

Esercizio: Funzione produzione

Considerate un'impresa a un prodotto che abbia accesso a tre fonti. Se vengono prodotte x_1 unità dalla prima fonte, il costo totale è $CT_1(x_1) = \frac{x_1^2}{1000} + 4x_1$. Se vengono prodotte x_2 unità dalla seconda fonte, il costo totale è $CT_2(x_2) = \frac{3x_2^2}{1000} + x_2$. La terza fonte consiste nell'acquisto diretto da un'altra impresa al prezzo unitario di €6. L'impresa può produrre utilizzando qualsiasi combinazione delle tre fonti. Supponete che essa sia soggetta alla curva di domanda $D(p) = 400(16 - p)$: quale livello di produzione massimizza i profitti, e in che modo tale livello dovrebbe essere suddiviso tra le tre tecnologie?

SOLUZIONE

Cerchiamo di scrivere il profitto in funzione di x_1 x_2 x_3 e $D(p)$ dove $D(p) = x_1 + x_2 + x_3$

Funzione di domanda $p = 16 - \frac{D(p)}{400}$, il profitto in funzione delle tre variabili è

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \left(16 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{400}\right)(x_1 + x_2 + x_3) - \frac{x_1^2}{1000} - 4x_1 - \frac{3x_2^2}{1000} - x_2 - 6x_3$$

Poniamo uguale a zero le tre derivate

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \left(16 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{400}\right) - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{400} - \frac{x_1}{500} - 4 = 12 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{200} - \frac{x_1}{500} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = \left(16 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{400}\right) - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{400} - \frac{3x_2}{500} - 1 = 15 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{200} - \frac{3x_2}{500} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} = \left(16 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{400}\right) - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{400} - 6 = 10 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{200} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{200} - \frac{x_1}{500} = 0 \\ 15 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{200} - \frac{3x_2}{500} = 0 \\ 10 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{200} = 0 \end{cases} \begin{cases} 12 - \frac{2.000}{200} - \frac{x_1}{500} = 0 \\ 15 - \frac{2.000}{200} - \frac{3x_2}{500} = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2.000 \end{cases} \begin{cases} 12 - 10 - \frac{x_1}{500} = 0 \\ 15 - 10 - \frac{3x_2}{500} = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2.000 \end{cases} \begin{cases} x_1^* = 1.000 \\ x_2^* = \frac{2.500}{3} \\ x_3^* = \frac{500}{3} \end{cases}$$

Un modo alternativo di procedere per risolvere il problema è chiedere che i costi marginali dei tre processi di produzione siano uguali tra loro ed uguali al ricavo marginale.

$$\begin{cases} RMa(x_1 + x_2 + x_3) = CMa(x_3) \\ CMa(x_1) = CMa(x_3) \\ CMa(x_2) = CMa(x_3) \end{cases} \begin{cases} 16 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{200} = 6 \\ \frac{x_1}{500} + 4 = 6 \\ \frac{3x_2}{500} + 1 = 6 \end{cases} \begin{cases} x_1^* = 1.000 \\ x_2^* = \frac{2.500}{3} \\ x_3^* = \frac{500}{3} \end{cases}$$