

Funzione di produzione, combinazione efficiente dei fattori produttivi, costo di produzione

La tecnologia di un'impresa è caratterizzata dalla seguente funzione di produzione:

$$q = 3x_1^{3/4}x_2$$

1. calcolare i rendimenti di scala;
2. dati i prezzi dei fattori $\omega_1 = 3$ e $\omega_2 = 4$, calcolare la combinazione dei fattori che consente di ottenere un livello di produzione $q = 6$ al minimo costo di produzione;
3. determinare come cambia la combinazione efficiente dei fattori quando il prezzo del fattore x_1 raddoppia;
4. determinare come cambia la combinazione ottimale dei fattori se l'impresa vuole raddoppiare la produzione (ai prezzi dei fattori iniziali);
5. determinare la domanda di ciascun fattore in funzione dell'output;
6. determinare la curva dei costi totali di lungo periodo;
7. determinare la curva dei costi totali di breve periodo quando la disponibilità fissa del fattore x_2 è pari a 1.

Funzione di produzione, combinazione efficiente dei fattori produttivi, costo di produzione

1. calcolare i rendimenti di scala;

I rendimenti di scala descrivono ciò che accade quando si aumentano tutti gli *input*, mentre, la produttività marginale rappresenta ciò che accade quando si aumenta un solo input e si mantengono fissi gli altri. Per calcolare i rendimenti di scala, moltiplichiamo ciascun fattore produttivo per λ nella funzione di produzione:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = 3\lambda^{3/4} x_1^{3/4} \lambda x_2 = \lambda^{7/4} q$$

Quindi questa funzione ha rendimenti di scala crescenti.

2. dati i prezzi dei fattori $\omega_1 = 3$ e $\omega_2 = 4$, calcolare la combinazione dei fattori che consente di ottenere un livello di produzione $q = 6$ al minimo costo di produzione;

La combinazione ottimale dei fattori che consente di produrre una quantità di *output* pari a 6 è determinata nel punto di tangenza tra l'isoquanto corrispondente alla quantità di 6 e la retta di isocosto più bassa possibile (corrispondente alla spesa per i fattori più bassa possibile). Quindi occorre porre a sistema un'equazione che impone la tangenza tra isoquanto e isocosto e un'altra equazione che assicura che tale tangenza avvenga in corrispondenza dell'isoquanto corrispondente al livello di produzione $q = 6$.

$$\begin{cases} TRS_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \\ 6 = 3x_1^{3/4}x_2 \end{cases}$$

La prima equazione impone l'uguaglianza tra pendenza dell'isoquanto (rappresentata dal saggio marginale di sostituzione tecnica) e pendenza dell'isocosto (pari al rapporto tra i prezzi di mercato dei fattori).

Il saggio marginale di sostituzione tecnica tra i fattori è dato dal rapporto tra produttività marginale del fattore x_1 e della produttività marginale del fattore x_2 , ovvero:

$$TRS_{1,2} = \frac{MP_1}{MP_2} = \frac{3 \frac{3}{4} x_1^{\frac{3}{4}-1} x_2}{3 x_1^{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4} \frac{x_2}{x_1}$$

Il sistema diviene quindi:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} \frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{4} \\ 6 = 3 x_1^{\frac{3}{4}} x_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 6 = 3 x_1^{\frac{3}{4}} x_1 \end{cases}$$

Sostituendo dalla prima equazione nella seconda, si ottiene che la combinazione economicamente efficiente dei fattori è:

$$E = \begin{cases} x_1^* = 2^{\frac{4}{7}} \\ x_2^* = 2^{\frac{4}{7}} \end{cases}$$

3. determinare come cambia la combinazione efficiente dei fattori quando il prezzo del fattore x_1 raddoppia;

Se il prezzo del fattore x_1 raddoppia, il sistema da impostare è:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} \frac{x_2}{x_1} = \frac{6}{4} \\ 6 = 3 x_1^{\frac{3}{4}} x_2 \end{cases}$$

Da cui si ottiene che la nuova combinazione efficiente dei fattori è:

$$E' = \begin{cases} x_1^* = 1 \\ x_2^* = 2 \end{cases}$$

4. determinare come cambia la combinazione ottimale dei fattori se l'impresa vuole raddoppiare la produzione (ai prezzi dei fattori iniziali);

Per determinare la combinazione ottimale dei fattori che consente di ottenere la quantità di produzione pari a 12 ai prezzi dei fattori iniziali, occorre impostare il sistema:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} \frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{4} \\ 12 = 3x_1^{3/4}x_2 \end{cases}$$

che dà soluzione

$$E'' = \begin{cases} x_1^* = 2^{8/7} \\ x_2^* = 2^{8/7} \end{cases}$$

5. determinare la domanda di ciascun fattore in funzione dell'output;

Per determinare la domanda dei fattori al variare della quantità di produzione che l'impresa desidera ottenere occorre impostare il sistema iniziale senza specificare un determinato livello di produzione ma indicando la quantità prodotta con un generico q , ovvero:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} \frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{4} \\ q = 3x_1^{3/4}x_2 \end{cases}$$

da cui si ottengono le domande dei fattori in funzione della quantità prodotta:

$$x_1 = x_2 = \left(\frac{q}{3}\right)^{4/7}$$

6. determinare la curva dei costi totali di lungo periodo;

Per ricavare la curva dei costi totali di lungo periodo utilizziamo le funzioni di domanda degli input in funzione dell'output, e quindi la funzione di costo di lungo periodo per questa impresa è:

$$\begin{aligned} CT_L &= \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \\ &= 3\left(\frac{q}{3}\right)^{4/7} + 4\left(\frac{q}{3}\right)^{4/7} = 7\left(\frac{q}{3}\right)^{4/7} \end{aligned}$$

A questa funzione di costo totale corrisponde una funzione di costo medio pari a:

$$AC_L = \frac{7}{3^{4/7}} q^{4/7-1} = \frac{7}{3^{4/7}} q^{-3/7}$$

e una funzione di costo marginale pari a:

$$MC_L = \frac{7}{3^{4/7}} \frac{4}{7} q^{4/7-1}$$

$$\frac{4}{3^{\frac{4}{7}}} q^{\frac{4}{7}-1} = \frac{4}{3^{\frac{4}{7}}} q^{-\frac{3}{7}}$$

Si noti che la funzione di costo medio di lungo periodo è decrescente (infatti la derivata prima del costo medio rispetto alla quantità prodotta è

$$\frac{dAC_L}{dq} = \frac{7}{3^{\frac{3}{4}}} \left(-\frac{3}{7} \right) q^{-\frac{10}{7}} < 0,$$

infatti la funzione di produzione presenta rendimenti di scala crescenti.

7. determinare la curva dei costi totali di breve periodo quando la disponibilità fissa del fattore x_2 è pari a 1.

Quando la quantità dell'input x_2 è fissa e pari a 1 (breve periodo), la funzione di produzione per l'impresa è:

$$q = 3x_1^{\frac{3}{4}} \overline{x_2} = 3x_1^{\frac{3}{4}} * 1 = 3x_1^{\frac{3}{4}}$$

per cui la domanda per il fattore x_1 in funzione del livello di produzione è:

$$x_1 = \left(\frac{q}{3} \right)^{\frac{4}{3}}$$

Quindi la funzione di costo di breve periodo per l'impresa è:

$$CT_B = 3 \left(\frac{q}{3} \right)^{\frac{4}{3}}$$

Si noti che questa espressione rappresenta il costo economico per l'impresa, mentre in realtà l'impresa sostiene anche un costo contabile per il fattore fisso, che non rientra tuttavia nel novero dei costi economici in quanto, poiché il fattore fisso non ha un utilizzo alternativo nel breve periodo, non rappresenta un costo opportunità per l'impresa.