

5ª Esercitazione: soluzioni

Corso di Microeconomia A-K, a.a. 2009-2010
Monica Bonacina (monica.bonacina@unibocconi.it)

Corso di Microeconomia L-Z, a.a. 2009-2010
Stefania Migliavacca (stefania.migliavacca@enicorporateuniversity.eni.it)

Esercizi da svolgere ad esercitazione

Esercizio 1. Supponete che un'azienda sia proprietaria di due diversi impianti (A e B). Ciascun impianto è caratterizzato dalle seguenti curve di costo medio (ATC) e marginale (MC):

$$ATC^A(Q^A) = 16/Q^A + 6Q^A$$

$$ATC^B(Q^B) = 240/Q^B + 2Q^B$$

$$MC^A(Q^A) = 12Q^A$$

$$MC^B(Q^B) = 4Q^B$$

Se l'obiettivo dell'azienda è di produrre 32 unità di output (Q), in che modo sarà ottimale distribuire questa produzione sui due impianti, al fine di minimizzare il costo?

Esercizio 1. Soluzione.

Il modo migliore di distribuire la produzione per minimizzare i costi consiste nell'uguagliare il costo marginale dei due impianti: devo allocare la produzione in modo che

$$MC^A(Q^A) = MC^B(Q^B),$$

ovviamente ponendo come condizione che

$$Q^A + Q^B = 32$$

Risolverò allora un sistema di due equazioni che mi permetta di ricavare Q^A e Q^B

$$\begin{aligned} \begin{cases} 12Q^A = 4Q^B \\ Q^B = 32 - Q^A \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 12Q^A = 4 * (32 - Q^A) \\ Q^B = 32 - Q^A \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 12Q^A = 128 - 4Q^A \\ Q^B = 32 - Q^A \end{cases} &\Rightarrow \\ \begin{cases} Q^A = 128/16 \\ Q^B = 32 - Q^A \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} Q^A = 8 \\ Q^B = 32 - 8 = 24 \end{cases} \end{aligned}$$

da cui ottengo $Q^A=8$ e $Q^B=24$.

Esercizio 2. L'impresa Bamboccioni&Co. opera su un mercato concorrenziale, produce un output Q e la sua curva di costo è pari a $TC(Q) = 2Q^2 + 40Q$.

(a) Determinate la curva di costo medio (ATC) e la curva di costo marginale (MC) della Bamboccioni&Co. e datene una rappresentazione grafica.

(b) Calcolate la quantità prodotta dalla Bamboccioni&Co. nell'ipotesi in cui il prezzo dell'output Q sia $p = 100$ e dite se l'impresa ottiene profitti positivi. Mostrate quantità prodotta e profitti nel grafico del punto precedente.

(c) Scrivete la condizione che determina la curva di offerta di un'impresa concorrenziale e indicate nel grafico precedente la curva di offerta dell'impresa.

Esercizio 2. Soluzione.

a) Data la funzione di costo:

$$TC(Q) = 2Q^2 + 40Q$$

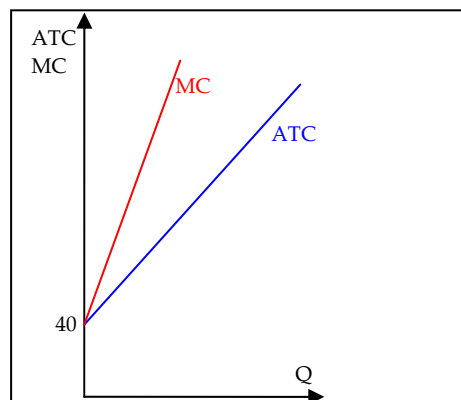
il costo medio (ATC) rappresenta il costo di produzione di una singola unità di output. Algebricamente si determina dividendo la funzione di costo totale per la quantità Q :

$$ATC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{2Q^2 + 40Q}{Q} = 2Q + 40$$

Il costo marginale (MC) rappresenta invece il costo connesso alla produzione di una unità aggiuntiva di output. Algebricamente si ottiene derivando la funzione di costo totale rispetto a Q :

$$MC(Q) = \frac{\partial TC(Q)}{\partial Q} = 4Q + 40$$

Nel caso specifico della Bamboccioni&Co., costo medio e marginale hanno andamento lineare (come si può vedere dalle equazioni che abbiamo ottenuto. In particolare ATC ha una intercetta verticale pari a 40 ed una pendenza pari a 2 mentre il Costo marginale ha una pendenza pari a 4 e intercetta verticale pari a 40. Possiamo quindi rappresentarli come segue:



Il grafico conferma la relazione che conosciamo tra ATC e MC : quando il costo marginale supera il costo medio, allora quest'ultimo ha un andamento crescente.

b) La condizione di equilibrio su un mercato di concorrenza perfetta è che il prezzo deve eguagliare il costo marginale ($P = MC$). Se $p = 100$, allora dovremo avere:

$$P = MC$$

$$100 = MC$$

$$100 = 4Q + 40$$

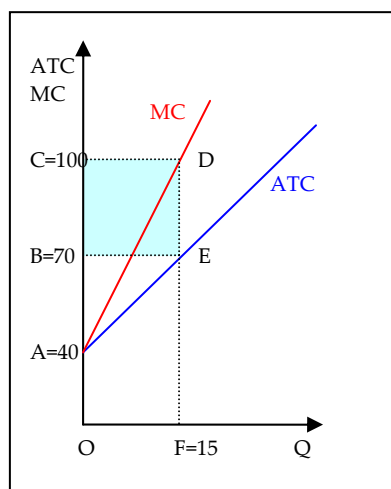
da cui si ottiene: $Q = 15$

Il profitto si calcola come differenza tra ricavi totali e costi totali. Alternativamente può essere calcolato moltiplicando il profitto unitario (differenza tra prezzo e costo medio) per la quantità venduta:

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

$$\pi = (P - ATC(Q)) \times Q = (100 - 70) \cdot 15 = 450$$

Graficamente avremo:



- ricavo totale misurato dall'area OCDF (il segmento OC misura il prezzo, il segmento OF la quantità venduta, quindi $OC \times OF = \text{ricavo totale}$)
- costo totale rappresentato da OBEF (OB misura il costo unitario, OF le unità prodotte, quindi $OB \times OF = \text{costo totale}$)
- profitto rappresentato dalla differenza tra le due aree precedenti ($OCDF - OBEF = BCDE$), o, alternativamente, dal profitto unitario (BC) moltiplicato per l'output (OF)

c) Il livello di output di un'impresa concorrenziale è scelto in corrispondenza dell'uguaglianza del costo marginale al prezzo di mercato: $P = MC$. Di conseguenza la curva di offerta coinciderà con la curva del costo marginale.

Esercizio 3. Considerate l'impresa CocoPalm che opera su un mercato concorrenziale del latte di cocco. La tecnologia della CocoPalm è caratterizzata dalla seguente funzione di produzione:

$$Q(L; K) = K^{1/4} L^{1/4}$$

Supponete che il costo unitario del fattore lavoro sia $w=16$ e quello del capitale sia $r=1$.

- Che natura hanno i rendimenti di scala di questa impresa? Perché?
- Calcolate il saggio tecnico di sostituzione tra capitale e lavoro per la CocoPalm.
- Trovate la quantità di capitale e lavoro che consente di produrre a costo minimo una qualsiasi quantità Q del prodotto.
- Determinate ora - sulla base dei vostri risultati sulla combinazione ottima ottenuti al punto (c) precedente - la funzione di costo totale, le funzioni di costo medio e costo marginale di lungo periodo (Nota: ricordate che queste sono funzioni di Q).
- Rappresentate graficamente le funzioni del costo medio e marginale.
- Supponete ora che lo stock di capitale sia fisso al livello $K=256$; determinate la funzione di costo totale, medio e marginale di breve periodo.

- (g) Rappresentate graficamente la curva di costo medio di breve periodo. Che relazione ha con la curva di costo medio di lungo periodo trovata al punto d)?

Esercizio 3. Soluzione.

a) I rendimenti di scala sono una proprietà tecnica di lungo periodo della funzione di produzione. Essi legano efficienza e scala: per determinare i rendimenti di scala dobbiamo moltiplicare per una medesima costante tutti i fattori variabili e osservare cosa accade all'output:

se $f(tL; tK) = tf(L; K)$ allora r.d.s. costanti,

se $f(tL; tK) > tf(L; K)$ allora r.d.s. decrescenti,

se $f(tL; tK) < tf(L; K)$ allora r.d.s. crescenti.

Nel caso specifico della f.d.p. data $Q(L; K) = K^{1/4}L^{1/4}$ avremo che

$$Q(tL; tK) = (tK)^{1/4} (tL)^{1/4} = t^{2/4} K^{1/4} L^{1/4} = t^{2/4} Q(L; K) < tQ(L; K)$$

Quindi l'output aumenta in modo meno che proporzionale rispetto a tutti gli input: i r.d.s. sono decrescenti.

Inoltre, essendo la funzione di produzione una funzione Cobb-Douglas, si tratterà di una funzione omogenea di grado r , con $r=1/4+1/4=1/2$. Essendo il grado di omogeneità inferiore a uno, abbiamo così la conferma che i rendimenti di scala di questa impresa sono decrescenti.

b) Il Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica corrisponde al rapporto tra la produttività marginale dei due fattori e indica di quanto è necessario aumentare la quantità di un fattore per compensare la diminuzione dell'altro a parità di livello di produzione. Determiniamo innanzitutto la produttività marginale del fattore lavoro:

$$MPL = \frac{\partial Q(L; K)}{\partial L} = \frac{1}{4} L^{-3/4} K^{1/4}$$

e quella del capitale

$$MPK = \frac{\partial Q(L; K)}{\partial K} = \frac{1}{4} L^{1/4} K^{-3/4}$$

A questo punto le metto a rapporto:

$$TRS = \frac{\frac{\partial Q(L; K)}{\partial L}}{\frac{\partial Q(L; K)}{\partial K}} = \frac{\frac{1}{4} L^{-3/4} K^{1/4}}{\frac{1}{4} L^{1/4} K^{-3/4}} = \frac{K}{L}$$

c) Per individuare la quantità di capitale e lavoro che consentono di produrre a costo minimo una qualsiasi quantità Q di latte di cocco, devo risolvere un sistema di due equazioni: la f.d.p. e l'uguaglianza tra TRS e rapporto tra i costi dei fattori. In tal modo ottengo le quantità di L e K (esprese in funzione di Q) che minimizzano il costo di produzione.

$$\begin{cases} Q(L; K) = K^{1/4} L^{1/4} \\ \frac{K}{L} = \frac{16}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 16L \\ Q(L; K) = L^{1/4} (16L)^{1/4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = 2L^{2/4} \Rightarrow L^{1/2} = \frac{Q}{2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{Q^2}{4}$$

$$\Rightarrow K = 4Q^2$$

d) Posso facilmente ricavare la funzione di costo totale partendo da

$$TC(L; K) = wL + rK$$

e sostituendo le ultime due equazioni al punto c) in modo da avere la funzione di costo totale in funzione di Q:

$$TC(Q) = rK + wL = 1 * 4Q^2 + 16 * \frac{Q^2}{4} = 8Q^2$$

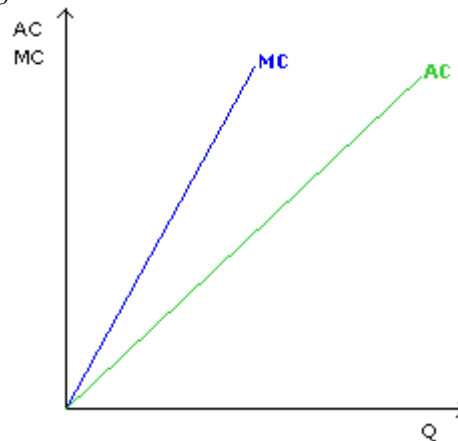
Funzione di costo marginale:

$$MC(Q) = \frac{\partial TC(Q)}{\partial Q} = 16Q$$

Funzione di costo medio:

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = 8Q$$

e) Rappresentazione grafica:



f) Se lo stock di capitale è fisso ($K = 256$), avremo un solo fattore variabile (il lavoro) e la funzione di produzione di breve periodo diviene:

$$Q(L) = (256)^{1/4} L^{1/4} \quad \text{da cui} \quad L = \frac{Q^4}{256}$$

Perciò la funzione di costo totale di breve periodo sarà:

$$TC_{BP}(Q) = rK + wL = 1 * 256 + 16 * \frac{Q^4}{256} = 256 + \frac{Q^4}{16}$$

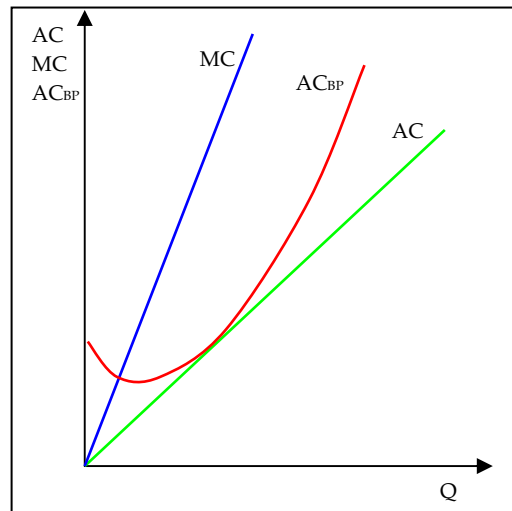
Di conseguenza la funzione di costo marginale di breve periodo è:

$$MC_{BP}(Q) = \frac{1}{4} Q^3$$

La funzione di costo medio di breve periodo è:

$$AC_{BP}(Q) = \frac{Q^3}{16} + \frac{256}{Q}$$

g) Rappresentazione grafica:



La curva del costo medio di breve periodo è posta più in alto rispetto a quella di lungo e hanno un unico punto di tangenza.

Esercizio 4. Supponete che l'impresa FishSpA, attiva sul un mercato concorrenziale dei bastoncini di merluzzo, abbia una funzione di costo variabile pari a

$$VC(Q) = 2Q^2 + 12Q$$

L'impresa sostiene inoltre costi fissi pari a $FC=32$.

- Ricavate analiticamente le curve di costo medio variabile, costo medio totale e costo marginale di tale impresa.
- Calcolate la quantità prodotta da tale impresa quando il prezzo è $p = 100$

Esercizio 4. Soluzione.

a) Calcoliamo le diverse funzioni di costo applicando le definizioni:

$$VC(Q) = 2Q^2 + 12Q \Rightarrow AVC(Q) = \frac{VC(Q)}{Q} = 2Q + 12$$

$$FC = 32 \Rightarrow AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{32}{Q}$$

$$TC(Q) = 2Q^2 + 12Q + 32 \Rightarrow AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = 2Q + 12 + \frac{32}{Q}$$

$$MC(Q) = \frac{\partial TC(Q)}{\partial Q} = 4Q + 12$$

b) La condizione di equilibrio in un mercato di concorrenza perfetta prevede che il prezzo eguagli il costo marginale ($P=MC$) perciò

$$100=4Q+12$$

$$\Rightarrow Q=22$$

Esercizio 5. Si supponga che la funzione di domanda dell'impresa Alpha sia $Q(p)=10-p$, dove Q è la quantità e p è il prezzo dell'output. Inoltre, la curva dei costi totali è data da $TC(Q)=Q^2$.

- per quale quantità l'impresa massimizza i ricavi?
- per quale quantità l'impresa massimizza i profitti?

Esercizio 5. Soluzione.

a) La quantità che massimizza i ricavi può essere individuata partendo dalla equazione dei ricavi totali, calcolando i ricavi marginali e ponendoli uguali a zero:

$$TR(Q) = Q \cdot p(Q)$$

Mi serve a questo punto riscrivere la funzione di domanda esplicitando il prezzo:

$$p(Q) = 10 - Q$$

In questo modo è possibile riscrivere i ricavi totali

$$TR(Q) = 10Q - Q^2$$

$$MR(Q) = \frac{\partial TR(Q)}{\partial Q} = 10 - 2Q$$

$$\max_Q TR(Q) \Rightarrow MR = 0$$

$$\Rightarrow MR = 10 - 2Q = 0 \Rightarrow Q^* = 5$$

b) La quantità che massimizza il profitto potrà essere calcolata in modo analogo, derivando la funzione del profitto e ponendola pari a zero:

$$\pi(Q) = Q \cdot p(Q) - TC(Q) = [Q \cdot (10 - Q)] - Q^2 = 10Q - 2Q^2$$

$$\max_Q [\pi(Q)] \Rightarrow \frac{\partial \pi(Q)}{\partial Q} = 0 \Rightarrow 10 - 4Q = 0 \Rightarrow Q^{**} = 5/2$$

Esercizio 6. Un'impresa di automobili dispone di una tecnologia basata sul capitale L e sul lavoro K , rappresentabile attraverso la funzione $Q(L;K)=L^a K^b$.

- Si determinino le condizioni sui parametri a e b per cui i rendimenti di scala sono costanti.
- All'interno del precedente insieme di valori per i parametri, si consideri il caso speciale $a=b$. Si scriva l'equazione generica di un isoquante e se ne dia una rappresentazione grafica.

Esercizio 6. Soluzione.

a. Per valutare i rendimenti di scala dobbiamo ipotizzare di moltiplicare gli input per una medesima variabile positiva $t > 0$:

$$Q(tL; tK) = (tL)^a (tK)^b = t^{a+b} L^a K^b = t^{a+b} Q(L; K)$$

Affinché i r.d.s. siano costanti occorre che:

$$t^{a+b} Q(L; K) = t Q(L; K) \Rightarrow a + b = 1$$

Questa dunque è la condizione da imporre sui parametri: i rendimenti di scala sono costanti se $a+b=1$.

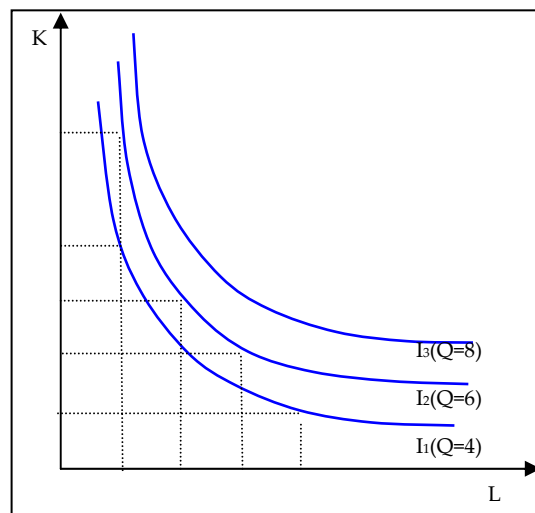
b. Se voglio che $a=b$ allora dovranno essere pari a $1/2$. La funzione di produzione diventa $Q(L;K)=L^{1/2}K^{1/2}$. Per trovare l'equazione di un generico isoquanto occorre fissare un valore per Q ed esplicitare K in funzione di L :

$$\bar{Q} = L^{1/2} K^{1/2}$$

$$K^{1/2} = \frac{\bar{Q}}{L^{1/2}}$$

$$K = \frac{\bar{Q}^2}{L}$$

Supponendo diversi valori di Q (ad esempio $Q=4;6;8$) possiamo rappresentare tre isoquanti della mappa.



Esercizio 7. Si dimostri analiticamente che la curva di costi marginali passa per punto di minimo della curva dei costi medi.

Esercizio 8. Data la funzione di produzione $Q = L^{1/4}K^{1/2}$ con un prezzo dell'output pari a $p=12$ e un costo dei fattori pari a $w=9$ per il lavoro e $r=2$ per il capitale, determinare la quantità dei due input che massimizza il profitto. A quanto ammonta di conseguenza la quantità prodotta Y^* ? Quale sarà il costo totale da sostenere per produrre Y^* ? E il profitto che ne deriva?

Esercizio 9. Sia $TC(Q) = 6 Q^2 + 20 Q$ la curva di costo di un'impresa concorrenziale che produce Q unità di output

- determinare le equazioni della curva di costo medio e della curva di costo marginale e rappresentare graficamente le curve ottenute.
- Dimostrare analiticamente che, IN GENERALE, la funzione di costo marginale interseca quella di costo medio nel punto di minimo
- calcolare la quantità prodotta dall'impresa supponendo che operi in concorrenza perfetta e che il prezzo dell'output sia $p = 140$

Esercizio 10. In Svezia le aziende produttrici di aringhe affumicate operano sostanzialmente in condizioni di concorrenza perfetta. Queste imprese hanno tutte la stessa funzione di costo medio: costante e pari a 12. La funzione di domanda aggregata è la seguente

$$P(Q) = 100 - 2Q$$

- a. Illustrate brevemente le caratteristiche di un mercato di concorrenza perfetta
- b. Determinate la quantità di aringhe affumicate prodotta in equilibrio da ciascuna impresa.

Esercizio 11. Sia $TC(Q) = 6Q + 20Q^2$ la curva di costo di un'impresa concorrenziale che produce Q unità di output

- (a) Determinate le equazioni della curva di costo medio e della curva di costo marginale e rappresentate graficamente le funzioni ottenute.
- (b) Dimostrate analiticamente che, in generale, la funzione di costo marginale interseca quella di costo medio nel punto di minimo di quest'ultima.
- (c) Calcolate la quantità prodotta dall'impresa supponendo che operi in concorrenza perfetta e che il prezzo dell'output sia $p = 126$