

Esercizio: Funzione produzione

Un'impresa realizza un prodotto brevettato a partire da due input: le materie prime ed il lavoro. Se indichiamo con q la quantità di prodotti realizzati, con m la quantità di materie prime e con l la quantità del lavoro, allora la funzione di produzione è data da $q = m^{1/3}l^{1/6}$. L'impresa inoltre deve possedere una licenza per produrre tale prodotto, che costa €300 per un periodo produttivo, a prescindere dal livello di produzione. Il prezzo di una unità di materie prima ammonta a €1 e quello di una unità di lavoro ammonta a €4. La funzione di domanda inversa del prodotto è

$$P = 160 - 2q.$$

Trovare il piano di produzione che massimizza il profitto di questa impresa in due fasi:

- Innanzitutto trovate la funzione di costo totale,
- Successivamente trovate il livello di produzione che massimizza il profitto,
- Calcolare il profitto massimo

SOLUZIONE

Per derivare la funzione di costo

$$\begin{cases} \frac{l^{1/6}}{3m^{2/3}} = \frac{1}{4} \\ \frac{m^{1/3}}{6l^{5/6}} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{l^{1/6}}{3m^{2/3}} = \frac{1}{4} \\ \frac{l^{1/6}}{6m^{1/3}} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4l^{1/6} = 3m^{2/3} \\ 4l^{1/6} = 6m^{1/3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8l = m \\ l^{1/6}(8l)^{1/3} = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l(q) = \frac{q^2}{4} \\ m(q) = 2q^2 \end{cases}$$

Quindi la funzione di costo totale variabile è

$$CTV(q) = r_l l(q) + r_m m(q) = 4 \times \frac{q^2}{4} + 1 \times 2q^2 = 3q^2$$

Sommando i costi fissi a quelli variabili trovo il costo totale

$$CT(q) = 3q^2 + 300 \text{ da cui}$$

$$CMA(q) = 6q$$

dalla funzione di domanda inversa si può ottenere il ricavo totale

$$RT(q) = P(q) \times q = (160 - 2q)q = 160q - 2q^2,$$

$$RMA(q) = \frac{\partial RT(q)}{\partial q} = 160 - 4q$$

La condizione di massimizzazione del profitto $RMA(q) = CMA(q)$ diventa

$$160 - 4q = 6q \text{ che implica } q=16 \text{ con un prezzo unitario } P(q)=128$$

$$\pi(16) = RT(16) - CT(16) = 128 \times 16 - 300 - 3 \times 16^2 = 2048 - 300 - 768 = 980$$