioni, il punto P1 ed il carrello si incontrano allo stesso tempo $t=t_1$. Con la scelta del sistema di riferimento mostrata in figura, le equazioni del moto per il punto ed il carrello si scrivono rispettivamente come:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad ; \quad x = vt. \quad (1)$$

Al tempo t_1 , il punto P1 incontra il pianale del carrello. Allora la coordinata del punto materiale sarà $y=h-h_1$, e quella del carrello $x=d$. Le due precedenti equazioni diventano:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}} \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{d}{v_c}.$$

Allora la velocità del carrello v_c deve valere:

$$v_c = \frac{d}{\sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}}} \approx 4,1 \text{ m/s}.$$

Nel caso in cui il punto P1 si muove dopo un tempo $t_0=0,2$ s rispetto alla partenza del carrello, bisogna fornirgli una velocità iniziale affinché possa percorrere il tratto $y=h-h_1$ in un tempo minore di quello trovato in precedenza. Le equazioni (1) si modificano nel seguente modo:

$$y = v_i t + \frac{1}{2} g t^2 \quad ; \quad x = v_C (t + t_0) \quad (2)$$

La scelta fatta nelle equazioni (2) dell'inizio dei tempi è di riferirlo all'istante in cui parte il punto P1. Di conseguenza, in questa ipotesi, il carrello si trova ad una distanza $d - vt_0$ dalla verticale di caduta del punto P1. Dovendo essere la velocità del carrello sempre uguale a v_C , il tempo che esso impiega a raggiungere la verticale di caduta vale:

$$t_2 = \frac{d - v t_0}{v_C} \approx 2,24 \text{ s.}$$

Questo deve allora essere anche il nuovo tempo di caduta del punto P1. Essendo il tempo di caduta t_2 minore del tempo t_1 quando i due corpi partono allo stesso istante, si deve fornire a P1 una velocità iniziale di P1 diretta verso il basso ed uguale a:

$$v_i = \frac{2(h - h_1) - g t_2^2}{2 t_2} \approx 2,2 \text{ m/s.}$$

Uguale risultato si avrebbe se si sceglie di riferire l'origine dei tempi all'istante iniziale in cui il carrello si muove. In questo caso le equazioni di P1 e del carrello si scrivono come:

$$y = v_i (t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \quad ; \quad x = v t .$$

In questo caso il tempo necessario per il carrello per giungere sulla verticale di P1 è sempre uguale a $t_1 = d/v_C$. Ponendo $t = t_1$, dalla equazione del moto di P1 si trova la velocità iniziale:

$$v_i = \frac{2(h - h_1) - g(t_1 - t_0)^2}{2(t_1 - t_0)} \approx 2,2 \text{ m/s.}$$

Nel caso in cui si fosse scelto l'asse delle ordinate rivolto verso l'alto e quello delle ascisse rivolto verso destra con l'origine in comune, le equazioni (1) e (2) diventano:

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad ; \quad x = d - v t$$

$$y = h - v_i t - \frac{1}{2} g t^2 \quad ; \quad x = d - v(t + t_0) .$$

Problema 1.3

Si lasciano cadere da una altezza h , con velocità iniziale nulla, due corpi distanziati l'uno dall'altro di un tempo $\Delta t = 1$ s. Assumendo i due corpi come due punti materiali, si calcoli il tempo t_d dalla partenza del primo corpo, per il quale la distanza tra di loro è diventata $\Delta x = 15$ m.

Soluzione:

Assumendo l'asse delle ordinate orientato verso il basso, le equazioni del moto per i due punti materiali si scrivono:

$$x_1 = \frac{1}{2} g t^2$$

$$x_2 = \frac{1}{2} g (t - \Delta t)^2$$

Il problema vuole conoscere il tempo t_d per il quale $\Delta x = x_1 - x_2 = 15$ m. Allora dalle due precedenti equazioni si ha:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{1}{2} g [t_d^2 - (t_d - \Delta t)^2] \rightarrow t_d = \frac{\Delta x}{g \Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \approx 2 \text{ s}$$

Problema 1.4

Un punto materiale, partendo da fermo, percorre un tratto rettilineo lungo $L = 100$ m nel tempo $T = 10$ s nel seguente modo: nel primo tratto di lunghezza $d_1 = 15$ m esso si muove con accelerazione costante, mentre nel secondo tratto di lunghezza $L - d_1$ si muove con velocità costante uguale a quella raggiunta alla fine del primo tratto.

Si determinino:

1. il tempo impiegato per percorrere il tratto d_1 ;
2. il valore della accelerazione costante nel tratto d_1 ;
3. il valore della velocità costante del punto nel tratto $L - d_1$.

Soluzione:

Partendo il punto con velocità nulla, alla fine del primo tratto le equazioni del moto sono:

$$v_1 = a t_1 \quad ; \quad d_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 ,$$

dove t_1 e v_1 sono rispettivamente il tempo impiegato a percorrere la distanza d_1 e la velocità raggiunta dal punto materiale. Dalle due equazioni si ricava subito:

$$v_1 = 2d_1/t_1 .$$

La distanza $L - d_1$ è invece percorsa alla velocità costante v_1 e l'equazione oraria del moto rettilineo uniforme è:

$$L - d_1 = v_1 (T - t_1) = \frac{2d_1}{t_1} (T - t_1) .$$

Da questa equazione si ricava:

$$t_1 = \frac{2d_1 T}{L + d_1} \approx 2,6 \text{ s} .$$

Sostituendo il valore di t_1 nelle espressioni precedenti si ottiene $a \approx 4,4 \text{ m/s}^2$ e $v_1 \approx 11,5 \text{ m/s}$.

Problema 1.5

Un punto materiale A si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v_A=18$ m/s. Nell'istante in cui il punto A supera un secondo punto materiale B, inizialmente fermo, che si mette in movimento con una accelerazione costante $a=4,6$ m/s².

Si determini:

1. il tempo necessario al punto B per raggiungere il punto A;
2. lo spazio percorso dal punto A dopo aver sorpassato il punto B e prima di essere da questo di nuovo raggiunto;
3. la velocità del punto B quando raggiunge il punto A.

Soluzione:

Assumendo uguali a zero la coordinata ed il tempo per il quale il punto A supera il punto B, il moto rettilineo uniforme del punto A e quello uniformemente accelerato del punto B sono descritti dalle due seguenti equazioni:

$$x_A = v_A t \quad ; \quad x_B = \frac{1}{2} a t^2 \quad ; \quad v_B = a t .$$

La condizione per la quale si ha che il punto B raggiunge il punto A si scrive come:

$$x_A = x_B \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{2v_A}{a} \approx 7,8 \text{ s}$$

Lo spazio percorso dal punto A prima di essere raggiunto da B è $x_A \approx 141$ m.

Infine la velocità del punto B nel momento in cui supera il punto A è $v_B \approx 36$ m/s.

Problema 1.6

Un punto materiale A si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v_0=50$ m/s. Quando il punto A si trova in una posizione iniziale $x_0=0$, viene sottoposto ad una decelerazione pari a 2 m/s².

Si calcoli:

1. la distanza massima percorsa dal punto materiale A dalla posizione $x_0=0$;
2. l'istante t_1 in cui il punto materiale A si ferma;
3. l'istante t_2 in cui il punto materiale A passa di nuovo per la posizione iniziale $x_0=0$;
4. la velocità del punto materiale A all'istante t_2 .

Soluzione:

Dalla posizione di coordinata $x_0=0$, il moto del punto A è un moto rettilineo uniformemente decelerato per il quale valgono le seguenti equazioni del moto:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \quad ; \quad v(t) = v_0 - a t , \quad (1)$$

con $|a| = 2$ m/s². Il valore massimo della coordinata x si ottiene quando $v(t_1) = 0$.

Da questa condizione si ottiene $t_1 = v_0/a = 25$ s. Sostituendo l'espressione di t_1 nell'equazione oraria (1) si ottiene:

$$x_{MAX} = \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} = 625 \text{ m}$$

Il tempo t_2 in cui il punto materiale ritorna nella posizione iniziale di coordinata $x_0=0$ si trova dalla equazione oraria ponendo:

$$x(t_2) = x_0 = 0 = v_0 t - \frac{1}{2} a t_2^2 \quad \rightarrow \quad t_{2,1} = 0 \text{ e } t_{2,2} = 2 \frac{v_0}{a} = 2t_1 = 50 \text{ s.}$$

Il valore $t_{2,1}$ è quello per cui all'inizio si ha $x_0=0$. Una volta raggiunto il valore massimo $x(t_1)$, il punto materiale torna verso la posizione di coordinata $x_0=0$ con un moto questa volta uniformemente accelerato. Pertanto il valore della velocità del punto materiale quando ritorna nella posizione iniziale $x_0=0$ si trova dalla equazione (1) per $v(t)$ del moto uniformemente accelerato sostituendo in essa il valore di t_2 appena trovato. Si ha:

$$v(t_2) = v_0 - a t_2 = v_0 - 2v_0 = -v_0 = -50 \text{ m/s,}$$

cioè uguale alla velocità che il punto aveva al tempo $t=0$.

Si noti che la soluzione di questo problema è del tutto analoga a quella del lancio verticale di un grave con velocità iniziale v_0 . Anche in questo caso l'accelerazione di gravità si comporta come una decelerazione fino a quando il grave non raggiunge la quota massima, per poi essere una accelerazione per il conseguente moto di caduta.

Problema 1.7

Un punto materiale A viene lasciato libero di cadere lungo la verticale con velocità iniziale nulla da una quota $h=100$ m rispetto al suolo. Dopo un tempo $t_0=2$ s si lancia dalla stessa posizione iniziale da cui è partito il punto A, un secondo punto materiale B e si vuole che esso raggiunga il punto A ad una quota $y=10$ m dal suolo. Si determinino le condizioni del moto di B affinché questa situazione si possa verificare. Si calcolino in particolare la velocità iniziale del punto B e le velocità dei due punti quando si trovano alla quota $y=10$ m.

Soluzione:

Per soddisfare le condizioni dettate dal problema, il punto B deve, come il punto A, muoversi di moto uniformemente accelerato ma, a differenza di A, deve avere una velocità iniziale v_0 non nulla e diretta verso il basso. Prendendo come sistema di riferimento un asse verticale rivolto verso il basso con l'origine nel punto di partenza comune, le equazioni del moto per i due punti materiali si scrivono come:

$$y_A = \frac{1}{2} g t^2 \quad ; \quad y_B = v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2.$$

Prima di proseguire conviene verificare che lo spazio percorso dal punto A dopo un tempo pari a t_0 , cioè prima della partenza del punto B, sia minore di $y=90$ m. Dalla prima delle precedenti equazioni si trova $y_A(t_0) \approx 19,6$ m.

Possiamo quindi proseguire nella soluzione del problema calcolando il tempo t_A necessario al punto A per percorrere lo spazio di 90 m. Utilizzando l'equazione oraria del punto A, si ricava $t_A \approx 4,3$ s. La velocità v_0 si ottiene dalla equazione del moto del punto B ponendo in essa $y_B=90$ m e per t il valore t_A appena calcolato. Si ha:

$$v_0 = \frac{2y_B - g(t_A - t_0)^2}{2(t_A - t_0)} \approx 27,8 \text{ m/s,}$$

che corrisponde a circa 102 km/h. Le velocità dei due punti per $y=90$ m sono uguali a:

$$v_A = gt_A \approx 42,2 \text{ m/s e } v_B = v_0 + g(t_A - t_0) \approx 50,9 \text{ m/s.}$$

Problema 1.8

Un punto materiale A viene lanciato da terra verso l'alto lungo una traiettoria verticale rispetto al terreno con una velocità iniziale $v_0=20$ m/s. Dopo un tempo $t_0=3$ s, un secondo punto materiale B viene lanciato da terra verso l'alto con la stessa velocità iniziale la traiettoria percorsa dal punto A.

Determinare:

1. le coordinate del punto di incontro tra i due punti materiali discutendo il risultato ottenuto;
2. il tempo trascorso dal lancio del punto A al momento di incontro tra i due punti.

Soluzione:

Si verifichi dapprima che il tempo t_0 , tempo che intercorre tra il lancio del punto A e quello del punto B, sia inferiore al tempo necessario al punto A per raggiungere la massima quota e tornare nella posizione di partenza. Le equazioni del moto per il punto A sono:

$$v_A(t) = v_0 - gt \quad ; \quad y_A(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

dove il sistema di riferimento è un asse verticale rispetto alla terra orientato dal basso verso l'alto. La quota massima raggiunta dal punto A si trova imponendo $v_A(t_M)=0$ e quindi il tempo t_M impiegato per raggiungerla vale:

$$t_M = \frac{v_0}{g} \approx 2 \text{ s.}$$

Per questo valore del tempo, la quota massima raggiunta vale $y_M \approx 20,4$ m. E' ben noto che il tempo impiegato dal punto A per tornare a terra, una volta raggiunta la quota massima, è uguale proprio a t_M . Quindi il tempo totale di andata e ritorno sarà $t_T=4$ s. Il punto B incontrerà A quando esso sta tornando verso terra. Da quanto detto le equazioni orarie dei due punti si scrivono:

$$y_A = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad ; \quad y_B = v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2.$$

Nell'istante in cui i due punti si incontrano le loro coordinate y saranno le stesse. Si ha:

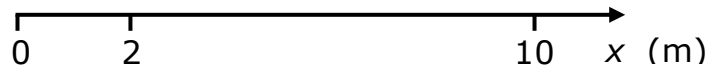
$$t = \frac{2v_0 + gt_0}{2g} \approx 3,5 \text{ s.}$$

Questo risultato indica il tempo trascorso dal lancio del punto A al momento del suo incontro con il punto B. La coordinata di incontro si ricava dalla equazione oraria di uno dei due punti sostituendo per il tempo il valore ora calcolato. Si ottiene $y_A = y_B \approx 9,4$ m.

Problema 1.9

Un punto materiale A, partendo da fermo, percorre una distanza $d_1=2$ m con una accelerazione costante di $0,5 \text{ m/s}^2$. A questo punto il punto A deve annullare la sua velocità in uno spazio pari a $d_2=8$ m. Determinare:

1. la decelerazione da applicare al punto A
2. il tempo che impiega per fermarsi.

**Soluzione:**

Si indichi con $a_1=0,5 \text{ m/s}^2$ l'accelerazione del punto A nel primo tratto $d_1=2$ m e con a_2 la decelerazione che deve avere A per fermarsi alla fine del secondo tratto $d_2=8$ m. Il valore della velocità v_1 alla fine del tratto d_1 si trova tramite le equazioni:

$$v_1 = a_1 t_1 \quad ; \quad d_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2,$$

dove t_1 è il tempo che impiega il punto A per percorrere il tratto d_1 . Risolvendo il sistema tra le due equazioni si ottiene:

$$v_1 = \sqrt{2a_1 d_1} \approx 1,4 \text{ m/s}.$$

Possiamo ora scrivere le equazioni del moto nel secondo tratto d_2 prendendo per comodità come inizio dei tempi quello in cui si applica la decelerazione $-a_2$ nel punto di coordinata $x_1=d_1$:

$$v(t) = v_1 - a_2 t \quad ; \quad d(t) = v_1 t - \frac{1}{2} a_2 t^2,$$

dove t_2 è il tempo necessario ad A per fermarsi. Alla fine del tratto d_2 la velocità finale del punto deve essere nulla, per cui si ha:

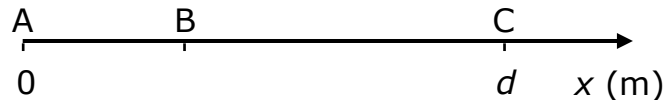
$$v(t_2) = 0 = v_1 - a_2 t_2 \quad ; \quad d(t_2) = v_1 t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2$$

Dalla risoluzione del sistema di equazioni si ottiene:

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} \approx 11,3 \text{ s} \quad ; \quad |a_2| = \frac{v_1^2}{2d_2} \approx 0,13 \text{ m/s}^2.$$

Problema 1.10

Un punto materiale parte con velocità iniziale nulla e percorre un tratto rettilineo AC di lunghezza d . Facendo riferimento alla figura, il tratto AB è percorso di moto uniformemente accelerato con accelerazione a_1 in un tempo t_1 . Il secondo tratto BC è invece percorso dal punto materiale con moto uniformemente decelerato con accelerazione a_2 che gli consente di avere in C una velocità nulla. Indicando con t_2 il tempo impiegato per percorrere il tratto BC, si trovino le relazioni generali che intercorrono tra i tempi di percorrenza t_1 e t_2 , quello totale $t=t_1+t_2$ ed i parametri del moto a_1 , a_2 e d .

**Soluzione:**

Seguendo le indicazioni fornite dal testo del problema, t_1 sarà il tempo necessario al punto materiale per percorrere il tratto AB con accelerazione a_1 , e t_2 quello per percorrere il tratto BC con decelerazione a_2 . Si indichi ora con x il tratto AB e con y il tratto BC in modo tale che si abbia $d=x+y$. Le equazioni del moto nel tratto AB sono:

$$v_1 = a_1 t_1 \quad ; \quad x = \frac{1}{2} a_1 t_1^2, \quad (1)$$

dove con v_1 si è indicata la velocità nel punto B. Per il tratto BC si può scrivere:

$$v_2 = 0 = v_1 - a_2 t_2 \quad ; \quad y = v_1 t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2, \quad (2)$$

dove con $v_2=0$ si è indicata la velocità nulla nel punto finale C della traiettoria. Dalle precedenti equazioni (1) e (2) si ricava subito che:

$$v_1 = a_1 t_1 = a_2 t_2. \quad (3)$$

La seconda equazione delle (2) può allora riscriversi come:

$$y = a_2 t_2^2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2.$$

Essendo $d=x+y$ si ha:

$$d = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2. \quad (4)$$

Dalla equazione (3) si ha $t_1 = \frac{a_2}{a_1} t_2$ che sostituito nella equazione (4) fornisce:

$$2d = a_1 \frac{a_2^2}{a_1^2} t_2^2 + a_2 t_2^2 \quad \rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2da_1}{a_2(a_1 + a_2)}} \quad \text{e} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2da_2}{a_1(a_1 + a_2)}}.$$

Il tempo totale necessario per percorrere l'intero tratto di lunghezza d è $t=t_1+t_2$, per cui:

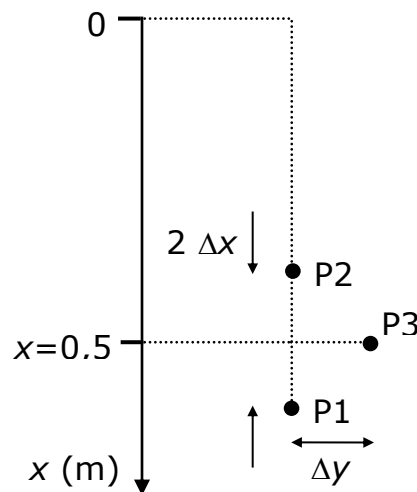
$$t^2 = \frac{2da_2}{a_1(a_1 + a_2)} + \frac{2da_1}{a_2(a_1 + a_2)} + \frac{4d}{(a_1 + a_2)} \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2d(a_1 + a_2)}{a_1 a_2}}$$

Problema 1.11

Tre punti materiali P1, P2 e P3 sono posti su di un piano orizzontale. I punti P1 e P2 si muovono sulla stessa traiettoria di moto rettilineo uniformemente accelerato con $a=10 \text{ m/s}^2$, partendo con velocità iniziale nulla da una coordinata iniziale $x=0$. Rispetto a P1, il punto P2 parte dopo un certo tempo t_0 . Il punto P3 si muove invece di moto rettilineo uniforme lungo una traiettoria perpendicolare a quella dei punti P1 e P2 avente coordinata $x=0,5 \text{ m}$. Nel momento in cui il punto P3 incontra la retta che individua la traiettoria dei punti P1 e P2, esso deve trovarsi al centro tra i due punti in modo tale che la distanza reciproca P1-P3 e P2-P3 sia, in valore assoluto, uguale a $\Delta x=0,1 \text{ m}$.

Nelle condizioni sopra descritte si determini:

1. il tempo t_0 intercorso tra la partenza dei punti P1 e P2;
2. la velocità di P3 sapendo che esso deve percorrere un tratto $\Delta y=0,1 \text{ m}$ prima di trovarsi esattamente nel mezzo tra i punti P1 e P2. Si considerino i due casi in cui la partenza di P3 sia contemporanea una volta a P1 e l'altra a P2.

**Soluzione:**

Il punto P3 deve passare tra i punti P1 e P2 quando essi hanno percorso rispettivamente una distanza $x+\Delta x$ e $x-\Delta x$ dalla posizione di partenza posta ad $x=0$. Essendo l'accelerazione a diretta come l'asse x le equazioni orarie del moto per P1 e P2 sono:

$$\begin{aligned} x + \Delta x &= \frac{1}{2} a t^2 \\ x - \Delta x &= \frac{1}{2} a (t - t_0)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Il tempo t_0 è proprio quello che serve per far percorrere a P1 il tratto $2\Delta x$. Risolvendo la prima delle equazioni (1) rispetto a t e la seconda rispetto a $(t-t_0)$ si ottiene:

$$t = \sqrt{\frac{2(x + \Delta x)}{a}} \approx 0,35 \text{ s} \quad \text{e} \quad (t - t_0) = \sqrt{\frac{2(x - \Delta x)}{a}} \approx 0,28 \text{ s},$$

per cui si ricava che il punto P2 deve partire con un ritardo $t_0 \approx 0,07 \text{ s}$ rispetto a P1.

Il valore della velocità del punto P3 dipenderà se esso deve partire contemporaneamente a P1 o a P2. Se è contemporaneo a P1 si ha:

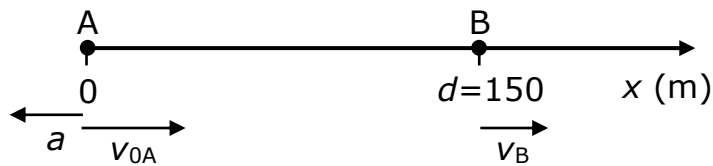
$$v_{P3,P1} = \frac{\Delta y}{t} \approx 0,29 \text{ m/s}$$

mentre se è contemporaneo a P2 si ha:

$$v_{P3,P2} = \frac{\Delta y}{t - t_0} \approx 0,35 \text{ m/s.}$$

Problema 1.12

Un punto materiale A si sta muovendo di moto rettilineo uniforme con velocità $v_{0A}=30$ m/s quando su di esso agisce una decelerazione $a=2$ m/s². In queste condizioni il punto A si trova ad una distanza $d=150$ m da un secondo punto materiale B che si muove nella stessa direzione e verso di A con velocità costante $v_B=4$ m/s. Si chiede di verificare se il punto A incontrerà il punto B. Se ciò si avviene si calcoli il tempo impiegato da A per incontrare B ed a quale distanza dalla situazione iniziale di A ciò avviene. Studiare infine il caso in cui il punto B si muova con una velocità $v_{2B}= 6$ m/s.



Soluzione:

Con riferimento alla figura, le equazioni orarie dei punti A e B sono:

$$x_A(t) = v_{0A}t - \frac{1}{2}at^2 \quad ; \quad x_B(t) = d + v_Bt \quad . \quad (1)$$

Se i due punti si incontrano si deve avere che ad un certo tempo le coordinate dei due punti sono uguali, cioè $x_A=x_B$. Dalle precedenti equazioni si ottiene:

$$v_{0A}t - \frac{1}{2}at^2 = d + v_Bt \quad \rightarrow \quad at^2 + 2(v_B - v_{0A})t + 2d = 0. \quad (2)$$

Sostituendo i valori numerici delle grandezze note si ottiene che la condizione $x_A=x_B$ è verificata per $t_1 \approx 17,4$ s e $t_2 \approx 8,6$ s. Essendo questi due valori di t entrambi positivi, essi sono fisicamente accettabili a patto di comprendere cosa essi rappresentano nella situazione cinematica in analisi. Si noti dapprima che $t_2 < t_1$ quindi t_2 rappresenta il tempo dalla situazione iniziale in cui il punto A supera il punto B per la prima volta. Il tempo t_1 rappresenta invece il tempo in cui il punto B raggiunge e supera di nuovo il punto A. La coordinata x in cui avviene il primo incontro tra i due punti è:

$$x_{1B} = d + v_B t_2 \approx 185 \text{ m.}$$

Il secondo incontro si ha per un valore della coordinata:

$$x_{2B} = d + v_B t_1 \approx 220 \text{ m.}$$

Nel caso in cui $v_B=6$ m/s si ha che il discriminante della equazione (2) è minore di zero. E quindi le due soluzioni sono complesse e coniugate. Non esiste di conseguenza, un valore di t nel campo dei numeri reali. Fisicamente questo significa che il punto A non incontrerà mai il punto B.

Problema 1.13

Un certo tipo di aereo, durante la fase di decollo, ha una accelerazione costante $a_1=4$ m/s². Quanto deve essere lunga una pista per il decollo di questo tipo di aereo, se si deve prevedere, per sicurezza, che l'aereo possa fermarsi senza danno una volta raggiunta la velocità di decollo $v_D=85$ m/s potendo contare al massimo su di una decelerazione $a_2=5$ m/s²? Si schematizzi l'aereo come un punto materiale e si consideri l'assenza di ogni forza d'attrito.

Soluzione:

Nell'istante iniziale, l'aereo si trova nella posizione $x=0$ con velocità iniziale $v_0=0$. La lunghezza totale x_T della pista sarà data da:

$$x_T = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_D t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2.$$

I tempi t_1 e t_2 sono rispettivamente quelli per raggiungere la velocità di decollo e per arrestare l'aereo a fine pista. I valori di t_1 e t_2 sono facilmente ricavabili dalle seguenti espressioni

$$v_D = a_1 t_1 \quad \rightarrow \quad t_1 \approx 21,3 \text{ s} \quad ; \quad v_F = 0 = v_D - a_2 t_2 \quad \rightarrow \quad t_2 \approx 17 \text{ s}$$

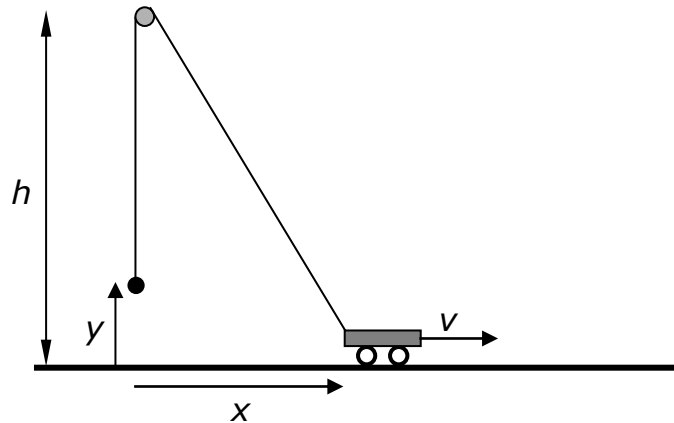
Sostituendo i valori ora ricavati si ottiene per la lunghezza della pista $x_T \approx 1630$ m.

Problema 1.14

Un corpo puntiforme è legato ad una delle estremità di una corda che è libera di scorrere intorno ad una carrucola. All'altro estremo della corda è invece legato un carrello che si muove di moto rettilineo uniforme su di un piano orizzontale con velocità v . Facendo riferimento alla figura e supponendo che sia uguale ad h l'altezza della carrucola dal suolo, si calcolino le espressioni della velocità e della accelerazione del punto materiale individuando così il tipo di moto a cui è sottoposto.

Inoltre, si scrivano le espressioni della velocità e dell'accelerazione del punto materiale subito all'inizio del moto del carrello e per tempi molto più lunghi?

Si consideri che la carrucola ed il carrello siano punti materiali privi di massa, che non ci sia attrito e che il filo sia inestensibile e privo di massa. Inoltre si tenga presente che al tempo iniziale il corpo puntiforme ed il carrello sono nello stesso punto di coordinate $x=0$ ed $y=0$.

**Soluzione:**

La corda a cui è vincolato il corpo puntiforme è lunga $2h$, come è facile verificare quando il carrello è nella posizione $x=0$ e $y=0$. Quindi il generico spazio h - y percorso dal corpo puntiforme sarà nella relazione

$$h - y + L = 2h$$

dove con L si è indicata la lunghezza variabile della corda che va dalla carrucola al carrello. Si ha:

$$y = L - h = \sqrt{h^2 + x^2} - h,$$

con $L = \sqrt{h^2 + x^2}$. La lunghezza y può mettersi in relazione con il tempo ricordando che la coordinata x del carrello vale $x(t)=vt$ o in forma differenziale $dx = vdt$. Quindi la coordinata y del punto materiale che si sta alzando dipende dal tempo in maniera indiretta tramite la $x(t)$. Si ha:

$$y(t) = \sqrt{h^2 + x^2(t)} - h.$$

La velocità verticale del punto si trova ponendo:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{h^2 + x^2}} \frac{dx}{dt} = \frac{xv}{\sqrt{h^2 + x^2}}.$$

Il moto del corpo puntiforme è quindi, a differenza di quello del carrello, accelerato. La accelerazione si trova derivando la velocità v_y ottenendo:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{v\sqrt{h^2 + x^2} - v \frac{x^2}{\sqrt{h^2 + x^2}}}{h^2 + x^2} = \frac{v^2 h^2}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

Dalla precedente espressione si nota che il valore della accelerazione non è costante, dipende da x e quindi dal tempo. Determiniamo ora i valori della velocità e della accelerazione del corpo puntiforme nel limite per $x \rightarrow 0$ ed $x \rightarrow \infty$. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} v_y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{vx}{\sqrt{h^2 + x^2}} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v_y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{vx}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{vx}{x} = v$$

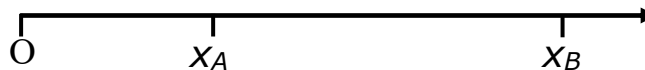
$$\lim_{x \rightarrow 0} a_y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v^2 h^2}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{v^2}{h} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a_y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{v^2 h^2}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = 0$$

Problema 1.15 - Problema d'esame (6 punti)

Ad un istante $t_0=0$, un motociclista sta viaggiando ad una velocità $v_0=60$ km/h quando vede un semaforo distante 250 m diventare rosso. Il motociclista allora frena con una accelerazione costante per un tratto $x_A=50$ m, per poi continuare a velocità costante per il rimanente tratto che ancora lo separa dal semaforo. Se il motociclista arriva all'altezza del semaforo giusto nel momento in cui esso segna di nuovo verde, sapendo che il semaforo segna rosso per un tempo $\Delta t=30$ s, si determini:

1. il valore della decelerazione costante a ; (2 punti)
2. il tempo t_A durante il quale il motociclista frena; (2 punti)
3. la velocità v_A con la quale il motociclista arriva al semaforo. (2 punti)

Per gli scopi del problema si assuma il motociclista come un punto materiale.

**Soluzione:**

Le equazioni cinematiche del moto del motociclista rispettivamente per il tratto x_A e $\Delta x = x_B - x_A$, si scrivono nel seguente modo:

$$\begin{aligned} x_A &= v_0 t_A - \frac{1}{2} a t_A^2 \\ v_A &= v_0 - a t_A \\ \Delta x &= v_A (\Delta t - t_A) \end{aligned} \quad (1)$$

Nelle equazioni (1) si è usato per le variabili cinematiche i simboli indicati nel testo del problema. Eliminando v_A dalla seconda e terza equazione delle (1) si ottiene:

$$a t_A = v_0 - \frac{\Delta x}{\Delta t - t_A}$$

che sostituita nella prima delle equazioni (1) fornisce la seguente equazione di 2° grado nell'incognita t_A :

$$v_0 t_A^2 - t_A [v_0 \Delta t + \Delta x + 2x_A] + 2x_A \Delta t = 0.$$

Essendo $v_0 \approx 16,7$ m/s, i due valori di t_A sono: $t_A^{(1)} \approx 43,8$ m/s e $t_A^{(2)} \approx 4,1$ m/s. Dato che $t_A^{(1)} > \Delta t$, cioè maggiore del tempo complessivo durante il quale il semaforo segna rosso, la soluzione accettabile per t_A è solo la seconda. Essa, pertanto, rappresenta il tempo durante il quale il motociclista frena percorrendo il tratto $x_A = 50$ m. I valori della velocità v_A e della decelerazione a si ricavano immediatamente dal valore trovato di t_A e risultano uguali rispettivamente a $v_A \approx 7,7$ m/s e $a \approx 2,2$ m/s².