

Funzione di produzione, costi di breve e lungo periodo, prova d'esame del 18 dicembre 2002

Un'impresa utilizza una tecnologia descritta dalla seguente funzione di produzione

$$q(L, K) = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

dove L indica la quantità di lavoro e K il capitale.

I prezzi dei fattori lavoro e capitale sono, rispettivamente, $w = 4$ e $r = 9$.

Nel breve periodo la dotazione di capitale fissa è pari $K' = 16$.

1. dimostrare che la funzione dei costi totali variabili di breve periodo è $CT = q^2/4$
2. determinare l'espressione delle curve di costo medio e marginale di breve periodo
3. determinare la combinazione ottima dei fattori nel caso in cui si voglia produrre una quantità pari a 100
4. calcolare i costi totali sostenuti dall'impresa in corrispondenza della quantità ottima
5. determinare l'espressione delle curve di costo totale, medio e marginale di lungo periodo.

Funzione di produzione, costi di breve e lungo periodo, prova d'esame del 18 dicembre 2002

1. dimostrare che la funzione del costo totale variabile di breve periodo è $CT = q^2/4$

poiché nel breve periodo il capitale è fisso, dalla funzione di produzione deriva

$$q(L) = \sqrt{16L^{\frac{1}{2}}}$$

$$L = \frac{q^2}{16}$$

quindi, il CT_{BV} è

$$CT_{BV}(q) = wL = 4 \frac{q^2}{16} = \frac{q^2}{4}$$

2. determinare l'espressione delle curve di costo medio e marginale di breve periodo

Per determinare le funzioni dei costi medio e marginale è necessario procedere innanzitutto alla definizione della funzione del costo totale:

$$CT_B(q) = wL + rK = 4 \frac{q^2}{16} + 9 \cdot 16 = \frac{q^2}{4} + 144$$

Le funzioni di costo medio e marginale sono rispettivamente

$$CM_B = \frac{q}{4} + \frac{144}{q}$$

$$C'_B = \frac{q}{2}$$

3. determinare la combinazione ottima dei fattori nel caso in cui si voglia produrre una quantità pari a 100

La scelta ottima si determina individuando l'isocosto più vicino all'origine tangente dell'isoquanto che corrisponde ad una quantità pari a 100, quindi, si dovrà impostare un sistema in cui:

la prima equazione assicura di individuare la coppia di fattori in corrispondenza dei quali

inclinazione dell'isoquanto =

inclinazione dell'isocosto

in termini analitici ciò si traduce nella seguente uguaglianza:

saggio tecnico di sostituzione =

rapporto tra i prezzi dei due fattori

dove il saggio tecnico di sostituzione è misurato dal rapporto tra la produttività marginale del capitale e la produttività marginale del lavoro:

$$SMS_{K,L} = \frac{P'_L}{P'_K} = \frac{K}{L}$$

la **seconda** equazione assicura di imporre di individuare una coppia di fattori produttivi che appartengano all'isoquante che corrisponde ad una quantità pari a 100.

Quindi la soluzione di ottimo è data dal seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{4}{9} \\ 100 = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K = \frac{4}{9} L \\ 100 = \frac{2}{3} L^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L^* = 150 \\ K^* = 66, \bar{6} \end{cases}$$

4. calcolare i costi totali sostenuti dall'impresa in corrispondenza della quantità ottima

I costi totali dell'impresa sono dati dalla funzione:

$$CT = wL + rK$$

quindi, per l'impresa in esame:

$$CT = 4 * 150 + 9 * 66, \bar{6} = 1200$$

5. determinare l'espressione delle curve di costo totale, medio e marginale di lungo periodo.

Per determinare le curve di costo di lungo periodo occorre innanzitutto determinare come si modifica la domanda ottimale di lavoro e capitale (che nel lungo periodo non è più un input fisso) in funzione del livello di produzione. Riscriviamo quindi il sistema utilizzato nel punto 3 lasciando però indicato come q un generico livello di output.

$$\begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{4}{9} \\ q = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Da cui ricaviamo le domande ottimali di K e L in funzione di q :

$$\begin{cases} K = \frac{2}{3} q \\ L = \frac{3}{2} q \end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto due espressioni che indicano come varia la domanda ottimale di K ed L al variare del livello di produzione. Poiché la curva di costo totale di lungo periodo è data dalla seguente espressione:

$$CT_L(q) = wL + rK$$

sostituendo i valori ottenuti si ottiene

$$CT_L(q) = 4\frac{3}{2}q + 9\frac{2}{3}q = 12q$$

Il costo marginale (MC) indica la variazione dei costi registrata a seguito di una variazione dell'*output*, cioè:

$$MC = \frac{\Delta CT_L}{\Delta q} = 12$$

La funzione di costo medio di lungo periodo esprime, invece, il costo per unità di *output*, cioè:

$$AC = \frac{CT_B}{q} = \frac{12q}{q} = 12$$