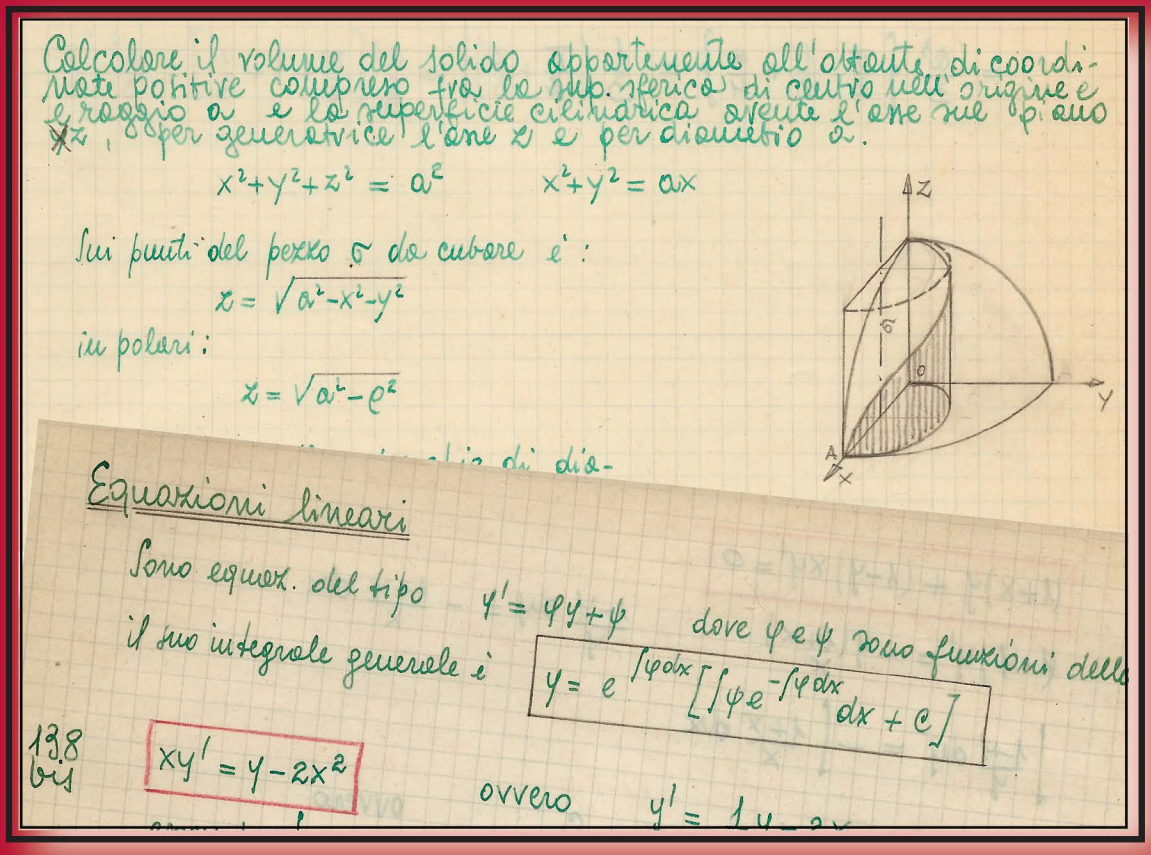
Marco Bramanti

Esercitazioni di
Analisi Matematica 2



SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO

Marco Bramanti

Esercitazioni di
Analisi Matematica 2

SOCIETÀ EDITRICE
ESCULAPIO

In copertina
pagine del quaderno di esercizi di Analisi di mio padre
matricola al Politecnico di Milano nel 1943

ISBN 978-88-7488-482-7

Prima edizione: Gennaio 2012
Ristampa: Settembre 2012 - Settembre 2013 - Ottobre 2014

Responsabile produzione: Alessandro Parenti
Redazione: Giancarla Panigali, Carlotta Lenzi

Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, comma 4 della legge 22 aprile 1941, n. 633 ovvero dall'accordo stipulato tra SIAE, AIE, SNS e CNA, CONFARTIGIANATO, CASA, CLAAI, confcommercio, confesercenti il 18 dicembre 2000.

Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% del presente volume, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, via delle Erbe, n. 2, 20121 Milano, Telefax 02-80.95.06, e-mail: aidro@iol.it

SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO

40131 Bologna - Via U. Terracini 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.136
www.editrice-esculapio.it

Ai miei studenti

Prefazione

Questo testo raccoglie esercizi adatti a corsi di Analisi Matematica 2 per la laurea in Ingegneria o affini. Si tratta perlopiù di esercizi che ho utilizzato per i temi d'esame di questi corsi negli ultimi dieci anni al Politecnico di Milano. L'impostazione seguita è quella del libro di testo:

Bramanti-Pagani-Salsa: Analisi Matematica 2. Zanichelli, 2009, nel seguito indicato con **[BPS2]**. Si farà riferimento talvolta anche al testo

Bramanti-Pagani-Salsa: Analisi Matematica 1. Zanichelli, 2008, indicato con **[BPS1]**, come pure all'eserciziario

Bramanti: Esercitazioni di Analisi Matematica 1. Progetto Leonardo, 2011, indicato con **[B1].**

Come in [B1], gli esercizi sono raggruppati per argomenti, secondo capitoli che seguono la stessa scansione del libro di testo; ogni capitolo è suddiviso in paragrafi (numerati) e sezioni (contrassegnate da lettere). Le soluzioni degli esercizi sono riportate alla fine di ciascun *paragrafo*.

Degli esercizi contrassegnati con ★ è fornito lo svolgimento completo; di tutti gli altri sono fornite le soluzioni (e spesso anche qualcosa di più), in modo che lo studente possa sempre controllare la correttezza del proprio operato.

Rispetto al mio precedente "Esercizi di calcolo infinitesimale e algebra lineare" (Progetto Leonardo, 2005), questo testo si differenzia, oltre che per il maggior numero di esercizi, per il taglio, che vuole essere simile a quello di un percorso di esercitazioni in aula. Ogni argomento importante è introdotto con un gruppo di esempi svolti dettagliatamente e commentati con osservazioni didattiche, che precedono gli esercizi proposti. A volte queste parti introduttive assumono l'aspetto di vere e proprie (brevi) lezioni su un argomento, come nel caso dei richiami sull'uso dell'esponenziale complesso o della rappresentazione di insiemi del piano definiti da sistemi di equazioni o disequazioni, argomenti che per loro natura si prestano ad essere sviluppati nelle esercitazioni.

Tutto ciò dovrebbe servire di guida e orientamento per lo studente, in particolare per chi, e sono sempre tanti, non ha seguito le lezioni e le esercitazioni, o non le ha seguite studiando costantemente, e si trova così ad affrontare la preparazione dell'esame un po' da autodidatta. Certamente lo studio del libro di testo dev'essere il punto di partenza della preparazione dell'esame, *anche della prova scritta*. Perciò in questo eserciziario si presuppone che, nel momento in cui lo studente affronta un certo capitolo, abbia già studiato il capitolo corrispondente sul libro di testo, compresi gli esempi svolti, ed abbia già provato a svolgere almeno parte degli esercizi lì riportati. Il percorso di esercitazioni qui presentato dovrebbe essere un utile supporto e consolidamento per chi ha seguito bene il

corso e aiutare tutti gli altri a recuperare ciò che si sono persi non frequentando attivamente.

Un discorso a parte meritano gli esempi ed esercizi raccolti in paragrafi di "applicazioni fisiche", presenti in vari capitoli. Rispetto al corso di Analisi 1, il programma di Analisi 2 è molto più ricco di argomenti aventi un importante significato fisico e questo, soprattuto se il corso è rivolto a studenti di ingegneria, è un elemento che io ritengo qualificante per il corso stesso. Credo che sviluppare esercizi ed esempi di questo tipo sia importante per lo studente, per diverse ragioni: acquisire la comprensione del significato fisico dei concetti matematici, essere più motivati nello studio della matematica, ma soprattutto cogliere *il nesso* tra matematica e fisica, vedere all'opera la potenza della deduzione matematica finalizzata alla descrizione, spiegazione e previsione dei fenomeni fisici.

Perciò ho inserito in questo testo con una certa ampiezza esempi ed esercizi di questo tipo, sviluppati in dettaglio, ben sapendo che solo in parte questi saranno funzionali alla preparazione dell'esame di analisi 2, ma non volendo rinunciare ad offrire allo studente la possibilità di allargare l'orizzonte in questo senso.

Ringrazio colleghi e studenti che con i loro commenti sulle precedenti edizioni mi hanno aiutato a migliorare il materiale confluito in questo testo. Sono sempre graditi commenti o segnalazioni di errori, all'indirizzo:

marco.bramanti@polimi.it

Segnalo infine che alla pagina web:

http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/testi/esercitazioni.htm

potrà essere reso disponibile ulteriore materiale riguardante questo libro.

M. B.

Milano, gennaio 2012

Sommario

Test di autovalutazione sui prerequisiti per il corso di analisi matematica 2... 1
Soluzioni esercizi sui prerequisiti... 4

Cap. 1. Equazioni differenziali... 7
1.1. Equazioni del prim'ordine... 7
1.1.A. Equazioni lineari o a variabili separabili... 7
1.1.B. Applicazioni... 24
Soluzioni §1.1... 31
1.2. Equazioni lineari del second'ordine... 59
1.2.A. Richiami sull'esponenziale complesso... 59
1.2.B. Equazioni omogenee a coefficienti costanti... 63
1.2.C. Equazioni non omogenee. Metodo di somiglianza... 67
1.2.D. Equazioni di Eulero... 83
1.2.E. Applicazioni fisiche... 88
Soluzioni §1.2... 106

Cap. 2. Calcolo infinitesimale per le curve... 133
2.1. Calcolo differenziale vettoriale. Curve continue, regolari... 133
Soluzioni §2.1... 143
2.2. Lunghezza di un arco di curva e integrali di linea di prima specie... 153
Soluzioni §2.2... 170
2.3. Applicazioni fisiche... 192

Cap. 3. Calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili... 201
3.1. Grafici e insiemi di livello... 201
Soluzioni §3.1... 204
3.2. Limiti e continuità per funzioni di più variabili... 211
Soluzioni §3.2... 223
3.3. Topologia e proprietà delle funzioni continue... 229
3.3.A. Insiemi del piano definiti da equazioni o disequazioni... 229
3.3.B. Topologia... 235
Soluzioni §3.3... 243
3.4. Derivate parziali e differenziabilità... 264
3.4.A. Calcolo di derivate parziali, piano tangente... 264
3.4.B. Derivabilità, differenziabilità, derivate direzionali... 269
3.4.C. Derivazione di funzioni composte... 285
Soluzioni §3.4... 288
3.5. Derivate successive... 314

Soluzioni §3.5 317
3.6. Massimi e minimi liberi 321
Soluzioni §3.6 332
3.7. Funzioni definite implicitamente 352
Soluzioni §3.7 357
3.8. Massimi e minimi vincolati. Moltiplicatore di Lagrange 363
Soluzioni §3.8 368
3.9. Applicazioni fisiche ed esercizi vari 380
Soluzioni §3.9 385

Cap. 4. Calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali 391
4.1. Superfici regolari parametrizzate 392
4.1.A. Superfici in forma parametrica 392
4.1.B. Superfici in forma cartesiana 394
4.1.C. Superfici di rotazione 395
Soluzioni §4.1 399
4.2. Trasformazioni regolari di coordinate 405
4.2.A. Trasformazioni di coordinate e di operatori differenziali 405
4.2.B. Applicazioni alle equazioni a derivate parziali 408
Soluzioni §4.2 414

Cap. 5. Calcolo integrale per funzioni di più variabili 425
5.1. Integrali doppi 425
5.1.A. Rappresentazione analitica di insiemi del piano 425
5.1.B. Tecniche di base e calcolo di integrali doppi come integrali iterati 431
5.1.C. Calcolo di integrali doppi con cambi di variabili 436
5.1.D. Applicazioni geometrico-fisiche degli integrali doppi ed esercizi vari 440
Soluzioni §5.1 451
5.2. Integrali tripli 470
5.2.A. Rappresentazione analitica di insiemi dello spazio 470
5.2.B. Tecniche di base per integrali tripli. Integrazione "per fili" o "per strati". Cambi di variabile 475
5.2.B. Applicazioni geometrico-fisiche degli integrali tripli 481
Soluzioni §5.2 488

Cap. 6. Campi vettoriali 507
6.1. Lavoro di un campo vettoriale, campi conservativi e potenziali 507
6.1.A. Lavoro di un campo vettoriale 508

6.1.B. Campi conservativi e potenziali....514
6.1.C. Esercizi vari su lavoro di un campo, campi conservativi e potenziali.... 518
Soluzioni §6.1....522
6.2. Area e integrali di superficie.... 539
6.2.A. Applicazioni geometrico-fisiche degli integrali di superficie....541
6.2.B. Esercizi vari.... 544
Soluzioni §6.2....547
6.3. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.... 555
Soluzioni §6.3....564
6.4. Teoremi di Gauss, Green, Stokes.... 570
6.4.A. Calcolo differenziale con gli operatori divergenza e rotore.... 570
6.4.B. Formule di Gauss-Green nel piano.... 577
6.4.C. Teoremi della divergenza e del rotore.... 578
6.4.D. Applicazioni fisiche dei teoremi di Gauss e Stokes.... 584
6.4.E. Applicazioni matematiche del teorema di Gauss....596
6.4.F. Dimostrazione del teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$ e conseguenze.... 599
Soluzioni §6.4....608

Cap. 7. Serie di potenze e serie di Fourier.... 629
7.1. Serie di funzioni e convergenza totale....629
Soluzioni §7.1....633
7.2. Serie di potenze.... 635
Soluzioni §7.2....637
7.3. Serie trigonometriche e serie di Fourier....640
7.3.A. Polinomi trigonometrici....640
7.3.B. Periodizzazione, regolarità di funzioni periodizzate.... 642
7.3.C. Serie di Fourier: convergenza puntuale e rapidità di convergenza a zero dei coefficienti....644
7.3.D. Forma esponenziale complessa delle serie di Fourier.... 653
7.3.E. Serie trigonometriche....654
7.3.F. Applicazioni fisiche delle serie di Fourier....656
Soluzioni §7.3....664

Avvertenza importante sulle notazioni

In questo eserciziario usiamo sistematicamente per i vettori la scrittura $\underline{v}$ (sottolineato) invece della scrittura $\boldsymbol{v}$ (grassetto) che è usata nel libro di testo [BPS2] (e in molti altri testi).
La maiuscola sottolineata, come in $\underline{F}$, indica un campo vettoriale o una funzione vettoriale di più variabili; la matrice Jacobiana di una funzione $\underline{T}$ di questo tipo è indicata[1] con $\underline{\underline{D}}\,\underline{T}$.

Il motivo dell'uso del sottolineato invece del grassetto è: si vuole usare una scrittura che lo studente *possa effettivamente imitare quando scrive "a mano"*, così che lo studio di questo eserciziario aiuti ad apprendere delle buone abitudini notazionali. Non si sottovaluti l'importanza di questo aspetto. Ritengo che nello studio del corso di Analisi Matematica 2 l'utilizzo sistematico, da parte dello studente, di notazioni precise e coerenti, in particolare per quel che riguarda la distinzione tra scalari e vettori, sia *assolutamente fondamentale* per acquistare consapevolezza critica dei concetti coinvolti.

[1] Quando vogliamo indicare la matrice Jacobiana di una funzione a cui non è stato dato un nome, la indicheremo con J.

Test di Autovalutazione
sui prerequisiti per il Corso di Analisi Matematica 2

Perché questo test? I "prerequisiti per Analisi 2" non dovrebbero coincidere semplicemente con il corso di Analisi 1? Difatti è così. Ma purtroppo succede non di rado che uno studente affronti il corso di Analisi 2 avendo superato l'esame di Analisi 1 molto tempo addietro, o avendolo superato in modo non proprio brillante, o non avendolo ancora superato...

Può essere utile allora puntualizzare esplicitamente, a questo punto, quali sono i contenuti di Analisi 1 o di matematica elementare che saranno maggiormente coinvolti [2] *nello studio di Analisi 2.*

Lo studente che incontrasse difficoltà nello svolgimento degli esercizi proposti in questo test è invitato a rivedere a fondo gli argomenti corrispondenti, in modo da affrontare il corso munito degli strumenti matematici di base adeguati.

A. Calcolo di derivate *(servirà nel calcolo di derivate parziali).*

1. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

a. $$f(x) = e^{\cos^2 x}$$

b. $$f(x) = \frac{ax}{x^2 + a^2}$$ (a costante)

B. Calcolo di integrali indefiniti *(serviranno nella risoluzione di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine, oltre che nel calcolo di integrali definiti).*

2. $$\int \frac{dy}{y(1+y)}$$

3. $$\int x^2 e^{-x} dx$$

---

[2] Con ciò naturalmente non si vuole affermare che tutto quanto *non compare* in questo test sia inutile!

C. Calcolo di integrali definiti *(serviranno nel calcolo di: integrali di linea, lavoro di un campo vettoriale, integrali doppi e tripli, integrali di superficie).*

4. $$\int_0^{\pi} \left(R^4 \sin^3\varphi + R^6 \cos^2\varphi \sin^3\varphi\right) d\varphi$$

5. $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

D. Grafici di funzioni *(servono, ad esempio, a rappresentare le soluzioni di equazioni differenziali).*

6. Tracciare un grafico qualitativamente corretto delle seguenti funzioni:

a. $$f(x) = e^{-2x} \sin x$$

b. $$f(x) = \frac{e^x - 2}{3e^x + 1}$$

E. Calcolo coi numeri complessi *(servirà nella risoluzione di equazioni differenziali del second'ordine).*

7.

a. Riscrivere in forma algebrica ($a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$) il numero complesso:

$$z = \frac{1}{2(2i-1)^2 - (2i-1) - 1}$$

b. Riscrivere in forma algebrica il numero complesso:

$$z \cdot e^{-1+2i}$$

(dove z è il numero calcolato al punto *a*).

F. Matematica elementare

8. Risoluzione di sistemi di equazioni algebriche (non lineari) *(servirà nella ricerca dei punti critici di una funzione di due variabili).*

Determinare *tutte* le soluzioni del seguente sistema. Quanti punti del piano rappresentano tali soluzioni?

$$\begin{cases} y(x^2+2x-3)=0 \\ \frac{x^3}{3}+x^2-3x+2y=0 \end{cases}$$

(ossia: non basta "vedere a occhio" qualche soluzione: occorre procedere sistematicamente in modo da essere certi di averle trovate *tutte*).

9. Calcolo con esponenziali e logaritmi *(servirà, ad esempio, nel risolvere equazioni differenziali a variabili separabili).*

a. Ricavare y in funzione di x nella seguente equazione:

$$\log\left(\frac{y}{y+1}\right)=x+3.$$

b. Risolvere rispetto ad x l'equazione:

$$e^{2x}-2ae^{x}-1=0 \text{ (con } a \text{ parametro reale fissato).}$$

Soluzioni esercizi sui prerequisiti

1.

a. $$f'(x) = -2\cos x \sin x e^{\cos^2 x}$$

b. $$f'(x) = \frac{a(x^2+a^2) - 2x(ax)}{(x^2+a^2)^2} = \frac{a(a^2-x^2)}{(x^2+a^2)^2}.$$

2. $$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy = \log\left|\frac{y}{1+y}\right| + c$$

3. $$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx =$$

$$= -x^2 e^{-x} + \left\{-2x e^{-x} + \int 2e^{-x} dx\right\} =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c$$

4. $$\int_0^{\pi} \left(R^4 \sin^3\varphi + R^6 \cos^2\varphi \sin^3\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[R^4 \sin\varphi (1 - \cos^2\varphi) + R^6 \sin\varphi (\cos^2\varphi - \cos^4\varphi)\right] d\varphi =$$

$$= \left[R^4\left(-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right) + R^6\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3} + \frac{\cos^5\varphi}{5}\right)\right]_0^{\pi} =$$

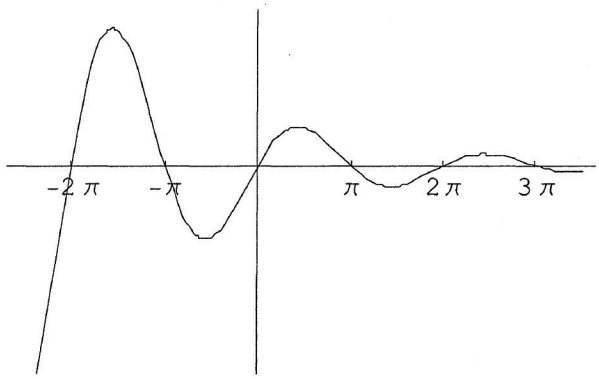
$$= \left[2R^4\left(1 - \frac{1}{3}\right) + 2R^6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right] = \frac{4}{3}R^4 + \frac{4}{15}R^6.$$

5. $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \left[x = \sin t; dx = \cos t\, dt; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right]$$

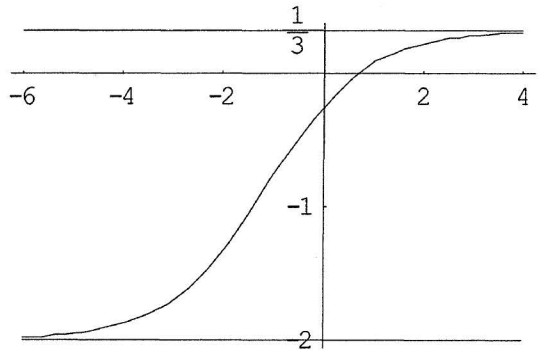
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 x} \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{4}$$

6.

a. $f(x) = e^{-2x}\sin x$



b. $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{3e^x + 1}$



7.

a. $$z = \frac{1}{2(2i-1)^2 - (2i-1) - 1} = \frac{1}{2(-5-4i) - 2i} = \frac{1}{-10-10i} =$$

$$= -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{1+i}\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1-i}{2}\right) = -\frac{1}{20} + \frac{1}{20}i$$

b. $$z \cdot e^{-1+2i} = \left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{20}i\right)e^{-1}(\cos 2 + i\sin 2) =$$

$$= \frac{1}{20e}(-1+i)(\cos 2 + i\sin 2) =$$

$$= \frac{1}{20e}(-\cos 2 - \sin 2) + \frac{i}{20e}(\cos 2 - \sin 2).$$

8. $$\begin{cases} y(x^2+2x-3) = 0 \\ \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

La 1^a equazione implica $y = 0$ o $x = 1$ o $x = -3$.

$$y = 0 \Rightarrow x\left(\frac{x^2}{3} + x - 3\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oppure } \; x^2 + 3x - 9 = 0,\; x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{5}{6};\; x = -3 \Rightarrow y = -\frac{9}{2}.$$

Soluzioni (5 punti):

$$(0,0),\; \left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}, 0\right),\; \left(\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}, 0\right),\; \left(1, \frac{5}{6}\right),\; \left(-3, -\frac{9}{2}\right).$$

9. *a.* $$\log\left(\frac{y}{y+1}\right) = x + 3; \qquad \frac{y}{y+1} = e^x e^3;$$

$$y = \frac{e^x e^3}{1 - e^x e^3}.$$

b. $e^{2x} - 2ae^x - 1 = 0$ (con a parametro reale fissato)

$$e^x = a \pm \sqrt{a^2+1}$$

solo la soluzione col segno + è accettabile, perché positiva; dunque:

$$x = \log\left(a + \sqrt{a^2+1}\right).$$

Cap. 1. Equazioni differenziali

1.1. Equazioni del prim'ordine

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 1, §1, 2.

1.1.A. Equazioni lineari o a variabili separabili

Esempi svolti

Esempio 1.1.

a. Determinare *tutte* le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = (1-y)(2-y)x$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (1-y)(2-y)x \\ y(0) = 3, \end{cases}$$

precisando il più ampio intervallo su cui è definita la soluzione del problema.

a. Si tratta di un'*equazione a variabili separabili*, ossia un'equazione differenziale del prim'ordine scritta nella forma:

$$y'(x) = a(x)b(y).$$

Nel nostro caso è

$$a(x) = x; b(y) = (1-y)(2-y).$$

Per prima cosa isoliamo le soluzioni costanti, che si ottengono risolvendo l'equazione $b(y) = 0$. Perciò:

$$y = 1; y = 2.$$

Cerchiamo ora le altre soluzioni (non costanti) dividendo per $b(y)$ (che si può ora supporre *non identicamente* nullo) e passando agli integrali indefiniti[1]:

---

[1] Il passaggio è giustificato dal seguente procedimento generale (v. [BPS2], cap. 1, §2.2):

$$\int \frac{dy}{(1-y)(2-y)} = \int x dx.$$

Il primo integrale è quello di una funzione razionale con denominatore di 2° grado riducibile; scomponendo in fratti semplici abbiamo:

$$\int \left[\frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y}\right] dy = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\log\left|\frac{2-y}{1-y}\right| = \frac{x^2}{2} + c$$

(attenzione a non dimenticare il valore assoluto nell'argomento del logaritmo) e quindi con passaggi di routine si ottiene:

$$\frac{2-y}{1-y} = ce^{\frac{x^2}{2}}, \text{ con } c \in \mathbb{R},$$

$$y'(x) = a(x)b(y(x))$$

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

$$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))} dx = \int a(x) dx$$

ed eseguendo nel primo integrale la sostituzione $y(x) = u$

$$\int \frac{du}{b(u)} = \int a(x) dx.$$

Infine, la variabile u nel primo integrale può essere chiamata y, per ricordarci che, una volta calcolato l'integrale indefinito, tale variabile andrà appunto interpretata come la funzione $y(x)$, da espicitarsi in funzione di x.

Al solito, qui supponiamo che lo studente abbia già studiato e compreso la teoria riportata sul libro di testo, perciò abbiamo applicato direttamente la conclusione di questo ragionamento, che ha valore generale:

$$y'(x) = a(x)b(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x) dx.$$

dove questa costante c non è la stessa del passaggio precedente[2]. Quest'uguaglianza definisce *implicitamente* la funzione $y(x)$ soluzione dell'equazione differenziale. Risolvendo rispetto a y si ha:

$$2 - y = (1 - y)ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y \cdot \left(ce^{\frac{x^2}{2}} - 1\right) = ce^{\frac{x^2}{2}} - 2$$

$$y(x) = \frac{ce^{\frac{x^2}{2}} - 2}{ce^{\frac{x^2}{2}} - 1} \tag{1}$$

che assegna, al variare di $c \in \mathbb{R}$, l'*integrale generale* dell'equazione differenziale.

---

[2] Di nuovo, abbiamo qui eseguito i passaggi nel modo un po' condensato in cui solitamente si presentano. Esplicitiamo i passi intermedi:

$$\log\left|\frac{2-y}{1-y}\right| = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\left|\frac{2-y}{1-y}\right| = e^{\left(\frac{x^2}{2}+c\right)} = e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = c_1 e^{\frac{x^2}{2}}$$

con $c_1 = e^c$, perciò $c_1 > 0$. Ora togliendo il modulo abbiamo

$$\frac{2-y}{1-y} = \pm c_1 e^{\frac{x^2}{2}} = c_2 e^{\frac{x^2}{2}}$$

con $c_2 = \pm c_1$, perciò c_2 reale di segno qualsiasi, ma diversa da zero. Infine, notiamo che se sostituissimo $c_2 = 0$ (che per quanto osservato è un valore proibito) otterremmo $y = 2$, che comunque *è una soluzione* dell'equazione (soluzione costante, trovata al primo passaggio). Perciò non è sbagliato permettere a c_2 di assumere anche il valore zero, e concludiamo semplicemente scrivendo

$$\frac{2-y}{1-y} = ce^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Nello svolgimento dell'esercizio abbiamo saltato i passaggi intermedi perché si tratta di passaggi di routine che si presentano fin dai più semplici esempi di equazione a variabili separabili (v. ad es. [BPS2], cap.1, Es. 1.1). E' bene comunque che lo studente rifletta su questi passaggi intermedi per esserne ben consapevole.

Ricordiamo che oltre alle soluzioni contenute in questa formula esistono le due soluzioni costanti trovate all'inizio del procedimento[3], $y = 1$ e $y = 2$.

b. Si chiede ora di risolvere un *problema di Cauchy* relativo a questa stessa equazione differenziale, ossia selezionare, tra le soluzioni dell'equazione, quella che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 3$. Poiché il valore 3 è diverso dai due valori (1 e 2) che costituiscono le soluzioni costanti, cercheremo questa soluzione tra quelle assegnate dalla formula dell'integrale generale. Calcolando dalla (1) il valore $y(0)$ e *imponendo* che sia uguale a 3 ricaveremo il valore di c:

$$y(0) = \frac{c-2}{c-1} = 3; \text{perciò } c = \frac{1}{2};$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - 4}{e^{\frac{x^2}{2}} - 2}. \tag{2}$$

La soluzione è definita *sul più ampio intervallo contenente* 0 in cui il denominatore non si annulla. Poiché

$$e^{\frac{x^2}{2}} - 2 \neq 0 \Rightarrow e^{\frac{x^2}{2}} \neq 2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} \neq \log 2 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{2\log 2},$$

il più ampio intervallo contenente 0 che rispetta queste condizioni è:

$$\left(-\sqrt{2\log 2}, \sqrt{2\log 2}\right).$$

Questo è dunque l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione.

Osservazione 1.1. Intervallo di definizione della soluzione di un problema di Cauchy. Si presti attenzione al seguente fatto: la *funzione* $y(x)$ assegnata da (2) in effetti è definita per tutti gli $x \neq \pm\sqrt{2\log 2}$. Tuttavia *sarebbe sbagliato dire che la soluzione del problema di Cauchy è definita per tutti gli* $x \neq \pm\sqrt{2\log 2}$. Il punto è che noi vogliamo che la soluzione di un problema di Cauchy sia definita su un *intervallo* (e non un insieme qualsiasi), contenente il punto in cui è assegnata la condizione iniziale (in questo caso, $x = 0$). Nel nostro caso: l'insieme definito dalle condizioni $x \neq \pm\sqrt{2\log 2}$ non è un intervallo, ma l'unione di 3 intervalli disgiunti. Tra questi, quello che contiene il punto $x = 0$ è $\left(-\sqrt{2\log 2}, \sqrt{2\log 2}\right)$.

[3] Per la verità, come già osservato, $y = 2$ si ottiene *anche* dalla formula dell'integrale generale, per $c = 0$; l'altra però non si ottiene per un valore di c, va perciò riportata esplicitamente.

Questo è pertanto l'*intervallo massimale* su cui è definita la soluzione del problema di Cauchy.

Il motivo per cui si chiede che la soluzione di un problema di Cauchy sia definita su un intervallo si capisce bene pensando al significato fisico: la variabile x rappresenta il tempo che scorre; la soluzione $y(x)$ rappresenta l'evoluzione di un sistema fisico, determinata da una certa legge (equazione differenziale) e da una certa condizione iniziale. Se, partendo dall'istante iniziale e procedendo in avanti oppure a ritroso nel tempo, troviamo che a un certo istante il sistema cessa di esistere, non ha senso chiedersi cosa succede *oltre* quell'istante. Dal punto di vista matematico, inoltre, se accettassimo soluzioni definite su intervalli disgiunti non potremmo più aspettarci l'*unicità* della soluzione, in quanto rami diversi della funzione $y(x)$ definiti su intervalli disgiunti non si raccordano in alcun modo, perciò la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ non determina i valori della funzione sugli intervalli non contenenti l'istante iniziale x_0.

Si noti, infine, che l'intervallo su cui la soluzione del problema è definita non si sarebbe potuto prevedere semplicemente osservando l'equazione differenziale: in quest'esempio,

$$y' = (1 - y)(2 - y)x$$

il secondo membro dell'equazione soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità di soluzione del problema di Cauchy[4] *per ogni x e ogni y*. Tuttavia la soluzione è definita solo in un intervallo limitato o, come si usa dire, "in piccolo". Questo fenomeno è tipico delle equazioni *non lineari*. Per le equazioni lineari la situazione è invece più prevedibile: se l'equazione soddisfa le opportune ipotesi in un certo intervallo (che potrebbe anche essere tutto $\mathbb{R}$), la soluzione del problema sarà definita in tutto quell'intervallo (esistenza "in grande").

Esempio 1.2.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y' = 2xy + 3x^3.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2xy + 3x^3 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

[4] v. [BPS2], cap. 1, §2.2, Teorema 1.1.

a. Si tratta di un'equazione *lineare del prim'ordine*, ossia del tipo

$$y' + a(x)y = f(x).$$

(Notiamo esplicitamente che, invece, quest'equazione *non* è anche a variabili separabili). Seguendo il metodo illustrato nel testo[5], poniamo

$$a(x) = -2x$$

$$A(x) = \int a(x)dx = \int -2xdx = -x^2;$$

(ricordiamo che la funzione $A(x)$ viene scelta come *una* primitiva di $a(x)$, quindi non c'è bisogno di aggiungere la costante di integrazione). Quindi

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(c + \int e^{A(x)} f(x)dx\right)$$

ossia

$$y(x) = e^{x^2}\left(c + \int e^{-x^2} 3x^3 dx\right).$$

Calcoliamo la primitiva[6]:

$$\int e^{-x^2} 3x^3 dx = \left[x^2 = t; dx = \frac{dt}{2}\right] = \frac{3}{2}\int e^{-t} t dt = \text{(per parti)}$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-t}(t+1) = -\frac{3}{2}e^{-x^2}(x^2+1).$$

$$y(x) = e^{x^2}\left(c - \frac{3}{2}e^{-x^2}(x^2+1)\right) = ce^{x^2} - \frac{3}{2}(x^2+1). \tag{3}$$

Questa formula assegna l'*integrale generale* dell'equazione differenziale, al variare della costante $c \in \mathbb{R}$.

b. Per risolvere il problema di Cauchy con la condizione $y(0) = 1$, calcoliamo il valore della soluzione assegnata da (3) nel punto $x = 0$ e imponiamo che sia uguale a 1:

---

[5] v. [BPS2], cap. 1, §2.3.

[6] Anche qui non c'è bisogno di aggiungere la costante di integrazione, perché compare già nella formula risolutiva.

$$y(0) = c - \frac{3}{2} = 1; c = \frac{5}{2};$$

perciò la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{5}{2}e^{x^2} - \frac{3}{2}(x^2 + 1).$$

Si osservi che $y(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}$, coerentemente al fatto che le funzioni $a(x), f(x)$ nell'equazione di partenza sono funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$. Per le equazioni lineari, infatti, vale un teorema di esistenza e unicità *in grande* per il problema di Cauchy[7]. Si confronti con quanto accade per le equazioni (non lineari) a variabili separabili (v. Osservazione 1.1).

Esempio 1.3. Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali del prim'ordine, dire se è lineare, se è a variabili separabili, se è entrambe le cose, o nessuna delle due (*non* si chiede di risolverle):

(*a*) $y' + y\sin x + e^{-x} = 0$ (*b*) $y' + \sin(xy) = 0$

(*c*) $\frac{y'}{y} - \sin y \cos x = 0$ (*d*) $e^x y' = 2ye^{-x^2}$

(*a*) Lineare ($a(x) = \sin x; f(x) = -e^{-x}$), non a variabili separabili.

(*b*) Non lineare, nemmeno a variabili separabili.

(*c*) Non lineare, ma a variabili separabili:

$$y' = a(x)b(y) \text{ con } a(x) = \cos x, b(y) = y\sin y.$$

(*d*) Lineare $\left(a(x) = -2e^{-x^2-x}, f(x) \equiv 0\right)$, ed anche a variabili separabili:

$$y' = a(x)b(y) \text{ con } a(x) = 2e^{-x^2-x}, b(y) = y.$$

Esempio 1.4. Per ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy, dire se si può affermare che la soluzione esiste ed è unica, se si può affermare solo che esiste, o se non si può affermare nulla; nei primi due casi, cosa si può dire sull'intervallo su cui la soluzione è definita? Giustificare le risposte in base ai teoremi studiati, e non cercando di *risolvere* il problema.

(*a*)
$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y-1} \cdot \log x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

[7] v. [BPS2], cap.1, §2.3, Teorema 1.3.

(*b*) $\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y-1} \cdot \log x \\ y(1) = 1 \end{cases}$

(*c*) $\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y-1} \cdot \arctan \frac{1}{x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(*d*) $\begin{cases} y' = \sqrt[3]{x-1} \cdot y + e^{-x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$

(*e*) $\begin{cases} y' = \frac{y}{\sqrt[3]{x-1}} + \log|x-5| \\ y(2) = 1 \end{cases}$

(*a*) Equazione a variabili separabili $y' = a(x)b(y)$. La funzione $a(x) = \log x$ è continua in un intorno di $x = 1$ (ad es., $(0, +\infty)$), la funzione $b(y) = \sqrt[3]{y-1}$ è C^1 in un intorno di $y = 0$ (ad es., in $(-1, \infty)$), la soluzione del problema esiste ed è unica, in un intorno di $x = 1$ (che potrebbe essere più ristretto di $(0, +\infty)$).

(*b*) Equazione a variabili separabili $y' = a(x)b(y)$. La funzione $a(x) = \log x$ è continua in un intorno di $x = 1$, la funzione $b(y) = \sqrt[3]{y-1}$ è continua ma non è C^1 in un intorno di $y = 1$, la soluzione del problema esiste (ma non si può garantire l'unicità), in un intorno di $x = 1$ (contenuto in $(0, +\infty)$ ed eventualmente più piccolo).

(*c*) Equazione a variabili separabili $y' = a(x)b(y)$. La funzione $a(x) = \arctan \frac{1}{x}$ non è continua in $x = 0$, non si può garantire l'esistenza di soluzione. (Si osservi che anche se definissimo in qualche modo $a(x)$ in $x = 0$, la funzione resterebbe discontinua).

(*d*) Equazione lineare $y' + a(x)y = f(x)$. Le funzioni $a(x) = -\sqrt[3]{x-1}$ e $f(x) = e^{-x}$ sono continue in $\mathbb{R}$, la soluzione del problema esiste ed è unica, definita in tutto $\mathbb{R}$.

(*e*) Equazione lineare $y' + a(x)y = f(x)$. Le funzioni $a(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ e $f(x) = \log|x-5|$ sono continue in $(1, 5)$ (questo è il più ampio intervallo contenente $x = 2$ dove entrambe le funzioni sono continue), la soluzione del problema esiste ed è unica, definita in tutto $(1, 5)$.

Esercizi

1.1. ★

a. Determinare *tutte* le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = y^3 \sin 2x$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^3 \sin 2x \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \end{cases}$$

precisando il più ampio intervallo su cui è definita la soluzione.

1.2. ★

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y' + y \tan x = 3 \sin 2x$$

(si può supporre $\cos x > 0$).

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + y \tan x = 3 \sin 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e precisare il più ampio intervallo in cui la soluzione è definita.

1.3.

a. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$xy' + \frac{y-1}{x} = 0.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} xy' + \frac{y-1}{x} = 0 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

precisando l'intervallo più ampio su cui è definita tale soluzione.

1.4.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y' + 3y = 2x.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + 3y = 2x \\ y(0) = \frac{7}{9}. \end{cases}$$

1.5.★

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y' = xy^2.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e precisare il più ampio intervallo in cui la soluzione è definita.

1.6.★

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y' + 2xy = x\sin\left(x^2\right).$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + 2xy = x\sin(x^2) \\ y(0) = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

1.7.★ Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2y + y^2}{x}.$$

a. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione iniziale $y(-1) = 2$.

c. Precisare qual è il più ampio intervallo su cui la soluzione del problema di Cauchy è definita.

1.8.★

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y' + (1 - 2x)y = xe^{x^2}.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + (1-2x)y = xe^{x^2} \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

1.9. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \sqrt[3]{x}\, y^2.$$

a. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione iniziale $y(0) = 2$.

c. Precisare qual è il più ampio intervallo su cui la soluzione del problema di Cauchy è definita.

1.10.★ Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{xy}{x^2-1} = 3x \\ y(0) = 3, \end{cases}$$

precisando l'intervallo più ampio su cui la soluzione è definita.

1.11.★

a. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$y' = xe^{-x}(y-1)^2.$$

b. Risolvere quindi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = xe^{-x}(y-1)^2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

e precisare il più ampio intervallo in cui la soluzione è definita.

1.12.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y' + (1-x)y = xe^{-x}.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + (1-x)y = xe^{-x} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

1.13.★ Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xy^3}{\sqrt{x^2-1}} \\ y\left(\sqrt{2}\right) = 2 \end{cases}$$

precisando il più ampio intervallo su cui tale soluzione è definita.

1.14.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{x}.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

precisando il più ampio intervallo su cui è definita la soluzione del problema.

1.15. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{y^2}{2x+1}.$$

a. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

c. Precisare qual è il più ampio intervallo su cui la soluzione del problema di Cauchy è definita.

1.16.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y' + \frac{2y}{1-x^2} = 1 - x^2.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \frac{2y}{1-x^2} = 1 - x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

precisando il più ampio intervallo su cui è definita la soluzione del problema.

1.17.★ Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sin x}{\cos y} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

e precisare qual è il più ampio intervallo su cui la soluzione del problema di Cauchy è definita.

1.18. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' + 2x^2 y = 3x^2.$$

a. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{2}$.

c. Determinare il più ampio intervallo su cui la soluzione del problema di Cauchy è *positiva*.

1.19.★ Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = (1 + y^2)x^2.$$

a. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

c. Precisare qual è il più ampio intervallo su cui la soluzione del problema di Cauchy è definita.

1.20.★ Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali del prim'ordine, dire se è lineare, se è a variabili separabili, se è entrambe le cose, o nessuna delle due (non si chiede di risolverle):

(*a*) $xyy' = 1$
(*b*) $y' = xy^2 + x^2 y$
(*c*) $y' = 3e^{x+y-x^2}$
(*d*) $y' = e^x y + \frac{1}{x}$
(*e*) $y' = 3e^{xy}$

1.21.★ Per ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy, dire se si può affermare che la soluzione esiste ed è unica, se si può affermare solo che esiste, o se non si può affermare nulla; nei primi due casi, cosa si può dire sull'intervallo su cui la

soluzione sarà definita? Giustificare le risposte in base ai teoremi studiati, e non cercando di risolvere il problema.

(*a*) $\begin{cases} xy' = e^y \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(*b*) $\begin{cases} xy' = y \log|y| \cdot \log x \\ y(2) = 0 \end{cases}$

(*c*) $\begin{cases} y' \log x = y \arctan x + e^x \\ y(2) = 1 \end{cases}$

(*d*) $\begin{cases} y' = \frac{|xy|}{1-y^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

1.22.★ Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x\sqrt[3]{y-1} \\ y(3) = 1. \end{cases}$$

Dopo aver verificato che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza ma non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità, costruire almeno 4 diverse soluzioni del problema di Cauchy.

1.23.★

a. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'(t) + 2ty(t) = t^3.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{2}$.

1.24.

a. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y' = xe^{-y}.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione iniziale $y(0) = 1$, e precisare il più ampio intervallo in cui la soluzione è definita.

1.25.★

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y' + \frac{2y}{x} = e^{-x}.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione $y(1) = 0$, e precisare il più ampio intervallo in cui la soluzione è definita.

1.26. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = e^y \sin x.$$

a. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione iniziale $y(0) = 0$, e precisare il più ampio intervallo in cui la soluzione è definita.

1.27. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' - y\cos x = e^{2\sin x}\cos x.$$

a. Determinare l'integrale generale dell'equazione.

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione iniziale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

1.28. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{y - y^2}{x}.$$

a. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione iniziale $y(1) = 2$, e precisare il più ampio intervallo in cui la soluzione è definita.

1.29.

a. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$y' = (y - 1)(y - 3).$$

b. Scrivere la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione iniziale $y(0) = 2$.

c. Rispondere alle domande:
Qual è il più ampio intervallo su cui la funzione trovata al punto precedente è soluzione del problema di Cauchy?
La soluzione è limitata sul suo intervallo di definizione?

1.30. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{1+y^2}{x}.$$

a. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.
b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con la condizione iniziale $y(1) = 0$ e precisare il più ampio intervallo in cui la soluzione è definita

1.31.
a. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^2 y' = 2x + 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

b. Precisare qual è il più ampio intervallo su cui la soluzione trovata è definita ed è di classe C^1 (giustificando la risposta).

1.32. ★
a. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y' + y = \sin x$$

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente, con la condizione iniziale:

$$y(0) = \frac{1}{2}$$

1.33. ★
a. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} yy' = 2x - 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

b. Precisare qual è il più ampio intervallo su cui la soluzione trovata è definita ed è di classe C^1 (giustificando la risposta).

Dire per quali valori di x_0, y_0 si può affermare che il seguente problema di Cauchy ha certamente una e una sola soluzione:

1.34.★ $\begin{cases} y' = \frac{x\sqrt[3]{y}}{x^2-1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1.35. $\begin{cases} y' = \frac{y\sqrt[3]{x}}{x^2-1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1.36. $\begin{cases} y' = \frac{\log|x|}{\log|y|} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1.37. $\begin{cases} yy' = e^{\sqrt[3]{x}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1.38. $\begin{cases} (x-2)y' = e^x y^3 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1.39. $\begin{cases} y' = \frac{\log|y|}{\log|x|} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1.40. $\begin{cases} y'\log x = \arcsin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1.41. $\begin{cases} (x+1)y' = e^x y^3 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1.42. $\begin{cases} y'\log y = \arcsin x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1.1.B. Applicazioni

Discutiamo qui, sotto forma di esercizi, un certo numero di applicazioni significative, a vari settori scientifici, di modelli differenziali che portano ad equazioni del prim'ordine. Molti di questi sono già stati presentati nel libro di testo [BPS2], sotto forma di esempi svolti (e allora qui non se ne riporta lo svolgimento intero) o sotto forma di esercizi (e allora qui se ne è riportato lo svolgimento intero, che sul testo non è presente). Dal punto di vista strettamente matematico, non incontreremo qui nuove difficoltà rispetto a quelle già emerse nei precedenti esercizi di tipo "scolastico", fatto salva l'eventuale difficoltà che lo studente può percepire nel lavorare su un'equazione che contiene dei parametri (e non solo costanti numeriche). E' significativo, però, che lo studente rifletta sul significato fisico dell'equazione, sulla dipendenza del tipo di soluzione dal valore dei vari parametri, e che provi a rispondere alle domande di volta in volta suggerite dall'interpretazione fisica dell'equazione.

In tutti i prossimi esercizi la variabile indipendente si chiama t (tempo).

Modelli di crescita ed estinzione

1.43. Dinamica delle popolazioni, modello di Malthus. Sia $N(t)$ il numero di individui, al tempo t, di una certa popolazione isolata, ad esempio di batteri. Supponendo che il numero di nuovi nati in un breve intervallo di tempo sia proporzionale all'itervallo di tempo e al numero di individui della popolazione, secondo un coefficiente λ detto tasso istantaneo di natalità, e il numero di morti in un breve intervallo di tempo sia proporzionale all'intervallo di tempo e al numero di individui della popolazione, secondo un coefficiente μ detto tasso istantaneo di mortalità, la popolazione si evolverà secondo la legge

$$N' = (\lambda - \mu)N.$$

Detto $N_0 > 0$ il numero di individui al tempo $t = 0$, descrivere l'andamento della popolazione nei due casi $\lambda > \mu, \lambda < \mu$.

1.44.★ Una popolazione di batteri cresce con velocità proporzionale al numero di batteri presenti (legge di Malthus, v. es. precedente). Se in un'ora il numero di individui raddoppia, di quanto cresce in 2 ore e mezza?

1.45.★ Il contenuto di CO_2 di una sala di $120m^3$ è dello 0.3%. Un sistema di condizionamento viene attivato ed immette aria fresca, contenente lo 0.1% di CO_2 al tasso di $20m^3/\text{min}$.

a. Si ricavi l'equazione differenziale soddisfatta dalla percentuale $c(t)$ di CO_2 all'istante t. (*Suggerimento*: misurare il tempo in minuti ed esprimere il valore approssimato di $\frac{\Delta c(t)}{\Delta t}$ per $\Delta t = 1$ min., scrivendo un bilancio di quanta CO_2 (in volume assoluto) si trova all'istante t nella stanza, quanta ne esce e quanta ne entra nell'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$. Per $\Delta t \to 0 \ldots$)

b. Trovare la percentuale di CO_2 dopo 10 minuti.

c. Dopo quanto tempo la percentuale di CO_2 sarà dello 0.2%?

1.46. Dinamica delle popolazioni, modello di Verhulst (equazione logistica). Sia $N(t)$ il numero di individui, al tempo t, di una certa popolazione isolata. Facciamo le stesse ipotesi generali dell'Esercizio 1.43, ma ora supponiamo che il coefficiente di proporzionalità $\lambda - \mu$ non sia costante, ma dipenda dall'occupazione dell'ambiente, in modo che la dinamica è ora descritta dalla legge

$$N' = \varepsilon N\left(1 - \frac{N}{k}\right).$$

La costante $k > 0$ è detta *capacità dell'ambiente*, e possiamo pensarla come il massimo numero di individui che possono "vivere bene" nell'ambiente, prima di entrare in competizione e portare a un'inversione di tendenza nella crescita della popolazione; il coefficiente ε è l'analogo di $\lambda - \mu$ nell'esempio precedente, e supporremo ora $\varepsilon > 0$. Studiare la dinamica della popolazione in funzione del numero iniziale N_0 di individui.

1.47.★ Decadimento radioattivo. Il *tempo di dimezzamento* τ di un materiale radioattivo è il tempo richiesto affinché metà di una data quantità di quel materiale decada. Detta $Q(t)$ la quantità di materiale ancora non decaduto, vale la legge:

$$Q' = -\alpha Q$$

per una certa costante $\alpha > 0$.

a. Ricavare la relazione tra il tempo di dimezzamento τ e il tasso istantaneo di decadimento α.

b. Il radio 226 ha tempo di decadimento di 1620 anni. Dopo quanti anni una data quantità di questo materiale è ridotta a tre quarti della quantità iniziale? Dopo quanti anni è ridotta a un quarto?

Meccanica, moto di un grave con attrito del mezzo

1.48.★ Caduta dei gravi con attrito dell'aria proporzionale alla velocità. Un corpo di massa m cade verticalmente (a partire dalla quiete) sotto l'azione della

forza di gravità. L'aria offre una resistenza alla caduta, secondo una forza proporzionale alla velocità. Indicando con $y(t)$ lo spazio percorso al tempo t in verticale, verso il basso, si avrà:

$$my'' = mg - hy'$$

dove $h > 0$ è un coefficiente di attrito. Si calcoli la funzione velocità $v(t) = y'(t)$, e la si studi per tempi lunghi e per tempi brevi.

1.49.★ Caduta di una goccia di pioggia. Applichiamo il modello dell'esercizio precedente per descrivere la caduta di una goccia di pioggia. E' noto sperimentalmente che la velocità di una goccia di pioggia vicino al suolo varia dai 2 agli 8 m/s; in questo esercizio assumiamo per la velocità limite il valore $v_\infty = 5m/s$. Supponiamo che una goccia di pioggia abbia massa $m = 0.033g$ (che corrisponde a supporre che sia una sferetta d'acqua di diametro $4mm$ circa).

a. In base a questi dati, calcolare il valore della costante h e scrivere la legge di caduta.

b. In base alla legge di caduta, calcolare il tempo T in cui la velocità della goccia raggiunge il 99% della velocità limite.

c. Calcolare, integrando $v(t)$, la funzione $y(t)$, e calcolare quindi di quanti metri deve cadere una goccia di pioggia prima di raggiungere il 99% della sua velocità limite.

1.50.★ Caduta di un grave nell'acqua. Il modello per la caduta di un grave in un mezzo denso deve tener conto non solo dell'attrito del mezzo ma anche della spinta di Archimede. Supponiamo che un corpo pesante cada verticalmente nell'acqua. L'attrito si può supporre proporzionale alla velocità, ma il corpo riceve anche una spinta verso l'alto pari al peso dell'acqua spostata. Il peso dell'acqua spostata è pari a

$$m_{acqua} \cdot g = \text{volume corpo} \cdot \text{densità acqua} \cdot g = m \cdot \frac{\text{densità acqua}}{\text{densità corpo}} g = mg \cdot \frac{1}{\rho}$$

dove ρ è il rapporto (adimensionale) tra la densità del corpo e quella dell'acqua, rapporto che supponiamo maggiore di 1 (corpo più denso dell'acqua, quindi che va a fondo).

a. Scrivere l'equazione differenziale del moto in questo caso, calcolare la funzione velocità $v(t)$ (supponendo la velocità iniziale nulla) e determinare la velocità limite.

b. Determinare la costante h e calcolare $v(t)$ per una sferetta d'acciaio del peso di 10g e densità 7g/cm^3 che raggiunge una velocità limite di 42cm/s.

1.51.★ Caduta di un grave con attrito dell'aria proporzionale alla velocità al quadrato. Un altro modello per l'attrito dell'aria, valido per velocità più elevate, prevede un attrito proporzionale al quadrato della velocità. L'equazione del moto diventa:

$$my'' = mg - h(y')^2$$

dove $h > 0$ è un coefficiente di attrito.

a. Si calcoli la funzione velocità $v(t)$ e si stabilisca se esiste anche in questo caso una velocità limite, supponendo una velocità iniziale $v_0 > 0$ (l'oggetto viene inizialmente *lanciato* verso il basso).

b. Si studi l'andamento di $v(t)$ al variare della condizione iniziale.

1.52.★ Moto di un proiettile con attrito dell'aria proporzionale alla velocità al quadrato. Un proiettile che si muove ad alta velocità nell'aria si può supporre subire un attrito proporzionale al *quadrato* della velocità. Supponiamo che un proiettile venga sparato in orizzontale ad alta velocità. Ci interessa la componente orizzontale del moto, perciò in prima approssimazione prescindiamo dalla gravità. (Fintanto che la velocità orizzontale è molto maggiore della velocità di caduta che avrebbe il corpo se tenessimo conto della gravità, l'errore che si commette non tenendone conto non sarà troppo grande).

a. Scrivere l'equazione del moto e risolverla calcolando $v(t)$; si suppone una velocità iniziale $v_0 > 0$.

b. Integrando $v(t)$ si calcoli lo spazio percorso in un tempo t.

c. Consideriamo un'arma da fuoco che spara una pallottola del peso di 20g con velocità iniziale di 200m/s e coefficiente d'attrito $h = 0.1\text{g/m}$. Scrivere esplicitamente la legge della velocità. Calcolare lo spazio percorso in un secondo e la velocità dopo un secondo.

1.53.★ Moto di un razzo a massa variabile. Un razzo di massa M contiene carburante di massa iniziale m_0, che viene consumato a ritmo costante, in modo che la massa effettiva del razzo è funzione del tempo:

$$m(t) = M + (m_0 - kt)^+$$

dove

$$(m_0 - kt)^+ = \begin{cases} m_0 - kt & \text{se } m_0 - kt > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il razzo si muove con velocità $v(t)$ secondo l'equazione:

$$m(t)\frac{dv}{dt} = -m(t)g - A\frac{dm}{dt}$$

dove g è l'accelerazione di gravità e A la velocità con cui il carburante è spinto fuori. L'equazione vale nell'intervallo di tempo $t \in \left[0, \frac{m_0}{k}\right]$, ossia finché il carburante non è esaurito. Il termine $-A\frac{dm}{dt}$ rappresenta la forza propulsiva (ed è positivo perché $\frac{dm}{dt} < 0$): la forza è proporzionale alla velocità con cui il carburante è bruciato. Risolvere l'equazione in $v(t)$ e calcolare la velocità nell'istante in cui il carburante è esaurito[8].

Termodinamica, legge di Newton del raffreddamento

1.54.★ Se un corpo caldo è immerso in un ambiente tenuto a temperatura costante T_e, questo si raffredda, nel tempo, con temperatura $T(t)$ che obbedisce alla legge di Newton secondo cui la velocità di raffreddamento è proporzionale alla differenza di temperatura tra il corpo e l'ambiente:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_e).$$

Un oggetto metallico alla temperatura di 100°C viene immerso per raffreddarlo in un liquido tenuto a temperatura di 10°C. Se dopo 1 minuto la sua temperatura è scesa a 80°C, in quanto tempo raggiungerà la temperatura di 20°C?

(*Suggerimento:* dopo aver risolto il problema di Cauchy lasciando la costante k indicata, si usi l'informazione sulla temperatura dopo un minuto per calcolare k, e poi mediante questo valore si risolva il problema).

Elettrodinamica, circuiti elettrici del prim'ordine

1.55.★ Circuiti elettrici LR. Un circuito elettrico contiene un induttore di induttanza L e un resistore di resistenza R collegati in serie; al circuito è applicata una forza elettromotrice $V(t)$. Sotto queste ipotesi l'intensità di corrente $i(t)$ nel

[8] Naturalmente questo modello non è realistico perché non considera l'attrito dell'aria; se modifichiamo l'equazione inserendo un attrito proporzionale a v^2 otteniamo un'equazione né lineare né a variabili separabili; l'equazione con attrito proporzionale a v invece è lineare, ma porta al calcolo di un integrale non elementare: questo è il motivo per cui nell'esercizio abbiamo considerato questa situazione semplificata. Si potrebbe anche obiettare che per un razzo che sale molto di quota l'accelerazione di gravità non è costante, ma decresce con la quota... Come si vede, impostare un modello realistico porta facilmente ad equazioni complicate, di cui è impossibile calcolare la soluzione esatta.

circuito soddisfa l'equazione differenziale:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V.$$

Si risolva l'equazione, con condizione iniziale $i(0) = 0$, e si studi il comportamento di i per tempi lunghi, nei casi:

a. $V(t) = E$ costante (corrente continua);

b. $V(t) = A\sin\omega t$ (corrente alternata).

Chimica, processi del second'ordine

1.56.★ Reazioni chimiche a due reagenti. In certi tipi di reazioni chimiche una nuova sostanza C si forma a partire da due sostanze date, A e B. La velocità di crescita della nuova sostanza è proporzionale congiuntamente alla quantità rimanente di ciascuno dei due reagenti A, B.

Indichiamo con $x(t)$ la quantità di sostanza C presente all'istante t (perciò $x(0) = 0$), e con s_A, s_B le quantità inizialmente presenti delle sostanze A, B, rispettivamente. Se per formare un'unità di sostanza C occorrono n unità della sostanza A e m unità della sostanza B, all'istante t la quantità di sostanza A rimasta è

$$(s_A - nx)$$

e la quantità di sostanza B rimasta è

$$(s_B - mx).$$

Per quanto detto, quindi, la velocità con cui si forma la sostanza C sarà

$$\frac{dx}{dt} = k(s_A - nx)(s_B - mx).$$

(Il termine *processo del second'ordine* si usa in questo caso per indicare la proporzionalità congiunta da due quantità variabili). Naturalmente, l'equazione ha senso fin quando entrambi i fattori $(s_A - nx)$, $(s_B - mx)$ sono *positivi*. (Oltre quell'istante uno dei reagenti è esaurito e la reazione non ha più luogo).

a. Risolvere il problema di Cauchy con la condizione $x(0) = 0$. Supporre $ns_B - ms_A \neq 0$; come si vedrà, questo ha importanza nel calcolo.

b. Si consideri ora il caso di una reazione in cui:

- un'unità di sostanza C si forma combinando un'unità di A e due unità di B;
- inizialmente abbiamo 30g di sostanza A e 40g di sostanza B;
- in 20 minuti si formano 12g di sostanza C.

Scrivere esplicitamente la funzione $x(t)$ in questo caso, studiarne l'andamento e stabilire qual è il massimo valore raggiungibile da x, e quale quantità della sostanza C si è formata dopo un'ora.

1.57.★ Concentrazione di una sostanza in una soluzione. Una sostanza (inizialmente solida) si scioglie in una soluzione. La soluzione si dice *satura* quando la concentrazione[9] della sostanza dissolta ha raggiunto un valore limite c che non non può essere superato.

Indicando con $x(t)$ la quantità di sostanza che all'istante t è *non è ancora sciolta* e con x_0 la quantità iniziale di sostanza, si ha che all'istante t la quantità di sostanza già sciolta è $(x_0 - x)$ e la concentrazione è $\frac{x_0-x}{v}$, dove v indica il volume (costante) del liquido. E' noto che la velocità con cui la sostanza si scioglie è proporzionale congiuntamente a:

- la quantità di sostanza ancora non disciolta;
- la differenza tra la concentrazione della soluzione satura e la concentrazione effettiva all'istante t.

Perciò si ha:

$$-\frac{dx}{dt} = kx\left(c - \frac{x_0 - x}{v}\right)$$

per una certa costante $k > 0$. (Mano a mano che la sostanza si scioglie, la quantita ancora non sciolta diminuisce, quindi $\frac{dx}{dt} < 0$). Il tutto ha senso purché sia $\left(c - \frac{x_0-x}{v}\right) \geq 0$, il che in particolare significa che se la condizione iniziale non rispetta il vincolo

$$x_0 < cv,$$

la funzione $x(t)$ non potrà tendere a zero[10], ma raggiungerà il valore limite $x_0 - cv$.

a. Risolvere il problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = x_0$ e studiare l'andamento della soluzione (Supporre $x_0 < cv$).

b. Una soluzione di acqua e sale satura contiene circa 0.12kg di sale in un litro d'acqua. Si versano 25kg di sale in una vasca di 400 litri d'acqua. Se in 5 minuti si sciolgono 9kg di sale, quanto sale si scioglie in un'ora? Dopo quanto tempo si saranno sciolti 20kg di sale?

---

[9] Ricordiamo che la concentrazione è il rapporto tra la quantità di sostanza dissolta (massa) e il volume della soluzione.

[10] Se mettiamo nella soluzione più sostanza solida di quella che la satura, una parte non si scioglierà.

Soluzioni § 1.1

1.1. *a.* Equazione a variabili separabili. Soluzioni costanti:

$$y = 0.$$

Altre soluzioni: $$\int \frac{dy}{y^3} = \int \sin 2x dx = \int 2 \sin x \cos x dx$$

$$-\frac{1}{2y^2} = \sin^2 x + c; \quad y^2(x) = -\frac{1}{2(\sin^2 x + c)}$$

$$y(x) = \pm\sqrt{-\frac{1}{2(\sin^2 x + c)}}.$$

b. Imponiamo $y(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ in $y^2(x) = -\frac{1}{2(\sin^2 x + c)}$:

$$2 = -\frac{1}{2(\frac{1}{2} + c)}; c = -\frac{3}{4};$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2(\frac{3}{4} - \sin^2 x)}}.$$

(Scegliamo il segno $+$ davanti alla radice perché la condizione iniziale impone un valore positivo a y).

La soluzione è definita sul più ampio intervallo[11] contenente $\frac{\pi}{4}$ in cui è $\frac{3}{4} - \sin^2 x > 0$, cioè $|\sin x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi

$$\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right).$$

1.2. *a.* Equazione lineare.

$$a(x) = \tan x; A(x) = -\log|\cos x|;$$

$$y(x) = e^{\log|\cos x|}\left(c + \int e^{-\log|\cos x|} 3 \sin 2x dx\right) =$$

[11] v. Osservazione 1.1 riguardo al significato di "intervallo di definizione della soluzione di un problema di Cauchy".

$$= |\cos x| \left(c + \int \frac{6 \sin x \cos x}{|\cos x|} dx \right) = \text{(negli intervalli in cui } \cos x > 0)$$

$$= \cos x \left(c + \int 6 \sin x dx \right) = \cos x (c - 6\cos x) = c\cos x - 6\cos^2 x.$$

b. $$y(0) = c - 6 = 1; c = 7;$$

$$y(x) = 7\cos x - 6\cos^2 x.$$

Anche se la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, poiché nell'equazione compare la funzione $\tan x$, definita solo per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, il più ampio intervallo contenente $x = 0$ in cui l'equazione e la soluzione hanno senso è

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

1.3. *a.* $y \equiv 1$ soluzione costante. Integrale generale:

$$y(x) = 1 + ce^{1/x} \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

b. $$y(x) = 1 + e^{1+1/x}, \quad \text{definita in } (-\infty, 0).$$

1.4. *a.* $$y(x) = ce^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}.$$

b. $$y(x) = e^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}.$$

1.5. *a.* Equazione a variabili separabili. Soluzione costante $y = 0$. Altrimenti,

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx; \qquad -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y(x) = -\frac{2}{x^2 + 2c}$$

b. $$y(0) = -\frac{1}{c} = 1; c = -1$$

$$y(x) = \frac{2}{2 - x^2}. \quad \text{Soluzione definita in } \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2} \right).$$

1.6. *a.* Equazione lineare.

$$a(x) = 2x;\ A(x) = \int a(x)dx = x^2$$

$$y = e^{-x^2}\left\{c + \int e^{x^2} x\sin(x^2)dx\right\}.$$

$$\int e^{x^2} x\sin(x^2)dx = \left[x^2 = t; dx = \frac{dt}{2}\right] = \frac{1}{2}\int e^t \sin t dt =$$

(con integrazioni per parti standard)

$$= \frac{1}{4}e^t(\sin t - \cos t) = \frac{1}{4}e^{x^2}(\sin(x^2) - \cos(x^2)).$$

$$y = e^{-x^2}\left\{c + \frac{1}{4}e^{x^2}(\sin(x^2) - \cos(x^2))\right\} = ce^{-x^2} + \frac{1}{4}(\sin(x^2) - \cos(x^2)).$$

b.
$$\frac{3}{4} = y(0) = c - \frac{1}{4}; c = 1$$

$$y = e^{-x^2} + \frac{1}{4}(\sin(x^2) - \cos(x^2)).$$

1.7. *a.* Equazione a variabili separabili. Soluzioni costanti: $y = 0; y = -2$.
Soluzioni non costanti:

$$\int \frac{dy}{y(2+y)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y(2+y)} = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{2+y}\right]dy = \frac{1}{2}\log\left|\frac{y}{2+y}\right| = \log|x| + c.$$

$$\left|\frac{y}{2+y}\right|^{1/2} = c|x| \quad \text{con } c > 0; \qquad \frac{y}{2+y} = cx^2 \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{2cx^2}{1 - cx^2}.$$

b. Imponiamo la condizione iniziale

$$2 = \frac{2c}{1-c};\ c = \frac{1}{2};\ \ y(x) = \frac{2x^2}{2 - x^2}$$

c. La soluzione del problema di Cauchy è definita per $x \in \left(-\sqrt{2}, 0\right)$. Questo è il più ampio intervallo contenente -1 in cui i coefficienti dell'equazione di partenza e la soluzione sono definiti.

Notiamo che è accettabile anche la risposta (meno restrittiva): definita per $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Questo è il più ampio intervallo contenente -1 in cui la soluzione è definita; in $x = 0$ formalmente l'equazione perde significato ma nel senso dei limiti è comunque verificata:

$$y' = \left(\frac{2x^2}{2-x^2}\right)' = \frac{8x}{(2-x^2)^2};$$

$$2y + y^2 = 2\left(\frac{2x^2}{2-x^2}\right) + \left(\frac{2x^2}{2-x^2}\right)^2 = \frac{8x^2}{(2-x^2)^2};$$

$$\frac{2y+y^2}{x} = \frac{8x^2}{(2-x^2)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{8x}{(2-x^2)^2} = y' \quad \forall x \neq 0,$$

ed entrambi i membri tendono a zero per $x \to 0$. In questo senso diciamo che l'equazione

$$y' = \frac{2y+y^2}{x}$$

è soddisfatta anche in $x = 0$, nel senso dei limiti.

1.8. *a.* Equazione lineare.

$$a(x) = 1 - 2x; A(x) = \int a(x)dx = x - x^2$$

$$y = e^{x^2-x}\left\{c + \int e^{-x^2+x} x e^{x^2} dx\right\} = e^{x^2-x}\left\{c + \int e^x x dx\right\} =$$

$$= e^{x^2-x}\{c + e^x(x-1)\} = ce^{x^2-x} + e^{x^2}(x-1).$$

b.

$$2 = y(0) = c - 1; c = 3;$$

$$y = 3e^{x^2-x} + e^{x^2}(x-1).$$

1.9. *a.* Soluzioni costanti: $y = 0$. Integrale generale:

$$y = -\frac{1}{\frac{3}{4}x^{4/3} + c}$$

b. $$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x^{4/3}},$$

soluzione definita in $$\left(-\left(\frac{2}{3}\right)^{3/4}, \left(\frac{2}{3}\right)^{3/4}\right).$$

1.10. Equazione lineare.

$$a(x) = \frac{x}{x^2-1}; A(x) = \int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\log|x^2-1| =$$

$$= \frac{1}{2}\log(1-x^2) = \log\sqrt{1-x^2}$$

(in un intorno di $x = 0$, in cui dobbiamo assegnare la condizione iniziale, $|x^2-1| = 1-x^2$).

$$y(x) = e^{-\log\sqrt{1-x^2}}\left\{c + \int e^{\log\sqrt{1-x^2}}3xdx\right\} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{c + \int \sqrt{1-x^2}\,3xdx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{c - \left(1-x^2\right)^{3/2}\right\} = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} - \left(1-x^2\right).$$

Imponiamo la condizione iniziale:

$$y(0) = c - 1 = 3; c = 4.$$

La soluzione è: $$y(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} - \left(1-x^2\right)$$

e il più ampio intervallo contenente il punto $x = 0$ su cui la soluzione e i coefficienti dell'equazione sono definiti è $(-1, 1)$.

1.11. *a.* Equazione a variabili separabili. $y = 1$ soluzione costante. Per $y \neq 1$,

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int xe^{-x}dx$$

$$-\frac{1}{y-1} = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

$$y = 1 + \frac{1}{e^{-x}(x+1)+c}.$$

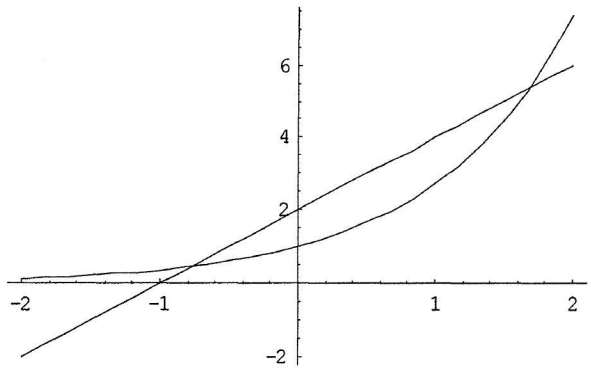
b. Imponiamo la condizione di Cauchy:

$$3 = y(0) = 1 + \frac{1}{1+c}; \frac{1}{1+c} = 2; 1 + c = \frac{1}{2}; c = -\frac{1}{2}.$$

La soluzione è: $$y(x) = 1 + \frac{1}{e^{-x}(x+1) - \frac{1}{2}}.$$

Dev'essere $$e^{-x}(x+1) - \frac{1}{2} \neq 0, \text{cioè } e^x \neq 2(x+1),$$

che risolta con un confronto grafico



dà $$x \neq \alpha, x \neq \beta \text{ con } \alpha \in (-1, 0), \beta \in (1, 2).$$

Il più ampio intervallo contenente $x = 0$ che rispetta queste condizioni è

$$(\alpha, \beta),$$

intervallo di definizione della soluzione del problema.

1.12. *a.* $$y(x) = ce^{-x+\frac{x^2}{2}} - e^{-x}.$$

b. $$y(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{-x+\frac{x^2}{2}} - e^{-x}.$$

1.13. Equazione a variabili separabili. La soluzione costante $y = 0$ non soddisfa la condizione di Cauchy; per $y \neq 0$ riscriviamo:

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{x^2-1} + c$$

$$y^2 = \frac{1}{c_1 - 2\sqrt{x^2-1}}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y\left(\sqrt{2}\right) = 2$ troviamo

$$4 = \frac{1}{c_1 - 2}, \text{ da cui } c_1 = \frac{9}{4}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} - 2\sqrt{x^2-1}}}$$

(dove il segno $+$ davanti alla radice dipende dal fatto che la soluzione vale 2 in $\sqrt{2}$).

Intervallo massimale di definizione:

$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ è definita per $x > 1$ o $x < -1$. Poiché la condizione iniziale è assegnata in $x_0 = 2$, l'intervallo massimale dev'essere contenuto nella semiretta $x > 1$; inoltre dev'essere

$$\frac{9}{4} - 2\sqrt{x^2-1} > 0; \sqrt{x^2-1} < \frac{9}{8}; x^2 < \frac{145}{64}$$

quindi l'intervallo cercato è: $\left(1, \frac{\sqrt{145}}{8}\right)$.

1.14. Equazione lineare. Integrale generale

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}\left\{c + \log x + \frac{x^2}{2}\right\} \quad \text{in } (0, +\infty).$$

b. $$y = \frac{1}{1+x^2}\left\{\frac{7}{2} + \log x + \frac{x^2}{2}\right\} \text{ per } x \in (0, \infty).$$

1.15. *a.* Soluzioni costanti: $y = 0$. Integrale generale:

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}\log|2x+1| + c}$$

b. $$y(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\log|2x+1|},$$

soluzione definita nell'intervallo: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{e^2-1}{2}\right)$.

1.16. *a.* $$y(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left\{c + \frac{(1+x)^3}{3}\right\}.$$

b. $$y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left\{\frac{2}{3} + \frac{(1+x)^3}{3}\right\} \text{ per } x \in (-1,1)$$

perché $(-1,1)$ è il più ampio intervallo contenente $x_0 = 0$, in cui la soluzione e i coefficienti dell'equazione sono definiti. E' accettabile anche la risposta "per $x \in (-1,\infty)$" in quanto la soluzione è definita in questo intervallo; in $x = 1$ la soluzione si annulla, il denominatore del coefficiente $a(x)$ si annulla ma, nel senso dei limiti (si veda l'esercizio 1.7), l'equazione è ancora soddisfatta.

1.17. Risolviamo l'equazione a variabili separabili:

$$\int \cos y dy = \int \sin x dx$$

$$\sin y = -\cos x + c$$

Imponiamo la condizione iniziale:

$$\sin\frac{\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{2} + c; \quad \frac{1}{2} = c$$

$$\sin y = \frac{1}{2} - \cos x.$$

Dobbiamo risolvere l'equazione in y, quando x varia in un intorno di $x = \frac{\pi}{2}$. La condizione

$$-1 \le \frac{1}{2} - \cos x \le 1$$

dà $$-\frac{1}{2} \le \cos x \le \frac{3}{2}, \text{ quindi } -\frac{2}{3}\pi \le x \le \frac{2}{3}\pi.$$

Inoltre dall'equazione vediamo che dev'essere $\cos y \neq 0$, quindi $\sin y \neq \pm 1$, quindi

$$\frac{1}{2} - \cos x \neq \pm 1,$$

perciò l'intervallo in cui la soluzione è definita è

$$\left(-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right).$$

In questo intervallo risulta $y(x) = \arcsin\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)$.

Notiamo che negli estremi dell'intervallo in effetti la funzione arcsin non è derivabile.

1.18. *a.* $y(x) = ce^{-\frac{2}{3}x^3} + \frac{3}{2}$.

b. $y(x) = \frac{3}{2} - e^{-\frac{2}{3}x^3}$.

c. L'intervallo è $\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}\log\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

1.19. *a.* Equazione a variabili separabili. Soluzioni costanti: nessuna.
Risolviamo l'equazione:

$$\frac{dy}{1+y^2} = x^2 dx; \int \frac{dy}{1+y^2} = \int x^2 dx$$

$$\arctan y = \frac{x^3}{3} + c;$$

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + c\right).$$

b. $1 = y(0) = \tan c; c = \frac{\pi}{4} + k\pi;$

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right).$$

(in altre parole, l'aggiunta della costante $+ k\pi$ nell'argomento della tangente è irrilevante).

Poiché l'argomento della tangente dev'essere diverso da $\frac{\pi}{2} + k\pi$ e l'intervallo di definizione deve contenere $x = 0$, la soluzione è definita per:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{9\pi}{4} < x^3 < \frac{3\pi}{4}$$

$$-\sqrt[3]{\frac{9\pi}{4}} < x < \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}$$

1.20.

(*a*) Non lineare, ma a variabili separabili:

$$y' = a(x)b(y) \text{ con } a(x) = \frac{1}{x}, b(y) = \frac{1}{y}.$$

(*b*) Non lineare, nemmeno a variabili separabili.

(*c*) Non lineare, ma a variabili separabili:

$$y' = a(x)b(y) \text{ con } a(x) = 3e^{-x^2-x}, b(y) = y.$$

(*d*) Lineare $\left(a(x) = -e^x, f(x) = \frac{1}{x}\right)$, ma non a variabili separabili.

(*e*) Non lineare, nemmeno a variabili separabili.

1.21.

(*a*) Equazione a variabili separabili $y' = a(x)b(y)$. La funzione $a(x) = \frac{\cos x}{x}$ è discontinua in $x = 0$, perciò non si può garantire esistenza di soluzioni.

(*b*) Equazione a variabili separabili $y' = a(x)b(y)$. La funzione $a(x) = \frac{\log x}{x}$ è continua in un intorno di $x = 2$ (precisamente, in $(0, \infty)$), la funzione $b(y) = y\log|y|$ è continua (prolungabile con continuità) ma non è C^1 in un intorno di $y = 0$, la soluzione del problema esiste (ma non si può garantire l'unicità), in un intorno di $x = 2$, che potrebbe essere più ristretto di $(0, \infty)$.

(*c*) Equazione lineare $y' + a(x)y = f(x)$. Le funzioni $a(x) = -\frac{\arctan x}{\log x}$ e $f(x) = \frac{e^x}{\log x}$ sono continue in $(1, +\infty)$ (questo è il più ampio intervallo contenente $x = 2$ in cui sono continue), quindi la soluzione del problema esiste ed è unica, definita in tutto $(1, +\infty)$.

(*d*) Equazione a variabili separabili $y' = a(x)b(y)$. La funzione $a(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$, la funzione $b(y) = \frac{|y|}{1-y^2}$ è continua in $(-1, 1)$ e, pur non essendo C^1, ha rapporto incrementale limitato in ogni intervallo del tipo $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, quindi la soluzione del problema esiste ed è unica in un intorno di $x = 0$, contenuto in $(-1, 1)$.

1.22. Equazione a variabili separabili $y' = a(x)b(y)$ con a, b continue in $\mathbb{R}$, perciò siamo nelle ipotesi del teorema di esistenza.

Inoltre, b è derivabile con continuità per $y \neq 1$. La condizione di Cauchy è assegnata proprio in $y = 1$, in cui non solo b non è derivabile, ma ha tangente verticale (rapporto incrementale illimitato). Perciò non valgono le ipotesi del teorema di unicità.

Risolviamo l'equazione. Soluzioni costanti: $y = 1$ (che è già una soluzione del problema di Cauchy). Altre soluzioni:

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y-1}} = \int x dx$$

$$\frac{3}{2}(y-1)^{2/3} = \frac{x^2}{2} + c$$

Imponiamo la condizione di Cauchy prima di esplicitare:

$$y(3) = 1, \text{ perciò } \quad 0 = \frac{9}{2} + c; c = -\frac{9}{2};$$

$$3(y-1)^{2/3} = \left(x^2 - 9\right)$$

$$y(x) = 1 \pm \left[\frac{(x^2-9)}{3}\right]^{3/2}$$

Sono due diverse soluzioni C^1 del problema di Cauchy, che si aggiungono alla soluzione costante uguale a 1.

Osserviamo che (studiamo ad es. la soluzione col segno $+$)

$$y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x^2-9}{3}}\frac{2}{3}x = x\sqrt{\frac{x^2-9}{3}}, \text{ perciò } y'(3) = 0.$$

Questo vuol dire che sono soluzioni del problema di Cauchy non solo

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = 1 + \left[\frac{(x^2-9)}{3}\right]^{3/2}$$

$$y_3 = 1 - \left[\frac{(x^2-9)}{3}\right]^{3/2}$$

ma anche, ad esempio, $y_4 = \begin{cases} 1 + \left[\frac{(x^2-9)}{3}\right]^{3/2} & \text{se } x \geq 3 \\ 1 & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$

o quelle che si ottengono raccordando in tutti i modi possibili una delle 3 soluzioni per $x \leq 3$ con un'altra delle 3 soluzioni per $x \geq 3$.

1.23. *a.* Equazione lineare del prim'ordine.

$$a(t) = 2t;\ A(t) = \int 2t\,dt = t^2;$$

$$y(t) = e^{-t^2}\left\{c + \int e^{t^2} t^3 dt\right\}.$$

Calcoliamo ora:

$$\int e^{t^2} t^3 dt = \int \left(e^{t^2} 2t\right)\frac{t^2}{2} dt = \text{per parti} = e^{t^2}\frac{t^2}{2} - \int t e^{t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} e^{t^2} t^2 - \frac{1}{2} e^{t^2}.$$

Quindi $$y(t) = e^{-t^2}\left\{c + \frac{1}{2} e^{t^2} t^2 - \frac{1}{2} e^{t^2}\right\} = c e^{-t^2} + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2}.$$

b. $$y(0) = c - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1$$

$$y(t) = e^{-t^2} + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2}.$$

1.24. *a.* $$y(x) = \log\left(\frac{1}{2} x^2 + c\right).$$

b. $$y(x) = \log\left(\frac{1}{2} x^2 + e\right),$$ soluzione su tutto $\mathbb{R}$.

1.25. *a.* Equazione lineare del prim'ordine.

$$a(x) = \frac{2}{x};\ A(x) = \int a(x) dx = 2\log|x|;$$

$$y(x) = e^{-2\log|x|}\left\{c + \int e^{2\log|x|} e^{-x} dx\right\} = \frac{1}{x^2}\left\{c + \int x^2 e^{-x} dx\right\}.$$

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \left\{-2x e^{-x} + \int 2 e^{-x} dx\right\} =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2 e^{-x}.$$

Quindi l'integrale generale è:

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\{c - e^{-x}(x^2 + 2x + 2)\} = \frac{c}{x^2} - e^{-x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right).$$

b. $$y(1) = c - \frac{5}{e} = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{e}.$$

Quindi la soluzione del problema è:

$$y(x) = \frac{5}{ex^2} - e^{-x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right), \text{ in } (0, +\infty).$$

1.26. *a.* $$y(x) = -\log(c + \cos x)$$

b. $$y(x) = -\log(\cos x),$$

soluzione in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

1.27. *a.* $$y(x) = e^{2\sin x} + ce^{\sin x}.$$

b. $$y(x) = e^{2\sin x} + (1 - e)e^{\sin x}.$$

1.28. *a.* $$y = 0; y = 1; y(x) = \frac{x}{x + c}.$$

b. $$y(x) = \frac{2x}{2x - 1},$$

soluzione in $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

1.29. *a.* $$y = 1, y = 3, y(x) = \frac{3 - ce^{2x}}{1 - ce^{2x}} \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

b. $$y(x) = \frac{1 + 3e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

c. Definita in $\mathbb{R}$; sì, è limitata.

1.30. *a.* $$y(x) = \tan(c + \log|x|)$$

b. $$y(x) = \tan(\log|x|),$$

soluzione in $\left(e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

1.31. *a.* $y(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 3x - 1}$

b. $\left(\dfrac{-3-\sqrt{21}}{6}, \dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}\right)$

(perché la soluzione non è derivabile nei punti in cui il radicando si annulla).

1.32. *a.* $y(x) = ce^{-x} + e^{-x}\int e^x \sin x\, dx.$

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left\{e^x \cos x + \int e^x \sin x dx\right\}$$

da cui $$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

e $$y(x) = ce^{-x} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) = ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

b. $$y(0) = c - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1.$$

$$y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x).$$

1.33. *a.* Equazione a variabili separabili:

$$\int y\, dy = \int (2x - 1)\, dx$$

$$\frac{1}{2} y^2 = x^2 - x + c$$

$$y(x) = \pm\sqrt{2(x^2 - x + c)}$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow -1 = -\sqrt{2c}$$

(scegliendo il segno $-$ davanti alla radice);

$$2c = 1;\ c = \frac{1}{2}$$

La soluzione è: $$y(x) = -\sqrt{2x^2 - 2x + 1}$$

b. La soluzione è definita per $2x^2 - 2x + 1 \geq 0$, ossia su tutto $\mathbb{R}$, ed è regolare su tutto $\mathbb{R}$ perché il radicando non si annulla mai.

1.34. Occorre che sia:

$$a(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

continua in un intorno di x_0, e

$$b(y) = \sqrt[3]{y}$$

derivabile con continuità in un intorno di y_0. Questo è vero per

$$x_0 \neq \pm 1;\ y_0 \neq 0.$$

1.35. $x_0 \neq \pm 1; \forall y_0.$

1.36. $x_0 \neq 0; y_0 \neq 0, \pm 1.$

1.37. $\forall x_0; y_0 \neq 0.$

1.38. $x_0 \neq 2; \forall y_0.$

1.39. $x_0 \neq 0, \pm 1; y_0 \neq 0.$

1.40. $x_0 > 0, x_0 \neq 1; -1 < y_0 < 1.$

1.41. $x_0 \neq -1; \forall y_0.$

1.42. $-1 \leq x_0 \leq 1; y_0 > 0, y_0 \neq 1.$

1.43. Si ha:

$$N(t) = N_0 e^{(\lambda - \mu)t},$$

perciò la popolazione cresce esponenzialmente nel tempo se $\lambda > \mu$, mentre si estingue esponenzialmente se $\lambda < \mu$.

1.44. Si ha:

$$N = N_0 e^{kt} \text{ con: } 2N_0 = N_0 e^k,$$

quindi

$$k = \log 2.$$

Perciò $$\frac{N(2.5)}{N_0} = e^{2.5 \cdot \log 2} = 2^{2.5} = 4\sqrt{2} \simeq 2.828.$$

In 2 ore e mezza la popolazione cresce di un fattore circa 2.8.

1.45. *a.* Sia $c(t)$ la percentuale di CO_2 nella stanza all'istante t (t misurato in minuti). Perciò

$$\frac{c(t)}{100} \cdot 120$$

è il volume totale di CO_2 (in m^3) presente nella stanza all'istante t. In un intervallo di tempo $\Delta t = 1$ min. vengono tolti $20m^3$ d'aria che contengono $\frac{c(t)}{100} \cdot 20m^3$ di CO_2 ed immessi altri $20m^3$ che contengono $\frac{0.1}{100} \cdot 20m^3$ di CO_2. Perciò nell'intervallo Δt si ha un incremento (negativo) di volume di CO_2 pari circa a

$$\left(-\frac{c(t)}{100} \cdot 20 + \frac{0.1}{100} \cdot 20\right) = \frac{-20c(t) + 2}{100},$$

e un incremento (negativo) percentuale di CO_2 pari circa a

$$\Delta c(t) = \frac{-20c(t) + 2}{100} \cdot \frac{100}{120} = \frac{1}{60}(1 - 10c(t)).$$

Questo è l'incremento percentuale in un intervallo di un minuto; in un qualsiasi intervallo Δt l'incremento sarà, proporzionalmente,

$$\Delta c(t) = \frac{1}{60}(1 - 10c(t))\Delta t.$$

Dividendo ora per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$ si ottiene l'equazione differenziale

$$c' = \frac{1}{60}(1 - 10c)$$

che ha integrale generale $$c(t) = ke^{-\frac{1}{6}t} + 0.1.$$

Imponiamo la condizione iniziale. La percentuale iniziale è

$$c(0) = 0.3,$$

quindi $$0.3 = k + 0.1, \; k = 0.2,$$

$$c(t) = 0.2e^{-\frac{1}{6}t} + 0.1.$$

b. Dopo 10 minuti la percentuale sarà

$$c(10) = 0.2e^{-10/6} + 0.1 \simeq 0.1378.$$

c. Cerchiamo t per cui si ha:

$$c(t) = 0.2 = 0.2e^{-\frac{1}{6}t} + 0.1.$$

$$e^{-\frac{1}{6}t} = \frac{1}{2}; t = 6\log 2 \simeq 4.16\text{min} \simeq 4\text{min } 10\text{sec}.$$

La percentuale di CO_2 scende al 2% dopo circa 4min 10sec.

1.46. La soluzione è data da:

$$N(t) = \frac{kN_0e^{\varepsilon t}}{k - N_0 + N_0e^{\varepsilon t}}.$$

L'andamento è qualitativamente diverso nei 3 casi:
1) $N_0 < k$. In questo caso $N(t)$ è monotona crescente e tende al limite k. La popolazione cioè cresce fino a saturare l'ambiente, poi si assesta sul valore costante k.
2) $N_0 = k$. Si ha la soluzione di equilibrio $N = k$: il numero di individui rimane costante nel tempo.
3) $N_0 > k$. In questo caso $N(t)$ è monotona decrescente e tende al limite k. La popolazione cioè diminuisce fino a raggiungere il valore costante k, che è quello sostenibile dall'ambiente.

1.47. *a.* Risolvendo il problema di Cauchy con condizione iniziale $Q(0) = Q_0$ si trova la legge

$$Q(t) = Q_0e^{-\alpha t}.$$

Ora per definizione di tempo di dimezzamento si ha

$$Q(\tau) = \frac{Q_0}{2}, \text{ cioè } Q_0e^{-\alpha\tau} = \frac{Q_0}{2},$$

il che implica $$\alpha\tau = \log 2.$$

b. Poiché $\tau = 1620$ anni,

$$\alpha = \frac{\log 2}{1620 \text{ anni}}$$

perciò $$Q(t) = Q_0e^{-\frac{\log 2}{1620 \text{ anni}}t}.$$

Questa espressione uguaglia $\frac{3}{4}Q_0$ per

$$e^{-\frac{\log 2}{1620 \text{ anni}}t} = \frac{3}{4}; \quad \frac{\log 2}{1620 \text{ anni}}t = \log\frac{4}{3};$$

$$t = \frac{\log\frac{4}{3} \cdot 1620 \text{ anni}}{\log 2} = 0.415 \cdot 1620 \text{ anni} \simeq 672 \text{ anni}.$$

Analogamente, il materiale si sarà ridotto a $\frac{1}{4}Q_0$ per

$$e^{-\frac{\log 2}{1620 \text{ anni}}t} = \frac{1}{4}; \qquad \frac{\log 2}{1620 \text{ anni}}t = 2\log 2;$$

$$t = 2 \cdot 1620 \text{ anni} = 3240 \text{ anni}.$$

1.48. Ponendo $v = y'$ si ha

$$v' = g - \frac{h}{m}v,$$

equazione che risolta dà

$$v(t) = \frac{mg}{h} + ke^{-\frac{h}{m}t}, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $v(0) = 0$ (il corpo cade a partire dalla quiete) si trova

$$v(t) = \frac{mg}{h}\left(1 - e^{-\frac{h}{m}t}\right)$$

Per $t \to +\infty, v(t) \to \frac{mg}{h}$. Ciò significa che il corpo si stabilizza su una velocità limite proporzionale al peso del corpo stesso, e tanto minore quanto maggiore è l'attrito.

Invece, per $t \to 0^+$ si ha

$$v(t) \sim \frac{mg}{h}\left(\frac{h}{m}t\right) = gt,$$

che è lo stesso andamento che avremmo in assenza di attrito: poiché il corpo cade a partire dalla quiete, nei primi istanti la velocità è bassa e quindi l'attrito, proporzionale alla velocità, è trascurabile; di conseguenza la legge di caduta per tempi piccoli è indistinguibile da quella in assenza di attrito.

1.49. *a.* In base all'esercizio precedente,

$$v_\infty = \frac{mg}{h}, \text{ quindi } h = \frac{mg}{v_\infty} =$$

$$= \frac{0.033g \cdot 9.8m/s^2}{5m/s} = 0.06468g/s$$

(nell'ultima riga g sta per grammi, non accelerazione di gravità!)

b. Imponendo

$$v(t) = 0.99v_\infty$$

si ha:
$$\frac{mg}{h}\left(1-e^{-\frac{h}{m}t}\right)=0.99\frac{mg}{h}$$

$$e^{-\frac{h}{m}t}=0.01;\ \frac{h}{m}t=2\log 10;$$

$$T=2\log 10\frac{m}{h}$$

e usando i valori precedenti per m, h:

$$T=2\log 10\frac{0.033g}{0.06468g/s}\simeq 2.35s.$$

c.
$$y(t)=\int_0^t v(\tau)d\tau=\int_0^t\frac{mg}{h}\left(1-e^{-\frac{h}{m}\tau}\right)d\tau=$$

$$=\frac{mg}{h}\left[t-\frac{m}{h}\left(1-e^{-\frac{h}{m}t}\right)\right].$$

Calcoliamo ora

$$y(T)=5\left[2.35-0.51\left(1-e^{-4.606}\right)\right]m\simeq 9.23m.$$

Dopo circa 9.23 metri di caduta (in 2.35 secondi) la velocità della goccia di pioggia raggiunge il 99% della sua velocità limite.

1.50. *a.* L'equazione del moto è:

$$my''=mg-mg\left(\frac{1}{\rho}\right)-hy'$$

Si ottiene
$$y''=g\left(1-\frac{1}{\rho}\right)-\frac{h}{m}y'.$$

Come si vede, l'esito netto della spinta di Archimede è solo quello di ridurre di una certa frazione l'accelerazione di gravità. La soluzione quindi, ragionando come nel caso della caduta nell'aria (es. 1.48) è:

$$v(t)=\frac{mg\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}{h}\left(1-e^{-\frac{h}{m}t}\right)$$

e la velocità limite è
$$v_\infty=\frac{mg\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}{h}.$$

b. Per $v_\infty = 42\text{cm/s}$, $m = 10\text{g}$, $\rho = 7$, si ha

$$h = \frac{mg\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)}{v_\infty} = \frac{10\text{g} \cdot 980\text{cm/s}^2\left(1 - \frac{1}{7}\right)}{42\text{cm/s}} = 200\,\text{g/s}$$

La legge di caduta è (t in secondi):

$$v(t) = v_\infty\left(1 - e^{-\frac{h}{m}t}\right) = 43\text{cm/s}\left(1 - e^{-20t}\right).$$

1.51. *a.* Ponendo $v = y'$ si ha

$$v' = g - \frac{h}{m}v^2.$$

Soluzioni costanti: $$v = \sqrt{\frac{gm}{h}} \equiv v_\infty$$

(non ci interessa la soluzione costante $v = -\sqrt{\frac{gm}{h}}$). Abbiamo indicato con v_∞ la soluzione costante perché questa è la "candidata" ad essere la velocità limite. Cerchiamo le soluzioni non costanti dell'equazione:

$$\frac{dv}{\frac{gm}{h} - v^2} = \frac{h}{m}dt.$$

Ponendo $v_\infty = \sqrt{\frac{gm}{h}}$ si ha: $$\frac{dv}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{h}{m}dt;$$

$$\int\left(\frac{1}{v_\infty - v} + \frac{1}{v_\infty + v}\right)dv = \int 2v_\infty \frac{h}{m}dt$$

$$\log\left|\frac{v + v_\infty}{v - v_\infty}\right| = 2v_\infty \frac{h}{m}t + c; \qquad \frac{v + v_\infty}{v - v_\infty} = ce^{2v_\infty \frac{h}{m}t}$$

$$v(t) = v_\infty\left(\frac{ce^{2v_\infty \frac{h}{m}t} + 1}{ce^{2v_\infty \frac{h}{m}t} - 1}\right) = v_\infty\left(1 + \frac{2}{ce^{2v_\infty \frac{h}{m}t} - 1}\right)$$

e imponendo la condizione iniziale si trova

$$c = \frac{v_0 + v_\infty}{v_0 - v_\infty}.$$

Si osserva che per $t \to \infty$ effettivamente $v(t) \to v_\infty = \sqrt{\frac{gm}{h}}$ (cioè quella che abbiamo indicato all'inizio col simbolo di v_∞ per comodità di calcolo è effettivamente la velocità limite).

b. Distinguiamo ora i casi:

1) $v_0 < v_\infty$. In questo caso

$$v(t) = v_\infty \left(1 - \frac{2}{\left(\frac{v_\infty + v_0}{v_\infty - v_0}\right) e^{2v_\infty \frac{h}{m} t} + 1} \right),$$

il che mostra che il denominatore è sempre > 1 e tende monotonamente a ∞. Perciò la velocità cresce monotonamente tendendo al valore limite.

2) $v_0 > v_\infty$. In questo caso

$$v(t) = v_\infty \left(1 + \frac{2}{\left(\frac{v_0 + v_\infty}{v_0 - v_\infty}\right) e^{2v_\infty \frac{h}{m} t} - 1} \right),$$

si osserva che $\left(\frac{v_0+v_\infty}{v_0-v_\infty}\right) > 1$ e $e^{2v_\infty \frac{h}{m} t} > 1$ per $t > 0$, perciò di nuovo il denominatore non si annulla mai, cresce monotonamente a $+\infty$, perciò $v(t)$ va decrescendo monotonamente verso il valore limite.

1.52. *a.* L'equazione del moto orizzontale è:

$$mx'' = -h(x')^2$$

dove $h > 0$ è un coefficiente di attrito. Ponendo $v = x'$ si ha

$$v' = -\frac{h}{m} v^2.$$

Risolviamo l'equazione:

$$-\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{h}{m} dt; \qquad \frac{1}{v} = \frac{h}{m} t + c$$

$$v(t) = \frac{1}{\frac{h}{m} t + c}$$

e imponendo la condizione iniziale si trova

$$v_0 = \frac{1}{c};$$

$$v(t) = \frac{1}{\frac{h}{m} t + \frac{1}{v_0}}.$$

Si osservi che la velocità tende monotonamente a zero per $t \to +\infty$.

b. $$s(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{\frac{h}{m}\tau + \frac{1}{v_0}} d\tau = \frac{m}{h}\left[\log\left(\frac{h}{m}t + \frac{1}{v_0}\right) + \log v_0\right] =$$

$$= \frac{m}{h}\log\left(1 + \frac{h}{m}v_0 t\right).$$

c. Sia ora $v_0 = 200\text{m/s}$, $m = 20\text{g}$, $t = 1\text{s}$, $h = 0.1\text{g/m}$. Si ottiene:

$$v(t) = \frac{1}{\frac{t}{200\text{m}} + \frac{1}{200\text{m/s}}}.$$

$$v_{\text{fin}} = v(1) = \frac{1}{\frac{1}{200\text{m/s}} + \frac{1}{200\text{m/s}}} = 100\text{m/s}.$$

$$s = 200\text{m}\log\left(1 + \frac{1}{200}\cdot 200\right) = 200\log 2\,\text{m} \simeq 139\text{m}.$$

1.53. L'equazione

$$m(t)\frac{dv}{dt} = -m(t)g - A\frac{dm}{dt}$$

con $m(t) = M + m_0 - kt$ (espressione valida per $t < m_0/k$) dà

$$v' = -g + \frac{kA}{M + m_0 - kt}$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \left(-g + \frac{kA}{M + m_0 - k\tau}\right)d\tau = v_0 - gt - A[\log(M + m_0 - k\tau)]_0^t =$$

$$= v_0 - gt + A\log\left(\frac{M + m_0}{M + m_0 - kt}\right).$$

La velocità nell'istante in cui il carburante è esaurito è:

$$v\left(\frac{m_0}{k}\right) = v_0 - g\frac{m_0}{k} + A\log\left(\frac{M + m_0}{M}\right).$$

1.54. La soluzione dell'equazione è:

$$T(t) = T_e + ce^{-kt}.$$

Imponendo la condizione iniziale si ha:

$$100 = 10 + c; c = 90;$$

$$T(t) = T_e + 90e^{-kt}.$$

Ora sfruttiamo la prima informazione:

$$80 = 10 + 90e^{-k};$$

$$k = \log\frac{9}{7} \simeq 0.25.$$

Imponiamo ora che sia

$$20 = 10 + 90e^{-0.25t}$$

e calcoliamo

$$0.25t = \log 9; t \simeq 8.79\text{min, cioè 8 min. e 43 sec.}$$

1.55. *a.* Riscriviamo l'equazione come

$$i' + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}.$$

$$i(t) = \frac{E}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t};$$

$$0 = i(0) = \frac{E}{R} + c; \quad c = -\frac{E}{R};$$

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \quad i(t) \to \frac{E}{R} \text{ per } t \to \infty.$$

b.

$$i' + \frac{R}{L}i = \frac{A\sin\omega t}{L}.$$

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left\{c + \int e^{\frac{R}{L}t}\frac{A\sin\omega t}{L}dt\right\}.$$

Per calcolare la primitiva (oltre che col procedimento standard che consiste nell'integrare per parti due volte) può essere utile utilizzare i numeri complessi[12]:

$$e^{\frac{R}{L}t}\frac{A\sin\omega t}{L} = \text{Im}\left(\frac{A}{L}e^{(\frac{R}{L}+i\omega)t}\right)$$

[12] Questa tecnica è illustrata in dettaglio nel prossimo § 1.2.A.

perciò

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\frac{A\sin\omega t}{L}dt = \mathrm{Im}\int\left(\frac{A}{L}e^{(\frac{R}{L}+i\omega)t}\right)dt = \mathrm{Im}\left(\frac{A}{L(\frac{R}{L}+i\omega)}e^{(\frac{R}{L}+i\omega)t}\right).$$

Ora:

$$\frac{A}{L(\frac{R}{L}+i\omega)}e^{(\frac{R}{L}+i\omega)t} = \frac{Ae^{\frac{R}{L}t}}{L\left((\frac{R}{L})^2+\omega^2\right)}\left(\frac{R}{L}-i\omega\right)(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

da cui

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\frac{A\sin\omega t}{L}dt = \frac{Ae^{\frac{R}{L}t}}{L\left((\frac{R}{L})^2+\omega^2\right)}\cdot\mathrm{Im}\left(\left(\frac{R}{L}-i\omega\right)(\cos\omega t + i\sin\omega t)\right) =$$

$$= \frac{Ae^{\frac{R}{L}t}}{L\left((\frac{R}{L})^2+\omega^2\right)}\left(\frac{R}{L}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right) =$$

$$= \frac{Ae^{\frac{R}{L}t}}{L\sqrt{(\frac{R}{L})^2+\omega^2}}\left(\frac{R/L}{\sqrt{(\frac{R}{L})^2+\omega^2}}\sin\omega t - \frac{\omega}{\sqrt{(\frac{R}{L})^2+\omega^2}}\cos\omega t\right) =$$

$$= \frac{A}{L\sqrt{(\frac{R}{L})^2+\omega^2}}e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t-\varphi)$$

con: $\cos\varphi = \dfrac{R/L}{\sqrt{(\frac{R}{L})^2+\omega^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{\omega}{\sqrt{(\frac{R}{L})^2+\omega^2}}$, quindi $\varphi = \arctan\dfrac{\omega L}{R}$.

Quindi $$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left\{c + \frac{A}{L\sqrt{(\frac{R}{L})^2+\omega^2}}e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t-\varphi)\right\} =$$

$$= ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{A}{L\sqrt{(\frac{R}{L})^2+\omega^2}}\sin(\omega t-\varphi).$$

Imponiamo la condizione iniziale:

$$0 = c - \frac{\omega A}{L\left(\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2\right)}, \text{ da cui}$$

$$i(t) = \frac{\omega A}{L\left(\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2\right)} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{A}{L\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

E' interessante notare che qualunque sia la condizione iniziale, il termine $ce^{-\frac{R}{L}t}$ (che contiene la costante il cui valore dipende dalla condizione iniziale) tende a zero (regime transitorio), mentre il regime permanente, cioè l'andamento del sistema dopo i primi istanti (in cui l'esponenziale svanisce) è:

$$i(t) = \frac{A}{L\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

che risulta essere un'oscillazione di ugual frequenza, ma ritardo di fase, rispetto alla forza elettromotrice impressa, e ampiezza

$$\frac{A}{L\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}}.$$

1.56. *a.* Equazione a variabili separabili:

$$\frac{dx}{(s_A - nx)(s_B - mx)} = k dt$$

$$\int \left[\frac{n}{(s_A - nx)} - \frac{m}{(s_B - mx)}\right] dx = k(ns_B - ms_A)t + c$$

Supponiamo per semplicità che sia $(ns_B - ms_A) \neq 0$, altrimenti il procedimento di integrazione cambia.

$$\log\left|\frac{mx - s_B}{nx - s_A}\right| = k(ns_B - ms_A)t + c.$$

$$\left(\frac{mx - s_B}{nx - s_A}\right) = ce^{k(ns_B - ms_A)t}$$

da cui possiamo imporre la condizione iniziale $x(0) = 0$ e avere

$$c = \frac{s_B}{s_A}.$$

Quindi $$\left(\frac{mx - s_B}{nx - s_A}\right) = \frac{s_B}{s_A} e^{k(ns_B - ms_A)t}$$

$$x(t) = \frac{s_B - s_A \cdot \frac{s_B}{s_A} e^{k(ns_B - ms_A)t}}{m - n \cdot \frac{s_B}{s_A} e^{k(ns_B - ms_A)t}} = \frac{s_B\left(1 - e^{k(ns_B - ms_A)t}\right)}{m - n \cdot \frac{s_B}{s_A} e^{k(ns_B - ms_A)t}} =$$

$$= \frac{1 - e^{k(ns_B - ms_A)t}}{\frac{m}{s_B} - \frac{n}{s_A} e^{k(ns_B - ms_A)t}}.$$

b. Applichiamo la formula precedente con:
$s_A = 30$; $s_B = 40$; $n = 1$; $m = 2$.
$ns_B - ms_A = 40 - 2 \cdot 30 = -20$.

$$x(t) = \frac{1 - e^{-20kt}}{\frac{1}{20} - \frac{1}{30} e^{-20kt}}.$$

Si vede che la funzione è definita per ogni $t > 0$ e tende al valore limite 20 (che è il massimo raggiungibile, data la quantità di A disponibile). Utilizziamo la prima informazione, $x(20\text{min}) = 12$, per calcolare la costante k:

$$12 = x(20) = \frac{1 - e^{-400k}}{\frac{1}{20} - \frac{1}{30} e^{-400k}} \text{ che dà:}$$

$$e^{-400k} = \frac{2}{3}; k = \frac{1}{400} \log \frac{3}{2}; 20k \simeq 0.02.$$

Dopo un'ora (60min) la quantità di sostanza C presente sarà

$$x(60) = \frac{1 - e^{-0.02 \cdot 60}}{\frac{1}{20} - \frac{1}{30} e^{-0.02 \cdot 60}} \simeq 17.5\text{g}.$$

1.57. *a.* $$-\frac{dx}{x\left(c - \frac{x_0 - x}{v}\right)} = k dt$$

$$\int \left[\frac{v}{x} - \frac{1}{c - \frac{x_0 - x}{v}}\right] dx = -(cv - x_0)kt + c_1$$

$$v \log|x| - v \log\left|c - \frac{x_0 - x}{v}\right| = -(cv - x_0)kt + c_1$$

$$\log\left|\frac{x}{c-\frac{x_0-x}{v}}\right| = -\left(c-\frac{x_0}{v}\right)kt + c_1$$

$$\frac{x}{c-\frac{x_0-x}{v}} = c_2 e^{-(c-\frac{x_0}{v})kt}$$

$$x(t) = \frac{\left(c-\frac{x_0}{v}\right)c_2 e^{-(c-\frac{x_0}{v})kt}}{1-\frac{c_2}{v}e^{-(c+\frac{x_0}{v})kt}}.$$

Imponiamo la condizione iniziale:

$$x_0 = x(0) = \frac{\left(c-\frac{x_0}{v}\right)c_2}{1-\frac{c_2}{v}}; \qquad c_2 = \frac{x_0}{c}$$

perciò: $$x(t) = \frac{\left(c-\frac{x_0}{v}\right)\frac{x_0}{c}e^{-(c-\frac{x_0}{v})kt}}{1-\frac{x_0}{vc}e^{-(c+\frac{x_0}{v})kt}} = \frac{\left(1-\frac{x_0}{cv}\right)x_0}{e^{(c-\frac{x_0}{v})kt}-\frac{x_0}{vc}},$$

scrittura che evidenzia il fatto che $x(t)$ decresce monotonamente dal valore iniziale x_0 al valore finale 0. (Supponendo $x_0 < vc$).

b. In base ai dati, la concentrazione di saturazione è $c = 0.12\text{kg/l}$. L'equazione è:

$$-\frac{dx}{dt} = kx\left(0.12-\frac{25-x}{400}\right)$$

e ha soluzione, per $x(0) = 0$, $\left(\frac{x_0}{vc} \simeq 0.52\right)$,

$$x(t) = \frac{(1-0.52)25}{e^{(1-0.52)0.12kt}-0.52} = \frac{12}{e^{0.0576kt}-0.52}.$$

Per calcolare il valore della costante k utilizziamo ora la prima informazione:

$$x(5) = 25-9 = \frac{12}{e^{0.0576k\cdot 5}-0.52}$$

$$e^{0.288k} = \frac{3}{4}+0.52 = 1.27$$

$$k = \frac{1}{0.288}\log 1.27 \simeq 0.83.$$

Perciò $$x(t) = \frac{12}{e^{0.0478t}-0.52}$$

e dopo un'ora $$x(60) = \frac{12}{e^{0.0478 \cdot 60} - 0.52} \simeq 0.7$$

il che significa che la quantità sciolta dopo un'ora è $25 - 0.7 = 24.3$kg.

Si saranno sciolti 20kg quanto $x(t) = 5$, cioè

$$5 = \frac{12}{e^{0.0478t} - 0.52}$$

che dà $$t = 22.4\text{min} \simeq 22\text{min } 24\text{sec}.$$

1.2. Equazioni lineari del second'ordine

1.2.A. Richiami sull'esponenziale complesso

L'utilizzo dell'*esponenziale complesso*, che lo studente dovrebbe aver appreso nel corso di Analisi Matematica 1 (v. [BPS1], cap.5, §2.2) si rivela utile in varie questioni legate alla risoluzione di equazioni differenziali ordinare (ma non solo) per semplificare i calcoli che coinvolgono le derivate di funzioni (reali) esponenziali e trigonometriche. Vogliamo qui giustificare queste procedure, che useremo spesso nel seguito, e che altrimenti potrebbero sembrare puramente formali.

Se $f_1, f_2 : (a,b) \to \mathbb{R}$ sono due funzioni reali di variabile reale, possiamo definire la *funzione complessa di variabile reale*:

$$f : (a,b) \to \mathbb{C}$$

che si ottiene ponendo

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t).$$

Se f_1 e f_2 sono derivabili in (a,b), porremo *per definizione*

$$f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t).$$

Esempio 1.5. Per $r = a + ib \in \mathbb{C}$, sia

$$f(t) = \exp(rt) = e^{(a+ib)t} = e^{at}\cos bt + ie^{at}\sin bt.$$

Se calcoliamo $f'(t)$ in base alla definizione precedente, si verifica che si ottiene (come ci si aspetterebbe!)

$$f'(t) = (\exp(rt))' = r\exp(rt). \tag{4}$$

Infatti in base alla definizione appena data:

$$(\exp(rt))' = \left(e^{at}\cos bt + ie^{at}\sin bt\right)' = \left(e^{at}\cos bt\right)' + i\left(e^{at}\sin bt\right)'$$

calcolando le derivate delle funzioni reali con le solite regole

$$= \left(ae^{at}\cos bt - be^{at}\sin bt\right) + i\left(ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt\right) =$$

$$= e^{at}\cos bt(a+ib) + ie^{at}\sin bt(a+ib) =$$

$$= (a+ib)\left(e^{at}\cos bt + ie^{at}\sin bt\right) = r\exp(rt).$$

La (4) può essere applicata più volte, ottenendo ad esempio:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\exp(rt)) = r^2\exp(rt) \quad \forall r \in \mathbb{C}$$

Questi fatti si utilizzano nella risoluzione delle equazioni differenziali lineari del second'ordine omogenee a coefficienti costanti.

Il motivo dell'utilità del calcolo coi numeri complessi in relazione alle equazioni differenziali lineari sta nella prossima

Osservazione 1.2. Un operatore differenziale lineare a coefficienti reali separa parte reale e immaginaria della funzione. Sia

$$Lz \equiv az'' + bz' + cz \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Allora, se

$$z(t) = z_1(t) + iz_2(t)$$

con z_1, z_2 funzioni a valori reali, per la linearità dell'equazione differenziale e della definizione di derivata di una funzione complessa, risulta

$$Lz = Lz_1 + iLz_2 \tag{5}$$

(come si verifica immediatamente) dove Lz_1 e Lz_2 sono funzioni a valori reali. In altre parole, l'operatore differenziale L agendo su una funzione a valori complessi agisce separatamente sulla sua parte reale e immaginaria. Questo significa che una soluzione complessa dell'equazione differenziale $Lz = 0$, ad esempio di tipo esponenziale $\exp(rt)$, dà luogo a *due soluzioni reali della medesima equazione*, del tipo $e^{at}\cos bt$, $e^{at}\sin bt$. Questo è ciò che si sfrutta, implicitamente, quando si determinano due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea a coefficienti costanti.

La stessa idea si sfrutta quando si determina col metodo di somiglianza una soluzione particolare di equazioni con termine noto del tipo $e^{at}\cos bt$ o $e^{at}\sin bt$ passando attraverso la variabile complessa. Si tratta in questo caso di sfruttare il fatto che, se $y = y_1 + iy_2$ e $f = f_1 + if_2$ (con y_1, y_2, f_1, f_2 a valori reali), allora

$$Ly = f \Leftrightarrow \begin{cases} Ly_1 = f_1 \\ Ly_2 = f_2 \end{cases} \tag{6}$$

Esercizi

1.58.★ Dimostrare la (5) (con le notazioni e ipotesi spiegate nell'osservazione 1.2).

1.59.★ Dimostrare la (6) (con le notazioni e ipotesi spiegate nell'osservazione 1.2).

1.60.★ Si consideri la funzione complessa di variabile reale

$$f(t) = \frac{1}{rt} \text{ con } r = a + ib \in \mathbb{R}.$$

a. Si riscriva f nella forma $f_1 + if_2$ con f_1 e f_2 reali.

b. Si calcoli $f'(t)$ in base alla definizione data e la i riscriva in forma più semplice (cioè come funzione di t ed r anziché come funzione di t, a, b).

Queste tecniche di variabile complessa possono avere anche altre applicazioni, ad esempio al calcolo delle primitive. Anche se questo fatto non è direttamente legato al tema delle equazioni differenziali, cogliamo qui l'occasione per segnalare questa tecnica.

Notiamo che la definizione

$$f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t)$$

si può leggere anche dicendo che

$$\mathrm{Re}[f'(t)] = [\mathrm{Re}f(t)]'$$

$$\mathrm{Im}[f'(t)] = [\mathrm{Im}f(t)]'.$$

Poiché la primitiva è l'operazione inversa della derivata, queste relazioni a loro volta implicano che

$$\mathrm{Re}\left(\int f(t)dt\right) = \int [\mathrm{Re}f(t)]dt$$

$$\mathrm{Im}\left(\int f(t)dt\right) = \int [\mathrm{Im}f(t)]dt$$

Esempio 1.6. Si voglia calcolare l'integrale indefinito:

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx$$

Anziché usare la tecnica familiare di integrazione per parti, si può procedere così:

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \int \mathrm{Re}\left(e^{(a+ib)x}\right)dx = \mathrm{Re}\int \left(e^{(a+ib)x}\right)dx.$$

D'altro canto, poiché sappiamo che $(e^{rt})' = re^{rt}$ per $r \in \mathbb{C}$, sarà anche

$$\int e^{rt}dt = \frac{1}{r}e^{rt},$$

perciò

$$\int \left(e^{(a+ib)x}\right)dx = \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-ib)(\cos bx + i\sin bx)$$

e

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-ib)(\cos bx + i\sin bx)\right] =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx).$$

Esempio 1.7. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int xe^{x}\sin x dx.$$

Trattandosi del prodotto di *tre funzioni* (non due!) l'applicazione diretta dell'integrazione per parti (che si farebbe per integrare xe^x, o $x\sin x$, o $e^x\sin x$) riesce male. La variabile complessa consente di accorpare due di queste funzioni, osservando che

$$xe^{x}\sin x = \mathrm{Im}\left(xe^{x+ix}\right).$$

Calcoliamo allora

$$\int xe^{x(1+i)}dx = \text{(per parti)}$$

$$= \frac{xe^{x(1+i)}}{1+i} - \int \frac{e^{x(1+i)}}{1+i}dx = \frac{xe^{x(1+i)}}{1+i} - \frac{e^{x(1+i)}}{(1+i)^2} + c$$

e poi ricordiamo che

$$\int xe^x \sin x dx = \text{Im}\left[\int xe^{x(1+i)}dx\right] =$$

$$= \text{Im}\left[\frac{xe^{x(1+i)}}{1+i} - \frac{e^{x(1+i)}}{(1+i)^2}\right] + c =$$

$$= \text{Im}\left[xe^x(\cos x + i\sin x)\frac{(1-i)}{2} + \frac{1}{2}ie^x(\cos x + i\sin x)\right] + c =$$

$$= \frac{1}{2}xe^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}e^x \cos x + c.$$

1.2.B. Equazioni omogenee a coefficienti costanti

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 1, §3.1-3.4

Esempi svolti

Esempio 1.8.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' + 4y = 0.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

a. Trattandosi di un'equazione differenziale lineare del 2° ordine, omogenea a coefficienti costanti, risolviamo anzitutto l'*equazione caratteristica*

corrispondente[13]:

$$r^2 + 2r + 4 = 0$$

che ha soluzioni complesse coniugate:

$$r = -1 \pm i\sqrt{3}$$

Ricordando che a soluzioni complesse coniugate $(\alpha \pm i\beta)$ dell'equazione caratteristica corrispondono le due soluzioni dell'equazione differenziale

$$z_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x);\ z_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

troviamo, nel nostro caso, le due soluzioni indipendenti

$$z_1(x) = e^{-x}\cos\left(\sqrt{3}x\right);\ z_2(x) = e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x\right),$$

per cui l'integrale generale dell'equazione omogenea[14] è:

$$z(x) = e^{-x}\left(c_1\cos\left(\sqrt{3}x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right) \tag{7}$$

al variare delle costanti reali c_1, c_2.

b. Imponiamo le condizioni iniziali alla soluzione $z(x)$ trovata in (7). Dobbiamo prima calcolare

$$z'(x) = e^{-x}\left(-c_1\cos\left(\sqrt{3}x\right) - c_2\sin\left(\sqrt{3}x\right) - c_1\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}x\right) + c_2\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}x\right)\right)$$

quindi imponiamo:

$$\begin{cases} z(0) = c_1 = 2 \\ z'(0) = -c_1 + \sqrt{3}c_2 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema di due equazioni in due incognite c_1, c_2 troviamo

$$c_1 = 2; c_2 = \sqrt{3}$$

che sostituite nella (7) danno la soluzione del problema di Cauchy:

$$y(x) = e^{-x}\left(2\cos\left(\sqrt{3}x\right) + \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right).$$

---

[13] v. libro di testo [BPS2], cap.1 §3.4.

[14] v. libro di testo [BPS2], cap. 1, §3.3, Teorema 1.6.

Esempio 1.9.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

a. Equazione caratteristica:

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

$$r = -3 \text{ (radice doppia)}$$

perciò due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale sono

$$z_1(x) = e^{-3x}; \quad z_2(x) = xe^{-3x}$$

e l'ntegrale generale è:

$$z(x) = e^{-3x}(c_1 x + c_2), \quad \text{per ogni } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b. Per risolvere il problema di Cauchy imponiamo le condizioni iniziali alla $z(x)$ appena scritta. Calcoliamo anzitutto:

$$z'(x) = e^{-3x}(-3c_1 x - 3c_2 + c_1)$$

quindi imponiamo

$$\begin{cases} z(0) = c_2 = 2 \\ z'(0) = -3c_2 + c_1 = 1 \end{cases}$$

$$c_2 = 2; c_1 = 7$$

e quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = e^{-3x}(7x + 2).$$

Esercizi

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy.
(Ulteriori esercizi sulle equazioni omogenee a coefficienti costanti si trovano anche tra gli esercizi del prossimo §1.2.C).

1.61. $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

1.62. $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

1.63. $\begin{cases} 2y'' - y' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

1.64. $\begin{cases} y'' + 2y' + 4y = 0 \\ y(0) = \sqrt{3} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

1.65. $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

1.66. $\begin{cases} 3y'' - 2y' - y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

1.67. $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2e \end{cases}$

1.68. $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = \sqrt{3} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

1.69.
$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2e \end{cases}$$

1.70.
$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

1.2.C. Equazioni non omogenee. Metodo di somiglianza.

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 1, §3.5.

Il metodo di somiglianza serve per trovare una soluzione particolare di un'equazione lineare del 2° ordine non omogenea, quando l'omogenea ha coefficienti costanti, cioè l'equazione ha la forma

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad \text{con } a, b, c \text{ costanti,}$$

e il termine noto $f(x)$ ha una forma particolare (polinomio, esponenziale...), che permette di cercare una soluzione y *simile* a f, in un senso opportuno (da cui il nome di "metodo di somiglianza"). Questa non è soltanto un'idea generale, che si chiede allo studente di provare ad usare con un po' di inventiva; al contrario, sul testo si illustra un certo numero di situazioni ben precise, in cui seguendo una certa procedura ben codificata è possibile determinare la soluzione. Metodo da usare, avvertenze, eventuali eccezioni da tener presenti: occorre aver *studiato* con cura tutto questo, prima di affrontare i prossimi esercizi. Presentiamo per comodità del lettore (v. tavole a pp. 76-77) uno schema riassuntivo della casistica presentata sul testo ([BPS2], cap.1, §3.5), oltre, come al solito, ad alcuni esempi svolti, che naturalmente non coprono tutte le situazioni possibili. I successivi esercizi dovrebbero comunque mostrare un ventaglio ampio di applicazioni.

Esempi svolti

Esempio 1.10. Scrivere l'integrale generale dell'equazione:

$$y'' + 6y' + 12y = 4\sin 2x.$$

Per prima cosa cerchiamo l'integrale generale dell'equazione omogenea

$$z'' + 6z' + 12z = 0.$$

Equazione caratteristica:

$$r^2 + 6r + 12 = 0; r = -3 \pm i\sqrt{3}$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea perciò è:

$$y(x) = e^{-3x}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{3}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{3}x\right)\right).$$

Ora abbiamo bisogno di una soluzione particolare dell'equazione completa. Poiché l'omogenea ha coefficienti costanti e il termine noto è del tipo

$$f(x) = A\sin\omega x,$$

possiamo applicare il metodo di somiglianza e cercare una soluzione del tipo:

$$y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x. \tag{8}$$

Si noti che A, B sono da determinarsi, mentre l'argomento $2x$ delle funzioni seno e coseno è lo stesso che compare nella funzione seno che è termine noto. Si osservi che, pur essendo presente nel termine noto solo la funzione $\sin 2x$, la soluzione particolare va cercata a priori come combinazione lineare di funzioni seno e coseno[15].

Procediamo col metodo. Per la funzione $y(x)$ in (8) calcoliamo la derivata prima e seconda, sostituiamo nell'equazione, e imponiamo che sia un'identità, ottenendo così delle condizioni che determineranno i coefficienti incogniti A, B. Si ha:

$$y'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x.$$

$$y''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Sostituiamo nell'equazione completa le espressioni di y, y', y'':

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) + 6(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$

$$+ 12(A\cos 2x + B\sin 2x) = 4\sin 2x.$$

Raggruppiamo i termini simili in $\sin 2x, \cos 2x$:

---

[15] Questo è solo un esempio delle tante piccole avvertenze che è facile dimenticarsi, se si pensa di poter applicare il metodo di somiglianza in base al puro buon senso, e non in base allo *studio preciso e all'applicazione attenta* della casistica del metodo stesso. E' istruttivo che lo studente provi, per rendersi conto di dov'è il problema, a impostare la ricerca di una soluzione del tipo $A\sin 2x$ (come verrebbe voglia di fare): si troverà in un vicolo cieco.

$$\cos 2x \cdot (-4A + 12B + 12A) + \sin 2x \cdot (-4B - 12A + 12B) = 4\sin 2x$$

$$\cos 2x \cdot (8A + 12B) + \sin 2x \cdot (-12A + 8B) = 4\sin 2x$$

Imponiamo ora che questa uguaglianza risulti un'identità[16].

$$\begin{cases} 8A + 12B = 0 \\ -12A + 8B = 4 \end{cases}$$

Abbiamo così trovato un sistema lineare di due equazioni in due incognite, che può essere facilmente risolto:

$$\begin{cases} 2A + 3B = 0 \\ -3A + 2B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{3}{13} \\ B = \frac{2}{13} \end{cases}$$

Questi valori di A, B sostituiti nella (8) danno la *soluzione particolare dell'equazione completa*, che stavamo cercando:

$$y(x) = -\frac{3}{13}\cos 2x + \frac{2}{13}\sin 2x.$$

Infine, l'*integrale generale dell'equazione completa* si otterrà sommando l'integrale generale dell'equazione omogenea, ottenuto in partenza, e questa soluzione particolare dell'equazione completa:

$$e^{-3x}\left(c_1\cos\left(\sqrt{3}x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right) - \frac{3}{13}\cos 2x + \frac{2}{13}\sin 2x.$$

Osservazione 1.3. Notiamo che per determinare la soluzione particolare dell'equazione completa col metodo di somiglianza non abbiamo utilizzato la conoscenza dell'integrale generale dell'equazione omogenea. Le due procedure sono tra loro indipendenti, anche se entrambe sono necessarie per determinare l'integrale generale dell'equazione completa.

Esempio 1.11. Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 3y' + 2y = 3xe^{-x}.$$

[16] Questo è un punto chiave da capire. Non vogliamo *risolvere l'equazione in* x, ma capire per quali valori dei coefficienti A, B, i due membri dell'uguaglianza *rappresentano la stessa funzione*, cioè per quali valori di A, B l'uguaglianza *è verificata per ogni* x. Affinché questo accada dovranno coincidere, rispettivamente, i coefficienti di $\cos 2x$ e $\sin 2x$ nei due membri.

Risolviamo anzitutto l'equazione omogenea. Equazione caratteristica:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$(r-1)(r-2) = 0; r = 1, r = 2.$$

L'integrale generale dell'omogenea perciò è:

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Ora cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa. Poiché il termine noto è

$$f(x) = 3xe^{-x}, \text{ cioè (polinomio di grado 1)} \cdot e^{-x},$$

cercheremo una soluzione particolare di questa stessa forma:

$$y(x) = (ax + b)e^{-x},$$

con a, b da determinarsi. Calcoliamo le derivate e sostituiamo nell'equazione:

$$y' = e^{-x}(-ax - b + a)$$

$$y'' = e^{-x}(ax + b - 2a)$$

$$e^{-x}[(ax + b - 2a) - 3(-ax - b + a) + 2(ax + b)] = 3xe^{-x}$$

$$e^{-x}[6ax + (6b - 5a)] = 3xe^{-x}$$

che risulta un'identità se solo se[17]:

$$\begin{cases} 6a = 3 \\ 6b - 5a = 0 \end{cases} \qquad a = \frac{1}{2}; b = \frac{5}{12};$$

perciò si ottiene la soluzione particolare dell'equazione completa:

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{12}\right)e^{-x}$$

[17] Semplificando per la quantità e^{-x}, mai nulla, l'uguaglianza precedente diventa un'uguaglianza tra polinomi di primo grado. Per il principio di identità dei polinomi, questi coincidono se e solo se i coefficienti dei termini simili coincidono, rispettivamente.

e infine l'integrale generale dell'equazione completa:

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{12}\right)e^{-x}$$

Esempio 1.12. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 2y' + 4y = e^{-x}\cos x.$$

Primo metodo (con funzioni trigonometriche reali). In base al metodo di somiglianza, possiamo cercare una soluzione particolare della forma[18]:

$$y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x).$$

Calcoliamo y' e y'':

$$y'(x) = e^{-x}(-A\cos x - B\sin x) + e^{-x}(-A\sin x + B\cos x) =$$

$$= e^{-x}[(B - A)\cos x - (A + B)\sin x].$$

$$y''(x) = e^{-x}[-(B - A)\cos x + (A + B)\sin x] + e^{-x}[-(B - A)\sin x - (A + B)\cos x] =$$

$$= e^{-x}[(-2B)\cos x + (2A)\sin x].$$

Sostituiamo ora nell'equazione:

$$\{e^{-x}[(-2B)\cos x + (2A)\sin x]\} - 2\{e^{-x}[(B - A)\cos x - (A + B)\sin x]\} +$$

$$+ 4\{e^{-x}(A\cos x + B\sin x)\} = e^{-x}\cos x.$$

Semplificando per e^{-x} e raggruppando i termini simili in $\cos x$, $\sin x$ abbiamo:

$$(-2B - 2(B - A) + 4A)\cos x + (2A + 2(A + B) + 4B)\sin x = \cos x$$

che porta al sistema:

$$\begin{cases} 6A - 4B = 1 \\ 4A + 6B = 0 \end{cases}$$

che dà:

$$A = \frac{3}{26}, B = -\frac{1}{13}$$

[18] Di nuovo, si noti che anche se il secondo membro non contiene la funzione $\sin x$, occorre cercare una soluzione particolare di questa forma completa.

e quindi la soluzione particolare dell'equazione completa risulta:

$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{3}{26}\cos x - \frac{1}{13}\sin x\right).$$

Il metodo appena presentato è concettualmente molto simile a quello dell'Esempio 1.10, soltanto reso più laborioso nei calcoli dal fatto che ora la funzione che cerchiamo, e di cui dobbiamo calcolare derivata prima e seconda, è la somma di due termini ognuno a sua volta prodotto di due funzioni. Il prossimo metodo che presentiamo utilizza il calcolo con i *numeri complessi*, in particolare le proprietà dell'*esponenziale complesso* (v. §1.2.A). Come vedremo il calcolo delle derivate risulta ora molto più semplice; per contro, bisognerà eseguire qualche calcolo algebrico coi numeri complessi.

Secondo metodo (con l'esponenziale complesso). Per risolvere l'equazione

$$y'' - 2y' + 4y = e^{-x}\cos x \tag{9}$$

osserviamo che il termine noto si può vedere come parte reale di un esponenziale complesso:

$$e^{-x}\cos x = \mathrm{Re}\left(e^{x(-1+i)}\right).$$

Consideriamo perciò l'equazione differenziale con termine noto complesso:

$$w'' - 2w' + 4w = e^{x(-1+i)}, \tag{10}$$

e, applicando il metodo di somiglianza che si usa per termini noti esponenziali, cerchiamo una soluzione del tipo:

$$w(x) = Ae^{x(-1+i)}$$

con A a priori complesso. Calcoliamo le derivate[19]:

$$w' = A(-1+i)e^{x(-1+i)};$$

$$w'' = A(-1+i)^2 e^{x(-1+i)};$$

sostituiamo nell'equazione (10) e raccogliamo l'esponenziale:

$$Ae^{x(-1+i)}\left((-1+i)^2 - 2(-1+i) + 4\right) = e^{x(-1+i)}$$

[19] Si osservi com'è semplice il calcolo delle derivate, in confronto a quello fatto col primo metodo.

$$(6-4i)A = 1$$

$$A = \frac{1}{6-4i} = \frac{6+4i}{52} = \frac{3+2i}{26};.$$

La soluzione particolare dell'equazione (10) è quindi

$$w(x) = \frac{3+2i}{26}e^{x(-1+i)}$$

e la soluzione particolare dell'equazione di partenza (9) è:

$$y(x) = \mathrm{Re}\left[\frac{3+2i}{26}e^{-x}(\cos x + i\sin x)\right] =$$

$$= e^{-x}\left(\frac{3}{26}\cos x - \frac{1}{13}\sin x\right)$$

che naturalmente coincide con la soluzione trovata col primo metodo.

Osservazione 1.4. Utilizzo dell'esponenziale complesso. Notiamo che il secondo metodo ci ha portato in realtà a risolvere simultaneamente *due* equazioni differenziali. Infatti, non solo

$\mathrm{Re}w(z)$ è soluzione dell'equazione con termine noto $\mathrm{Re}\left(e^{x(-1+i)}\right)$

ma, per la stessa ragione,

$\mathrm{Im}w(z)$ è soluzione dell'equazione con termine noto $\mathrm{Im}\left(e^{x(-1+i)}\right)$

e questo significa che l'equazione

$$y'' - 2y' + 4y = e^{-x}\sin x$$

ha soluzione

$$y_1(x) = \mathrm{Im}\left[\frac{3+2i}{26}e^{-x}(\cos x + i\sin x)\right] = e^{-x}\left(\frac{1}{13}\cos x - \frac{3}{26}\sin x\right).$$

Questo fatto, oltre all'immediatezza del calcolo delle derivate dell'esponenziale, porta a *suggerire allo studente di privilegiare sistematicamente questo secondo*

metodo, superando l'iniziale ritrosia che potrebbe avere nell'utilizzo dell'esponenziale complesso[20].

Esempio 1.13. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) = 2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Per risolvere il problema di Cauchy dobbiamo anzitutto determinare l'integrale generale dell'equazione completa, poi imporremo le condizioni iniziali.

Per scrivere l'integrale generale dell'equazione completa, a sua volta, occorre anzitutto determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea, quindi calcolare una soluzione particolare dell'equazione completa. Il procedimento è quindi in 3 passi.

1. Integrale generale dell'omogenea. Equazione caratteristica:

$$r^2 + 3r = 0$$

$$r = 0; r = -3$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 + c_2 e^{-3x}.$$

2. Soluzione particolare della non omogenea: poiché il termine noto è un polinomio di 1° grado, in generale si potrebbe cercare una soluzione particolare polinomio di 1° grado; osserviamo però che l'equazione omogenea non contiene il termine in y, ma solo quelli in y', y''; *il metodo di somiglianza prescrive in questo caso di cercare una soluzione particolare polinomio di 2° grado* (cioè un grado in più del termine noto), quindi cercheremo

$$\overline{y}(x) = Ax^2 + Bx.$$

(E' inutile scrivere un polinomio di 2° grado provvisto anche di termine noto, ossia $\overline{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$, perché dal momento che la $\overline{y}$ compare nell'equazione solo mediante le sue derivate, il coefficiente C scomparirebbe comunque, restando indeterminato). Calcoliamo le derivate e sostituiamo nell'equazione completa:

$$\overline{y}'(x) = 2Ax + B; \overline{y}''(x) = 2A.$$

[20] Peraltro, si tratta di uno strumento matematico comunemente usato in molte applicazioni fisiche e ingegneristiche (ad esempio nello studio dei circuiti elettrici), che lo studente quindi potrebbe incontrare anche in altri contesti.

$$2A + 3(2Ax + B) = 2x.$$

Imponendo che questa sia un'identità, si trova

$$\begin{cases} 2A + 3B = 0 \\ 6A = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

e quindi

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x.$$

L'integrale generale dell'equazione completa è perciò:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x.$$

3. Possiamo ora imporre le condizioni iniziali per risolvere il problema di Cauchy:

$$y'(x) = -3c_2 e^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) = -3c_2 - \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad c_2 = -\frac{5}{27}; c_1 = \frac{5}{27}.$$

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{5}{27}\left(1 - e^{-3x}\right) + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x.$$

Il "metodo di somiglianza" per la ricerca di una soluzione particolare delle equazioni differenziali lineari del second'ordine non omogenee:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (*)$$

(con a, b, c costanti, $a \neq 0$)

Forma di $f(x)$	Forma in cui si cerca $\overline{y}(x)$	Eventuali eccezioni e osservazioni
CASO 1		
polinomio di grado n	polinomio di grado n	Se nella (*) $c = 0$, cercare un polinomio di grado $n+1$; se $c = b = 0$, cercare un polinomio di grado $n+2$.
ESEMPI CASO 1		
$y'' + 2y = x^3 + 2$	$\overline{y}(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$	
$y'' - 3y' = 2x + 1$	$\overline{y}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$	
CASO 2		
esponenziale $Ae^{\lambda x}$	esponenziale $ce^{\lambda x}$ (lo stesso λ, e c da determinarsi)	Se non c'è soluzione di questo tipo (ciò accade perché $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, ossia perché $e^{\lambda x}$ è soluzione dell'eq. diff. omogenea), cercare $\overline{y}(x) = cxe^{\lambda x}$; se nemmeno questo tipo di soluzione esiste, cercare $\overline{y}(x) = cx^2e^{\lambda x}$
ESEMPI CASO 2		
$y'' + 2y' + 3y = 2e^{-3x}$	$\overline{y}(x) = ce^{-3x}$	
$y'' + 2y' - 3y = 3e^x$	$\overline{y}(x) = cxe^x$	
(Spiegazione 2° esempio: $\lambda = 1$ è soluzione dell'eq. caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$; equivalentemente: e^x è soluzione dell'eq. diff. omogenea $y'' + 2y' - 3y = 0$; perciò occorre moltiplicare per x)		
CASO 3		
$A\cos\omega x + B\sin\omega x$	$c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ (lo stesso ω, e c_1, c_2 da determinarsi)	Notare che anche se f ha uno solo dei due addendi (seno o coseno), in generale la soluzione li ha entrambi. Se $b = 0$ può accadere che $c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ sia soluzione dell'omogenea: in tal caso, cercare soluzione $x(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x)$.
ESEMPIO CASO 3		
$y'' + 2y' - y = 3\sin 2x$	$\overline{y}(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$	

Forma di $f(x)$	Forma in cui si cerca $\overline{y}(x)$	Eventuali eccezioni e osservazioni
CASO 4		
$e^{\lambda x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$	$e^{\lambda x}(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x)$ (gli stessi ω, λ e c_1, c_2 da determinarsi)	Se $z = \lambda + i\omega$ è soluzione di $az^2 + bz + c = 0$, sostituire $e^{\lambda x}$ con $xe^{\lambda x}$. Notare che anche se f ha uno solo dei due addendi (seno o coseno), in generale la soluzione li ha entrambi.
ESEMPI CASO 4		
$y'' + 2y = 3e^{-x}\sin 2x$	$\overline{y}(x) = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$	
$y''-4y'+5y = 3e^{2x}\cos x$	$\overline{y}(x) = xe^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$	
(Spiegazione 2° es.: $z = 2 + i$ è soluzione dell'eq. caratteristica $z^2 - 4\lambda + 5 = 0$, ossia $e^{2x}\cos x$, $e^{2x}\sin x$ sono soluzioni dell'eq. omogenea $y'' - 4y' + 5y = 0$, perciò si introduce il fattore x).		
(Nel caso 4 può essere più comodo effettuare i calcoli utilizzando i numeri complessi. Per sinteticità, qui non si riporta l'illustrazione di quel metodo).		
CASO 5		
$e^{\lambda x}p(x)$, dove $p(x)$ è un polinomio di grado n	$e^{\lambda x}q(x)$, con lo stesso λ, e $q(x)$ polinomio di grado n, da determinarsi	Se λ è soluzione dell'eq. caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, cercare una soluzione $y(x) = e^{\lambda x} \cdot$ (polinomio di grado $n + 1$)
ESEMPI CASO 5		
$y''+2y'-y = e^{3x}(x+2)$	$\overline{y}(x) = e^{3x}(ax+b)$	
$y'' - y = e^{x}(x+2)$	$\overline{y}(x) = e^{x}(ax^2+bx + c)$	
(Spiegazione 2° esempio: $\lambda = 1$ è soluzione dell'eq. caratteristica $\lambda^2 - \lambda = 0$, ossia e^x è soluzione dell'equazione omogenea $y'' - y = 0$; perciò il polinomio che compare in $\overline{y}$ si alza di grado).		

OSSERVAZIONE. QUANDO IL TERMINE NOTO E' *SOMMA DI DUE FUNZIONI* DEI TIPI PRECEDENTI

Se il termine noto è del tipo $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, con f_1, f_2 dei tipi descritti in precedenza, è sufficente cercare (separatamente): una soluzione particolare y_1 dell'equazione $Ly = f_1$; una soluzione particolare y_2 dell'equazione $Ly = f_2$; a questo punto (per la *linearità dell'equazione differenziale*), la funzione $y_1 + y_2$ sarà una soluzione particolare di $Ly = f_1 + f_2$.

Esempio:

$y'' + 2y = 3e^{-x} + x^2 + 1$

Si cerca una soluzione $y_1 = c_1e^{-x}$ dell'equazione $y'' + 2y = 3e^{-x}$; si cerca una soluzione $y_1 = ax^2 + bc + c$ dell'equazione $y'' + 2y = x^2 + 1$; la funzione $y_1 + y_2$ sarà allora una soluzione particolare dell'equazione di partenza.

Esercizi

1.71. Si consideri l'equazione:

$$y'' + xy' + y\sin x = 0.$$

In base alla teoria, possiamo affermare che (di ciascuna delle seguenti, dire se è vera o falsa):

a. Ha due soluzioni linearmente indipendenti

b. Ha due soluzioni del tipo $e^{\alpha x}$ per opportuni numeri $\alpha \in \mathbb{C}$.

c. Comunque si assegnino le condizioni iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, il problema di Cauchy ha una e una sola soluzione, definita su tutto $\mathbb{R}$.

d. Comunque si assegnino le condizioni iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, il problema di Cauchy ha una e una sola soluzione, che potrebbe essere definita solo in un intorno di x_0.

1.72. A quali delle seguenti equazioni, in base alla teoria studiata, applichereste il metodo di somiglianza per determinare una soluzione particolare? (Rispondere *osservando* l'equazione, senza provare effettivamente a risolverla; in caso affermativo, scrivere la *forma* della soluzione cercata, senza risolvere).

a. $$y'' + xy' + y = 2e^x$$

b. $$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sin x$$

c. $$y'' + 2y' + y^2 = 3\cos x$$

d. $$y'' + 5y' = 2e^x + x^2$$

e. $$y'' - 5y' + 2y = \frac{2e^x}{1+x^2}$$

1.73. Scrivere l'integrale generale dell'equazione:

$$y'' + 2y' - 3y = 4e^{2x}.$$

1.74.★

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

b. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{-x}.$$

1.75.★

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

b. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-3x}\cos x.$$

1.76.★ Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 3y' - 4y = 2\sin x.$$

1.77.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

b. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = 2xe^{-x}.$$

1.78.★ Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = 3\sin 2x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 6. \end{cases}$$

1.79.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

b. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = xe^{-3x}.$$

1.80.★

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 6e^{2t}.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

1.81.★ Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^{-2t}\cos t.$$

1.82.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

b. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + 3y' - 4y = 5e^{-4x}.$$

1.83.★

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y = 0.$$

b. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + 2y = 3e^{-x}\sin 2x.$$

1.84.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4y' - 5y = 0.$$

b. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 4y' - 5y = 5\cos 2x.$$

1.85.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y = 2\sin 3x.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 4y = 2\sin 3x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

1.86.★

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

b. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + 2y' - 3y = 3e^x \cos 2x.$$

1.87.★ Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 3;\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

1.88.

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione:

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con le condizioni:

$$y(0) = 1;\ y'(0) = 0.$$

c. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + 2y' - 3y = \sin x.$$

1.89.★

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione:

$$4y'' + 4y' + y = 0.$$

b. Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione precedente con le condizioni:

$$y(0) = 1;\ y'(0) = 2.$$

c. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$4y'' + 4y' + y = e^{2x}.$$

1.90.★ Si consideri l'operatore differenziale lineare del second'ordine:

$$Ly = y'' + 2y' + 3y.$$

a. Scrivere l'integrale generale dell'equazione $Ly = 0$.

b. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

c. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$(Ly)(x) = 3\cos(2x).$$

Utilizzando il "metodo di somiglianza", determinare una soluzione della seguente equazione:

1.91. $2y'' - y' - y = e^{-x}\sin 2x.$

1.92. $y'' + 4y' + 4y = x^2 + 3x + 1.$

1.93. $y'' - 2y' + 4y = 4e^{-2x}.$

1.94. $y'' + y' - 2y = 2\cos x.$

1.95. $y'' + 4y = x^3.$

1.96. $y'' + 2y' + 3y = 3e^{2x}\sin 3x.$

1.97. $y'' + 2y' + 3y = x^2 - 2x.$

1.98. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y'' + 2\alpha y' + 3y = 0.$$

a. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni $y(t)$ dell'equazione tendono a zero per $t \to +\infty$.

b. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni $y(t)$ dell'equazione sono limitate per ogni $t \in \mathbb{R}$.

1.99.★ Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'y'' = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

1.100. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 4y = 3\sin(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

1.101. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 3y = 2\cos(3x) \\ y(0) = \frac{1}{3} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

1.102. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 4y = 3e^x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

1.103. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = x^2 + 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

1.2.D. Equazioni di Eulero

Si consideri l'equazione

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0,$$

detta *equazione di Eulero*. Si osservi che è un'equazione lineare del second'ordine a coefficienti non costanti. Riscrivendola in forma normale

$$ay'' + \frac{b}{x}y' + \frac{c}{x^2}y = 0,$$

si osserva che ha coefficienti continui tranne che in 0. Perciò si può risolvere un problema di Cauchy assegnando la condizione iniziale in $x_0 > 0$, e allora la

soluzione sarà definita in tutto $(0, +\infty)$, oppure in $x_0 < 0$, e allora la soluzione sarà definita in tutto $(-\infty, 0)$.

Discutiamo in qualche dettaglio questa classe di equazioni perché è uno dei pochi esempi di equazioni del second'ordine *a coefficienti variabili* che si sanno risolvere esplicitamente, e in modo piuttosto semplice. Le tecniche studiate per le equazioni a coefficienti costanti (ricerca di soluzioni esponenziali per l'equazione omogenea, metodo di somiglianza per l'equazione non omogenea) *non sono* qui applicabili, ma rimane valida la proprietà fondamentale delle equazioni lineari omogenee: l'integrale generale è combinazione lineare di due soluzioni indipendenti.

Supponiamo ora per semplicità di studiare l'equazione per $x > 0$. Osservando i gradi delle potenze di x che moltiplicano i vari termini, si capisce che si possono cercare due soluzioni indipendenti del tipo potenza:

$$y = x^r,$$

con esponenti (non necessariamente interi) da determinarsi. Infatti, calcolando

$$y' = rx^{r-1}, y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

e sostituendo nell'equazione si trova:

$$ax^2\big(r(r-1)x^{r-2}\big) + bx\big(rx^{r-1}\big) + c(x^r) = 0$$

$$x^r(ar(r-1) + br + c) = 0$$

che, semplificando per x^r, dà l'equazione algebrica di 2° grado

$$ar(r-1) + br + c = 0. \tag{11}$$

Se il discriminante è positivo troviamo due soluzioni reali

$$r_1, r_2 = \frac{(a-b) \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4ac}}{2a}$$

che forniscono due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale, x^{r_1}, x^{r_2} (almeno per $x > 0$), e quindi l'integrale generale

$$c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \text{ in } (0, +\infty).$$

Se il discriminante è negativo troviamo due soluzioni complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$, in corrispondenza delle quali troviamo le soluzioni complesse

$$x^{\alpha \pm i\beta} = x^\alpha \cdot x^{\pm i\beta} = x^\alpha e^{\log(x^{\pm i\beta})} = x^\alpha e^{\pm i\beta \log x} =$$

$$= x^{\alpha}(\cos(\beta \log x) \pm i \sin(\beta \log x)).$$

Questo dà le due soluzioni reali e indipendenti

$$x^{\alpha}\cos(\beta \log x), \quad x^{\alpha}\sin(\beta \log x)$$

e quindi l'integrale generale

$$x^{\alpha}[c_1 \cos(\beta \log x) + c_2 \sin(\beta \log x)] \quad \text{per } x > 0.$$

Infine, se il discriminante è nullo troviamo una sola soluzione x^{α}. Per trovarne una seconda, osserviamo che in questo caso, essendo

$$(b-a)^2 - 4ac = 0,$$

l'equazione ha la forma:

$$ax^2y'' + bxy' + \frac{1}{4a}(b-a)^2 y = 0$$

e pertanto si può riscrivere così:

$$a\left[x\frac{d}{dx} + \frac{(b-a)}{2a}\right]\left[x\frac{dy}{dx} + \frac{(b-a)}{2a}y\right] = 0$$

(come si verifica calcolando effettivamente quest'ultima espressione e semplificandola). Notiamo anche che $r = \frac{a-b}{2a}$ è in questo caso la soluzione (unica) dell'equazione di 2° grado (11), perciò possiamo riscrivere ancora l'ultima equazione nella forma

$$\left(x\frac{d}{dx} - r\right)\underbrace{\left(x\frac{dy}{dx} - ry\right)}_{y_1} = 0.$$

L'equazione si può allora risolvere in due tempi: prima (leggendo l'equazione precedente "dall'esterno") si cerca y_1 tale che

$$x\frac{dy_1}{dx} - ry_1 = 0,$$

e questa è un'equazione del prim'ordine a variabili separabili che risolta dà

$$y_1(x) = c_1 x^{\alpha}.$$

Ora si risolve

$$\left(x\frac{d}{dx} - r\right)y = c_1 x^{\alpha},$$

equazione lineare del prim'ordine che risolta (lo studente è invitato a fare i calcoli in dettaglio) dà

$$y = x^{\alpha}(c_2 + c_1 \log x)$$

che è l'integrale generale dell'equazione di Eulero nel caso in cui il discriminante è nullo. Riassumiamo:

Per risolvere l'equazione

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

si risolve prima l'equazione di 2° grado

$$ar(r-a) + br + c = 0.$$

Si hanno 3 casi:

1) Se l'equazione di 2° grado ha 2 radici reali distinte r_1, r_2, l'equazione di Eulero ha integrale generale

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \text{ per } x > 0.$$

2) Se l'equazione di 2° grado ha 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$, l'equazione di Eulero ha integrale generale

$$y(x) = x^{\alpha}(c_1 \cos(\beta \log x) + c_2 \sin(\beta \log x)) \text{ per } x > 0.$$

3) Se l'equazione di 2° grado ha 2 radici coincidenti r, l'equazione di Eulero ha integrale generale

$$y(x) = x^r(c_1 + c_2 \log x) \text{ per } x > 0.$$

Infine, se volessimo risolvere l'equazione per $x < 0$ potremmo cercare soluzioni del tipo $y = (-x)^r$, definite per $x < 0$. Si lascia al lettore la verifica del fatto che, fatti i calcoli e le opportune semplificazioni di segno, si viene a trovare la *stessa* equazione

$$ar(r-1) + br + c$$

che dà quindi soluzioni analoghe (con x sostituita da $-x$).

Vediamo ora qualche esempio numerico di tutto ciò.

1.104. Scrivere l'integrale generale delle seguenti equazioni (di Eulero) in $(0, +\infty)$:

a. $x^2y'' + 4xy' + y = 0$

b. $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$

c. $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

1.105. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy per equazioni di Eulero:

a. $\begin{cases} x^2y'' - 4xy' - 5y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x^2y'' + 4xy' + 3y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2y'' - xy' + \frac{3}{4}y = 0 \\ y(-1) = 1 \\ y'(-1) = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x^2y'' - 5xy' + 9y = 0 \\ y(1) = -1 \\ y'(1) = 8 \end{cases}$

1.2.E. Applicazioni fisiche

Moto armonico semplice

Esempio 1.14. Vibrazioni libere di una molla. Una massa è attaccata ad una molla, libera di allungarsi e accorciarsi lungo una retta orizzontale. La forza di richiamo esercitata dalla molla è, entro certi limiti, proporzionale all'allungamento della molla rispetto alla posizione di riposo. Se indichiamo con $x(t)$ la posizione della massa al tempo t e scegliamo l'origine nel punto di riposo, la forza di richiamo avrà la forma $F = -kx$ (il segno $-$ indica che la forza si oppone allo spostamento) e l'equazione del moto sarà

$$mx'' = -kx,$$

che si può riscrivere

$$x'' = -\omega^2 x, \tag{12}$$

con $\omega^2 = \frac{k}{m} > 0$. La (12) è detta *equazione dell'oscillatore armonico*. Le soluzioni sono del tipo

$$x(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi),$$

cioè oscillazioni periodiche di pulsazione ω, quindi periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ampiezza A, fase φ. Il moto può essere perciò determinato, note le condizioni iniziali. Se anche la costante k non è nota, occorrerà avere un'ulteriore informazione per determinarla.

Supponiamo ora che la molla sia posta in un piano verticale. Allora il peso della massa appesa tenderà ad allungare la molla, e l'equazione del moto sarà

$$mx'' = mg - kx.$$

D'altro canto, se poniamo la massa nel punto di equilibrio (in cui il peso bilancia la forza di richiamo) si avrà

$$0 = mg - kl$$

dove $l = \frac{mg}{k}$ è l'allungamento della molla dovuto al peso. Possiamo quindi riscrivere l'equazione del moto nella forma

$$mx'' = -k(x - l),$$

che è la stessa equazione di prima pur di scegliere l'origine nel punto $x = l$ (cioè nel punto che è di equilibrio quando il peso è attaccato alla molla). In altre parole, il fatto di studiare le oscillazioni di un peso attaccato a una molla in un piano

verticale o orizzontale ha come unico effetto quello di spostare il punto di equilibrio. Il moto sarà descritto da

$$x(t) = l + c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t = l + A\cos(\omega t + \varphi),$$

con $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

1.106.★ Una massa si nuove di moto armonico semplice con periodo 2sec. All'istante iniziale si trova in posizione -4cm con velocità 4cm/s. Deteminare l'equazione del moto, l'ampiezza, la frequenza e l'istante in cui per la prima volta attraversa la posizione $x = 0$.

1.107.★ Una massa si nuove di moto armonico semplice. Quando è a 2cm dal punto di equilibrio, la sua velocità è di 6cm/s, e quando è a 3cm dal punto di equilibrio, la sua velocità è di 4cm/s. Calcolare il periodo e l'ampiezza delle oscillazioni. [*Suggerimento*: usare la formula $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, calcolare $x'(t)$, e trovare un'identità che lega $x(t)$ e $x'(t)$ utilizzando il fatto che $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$].

1.108.★ Si consideri l'equazione del moto di una massa attaccata a una molla,

$$mx'' = -kx.$$

Si moltiplichino ambo i membri per x', si integrino ambo i membri rispetto al tempo, e si interpreti il risultato ottenuto come principio di conservazione dell'energia meccanica del sistema.

Esempio 1.15. Piccole oscillazioni di un pendolo. Un pendolo di lunghezza l e massa trascurabile si muove in un piano verticale; alla sua estremità è appesa una massa m. Detto ϑ l'angolo formato dal pendolo con la verticale (orientato positivamente quando il pendolo si solleva), la forza peso mg che agisce sulla massa dall'alto verso il basso ha una componente tangenziale al moto pari a $-mg\sin\vartheta$ (v. fig.1.1). Lo spostamento tangenziale della massa è pari a $s = l\vartheta$, quindi la sua accelerazione è $l\vartheta''$, e l'equazione del moto, in assenza di attriti, sarà

$$ml\vartheta'' = -mg\sin\vartheta.$$

Questa è un'equazione del 2° ordine non lineare ma, se supponiamo che le oscillazioni siano piccole (cioè si discostino di poco dalla posizione di equilibrio del pendolo), si potrà approssimare $\sin\vartheta$ con ϑ e si otterrà l'equazione linearizzata,

$$ml\vartheta'' = -mg\vartheta$$

ossia $$\vartheta'' = -\omega^2\vartheta \quad \text{con } \omega^2 = \frac{g}{l},$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico semplice, e descrive in prima approssimazione le oscillazioni di un pendolo in prossimità dell'equilibrio. Osserviamo che il periodo di oscillazione è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

e il moto sarà descritto ancora da

$$\vartheta(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi\right).$$

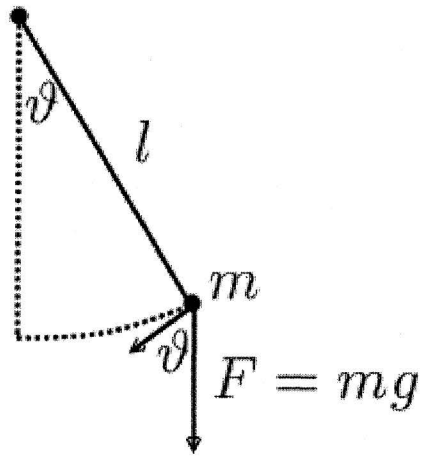


Fig. 1.1. Pendolo

1.109.★ A un pendolo semplice di lunghezza 5m è impressa una velocità angolare iniziale di $\frac{1}{2}$rad/s verso il basso dalla posizione $\vartheta = \frac{1}{10}$rad. Scrivere l'equazione del moto e dire quanto valgono l'ampiezza, il periodo e la frequenza.

1.110.★ Piccole oscillazioni di un galleggiante vicino all'equilibrio. Un corpo di forma cilindrica galleggia nell'acqua, con l'asse del cilindro in verticale, parzialmente immerso. Questo significa che il suo peso mg bilancia la spinta di Archimede, ossia il peso dell'acqua spostata, $m_a g$, dove m_a è il prodotto della densità dell'acqua ($\rho = 1\text{g/cm}^3$) per il volume immerso.

A sua volta, il volume immerso è pari al prodotto dell'area di base del cilindro, A, per la quota di cilindro che in condizioni di equilibrio è immersa, chiamiamola l. Si avrà

$$mg = \rho A l.$$

Supponiamo ora di spingere leggermente verso il basso il cilindro. La spinta di Archimede aumenterà, respingendo verso l'alto il galleggiante, ed inizieranno delle piccole oscillazioni. Indichiamo con y la profondità a cui si trova la base inferiore del cilindro (y orientata verso il basso).

a. Scrivere e risolvere l'equazione differenziale che descrive il moto.

b. Particolarizzare poi l'equazione trovata al caso di un cilindro di massa $m = 2\text{kg}$, raggio $r = 10\text{cm}$, che all'equilibrio è immerso per $l = 5\text{cm}$. Calcolare in questo caso il periodo delle oscillazioni.

Esempio 1.16. Periodo di un pendolo reale. Abbiamo ricavato nell'Esempio 1.15 l'equazione del pendolo

$$\vartheta'' = -\omega^2 \sin\vartheta, \text{ con } \omega^2 = \frac{g}{l}.$$

In quell'esempio abbiamo linearizzato l'equazione supponendo $\sin\vartheta \simeq \vartheta$. Vogliamo capire ora come cambia il periodo del pendolo se non facciamo questa semplificazione, ossia (dal punto di vista fisico) se ammettiamo che le oscillazioni possano essere ampie (ad es. anche di $\pi/2$ rispetto alla verticale). E' possibile ottenere una formula che assegna il periodo esatto, mediante un integrale che non può essere calcolato elementarmente, ma può comunque essere calcolato numericamente con buona approssimazione.

Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione differenziale per ϑ' e integriamo nel tempo, supponendo le condizioni iniziali $\vartheta(0) = \vartheta_0$, $\vartheta'(0) = 0$:

$$\int_0^t \vartheta''(\tau)\vartheta'(\tau)d\tau = -\omega^2 \int_0^t \sin\vartheta(\tau)\vartheta'(\tau)d\tau$$

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left[\vartheta'(\tau)^2\right]d\tau = -\omega^2 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin u\, du$$

$$\frac{1}{2}\vartheta'(t)^2 = \omega^2[\cos\vartheta - \cos\vartheta_0]$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}(t) = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}.$$

Ora passiamo dalla funzione $\vartheta(t)$ alla funzione inversa $t(\vartheta)$, e per il teorema sulla derivata della funzione inversa scriviamo

$$\frac{dt}{d\vartheta}(\vartheta) = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}$$

che poi integriamo in ϑ:

$$t(\vartheta) = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\vartheta_0}}.$$

Ragioniamo ora sul fatto che se il pendolo parte da fermo nella posizione ϑ_0, in mezzo periodo $T/2$ andrà da ϑ_0 a $-\vartheta_0$, perciò

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\vartheta_0}^{-\vartheta_0} \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\vartheta_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{0}^{\vartheta_0} \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\vartheta_0}}$$

(tenuto conto della parità della funzione $\cos u$), perciò

$$T = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\vartheta_0} \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\vartheta_0}}.$$

Si confronti con il valore di T calcolato per piccole oscillazioni, ossia sull'equazione linearizzata (indichiamo con T_0 questo periodo approssimato):

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Il rapporto tra i due è

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{\vartheta_0} \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\vartheta_0}}.$$

Con un software di calcolo scientifico si può valutare questo integrale per vari valori di ϑ_0, per quantificare l'errore di approssimazione. Si trova ad esempio:

ϑ_0	$\pi/50$	$\pi/25$	$\pi/10$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\frac{T}{T_0}$	1.00025	1.00099	1.0062	1.01741	1.07318	1.18034

L'approssimazione lineare dell'equazione differenziale, quindi, porta a un errore nel calcolo del periodo del pendolo di solo lo 0.025% per una piccola oscillazione di $\pi/50$, ma un errore di ben il 18% nel caso di una grande oscillazione di $\pi/2$.

Poiché il periodo di oscillazione di un oscillatore armonico è indipendente dall'ampiezza del moto, il crescere del rapporto T/T_0 al crescere dell'angolo iniziale (e quindi dell'ampiezza) significa anche che *il periodo del pendolo in realtà cresce al crescere dell'ampiezza*, rimanendo approssimativamente costante solo per *piccole* oscillazioni.

Vibrazioni smorzate

1.111. Oscillazioni di una massa soggetta ad attrito. Una massa m, mobile su una retta orizzontale con posizione $y(t)$, è sottoposta ad una forza di richiamo elastica $-ky$ (es. molla); al moto si oppone l'attrito del mezzo, che si suppone proporzionale alla velocità. L'equazione differenziale è dunque

$$my'' = -ky - hy'$$

(con $k, h > 0$) che riscriviamo nella forma

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$$

avendo posto $\delta = \frac{h}{2m}, \omega^2 = \frac{k}{m}$.

Scrivere l'integrale generale dell'equazione[21]. Sarà necessario distinguere i 3 casi:

i) $\delta > \omega$ (resistenza elevata, caso detto di sovrasmorzamento, o smorzamento sopracritico);

ii) $\delta = \omega$ (resistenza critica o smorzamento critico);

iii) $\delta < \omega$ (resistenza debole, sottosmorzamento, smorzamento sottocritico).

1.112.★ Si consideri una massa $m = 5\text{kg}$ che oscilla soggetta a una forza di richiamo elastico (costante $k = 20\text{kg/s}^2$) ed all'attrito del mezzo, proporzionale

[21] Questo calcolo è riportato nel testo (v. [BPS2], cap. 1, §3.6), ma qui si chiede che lo studente ricostruisca da sé il calcolo.

alla velocità (costante $h = 30\text{kg/s}$), secondo l'equazione descritta nell'esercizio precedente. Scrivere esplicitamente la soluzione sotto le condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(0) = 1\text{m} \\ y'(0) = 1\text{m/s}. \end{cases}$$

Calcolare il punto di massima distanza dal punto di equilibrio che la massa raggiungerà per $t \in [0, \infty]$ (cioè nel futuro). La massa attraverserà mai il punto di equilibrio?

Vibrazioni forzate

Esempio 1.17. Una massa m, mobile su una retta orizzontale con posizione $y(t)$, è sottoposta ad una forza di richiamo elastica $-ky$ (es. molla), mentre su di essa agisce anche, dall'esterno, una forza $f(t)$ dipendente dal tempo. L'equazione differenziale corrispondente sarà

$$my'' + ky = f(t)$$

che riscriviamo come

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{1}{m} f(t), \quad \text{con } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Una situazione fisicamente interessante, per gli effetti che produce, è quella in cui la forzante esterna ha anch'essa (come le soluzioni dell'equazione delle vibrazioni libere) un andamento periodico sinusoidale, del tipo

$$\frac{1}{m} f(t) = F\sin(\omega t + \beta)$$

(si noti che a priori ω non è uguale a ω_0, anche se come caso particolare può esserlo). Si determini l'integrale generale dell'equazione[22]

$$y'' + \omega_0^2 y = F\sin(\omega t + \beta).$$

Sarà necessario distinguere il caso generico $\omega \neq \omega_0$ dal *caso risonante* $\omega = \omega_0$.

[22] Di questo calcolo è già stato fornito il risultato sul libro di testo (v. [BPS2], cap.1, § 3.6), ma qui si chiede allo studente di ricostruire per proprio conto il procedimento risolutivo completo.

Conosciamo già l'integrale generale dell'equazione omogenea (moto armonico di pulsazione ω_0):

$$z(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi), \text{ con } C, \varphi \text{ costanti arbitrarie.}$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa.

1. Sia prima $\omega \neq \omega_0$. Allora possiamo cercare una soluzione particolare del tipo[23]:

$$y(t) = D\sin(\omega t + \alpha).$$

Calcoliamo le derivate e sostituiamo nell'equazione:

$$y'(t) = D\omega\cos(\omega t + \alpha);$$

$$y''(t) = -D\omega^2\sin(\omega t + \alpha);$$

$$\sin(\omega t + \alpha)\left[-D\omega^2 + \omega_0^2 D\right] = F\sin(\omega t + \beta),$$

da cui vediamo che basta scegliere

$$\alpha = \beta \text{ e } D = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Perciò la soluzione particolare dell'equazione è

$$y(t) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \beta)$$

e l'integrale generale è

$$y(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \beta),$$

con C, φ costanti arbitrarie.

[23] Notiamo che questo è, anche se con un linguaggio diverso da quello seguito negli esercizi precedente, esattamente ciò che prescrive il metodo di somiglianza: il termine noto è

$F\sin(\omega t + \beta)$, che si può riscrivere nella forma $c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$,

perciò cerchiamo una soluzione del tipo

$A\cos\omega t + B\sin\omega t$, che si può riscrivere nella forma $D\sin(\omega t + \alpha)$.

Facciamo ora qualche osservazione sulla soluzione trovata.

a. La soluzione è data dalla sovrapposizione di due vibrazioni sinusoidali di diversa pulsazione. Una ha pulsazione ω_0, che è quella *propria* del sistema (nell'esempio della molla, ω_0 dipende dalla massa e dalla costante di elasticità della molla; in altri esempi fisici ω_0 rappresenta comunque una *caratteristica interna* del sistema); l'altra ha pulsazione ω, che è quella della forzante esterna (in generale, dipende dalla forza che *agisce dall'esterno* sul sistema).

b. Non c'è un fenomeno di transitorio: nessuna delle due componenti svanisce nel tempo. Ognuna delle due (e quindi anche la somma) è limitata. Si può dire che le due componenti "pesano" entrambe, nessuna è trascurabile rispetto all'altra, in generale.

c. La soluzione è somma di due vibrazioni periodiche; se il rapporto ω/ω_0 è un numero razionale, anche la somma sarà periodica (di periodo molto lungo se il rapporto tra le due pulsazioni è una frazione "complicata"); se il rapporto è irrazionale, la somma sarà una funzione non periodica[24], ma comunque limitata.

d. Le due vibrazioni hanno ampiezza C e $\frac{F}{\omega_0^2-\omega^2}$. La prima ampiezza dipende dalle condizioni iniziali. La seconda può essere molto grande quando ω è *vicino a* ω_0: *se la frequenza della forzante esterna è molto vicina alla frequenza propria del sistema, la forzante genera oscillazioni di grande ampiezza.* Un sistema così è *quasirisonante*. Torneremo su questo caso. Ora studiamo l'altra situazione.

2. Sia $\omega = \omega_0$. In questo caso una soluzione particolare dell'equazione completa non si può cercare nella forma $D\sin(\omega_0 t + \alpha)$ ma

$$y(t) = Dt\sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Calcoliamo le derivate e sostituiamo nell'equazione.

$$y' = D\sin(\omega_0 t + \alpha) + tD\omega_0\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$y'' = 2D\omega_0\cos(\omega_0 t + \alpha) - tD\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \alpha)$$

$$2D\omega_0\cos(\omega_0 t + \alpha) - tD\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \alpha) + \omega_0^2 Dt\sin(\omega_0 t + \alpha) = F\sin(\omega_0 t + \beta)$$

$$2D\omega_0\cos(\omega_0 t + \alpha) = F\sin(\omega_0 t + \beta)$$

da cui

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}; D = \frac{F}{2\omega_0}.$$

[24] v. [BPS1], cap.2, Complementi, esercizio 8.

Perciò la soluzione particolare trovata è

$$y(t) = \frac{F}{2\omega_0} t \sin\left(\omega_0 t + \beta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F}{2\omega_0} t \cos(\omega_0 t + \beta)$$

e l'integrale generale è:

$$y(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F}{2\omega_0} t\cos(\omega_0 t + \beta)$$

con C, φ costanti arbitrarie.

Facciamo anche qui qualche osservazione.

a. La soluzione è ora somma di due componenti di cui la prima è limitata, mentre la seconda è *illimitata*, e si può vedere come un'oscillazione di *ampiezza che cresce linearmente nel tempo*. Questo è il fenomeno della *risonanza*: una forzante esterna che agisce secondo la stessa frequenza propria del sistema, ecciterà il sistema in modo "disastroso", cioè con ampiezza che cresce oltre ogni limite.

b. Per quanto appena detto, la parte prevalente della soluzione, per tempi lunghi, è quella risonante. Si osservi che questa (a parte l'ampiezza crescente) è una vibrazione che ha la stessa pulsazione della forzante esterna ma uno sfasamento di $\pi/2$.

1.113.★ Sistemi quasi risonanti. Vogliamo ora studiare meglio il caso di un *sistema quasirisonante*, ossia in cui la pulsazione della forzante è molto vicina a (ma diversa da) quella propria del sistema.

a. Utilizzando i risultati dell'Esempio 1.17, si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \omega_0^2 y = F\sin\omega t. \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(si noti che rispetto all'esempio abbiamo posto $\beta = 0$).

b. Si ponga ora $F = 1, \omega_0 = 1, \omega = 1 + \varepsilon$. Con l'aiuto di un software di calcolo scientifico si tracci il grafico della soluzione per qualche piccolo valore di ε (ad esempio, per $\varepsilon = 0.1$, sull'intervallo $[0, 24\pi]$). Si osserva il fenomeno di un'oscillazione di pulsazione ω_0 *modulata da un'ampiezza lentamente variabile* (fenomeno noto in acustica col nome di *battimenti*). Per rendere ragione di questo fenomeno, si può riscrivere opportunamente la soluzione trovata. [Suggerimento: usare l'identità trigonometrica $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$].

1.114.★ Forzante di tipo impulsivo. Consideriamo un sistema descritto dall'equazione dell'oscillatore armonico forzato

$$my'' + ky = f(t)$$

con
$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{per } t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{per } t > \varepsilon \end{cases}$$

dove $\varepsilon > 0$ è una piccola costante, che in seguito saremo interessati a far tendere a zero. Questa forzante descrive una sollecitazione di tipo *impulsivo*: una forza intensa che agisce sul sistema solo per un brevissimo intervallo di tempo (ad esempio, un urto contro un'altra massa).

a. Si risolva il problema di Cauchy per l'equazione precedente con condizioni iniziali $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

[Suggerimento: procedere in due tempi: prima si determina la soluzione sull'intervallo di tempo $[0, \varepsilon]$ risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} my'' + ky = \frac{1}{\varepsilon} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

poi, detta $y_1(t)$ la soluzione trovata, si calcolano $y_1(\varepsilon), y_1'(\varepsilon)$ e si risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} my'' + ky = 0 \\ y(\varepsilon) = y_1(\varepsilon) \\ y'(\varepsilon) = y_1'(\varepsilon) \end{cases}$$

determinando così la soluzione su $(\varepsilon, +\infty)$. Detta y_2 questa soluzione, si pone infine $y(t) = \begin{cases} y_1(t) & \text{per } t \in [0, \varepsilon] \\ y_2(t) & \text{per } t \in (\varepsilon, +\infty) \end{cases}$].

b. Si studi il limite per $\varepsilon \to 0$ della soluzione trovata; si mostri che questo limite è una funzione y_0 che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} my'' + ky = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{m}. \end{cases}$$

La funzione y_0 è detta *risposta del sistema a un impulso unitario.*

Dal punto di vista fisico: se all'istante iniziale la velocità è $v = \frac{1}{m}$, vuol dire che la quantità di moto è $mv = 1$; per il teorema dell'impulso, una (variazione di) quantità di moto unitaria è prodotta da un impulso unitario. Difatti questa

situazione è ottenuta come limite di quella in cui agisce una forzante rappresentata da una forza di intensità $1/\varepsilon$ che agisce per un tempo ε, quindi con un impulso unitario. Il passaggio al limite serve a modellizzare la situazione -idealizzata- in cui la variazione della quantità di moto avviene istantaneamente.

Vibrazioni forzate con smorzamento

Esempio 1.18. Una massa m, mobile su una retta orizzontale con posizione $y(t)$, è sottoposta ad una forza di richiamo elastica $-ky$ (es. molla), mentre su di essa agisce anche, dall'esterno, una forza $f(t)$ dipendente dal tempo. Inoltre, al moto si oppone la resistenza del mezzo, che supponiamo proporzionale alla velocità. L'equazione differenziale corrispondente sarà

$$my'' + hy + ky = f(t)$$

che riscriviamo come

$$y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = \frac{1}{m} f(t), \quad \text{con } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \delta = \frac{h}{2m}.$$

Come nel caso senza attrito (v. Esempio 1.17), è interessante la situazione in cui la forzante esterna è di tipo sinusoidale

$$\frac{1}{m} f(t) = F\sin(\omega t + \beta),$$

con una pulsazione ω che a priori può essere uguale o diversa da quella propria del sistema, ω_0. Anche in questo caso ci aspettiamo fenomeni di risonanza quando ω è vicino a ω_0, ma come vedremo la presenza dell'attrito introduce delle differenze significative rispetto al caso senza attrito studiato nell'Esempio 1.17.

Supporremo sempre $\delta > 0$ (il caso $\delta = 0$ è stato trattato nell'Esempio 1.17).

Studiamo quindi l'equazione

$$y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = F\sin(\omega t + \beta).$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea è stato determinato nell'Esercizio 1.111, ed ha una forma diversa nei 3 casi

i) $\delta > \omega_0$ (smorzamento sopracritico)

ii) $\delta = \omega_0$ (smorzamento critico):

iii) $\delta < \omega_0$ (smorzamento sottocritico).

Quello che qui ci interessa è che in tutti e tre i casi l'integrale generale dell'equazione omogenea rappresenta un regime transitorio (tende a zero per $t \to +\infty$).

La soluzione particolare dell'equazione completa invece *non tenderà a zero*. Infatti, per il metodo di somiglianza possiamo cercare una soluzione della forma

$$y(t) = C_1\cos(\omega t + \beta) + C_2\sin(\omega t + \beta)$$

con C_1, C_2 da determinarsi. Notiamo esplicitamente che qualunque sia il valore di ω rispetto ad ω_0, questa funzione $y(t)$ *non può* essere soluzione dell'equazione omogenea (essendo $\delta > 0$ l'equazione caratteristica non ha soluzioni immaginarie pure, quindi l'equazione differenziale non ha soluzioni trigonometriche pure). Pertanto il metodo di somiglianza garantisce che l'equazione completa avrà effettivamente una soluzione di questo tipo, che *non tende a zero* e quindi rappresenta il regime permanente del sistema.

Utilizziamo i numeri complessi per risolvere l'equazione

$$y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = Fe^{i(\omega t+\beta)}.$$

Sia $$w(t) = Ce^{i\omega t}; w' = i\omega Ce^{i\omega t}; w'' = -C\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$\left[-C\omega^2 + 2\delta i\omega C + \omega_0^2 C\right]e^{i\omega t} = Fe^{i\beta}e^{i\omega t}$$

$$C = \frac{Fe^{i\beta}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\delta\omega} = \frac{Fe^{i\beta}[(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\delta\omega]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

e la soluzione cercata è

$$y(t) = \mathrm{Im}w(t) = \mathrm{Im}\left\{\frac{Fe^{i\beta}[(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\delta\omega]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}\left(e^{i\omega t}\right)\right\} =$$

$$= \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}\mathrm{Im}\left\{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - i2\delta\omega\right](\cos(\omega t + \beta) + i\sin(\omega t + \beta))\right\} =$$

$$= \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}\left\{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin(\omega t + \beta) - 2\delta\omega\cos(\omega t + \beta)\right\} =$$

$$= \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}\sin(\omega t + \beta - \varphi)$$

con $\varphi = \arctan\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$. Quindi il regime permanente della soluzione dell'equazione di partenza è:

$$y(t) = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}\sin(\omega t+\beta-\varphi)$$

con $\varphi = \arctan\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$.

Notiamo che la forzante produce una risposta del sistema, a regime, di tipo oscillatorio con la medesima pulsazione, ma un ritardo di fase. La cosa interessante è studiare l'ampiezza della vibrazione, e la sua dipendenza dalla pulsazione della forzante. Si osserva che l'ampiezza rimane limitata in questo caso (il moto è periodico), e l'ampiezza

$$A(\omega) = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}} \text{ è massima quando}$$

$$A_0 = (\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2 \text{ è minima.}$$

$$\frac{dA_0}{d\omega} = -4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+8\delta^2\omega = 4\omega[-\omega_0^2+\omega^2+2\delta^2].$$

Per studiare il segno di questa espressione bisogna ora distinguere i casi:

i) $2\delta^2 \geq \omega_0^2$ (smorzamento elevato). In questo caso $\frac{dA_0}{d\omega} \geq 0$ sempre, perciò A_0 è minima per $\omega = 0$. In sostanza, in questo caso l'ampiezza dell'oscillazione è tanto maggiore quanto minore è la pulsazione della forzante (che comunque non sarà zero).

ii) $2\delta^2 < \omega_0^2$ (piccolo smorzamento). In questo caso $\frac{dA_0}{d\omega} \geq 0$ per $\omega^2 \geq \omega_0^2 - 2\delta^2$, perciò A_0 è minima per $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$. Per il valore

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$$

l'ampiezza è massima, ed è pari a

$$A = \frac{F}{\sqrt{4\delta^4+4\delta^2(\omega_0^2-2\delta^2)}} = \frac{F}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$$

(si ricordi che stiamo lavorando sotto l'ipotesi $2\delta^2 < \omega_0^2$).

Conclusione: nel caso di oscillazioni forzate e debolmente smorzate, si ha un fenomeno di risonanza, con oscillazioni periodiche (perciò limitate) ma di ampiezza che può essere grande. La pulsazione della forzante che provoca la massima ampiezza non è la pulsazione propria del sistema, ma una pulsazione un po' più piccola. L'ampiezza massima è inversamente proporzionale al coefficiente di attrito (perciò più debole è lo smorzamento, più ampie le oscillazioni, coerentemente col fatto che *in assenza* di smorzamento le oscillazioni possono aumentare l'ampiezza senza limite).

Il lettore curioso dell'importanza fisica di questi fenomeni è invitato a leggere il paragrafo (non facile, ma interessante) "La risonanza in natura" in "La fisica di Feynman, vol.1", Zanichelli 2001, §23-4.

1.115.★ Una particella si muove secondo la legge

$$y'' + 4y' + 16y = 3\sin\omega t.$$

a. Quale pulsazione della forzante f farà sì che il moto a regime abbia periodo $\pi/3$?

b. Quale pulsazione di $f(t) = 3\sin\omega t$ produrrà risonanza? In condizioni di risonanza, qual è l'ampiezza dell'oscillazione, e quale il ritardo di fase rispetto alla forzante?

Circuiti elettrici LCR

Esempio 1.19. Supponiamo che un circuito elettrico sia costituito da:
un resistore di resistenza R (misurata in Ohm);
un induttore di induttanza L (misurata in Henry);
un condensatore di capacità C (misurata in Farad);
i tre elementi sono collegati in serie, e al circuito è applicata una forza elettromotrice $E(t)$ misurata in volt.

In queste condizioni, si dimostra che il moto della carica q (misurata in Coulomb) nel circuito soddisfa l'equazione

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t),$$

che si può riscrivere nella forma

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t).$$

L'intensità di corrente $i = q'$ (misurata in Ampère) soddisfa l'equazione (che si ottiene derivando l'equazione precedente)

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}E'(t).$$

Nel caso

$$E(t) = F\sin(\omega t + \beta)$$

(corrente alternata) troviamo così le equazioni

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = \frac{F}{L}\sin(\omega t + \beta)$$

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = \frac{F\omega}{L}\cos(\omega t + \beta),$$

che è l'equazione delle oscillazioni forzate e smorzate (v. Esempio 1.18), con

$$\delta = \frac{R}{2L}; \omega_0^2 = \frac{1}{LC};$$

$$\frac{F\omega}{L}\cos(\omega t + \beta) = \frac{F\omega}{L}\sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Si possono perciò trarre analoghe conclusioni: per l'intensità di corrente $i(t)$, l'andamento a regime sarà

$$i(t) = \frac{F\omega/L}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R\omega}{L}\right)^2}}\sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

che riscriviamo come:

$$i(t) = \frac{F}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}}\cos(\omega t + \beta - \varphi)$$

con $\varphi = \arctan\frac{R\omega/L}{\frac{1}{LC} - \omega^2}$.

Notiamo che l'analogia con l'equazione studiata nell'Esempio 1.18 non è completa perché qui il termine noto è $\frac{F\omega}{L}\sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$, e il fattore ω moltiplica

[25] In effetti, ad essere perfettamente analoga all'equazione delle oscillazioni meccaniche studiate nell'Esempio 1.18 è l'*equazione per la carica q, non quella per la corrente i*, che qui stiamo studiando, e che è ottenuta derivando la prima; la differenza si

l'ampiezza della forzante[25]. Questo è il motivo per cui qui di seguito rifaremo il calcolo del valore di ω che rende massima l'ampiezza.

Il denominatore dell'ampiezza si chiama *impedenza* del circuito,

$$Z(\omega) = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}.$$

Fissate le caratteristiche del circuito (L, C, R), l'ampiezza dell'oscillazione è massima quando è minima l'impedenza, ossia quando è minimo

$$a(\omega) = \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2.$$

Questo quadrato è minimo quando è nullo, cioè per

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Questo valore di ω è quello che dà luogo alla risonanza che, in particolare, è quindi possibile *per qualsiasi scelta* dei valori di R, L, C (e non solo nel caso di resistenza piccola, come accade per le vibrazioni meccaniche). L'altra cosa inaspettata (confrontando con le vibrazioni meccaniche forzate e smorzate) è che il valore di ω che massimizza l'ampiezza *coincide con la pulsazione propria del sistema*, ω_0. L'ampiezza massima è pari a:

$$\frac{F}{Z(\omega_0)} = \frac{F}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega_0} - L\omega_0\right)^2 + R^2}} = \frac{F}{R}.$$

L'ampiezza alla risonanza è tanto maggiore quanto minore è la resistenza.

---

nota al 2° membro: il passaggio da seno a coseno è poco importante, ma la comparsa di un fattore ω cambia in modo significativo alcune conseguenze riguardo al fenomeno della risonanza.

[26] Questo contrasta con la regola generale che abbiamo dato: "Anche se il termine noto contiene solo $\sin 2x$, in generale la soluzione va cercata nella forma $A\sin 2x + B\cos 2x$". In questo caso, però, notiamo che a primo membro manca il termine in y', che nel calcolo delle derivate di funzioni trigonometriche è responsabile dello "scambio" tra funzioni seno e coseno. Perciò essendo il termine noto $3\sin 2x$, possiamo cercare una soluzione del tipo

Supponiamo ora che la forzante esterna sia una somma di tanti termini, del tipo

$$E(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j \sin(\omega_j t + \beta_j)$$

con le pulsazioni $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ tutte diverse. Per linearità, l'andamento a regime di $i(t)$ sarà la somma del tipo

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{F}{Z(\omega_j)} \cos(\omega_j t + \beta_j - \varphi_j).$$

Poniamoci ora da questo punto di vista: le pulsazioni ω_j sono assegnate, e noi possiamo alterare la capacità C (o l'induttanza) L del circuito. Scegliendo opportunamente C (e/o L) potremo allora fare in modo che $1/\sqrt{LC}$ sia uguale a una particolare delle ω_j. Se la resistenza del circuito è piccola, il sistema quindi amplificherà di molto la vibrazione della forzante di pulsazione ω_j rispetto a tutte le altre. A questo modo il circuito agisce da filtro. Questo è il principio su cui si basa la sintonizzazione di un ricevitore radio su una frequenza particolare.

1.116.★ Si determini la corrente a regime in un circuito LCR in serie per cui $C = 2 \cdot 10^{-3}$, $L = 1/20$, $R = 1$ (nelle unità di misura standard), a cui è applicata una forza elettromotrice $E(t) = 50\sin 120t$.

Si dica poi quale valore di C (mantenendo uguali le altre caratteristiche) mette il circuito in risonanza.

1.117.★ Si studi l'andamento a regime di $q(t), i(t)$ in un circuito LCR in serie a cui è applicata una forza elettromotrice costante $E(t) = E$ (corrente continua).

Soluzioni § 1.2

1.58. Sia $Lz \equiv az'' + bz' + cz$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $z(t) = z_1(t) + iz_2(t)$ con z_1, z_2 funzioni a valori reali. Allora

$$Lz = az'' + bz' + cz = a(z_1 + iz_2)'' + b(z_1 + iz_2)' + c(z_1 + iz_2) =$$

per definizione di derivata di una funzione a valori complessi

$$= a(z_1'' + iz_2'') + b(z_1' + iz_2') + c(z_1 + iz_2) =$$

$$= (az_1'' + bz_1' + cz_1) + i(az_2'' + bz_2' + cz_2) = Lz_1 + iLz_2.$$

1.59. Siano $y = y_1 + iy_2$ e $f = f_1 + if_2$, con y_1, y_2, f_1, f_2 a valori reali), allora per l'esercizio precedente,

$$Ly = Ly_1 + iLy_2$$

perciò

$$Ly = f \Leftrightarrow Ly_1 + iLy_2 = f_1 + if_2,$$

e poiché due numeri complessi coincidono se e solo se coincidono rispettivamente le loro parti reali e immaginarie,

$$Ly = f \Leftrightarrow \begin{cases} Ly_1 = f_1 \\ Ly_2 = f_2 \end{cases}$$

1.60. *a.* Sia $r = a + ib$, allora

$$f(t) = \frac{1}{rt} = \frac{1}{t(a+ib)} = \frac{(a-ib)}{t(a^2+b^2)} = \frac{a}{t(a^2+b^2)} + i\frac{(-b)}{t(a^2+b^2)}.$$

b. Si ha:

$$f'(t) = \left(\frac{a}{t(a^2+b^2)}\right)' + i\left(\frac{(-b)}{t(a^2+b^2)}\right)' =$$

$$= -\left(\frac{a}{t^2(a^2+b^2)}\right) + i\left(\frac{b}{t^2(a^2+b^2)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{t^2}\left[\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + i\left(\frac{(-b)}{a^2+b^2}\right)\right] = -\frac{1}{rt^2}.$$

1.61.

$$y(x) = e^x\left(\cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x\right).$$

1.62. $y(x) = e^{-x}(1 + 5x)$.

1.63. $y(x) = e^{x} + 2e^{-x/2}$.

1.64. $y(x) = e^{-x}\left(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x\right)$.

1.65. $y(x) = e^{3x}(1 - x)$.

1.66. $y(x) = e^{x} + 3e^{-x/3}$.

1.67. $y(x) = \frac{e}{2}\left(e^{x} - e^{-3x}\right)$.

1.68. $y(x) = \sqrt{3}e^{-x}(\cos x + \sin x)$.

1.69. $y(x) = \frac{2}{3}e\left(e^{x} - e^{-2x}\right)$.

1.70. $y(x) = e^{-2x}(1 + 4x)$.

1.71. *a.* Vero. Questa proprietà vale per tutte le equazioni differenziali lineari del second'ordine omogenee a coefficienti continui.

b. Falso. Soluzioni di questo tipo esistono sempre se i coefficienti sono *costanti.*

c. Vero. Per le equazioni lineari a coefficienti continui vale un teorema di esistenza e unicità in grande per il problema di Cauchy.

d. Falso. (v. risposta precedente).

1.72. *a.* No, perché l'omogenea non è a coefficienti costanti, quindi non rientra nel metodo studiato. Peggio ancora, un coefficiente dell'omogenea è x mentre il termine noto è $2e^{x}$, due funzioni non simili tra loro, quindi non c'è neppure speranza di "adattare" il metodo a questa situazione.

b. Sì, questo è un caso standard, si cerca soluzione del tipo $e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$.

c. No perché l'equazione non è lineare (per la presenza del termine y^2).

d. Sì, l'equazione omogenea è a coefficienti costanti, e il termine noto è somma di due termini "standard": si può cercare una soluzione del tipo $Ae^{x} + Bx^3 + Cx^2 + Dx$. (Somma delle due soluzioni che si cercherebbero per termini noti $2e^{x}$ e x^2, rispettivamente). Si noti che l'assenza di y a primo membro comporta che dobbiamo cercare un polinomio di un grado in più rispetto a quello del secondo membro, e senza termine noto.

e. No, perché il termine noto non è di tipo standard.

1.73. $$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{4}{5} e^{2x}.$$

1.74. *a.* Equazione caratteristica:

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r-2)^2 = 0; r = 2 \text{ (radice doppia).}$$

Integrale generale dell'equazione omogenea:

$$z(x) = e^{2x}(c_1 + c_2 x).$$

b. Cerchiamo una soluzione del tipo

$$y(x) = e^{-x}(A + Bx)$$

$$y' = e^{-x}(-A - Bx + B)$$

$$y'' = e^{-x}(A + Bx - B - B)$$

$$e^{-x}(A + Bx - B - B - 4(-A - Bx + B) + 4(A + Bx)) = xe^{-x}$$

$$\begin{cases} 9A - 6B = 0 \\ 9B = 1 \end{cases}$$

$$A = \frac{2}{27}; B = \frac{1}{9}$$

$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{2}{27} + \frac{1}{9}x\right).$$

1.75. *a.*

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r+2)^2 = 0; r = -2.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = (c_1 x + c_2)e^{-2x}.$$

b. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione complessa

$$w'' + 4w' + 4w = e^{x(-3+i)}$$

della forma

$$w(x) = ae^{x(-3+i)}$$

$$w' = a(-3+i)e^{x(-3+i)}; \qquad w'' = a(-3+i)^2 e^{x(-3+i)}$$

$$ae^{x(-3+i)}\left[(-3+i)^2 + 4(-3+i) + 4\right] = e^{x(-3+i)}$$

$$a[8 - 6i - 12 + 4i + 4] = 1;\ a = \frac{1}{2}i$$

$$w(x) = \frac{1}{2}ie^{x(-3+i)}.$$

La soluzione dell'equazione reale è:

$$y(x) = \mathrm{Re}w(x) = \mathrm{Re}\left(e^{-3x}\frac{1}{2}i(\cos x + i\sin x)\right) = -\frac{1}{2}e^{-3x}\sin x.$$

1.76. Cerchiamo prima l'integrale generale dell'equazione omogenea. Equazione caratteristica:

$$r^2 + 3r - 4 = 0; \quad r = 1, r = -4.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa, della forma

$$y(x) = A\cos x + B\sin x$$

$$y' = -A\sin x + B\cos x; \qquad y'' = -A\cos x - B\sin x$$

$$(-A\cos x - B\sin x) + 3(-A\sin x + B\cos x) - 4(A\cos x + B\sin x) = 2\sin x$$

$$\cos x(-A + 3B - 4A) + \sin x(-B - 3A - 4B) = 2\sin x$$

$$\begin{cases} -5A + 3B = 0 \\ -3A - 5B = 2 \end{cases} \qquad A = -\frac{3}{17};\ B = -\frac{5}{17};$$

$$y(x) = -\frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x.$$

L'integrale generale dell'equazione di partenza è quindi:

$$c_1 e^x + c_2 e^{-4x} + -\frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x.$$

Osservazione 1.5. Utilizzo dell'esponenziale complesso per un termine noto trigonometrico. Si sarebbe potuto usare anche il metodo dell'esponenziale complesso, al modo seguente:

$$2\sin x = \mathrm{Im}\left[2e^{ix}\right],$$

perciò cerchiamo una soluzione $w = Ae^{ix}$ dell'equazione a termine noto complesso

$$w'' + 3w' - 4w = 2e^{ix}.$$

Si ha:
$$w' = Aie^{ix}; w'' = -Ae^{ix}$$

$$\left(-Ae^{ix}\right) + 3\left(Aie^{ix}\right) - 4\left(Ae^{ix}\right) = 2e^{ix}$$

$$A(-5 + 3i) = 2;$$

$$A = \frac{2}{-5+3i} = \frac{2(-5-3i)}{34} = \frac{(-5-3i)}{17}$$

$$w(x) = \frac{(-5-3i)}{17}e^{ix}$$

$$y(x) = \mathrm{Im}\left[\frac{(-5-3i)}{17}e^{ix}\right] = -\frac{5}{17}\sin x - \frac{3}{17}\cos x.$$

In questo caso, essendo il termine noto una funzione trigonometrica singola e non il prodotto di una funzione trigonometrica e una esponenziale, il vantaggio di usare l'esponenziale complesso rispetto alle funzioni trigonometriche si perde un po'.

1.77. *a.* $$y(x) = e^{-3x}(c_1 x + c_2).$$

b. $$\overline{y}(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(x-1).$$

1.78. Dobbiamo prima scrivere l'integrale generale dell'equazione completa; per far questo determiniamo anzitutto l'integrale generale dell'omogenea. Equazione caratteristica:

$$r^2 + 9 = 0; \quad r = \pm 3i$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x).$$

Soluzione particolare della non omogenea: cerchiamo[26]

$$\overline{y}(x) = A\sin 2x;$$

$$y'(x) = 2A\cos 2x; y''(x) = -4A\sin 2x.$$

$$\sin 2x(-4A + 9A) = 3\sin 2x;\ A = \frac{3}{5};$$

quindi $$\overline{y}(x) = \frac{3}{5}\sin 2x$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + \frac{3}{5}\sin 2x.$$

Per risolvere il problema di Cauchy imponiamo ora le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 2 \\ y'(0) = 3c_2 + \frac{6}{5} = 6; c_2 = \frac{8}{5} \end{cases}$$

La soluzione cercata è quindi:

$$y(x) = 2\cos(3x) + \frac{8}{5}\sin(3x) + \frac{3}{5}\sin 2x.$$

1.79. *a.* $$z(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}.$$

b. $$y(x) = \left(\frac{1}{6}x + \frac{7}{36}\right)e^{-3x}.$$

1.80. *a.* Integrale generale dell'omogenea:

$$r^2 - r - 2 = 0; r = 2; r = -1;$$

$$z(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}.$$

---

[26] Questo contrasta con la regola generale che abbiamo dato: "Anche se il termine noto contiene solo $\sin 2x$, in generale la soluzione va cercata nella forma $A\sin 2x + B\cos 2x$". In questo caso, però, notiamo che a primo membro manca il termine in y', che nel calcolo delle derivate di funzioni trigonometriche è responsabile dello "scambio" tra funzioni seno e coseno. Perciò essendo il termine noto $3\sin 2x$, possiamo cercare una soluzione del tipo $A\sin 2x$. Se *non* avessimo fatto questa osservazione e, rispettando la regola generale, avessimo cercato una soluzione $A\sin 2x + B\cos 2x$, niente di male: risolvendo il sistema avremmo trovato $B = 0$.

Cerchiamo una soluzione particolare della completa. *Poiché il secondo membro* $6e^{2t}$ *è soluzione dell'omogenea*, il metodo di somiglianza prescrive di cercare una soluzione della forma:

$$y(t) = Ate^{2t}.$$

$$y' = Ae^{2t}(2t+1); y'' = Ae^{2t}(4t+4);$$

$$Ae^{2t}[4t+4-2t-1-2t] = 6e^{-2t};\ 3A = 6;\ A = 2;$$

Soluzione particolare della completa:

$$\overline{y}(t) = 2te^{2t}$$

Integrale generale della completa:

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} + 2te^{2t}.$$

b. Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) = 2c_1 - c_2 + 2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = -c_1 \\ 3c_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -1/3 \\ c_2 = 1/3 \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + 2te^{2t} = e^{-2t}\left(2t - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}e^{-t}.$$

1.81. $$r^2 + 2r - 3 = 0; r = 1; r = -3;$$

$$z(t) = c_1e^t + c_2e^{-3t}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare della completa. Poiché il secondo membro è

$$e^{-2t}\cos t = \mathrm{Re}\left[e^{t(-2+i)}\right],$$

cerchiamo prima una soluzione complessa,

$$u(t) = Ae^{t(-2+i)},$$

dell'equazione con termine noto $e^{t(-2+i)}$, e poi ne prenderemo la parte reale.

$$u' = Ae^{t(-2+i)}(-2+i); u'' = Ae^{t(-2+i)}(-2+i)^2;$$

$$Ae^{t(-2+i)}\left[(-2+i)^2+2(-2+i)-3\right]=e^{t(-2+i)};$$

$$A(-2i-4)=1;A=\frac{1}{-2i-4}=\frac{-4+2i}{4+16}=-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i.$$

Soluzione reale dell'equazione di partenza:

$$y(t)=\mathrm{Re}[u(t)]=\mathrm{Re}\left[\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i\right)e^{-2t}(\cos t+i\sin t)\right]=$$

$$=e^{-2t}\left(-\frac{1}{5}\cos t-\frac{1}{10}\sin t\right)$$

Integrale generale della completa:

$$y(t)=e^{-2t}\left(-\frac{1}{5}\cos t-\frac{1}{10}\sin t\right)+c_1e^t+c_2e^{-3t}.$$

1.82. *a.* $$r^2+3r-4=0$$

$$(r-1)(r+4)=0;r=1,r=-4.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x)=c_1e^x+c_2e^{-4x}.$$

b. Poiché il termine noto è soluzione dell'omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione nella forma

$$y(x)=Axe^{-4x}$$

$$y'=Ae^{-4x}(-4x+1);\qquad y''=Ae^{-4x}(16x-8)$$

$$Ae^{-4x}[(16x-8)+3(-4x+1)-4x]=5e^{-4x}$$

$$-5A=5;A=-1$$

$$y(x)=-xe^{-4x}$$

1.83. *a.* $$r^2+2=0;\qquad r=\pm i\sqrt{2}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x)=c_1\cos\left(\sqrt{2}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

b. Usiamo il metodo dell'esponenziale complesso: poiché

$$3e^{-x}\sin 2x = \mathrm{Im}\left(3e^{x(-1+2i)}\right),$$

cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione complessa

$$w'' + 2w = 3e^{x(-1+2i)}$$

della forma $$w(x) = Ae^{x(-1+2i)}.$$

$$w'' = A(-1+2i)^2 e^{x(-1+2i)}$$

$$Ae^{x(-1+2i)}\left[(-1+2i)^2 + 2\right] = 3e^{x(-1+2i)}$$

$$A = \frac{3}{-1-4i} = 3\frac{(-1+4i)}{1+16} = \frac{3}{17}(-1+4i)$$

$$w(x) = \frac{3}{17}(-1+4i)e^{x(-1+2i)} = \frac{3}{17}e^{-x}(-1+4i)(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$y(x) = \mathrm{Im}w(x) = \frac{3}{17}e^{-x}(-\sin 2x + 4\cos 2x).$$

Si confronti con l'Esercizio 1.78 (v. la nota a pié di pagina nell'esercizio). Lì, in presenza di un primo membro in cui manca la y' e un termine noto del tipo $3\sin 2x$, abbiamo cercato una soluzione $A\sin 2x$. Qui, in presenza ancora di un primo membro in cui manca la y' e questa volta di un termine noto del tipo $3e^{-x}\sin 2x$, avremmo potuto cercare una soluzione del tipo $Ae^{-x}\sin 2x$? No, perché anche se a primo membro manca la derivata prima, il calcolo della derivata seconda del *prodotto* $Ae^{-x}\sin 2x$ introduce necessariamente dei termini del tipo $Ae^{-x}\cos 2x$.

1.84. *a.* $$z(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x}.$$

b. $$y(x) = -\frac{9}{29}\cos 2x - \frac{8}{29}\sin 2x.$$

1.85. *a.* $$y(x) = -\frac{2}{5}\sin 3x + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x.$$

b. $$y(x) = -\frac{2}{5}\sin 3x + 2\cos 2x + \sin 2x.$$

1.86. *a.* $r^2+2r-3=(r-1)(r+3)=0; r=1; r=-3;$

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-3x}.$$

b. $$3e^x\cos 2x=\mathrm{Re}\left[3e^{x(1+2i)}\right].$$

Risolviamo allora $$u''+2u'-3u=3e^{x(1+2i)}$$

cercando $$u(x)=Ae^{x(1+2i)}.$$

$$u'=A(1+2i)e^{x(1+2i)}; u''=A(1+2i)^2e^{x(1+2i)};$$

$$Ae^{x(1+2i)}\left[(1+2i)^2+2(1+2i)-3\right]=3e^{x(1+2i)};$$

$$A=\frac{3}{-4+8i}=\frac{3(-4-8i)}{16+64};$$

$$u(x)=\frac{3(-4-8i)}{80}e^{x(1+2i)}=\frac{3}{20}e^x(-1-2i)(\cos 2x+i\sin 2x)$$

$$y(x)=\mathrm{Re}[u(x)]=\frac{3}{20}e^x(-\cos 2x+2\sin 2x).$$

1.87. Cerchiamo prima l'integrale generale dell'equazione (che è omogenea).

$$r^2+4r+4=0; r=-2 \text{ (soluzione doppia)}$$

$$y(x)=(c_1x+c_2)e^{-2x}.$$

Imponiamo ora le condizioni di Cauchy:

$$y(0)=c_2=3;$$

$$y'(x)=(c_1-2c_1x-2c_2)e^{-2x}; y'(0)=c_1-2c_2=c_1-6=2; c_1=8.$$

La soluzione è: $$y(x)=(8x+3)e^{-2x}$$

1.88. *a.* $$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-3x}.$$

b. $$y(x) = \frac{3}{4}e^{x} + \frac{1}{4}e^{-3x}.$$

c. $$y(x) = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\sin x.$$

1.89. *a.* $$4r^2 + 4r + 1 = 0.$$

$$(2r+1)^2 = 0.\, r = -\frac{1}{2} \text{ radice doppia.}$$

Integrale generale dell'equazione:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(c_1 + c_2 x).$$

b. $$y(0) = c_1 = 1;$$

$$y'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 x + c_2\right);$$

$$y'(0) = c_2 - \frac{1}{2}c_1 = 2$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Soluzione del problema di Cauchy:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(1 + \frac{5}{2}x\right).$$

c. Cerchiamo una soluzione del tipo:

$$y(x) = ce^{2x};$$

$$y' = 2ce^{2x};\ y'' = 4ce^{2x};$$

$$4y'' + 4y' + y = e^{2x}(4 \cdot 4c + 4 \cdot 2c + c) = e^{2x}$$

$$25ce^{2x} = e^{2x} \Rightarrow c = \frac{1}{25};$$

Soluzione particolare dell'equazione:

$$y(x) = \frac{1}{25}e^{2x}.$$

1.90. *a.* $r^2 + 2r + 3 = 0; \quad r = -1 \pm i\sqrt{2}.$

$$y(x) = e^{-x}\left(c_1\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right).$$

b. $y(0) = c_1 = 0.$

$$y'(x) = c_2 e^{-x}\left(-\sin\sqrt{2}x + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x\right);$$

$$y'(0) = \sqrt{2}c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = \sqrt{2}.$$

$$y(x) = \sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

c. Poiché $3\cos(2x) = \text{Re}\ 3e^{i2x}$

cerchiamo una soluzione del tipo $y = Ae^{i2x}$ dell'equazione

$$y'' + 2y' + 3 = 3e^{i2x}.$$

$$y' = 2iAe^{i2x}; \; y'' = -4Ae^{i2x};$$

$$y'' + 2y' + 3 = Ae^{i2x}(-4 + 4i + 3) = 3e^{i2x}$$

$$A = \frac{3}{-1+4i} = \frac{3}{17}(-1 - 4i).$$

$$y(x) = \frac{3}{17}(-1 - 4i)e^{i2x}.$$

Una soluzione particolare dell'equazione di partenza è allora

$$\overline{y}(x) = \text{Re}\left(\frac{3}{17}(-1 - 4i)(\cos 2x + i\sin 2x)\right) = \frac{3}{17}(-\cos 2x + 4\sin 2x).$$

1.91. $$y(x) = \frac{e^{-x}}{68}(5\cos 2x - 3\sin 2x)$$

1.92. $$y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} - \frac{1}{8}.$$

1.93. $$y(x) = \frac{e^{-2x}}{3}$$

1.94. $$y(x) = \frac{1}{5}\sin x - \frac{3}{5}\cos x.$$

1.95. $$y(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{3}{8}x.$$

1.96. $$y(x) = \frac{3e^{2x}}{164}(-9\cos 3x + \sin 3x)$$

1.97. $$y(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{10}{9}x + \frac{14}{27}$$

1.98. $$a.\ \alpha > 0; \quad b.\ \alpha = 0$$

1.99. $$y(x) = \frac{1}{3}\Big((2x+1)^{1/3} - 1\Big).$$

1.100. $$y(x) = -\frac{3}{4}\cos 2x + e^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x\right).$$

1.101. $$y(x) = -\frac{1}{6}(\cos 3x + \sin 3x) + \frac{1}{2}e^x\cos\sqrt{2}x.$$

1.102. $$y(x) = e^x\left(1 + \cos\sqrt{3}x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x\right).$$

1.103.

$$y(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{5}{4} + 2e^{-x} + \frac{5}{4}e^{2x}.$$

1.104. *a.* Cercando $y = x^r$ troviamo l'equazione

$$r(r-1) + 4r + 1 = 0; \quad r = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2};$$

$$y(x) = c_1 x^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} + c_2 x^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}} \text{ per } x > 0.$$

b. Cercando $y = x^r$ troviamo l'equazione

$$r(r-1) + 2r + 1 = 0; \quad r = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right) \text{ per } x > 0.$$

c. Cercando $y = x^r$ troviamo l'equazione

$$r(r-1) + 3r + 1 = 0; \quad r = -1 \text{ (radice doppia)}$$

$$y(x) = \frac{1}{x}(c_1 + c_2 \log x) \text{ per } x > 0.$$

1.105. *a.* Integrale generale. Cerchiamo $y = x^r$ con

$$r(r-1) - 4r - 5 = 0; \quad r = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$y(x) = c_1 x^{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}} + c_2 x^{\frac{5-3\sqrt{5}}{2}}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(1) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(1) = c_1\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{6} \\ c_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{6} \end{cases}$$

e la soluzione del problema è:

$$y(x) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right) x^{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}} + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right) x^{\frac{5-3\sqrt{5}}{2}} \text{ per } x > 0.$$

b. Integrale generale. Cerchiamo $y = x^r$ con

$$r(r-1) + 4r + 3 = 0; \quad r = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$y(x) = x^{-\frac{3}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right)$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$y'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right) +$$

$$+ x^{-\frac{3}{2}}\left(-c_1\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + c_2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right)\cdot\frac{1}{x}.$$

$$y(1) = c_1 = 2$$

$$y'(1) = -\frac{3}{2}c_1 + c_2\frac{\sqrt{3}}{2} = 1; \quad c_2 = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

e la soluzione del problema è:

$$y(x) = x^{-\frac{3}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + \frac{8}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right) \quad \text{per } x > 0.$$

c. Poiché la condizione iniziale è assegnata in $x_0 < 0$ dovremo risolvere l'equazione in $(-\infty, 0)$. Cerchiamo $y = (-x)^r$ con

$$r(r-1) - r + \frac{3}{4} = 0; \quad r = \frac{1}{2}, r = \frac{3}{2}$$

$$y(x) = c_1(-x)^{\frac{1}{2}} + c_2(-x)^{\frac{3}{2}}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$y'(x) = -\frac{1}{2}c_1(-x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}c_2(-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} y(-1) = c_1 + c_2 = 2 \\ y'(1) = -\frac{1}{2}c_1 - \frac{3}{2}c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

e la soluzione del problema è:

$$y(x) = 3\sqrt{|x|} - \sqrt{|x|^3} \text{ per } x < 0.$$

d. Integrale generale. Cercando $y = x^r$ troviamo l'equazione

$$r(r-1) - 5r + 9 = 0; \quad r = -3 \text{ (radice doppia)}$$

$$y(x) = \frac{1}{x^3}(c_1 + c_2 \log x) \text{ per } x > 0.$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$y(1) = c_1 = -1$$

$$y'(x) = -\frac{3}{x^4}(c_1 + c_2 \log x) + \frac{c_2}{x_4};$$

$$y'(1) = -3c_1 + c_2 = 8; \; c_2 = 5$$

e la soluzione è: $$y(x) = \frac{1}{x^3}(5\log x - 1) \text{ per } x > 0.$$

1.106. Dobbiamo imporre le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t \\ x(0) = -4 \\ x'(0) = 4 \end{cases}$$

Perciò $$\begin{cases} c_1 = -4 \\ c_2\omega = 4. \end{cases}$$

Inoltre sappiamo che $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2$, perciò $\omega = \pi$. Quindi $c_1 = -4, c_2 = \frac{4}{\pi}$, e

$$x(t) = -4\cos\pi t + \frac{4}{\pi}\sin\pi t.$$

L'ampiezza è $$A = 4\sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2}} \simeq 4.2.$$

Il primo istante in cui la massa taglia la posizione $x = 0$ è il minimo t per cui

$$-4\cos\pi t + \frac{4}{\pi}\sin\pi t = 0,$$

$$\tan\pi t = \pi; \quad t = \frac{1}{\pi}\arctan\pi \simeq 0.4.$$

1.107. Partiamo dalla formula generale del moto

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

in cui per il momento non conosciamo nessuna delle costanti A, φ, ω. Calcoliamo anche la velocità

$$x'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

Dal confronto tra le due formule ricaviamo l'identità utile

$$\left(\frac{x(t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{x'(t)}{A\omega}\right)^2 = \cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) = 1$$

o anche

$$x(t)^2 + \frac{x'(t)^2}{\omega^2} = A^2 \qquad \forall t.$$

Utilizziamo ora le informazioni date. Ad un certo istante t_1 è $x(t_1) = 2$ e $x'(t_1) = 6$, il che implica che

$$2^2 + \left(\frac{6}{\omega}\right)^2 = A^2$$

mentre ad un altro istante t_2 è $x(t_2) = 3, x'(t_2) = 4$, il che implica che

$$3^2 + \left(\frac{4}{\omega}\right)^2 = A^2.$$

Abbiamo quindi 2 equazioni nelle 2 incognite A, ω, che ci permettono di determinarle:

$$\begin{cases} A^2 = 4 + \frac{36}{\omega^2} \\ A^2 = 9 + \frac{16}{\omega^2} \end{cases} \quad \text{che dà:} \quad \begin{cases} 4 + \frac{36}{\omega^2} = 9 + \frac{16}{\omega^2} \\ A^2 = 4 + \frac{36}{\omega^2} \end{cases}$$

$$5 = \frac{20}{\omega^2}; \quad \omega = 2; \; A^2 = 13; \; A = \sqrt{13}.$$

Perciò l'ampiezza delle oscillazioni è $\sqrt{13}$, mentre il periodo è $T = \frac{2\pi}{2}\text{sec.} = \pi\text{sec.}$

Si noti che con queste informazioni il moto non è ancora completamente determinato, in quanto possiamo dire che

$$x(t) = \sqrt{13}\cos(2t + \varphi),$$

con φ incognita.

1.108.
$$\int_0^T mx''(t)x'(t)dt = -\int_0^T kx(t)x'(t)dt$$

$$\int_0^T m\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}x'(t)^2\right]dt = -\int_0^{x(T)} kxdx$$

$$m\left[\frac{1}{2}x'(t)^2\right]_0^T = -k\left[x^2\right]_0^{x(T)}$$

$$\frac{1}{2}mv^2(T) - \frac{1}{2}mv^2(0) = -kx^2(T) + kx^2(0)$$

il che significa che la quantità

$$E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + kx^2(t)$$

nell'istante T (qualsiasi) è uguale a $E(0)$, ossia: è costante. Questa quantità è l'energia meccanica totale del sistema: $\frac{1}{2}mv^2$ è l'energia cinetica, mentre kx^2 è l'energia potenziale della molla.

1.109. Poiché $l = 5m$, $g = 9.8m/s^2$, si ha $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 1.4/s$. Possiamo calcolare subito il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1.4}s \simeq 4.49s$$

e la frequenza
$$\nu = 0.22/s.$$

Per calcolare il moto dobbiamo imporre le condizioni di Cauchy all'integrale generale dell'equazione del pendolo per piccole oscillazioni:

$$\begin{cases} \vartheta(t) = c_1\cos(1.4t) + c_2\sin(1.4t) \\ \vartheta(0) = \frac{1}{10} \\ \vartheta'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{10} = c_1 \\ -\frac{1}{2} = 1.4c_2, c_2 = -0.357 \end{cases}$$

perciò il moto è descritto da

$$\vartheta(t) = 0.1\cos(1.4t) - 0.357\sin(1.4t),$$

l'ampiezza è $$A = \sqrt{0.1^2 + 0.357^2} = 0.37\text{rad}$$

1.110. *a.* Si avrà (tenendo conto che $mg = \rho Alg$):

$$my'' = mg - \rho Ayg = \rho Alg - \rho Ayg = -\rho A(y - l)g.$$

Se scegliamo come origine delle y la profondità l a cui la base del cilindro si trova in condizioni di equilibrio, cioè poniamo $Y = y - l$, otterremo

$$Y'' = -\omega^2 Y \quad \text{con } \omega^2 = \frac{\rho Ag}{m}.$$

Si riconosce l'equazione di un oscillatore armonico. Il moto sarà

$$Y(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$$

ossia: $$y(t) = l + c_1\cos\left(\sqrt{\frac{\rho Ag}{m}}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{\rho Ag}{m}}t\right).$$

b. Per: $l = 5\text{cm}$; $\rho = 1\text{g/cm}^3$; $A = \pi \cdot 10^2\text{cm}^2$; $m = 2\text{kg}$ si ha:

$$\omega = \sqrt{\frac{1\text{g/cm}^3 \cdot 100\pi\text{cm}^2 \cdot 980\text{cm/s}^2}{2000\text{g}}} = 12.4/\text{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{12.4}\text{s} \simeq 0.5\text{s}.$$

1.111.

i) $\delta > \omega$ (smorzamento sopracritico):

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie, dove r_1, r_2, entrambi negativi, sono le soluzioni (reali e distinte) dell'equazione caratteristica

$$r^2 + 2\delta r + \omega^2 = 0,$$

ossia $$r = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}.$$

ii) $\delta = \omega$ (smorzamento critico):

$$y(t) = e^{-\omega t}(c_1 + c_2 t)$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

iii) $\delta < \omega$ (smorzamento sottocritico):

$$y(t) = Ae^{-\delta t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}t + \varphi\right)$$

con A, φ costanti arbitrarie

In tutti e tre i casi l'integrale generale dell'equazione omogenea rappresenta un regime transitorio (tende a zero per $t \to +\infty$).

1.112. L'equazione differenziale è

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$$

con $\delta = \frac{h}{2m} = \frac{30\text{kg/s}}{2\cdot 5\text{kg}} = 3/\text{s}$, $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{20\text{kg/s}^2}{5\text{kg}} = 4/\text{s}^2$, quindi

$$y'' + 6y' + 4y = 0$$

che possiamo risolvere direttamente, anziché applicare la formula astratta trovata al punto precedente. Equazione caratteristica:

$$r^2 + 6r + 4 = 0; r = -3 \pm \sqrt{5};$$

integrale generale:

$$y(t) = c_1 e^{(-3+\sqrt{5})t} + c_2 e^{(-3-\sqrt{5})t}.$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = c_1\left(-3 + \sqrt{5}\right) + c_2\left(-3 - \sqrt{5}\right) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{\sqrt{5}+4}{2\sqrt{5}} \\ c_2 = \frac{\sqrt{5}-4}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

Quindi

$$y(t) = \left(\frac{\sqrt{5}+4}{2\sqrt{5}}\right)e^{(-3+\sqrt{5})t} + \left(\frac{\sqrt{5}-4}{2\sqrt{5}}\right)e^{(-3-\sqrt{5})t}$$

Determiniamo ora il massimo della funzione per $t \geq 0$.

$$y'(t) = \left(\frac{\sqrt{5}+4}{2\sqrt{5}}\right)\left(-3 + \sqrt{5}\right)e^{(-3+\sqrt{5})t} +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{5}-4}{2\sqrt{5}}\right)\left(-3 - \sqrt{5}\right)e^{(-3-\sqrt{5})t} \geq 0$$

per $$\left(\frac{\sqrt{5}+4}{2\sqrt{5}}\right)\left(-3+\sqrt{5}\right)e^{(-3+\sqrt{5})t} \geq \left(\frac{\sqrt{5}-4}{2\sqrt{5}}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)e^{(-3-\sqrt{5})t}$$

$$e^{2\sqrt{5}t} \leq \frac{\left(\sqrt{5}-4\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{5}+4\right)\left(-3+\sqrt{5}\right)} = \frac{7+\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}$$

$$t \leq \frac{1}{2\sqrt{5}}\log\left(\frac{7+\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}\right)$$

quindi $$t_0 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\log\left(\frac{7+\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}\right) \simeq 0.148\text{s}$$

è l'istante in cui y raggiunge il suo massimo, che è pari a

$$y\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\log\left(\frac{7+\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}\right)\right) \simeq 1.06\text{m}$$

e il punto di massima distanza dall'equilibrio è posto a circa 1.06m, quindi dopo soli 6cm dalla partenza il punto inverte il suo percorso. Poiché per $t > t_0$ è $y(t)$ decrescente e $y(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, ne segue che sarà sempre $y(t) > 0$, perciò la massa non supera mai il punto di equilibrio (e lo raggiunge solo all'infinito).

1.113. *a.* Sia $\beta = 0$ nella soluzione trovata nel Caso 1 dell'Esempio 1.17:

$$y(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t$$

Imponiamo ad esempio le condizioni iniziali

$$y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

Si ottiene il sistema (nelle incognite C, φ):

$$\begin{cases} C\sin\varphi = 0 \\ C\omega_0\cos\varphi + \frac{F}{\omega_0^2-\omega^2}\omega = 0 \end{cases}$$

che dà $$\varphi = 0; C = -\frac{F\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

e soluzione $$y(t) = -\frac{F}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\omega_0 t + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t =$$

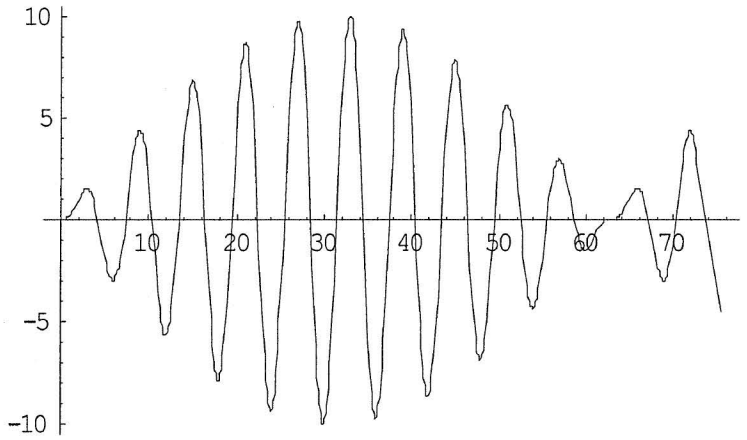
$$= \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}\left[\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right]$$

b. Per $F = \omega_0 = 1, \omega = 1 + \varepsilon$ si ha:

$$y(t) = \frac{1}{-(2\varepsilon + \varepsilon^2)}[\sin(1+\varepsilon)t - (1+\varepsilon)\sin t] =$$

$$= \frac{1}{-(2\varepsilon + \varepsilon^2)}[\sin(1+\varepsilon)t - \sin t] + \frac{\sin t}{2+\varepsilon}$$

Per $\varepsilon = 0.1$ un grafico di questa funzione è il seguente:



Riscriviamo la (prima) funzione così:

$$y(t) = \frac{1}{-(2\varepsilon + \varepsilon^2)}\left[2\cos\left(t\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\sin\frac{\varepsilon t}{2}\right] + \frac{\sin t}{2+\varepsilon}$$

che è circa uguale a

$$-\frac{1}{\varepsilon}\sin\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

Il primo addendo è una funzione $\cos t$ (periodo 2π) moltiplicata per un fattore $-\frac{1}{\varepsilon}\sin\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)$ che rappresenta un'oscillazione di grande ampiezza $(1/\varepsilon)$ e periodo lungo $(T = 4\pi/\varepsilon)$, ossia: una cosinusoide modulata da un'ampiezza lentamente variabile. Il massimo sarà dell'ordine di $1/\varepsilon$. Questa oscillazione di ampiezza variabile si sovrappone alla sinusoide $\frac{1}{2}\sin t$, che non altera sostanzialmente il fenomeno.

1.114. *a.* Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} my'' + ky = \frac{1}{\varepsilon} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$y = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

Soluzione particolare della completa (costante):

$$y = \frac{1}{k\varepsilon}.$$

Integrale generale dell'equazione:

$$y(t) = \frac{1}{k\varepsilon} + c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = \frac{1}{k\varepsilon} + c_1 = 0 \\ y'(0) = c_2\sqrt{\frac{k}{m}} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{k\varepsilon} \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Soluzione del problema:

$$y_1(t) = \frac{1}{k\varepsilon}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] \text{ per } t \in [0, \varepsilon].$$

Calcoliamo ora

$$y_1(\varepsilon) = \frac{1}{k\varepsilon}\left[1 - \cos\left(\varepsilon\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\right], y_1'(\varepsilon) = \frac{1}{k\varepsilon}\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\varepsilon\right).$$

Poniamo d'ora in poi per semplicità $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$y_1(\varepsilon) = \frac{1}{k\varepsilon}[1 - \cos(\omega\varepsilon)], y_1'(\varepsilon) = \frac{1}{k\varepsilon}\omega\sin(\omega\varepsilon).$$

Risolviamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} my'' + ky = 0 \\ y(\varepsilon) = y_1(\varepsilon) \\ y'(\varepsilon) = y_1'(\varepsilon) \end{cases}$$

Integrale generale:

$$y(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t.$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(\varepsilon) = c_1 \cos\omega\varepsilon + c_2 \sin\omega\varepsilon = \frac{1}{k\varepsilon}[1 - \cos(\omega\varepsilon)] \\ y'(0) = -c_1 \omega \sin\omega\varepsilon + c_2 \omega \cos\omega\varepsilon = \frac{1}{k\varepsilon}\omega \sin(\omega\varepsilon) \end{cases}$$

che riscriviamo (semplificando per ω la seconda equazione):

$$\begin{cases} c_1 \cos\omega\varepsilon + c_2 \sin\omega\varepsilon = \frac{1}{k\varepsilon}[1 - \cos(\omega\varepsilon)] \\ -c_1 \sin\omega\varepsilon + c_2 \cos\omega\varepsilon = \frac{1}{k\varepsilon}\sin(\omega\varepsilon) \end{cases}$$

Sistema lineare di due equazioni in due incognite c_1, c_2. Notando che il determinante del sistema vale 1, è comodo risolverlo col teorema di Cramer. Si ottiene

$$c_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{k\varepsilon}[1 - \cos(\omega\varepsilon)] & \sin\omega\varepsilon \\ \frac{1}{k\varepsilon}\sin(\omega\varepsilon) & \cos\omega\varepsilon \end{vmatrix} = \frac{1}{k\varepsilon}(\cos\omega\varepsilon - 1)$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} \cos\omega\varepsilon & \frac{1}{k\varepsilon}[1 - \cos(\omega\varepsilon)] \\ -\sin\omega\varepsilon & \frac{1}{k\varepsilon}\sin(\omega\varepsilon) \end{vmatrix} = \frac{1}{k\varepsilon}\sin\omega\varepsilon$$

che dà la soluzione:

$$y_2(t) = \frac{1}{k\varepsilon}(\cos\omega\varepsilon - 1)\cos\omega t + \frac{1}{k\varepsilon}\sin\omega\varepsilon\sin\omega t =$$

$$= \frac{1}{k\varepsilon}[\cos\omega(t - \varepsilon) - \cos\omega t].$$

La soluzione del problema di partenza (con forzante impulsiva) è quindi assegnata da:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{k\varepsilon}[1 - \cos(\omega t)] & \text{per } t \in [0, \varepsilon] \\ \frac{1}{k\varepsilon}[\cos\omega(t - \varepsilon) - \cos\omega t] & \text{per } t \geq \varepsilon \end{cases}$$

(Si noti che questa funzione è effettivamente $C^1(0, +\infty)$, perché la y_2 è stata appositamente costruita, mediante le condizioni iniziali imposte, in modo da raccordarsi con la y_1 in modo C^1).

Ricordare che $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

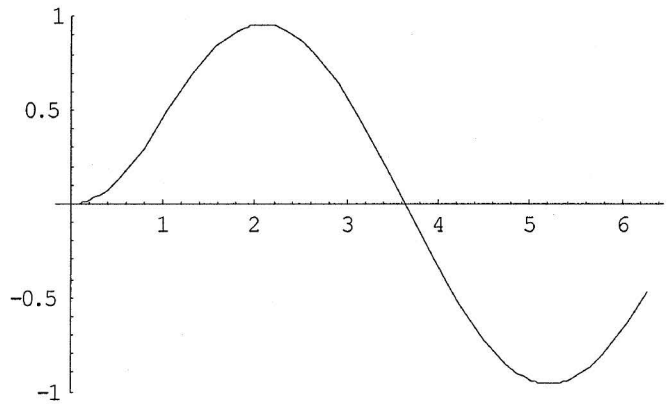


Grafico di $y(t)$ per $\omega = k = \varepsilon = 1$

b. Per $\varepsilon \to 0$, l'espressione analitica di $y(t)$ sarà data dal limite di quella di $y_2(t)$, perciò calcoliamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{k\varepsilon}[\cos\omega(t-\varepsilon) - \cos\omega t] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Calcoliamo il limite col teorema di De L'Hospital (derivando numeratore e denominatore *rispetto ad* ε):

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{k}[\omega \sin\omega(t-\varepsilon)] = \frac{\omega}{k}\sin\omega t.$$

$$y_0(t) = \frac{\omega}{k}\sin\omega t.$$

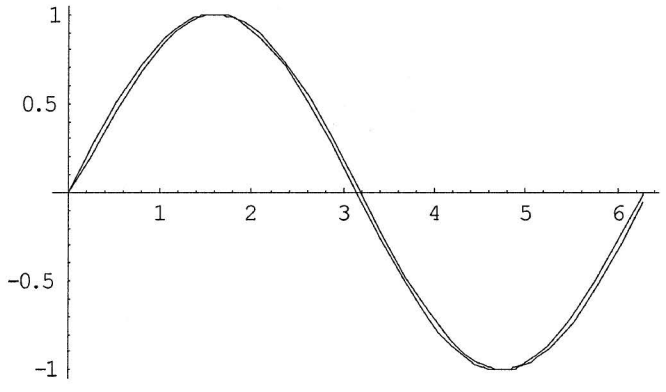


Grafico di $y(t)$ e $y_0(t)$ per $\omega = k = 1, \varepsilon = 0.1$

Questa funzione risolve l'equazione $y'' + \omega^2 y = 0$ cioè $my'' + ky = 0$, e le condizioni iniziali

$$y_0(0) = 0; y_0'(0) = \frac{\omega^2}{k} = \frac{1}{m}.$$

1.115. *a.* Ricordiamo anzitutto la relazione tra frequenza, pulsazione e periodo: $\nu = 1/T = \omega/2\pi$.

Nel moto a regime, la pulsazione è uguale a quella della forzante, quindi vogliamo che sia

$$T = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{\omega} \text{ perciò } \omega = 6.$$

b. Dal primo membro dell'equazione differernziale leggiamo $\delta = 2, \omega_0^2 = 16$; la risonanza perciò si ha per

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{16 - 2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{2}$$

e produce un'ampiezza (poiché $F = 3$)

$$A = \frac{F}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{3}{4\sqrt{16-4}} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

e un ritardo di fase

$$\varphi = \arctan\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \arctan\frac{4 \cdot 2\sqrt{2}}{16-8} = \arctan\sqrt{2}.$$

1.116. La soluzione trovata nell'Esempio 1.19 è

$$i(t) = \frac{F}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}}\cos(\omega t + \beta - \varphi)$$

con $\varphi = \arctan\frac{R\omega/L}{\frac{1}{LC} - \omega^2}$, $\beta = 0, \omega = 120, F = 50, C = 2 \cdot 10^{-3}$, $L = 1/20$, $R = 1$, perciò

$$i(t) = \frac{50}{\sqrt{\left(\frac{100}{24} - 6\right)^2 + 1}}\cos(120t - \varphi) = \frac{300}{\sqrt{157}}\cos(120t - \varphi)$$

con $\varphi = \arctan\frac{R\omega/L}{\frac{1}{LC} - \omega^2} = \arctan\frac{120}{500-720} \simeq -0.5$.

Per la risonanza dev'essere

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ cioè } C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{20}{120^2} = 1.3\overline{8} \cdot 10^{-3}.$$

1.117. Le equazioni sono

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = \frac{E}{L}$$

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = 0,$$

La prima ha per soluzione un transitorio sommato a una soluzione costante a regime,

$$q = CE.$$

La seconda è omogenea, e la soluzione ha unicamente un transitorio: a regime non c'è alcuna corrente, ma solo una carica costante sul condensatore, che equilibra la forza elettromotrice applicata.

Cap. 2. Calcolo infinitesimale per le curve

2.1. Calcolo differenziale vettoriale. Curve continue, regolari

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 2, §1, 2, 3.

Avvertenza: il prossimo §2.2 contiene anche esercizi di riepilogo sulle curve. Altri esercizi sulle curve si trovano nel Cap.6, §6.1.

Calcolo differenziale vettoriale e curve: linguaggio e notazioni

2.1. Una curva in forma parametrica si può rappresentare come funzione coi seguenti domini e codomini (scegliere una risposta tra le seguenti):

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
b. $\underline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
c. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
d. $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

2.2. In ciascuna delle seguenti espressioni, il simbolo $\cdot$ quale operazione denota? (Rispondere scegliendo per ogni formula una risposta tra le opzioni possibili riportate più sotto).

a. $\underline{u}(t) \cdot \underline{u}'(t)$
b. $f(t) \cdot |\underline{r}'(t)|$
c. $\underline{u} \cdot \underline{v} \times \underline{w}$
d. $f(t) \cdot \underline{r}(t)$
e. $\underline{u}(t) \cdot (\lambda \underline{v}(t))$

Opzioni possibili per le risposte:

A. L'usuale prodotto di due numeri reali
B. Il prodotto tra uno scalare e un vettore
C. Il prodotto scalare tra due vettori
D. Il prodotto misto
E. Il prodotto vettoriale

2.3. Detti $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ i versori fondamentali di $\mathbb{R}^3$, si scriva il risultato delle seguenti operazioni:

a. $\underline{i} \cdot \underline{j} =$ *b.* $\underline{i} \times \underline{k} =$
c. $\underline{i} \cdot (\underline{j} + \underline{k}) =$ *d.* $-\underline{i} \times \underline{j} =$

e. $\underline{i} \times (\underline{i} \times \underline{j}) =$ *f.* $\underline{j} \cdot \underline{j} =$
g. $\underline{i} \cdot (\underline{k} \times \underline{j}) =$ *h.* $\underline{i} \cdot (\underline{i} \times \underline{k}) =$

2.4. Per ciascuna delle seguenti curve, si scriva una possibile parametrizzazione:

a. La circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 2, percorsa una volta in senso antiorario[1].

b. La circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 2, percorsa due volte in senso orario.

c. La semiretta avente origine in $(1,2)$ e passante per $(-1,3)$

d. L'ellisse avente centro in $(2,1)$, assi paralleli agli assi coordinati, semiassi di lunghezza $2,3$ rispettivamente.

e. La semicirconferenza di centro $(0,0)$, raggio 3, posta nel semipiano $x \leq 0$.

f. Il segmento AB, con $A(1,2), B(2,-1)$.

2.5.★ Data la curva in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, t),$$

calcolare i prodotti: $\underline{r}(t) \cdot \underline{r}'(t)$, $\underline{r}(t) \times \underline{r}'(t)$, $\underline{r}(t) \cdot (\underline{r}(t) \times \underline{r}'(t))$ e il modulo $|\underline{r}(t) \times \underline{r}'(t)|$.

2.6.★ Scrivere l'equazione parametrica $\underline{r}(t)$ di un punto che si muove su una circonferenza di raggio R e centro l'origine con moto uniforme, in senso antiorario, percorrendo un giro in un tempo T. Quindi calcolare velocità, accelerazione, velocità scalare e accelerazione scalare, verificando che $\underline{a}(t)$ è parallela ma di verso opposto a $\underline{r}(t)$ (accelerazione centripeta).

2.7.★ Si consideri un punto mobile lungo l'arco di curva

$$\underline{r}(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t)),\ t \in [0, 2\pi].$$

Si verifichi che l'accelerazione scalare è costante.

[1] Ogni volta che parliamo di una circonferenza (o di un'altra curva chiusa nota, come l'ellisse) come curva parametrica, se non specifichiamo diversamente si sottointende che sia percorsa una sola volta e in senso antiorario.

Curve continue, regolari

Esempi svolti

Esempio 2.1. Consideriamo la seguente curva piana (nota come *Cissoide di Diocle*[2]):

$$\underline{r}(t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right), \text{ per } t \in \mathbb{R},$$

dove a è un parametro positivo. Dimostrare che la curva è continua, non chiusa, semplice, regolare a tratti con un unico punto singolare. Provare che il sostegno della curva è contenuto in una striscia verticale del piano, ma non è contenuto in una regione limitata.

Si vede subito che le componenti della curva sono funzioni continue, perciò la curva è continua. Per $t \to \pm\infty$ si vede che ad esempio $y(t) \sim 2at \to \pm\infty$. Questo mostra che la curva non è chiusa e non è contenuta in una regione limitata del piano. Poiché inoltre

$$0 \leq \frac{2at^2}{1+t^2} \leq 2a,$$

la curva è contenuta nella striscia verticale $0 \leq x \leq 2a$. Più precisamente, possiamo affermare che per $t \to \pm\infty$ $x(t) \to 2a$ e $y(t) \to \pm\infty$, perciò la retta $x = 2a$ è un asintoto della curva.

Calcoliamo

$$\underline{r}'(t) = 2a \left(\frac{2t(1+t^2) - 2t(t^2)}{(1+t^2)^2}, \frac{3t^2(1+t^2) - 2t(t^3)}{(1+t^2)^2} \right) =$$

$$= \frac{2a}{(1+t^2)^2} \left(2t, 3t^2 + t^4\right) = (0,0) \Leftrightarrow t = 0.$$

Si osserva che $\underline{r} \in C^1(\mathbb{R})$ e $\underline{r}'(t) \neq \underline{0}$ tranne il punto $\underline{r}(0) = (0,0)$, che risulta l'unico punto singolare. La curva perciò è regolare a tratti.

---

[2] Questa curva fu utilizzata dal matematico greco Diocle di Caristo (intorno al 200 a.C.) per risolvere il famoso problema della duplicazione del cubo. La parola "cissoide" significa "a forma di edera".

Occorre ancora mostrare che la curva è semplice. E' sufficiente osservare che

$$y'(t) = \frac{2a}{(1+t^2)^2} \cdot (3t^2 + t^4) \geq 0 \; \forall t,$$

quindi la componente $y(t)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, perciò non ripete mai i suoi valori. A maggior ragione la curva $\underline{r}(t)$ non assume due volte lo stesso valore, e quindi è semplice.

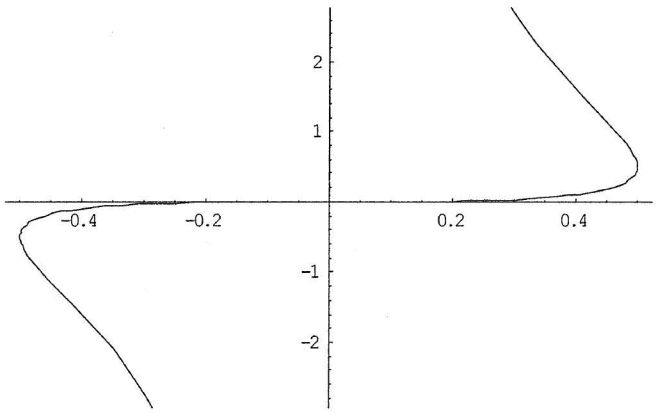


Fig. 2.1. La cissoide

Esempio 2.2. Curve piane in forma polare. Consideriamo la seguente curva piana in forma polare (nota come *spirale logaritmica*[3]):

$$\rho = ae^{b\vartheta}, \vartheta \in \mathbb{R},$$

dove a, b sono parametri positivi. Scriverla esplicitamente in forma parametrica $\underline{r}(t)$ e calcolare $\underline{r}'(t)$.

a. Dimostrare che è una curva regolare, non chiusa, semplice.

b. Dimostrare che se si esegue nel piano (x, y) una dilatazione di coefficiente k, la curva che si ottiene a partire dalla spirale logaritmica può essere ruotata di un angolo opportuno in modo da portarla a coincidere esattamente con quella di partenza. Inoltre, esistono infiniti numeri k positivi per i quali la dilatazione di coefficiente k della spirale logaritmica la porta a coincidere con quella di partenza (senza bisogno di ruotarla).

[3] Questa curva fu molto studiata da Jakob Bernoulli (1654-1705), che la chiamò "spira mirabilis" per le sue proprietà sorprendenti. In questo esercizio vedremo una di queste proprietà, quella espressa dal punto *b*.

a. Ricordiamo che assegnare una curva piana in forma polare

$$\rho = f(\vartheta), \quad \text{per } \vartheta \in I,$$

è un modo sintetico per affermare che la curva ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = f(\vartheta)\cos\vartheta \\ y = f(\vartheta)\sin\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in I.$$

Geometricamente, possiamo pensare la curva tracciata da una penna posta su un braccio che ruota attorno all'origine a velocità costante (in modo che il tempo t coincida con l'angolo ϑ); mentre il braccio ruota, la penna si sposta lungo il braccio in modo da essere a distanza $f(\vartheta)$ dall'origine nell'istante ϑ. La rappresentazione polare è particolarmente adatta per linee chiuse che girano attorno all'origine (circonferenza, ellisse...) e per curve a spirale, ma può essere usata anche in altri casi.

Nel nostro esempio, l'equazione polare si traduce nella seguente equazione parametrica:

$$\underline{r}(\vartheta) = (\rho(\vartheta)\cos\vartheta, \rho(\vartheta)\sin\vartheta) = \left(ae^{b\vartheta}\cos\vartheta, ae^{b\vartheta}\sin\vartheta\right) \text{ per } \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo quindi:

$$\underline{r}'(\vartheta) = \left(ae^{b\vartheta}(b\cos\vartheta - \sin\vartheta), ae^{b\vartheta}(b\sin\vartheta + \cos\vartheta)\right).$$

E' utile anche osservare che, posto

$$\rho(\vartheta) = ae^{b\vartheta} \text{ si ha } \rho'(\vartheta) = abe^{b\vartheta}.$$

La curva è regolare perché è di classe C^1 e inoltre $(\rho(\vartheta), \rho'(\vartheta)) \neq (0,0)\,\forall\vartheta$. Questo è il modo più veloce di verificare la regolarità per una curva assegnata in forma polare, e dipende dal fatto che si ha, in generale (v. [BPS2], cap.2, §3.5),

$$|\underline{r}'(\vartheta)|^2 = \rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta)^2.$$

La curva è semplice e non chiusa perché $\rho(\vartheta)$ è una funzione strettamente crescente, quindi al crescere di ϑ il punto $\underline{r}(\vartheta)$ si allontana strettamente dall'origine: perciò la curva non può né richiudersi né autointersecarsi.

b. Eseguiamo nel piano una dilatazione di coefficiente $k > 0$; questa trasformerà la curva in quella di equazione polare

$$\rho = kae^{b\vartheta} \text{ per } \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Eseguiamo ora nel piano una rotazione di angolo ϑ_0 (con ϑ_0 da determinarsi). Di nuovo, si studia bene l'effetto della rotazione usando la forma polare. La curva (già

dilatata) si trasformerà in quella di equazione polare

$$\rho = kae^{b(\vartheta-\vartheta_0)} \text{ per } \vartheta \in \mathbb{R}.$$

D'altro canto:

$$kae^{b(\vartheta-\vartheta_0)} = \left(ke^{-b\vartheta_0}\right)\left(ae^{b\vartheta}\right) = ae^{b\vartheta}$$

pur di scegliere

$$\vartheta_0 = \frac{1}{b}\log k,$$

quindi questa rotazione dell'angolo riporta la spirale a sovrapporsi a quella di partenza.

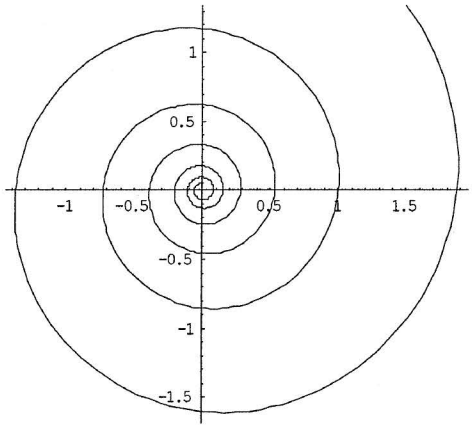


Fig.2.2. Spirale logaritmica

Infine, osserviamo che se eseguiamo una dilatazione di un fattore

$$k = e^{2n\pi b}, \text{ per } n \in \mathbb{Z},$$

l'esito della dilatazione è la curva

$$\rho = e^{2n\pi b} \cdot ae^{b\vartheta} = ae^{b(\vartheta+2n\pi)} \text{ per } \vartheta \in \mathbb{R}$$

che col cambio di parametrizzazione $\vartheta' = \vartheta + 2n\pi, \vartheta' \in \mathbb{R}$ risulta la stessa curva di partenza. (Si rifletta sull'importanza del fatto che il parametro ϑ varia in tutto $\mathbb{R}$ e non in un intervallo limitato). Notare che il parametro ϑ' si può ancora pensare come angolo di rotazione rispetto ai medesimi assi, essendo stato incrementato di $2n\pi$, in altre parole la curva ha lo stesso sostegno di quella di partenza.

Esercizi

2.8. Scegliere "Vero" o "Falso" per ciascuna delle seguenti affermazioni. Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere le successive.

Sia γ una curva parametrizzata da $\underline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. Allora:

a. Si dice che γ è chiusa se $a = b$.
b. Si dice che γ è regolare se $\underline{r} \in C^1([a, b])$.
c. Se γ è regolare, $\underline{r}'(t)$ è un vettore tangente alla curva per ogni t.
d. Se γ è una curva semplice, certamente non è chiusa.
e. Se una delle componenti di γ è $x(t) = e^t$, allora la curva è semplice.
f. Si dice che γ è chiusa se $\underline{r}(a) = \underline{r}(b)$.
g. Si dice velocità scalare la quantità $|\underline{r}'(t)|$.
h. Se $|\underline{r}(t)| = 1$ allora $\underline{r}(t) \cdot \underline{r}'(t) = 0$.
i. Si dice che γ è regolare se $\underline{r}' \neq \underline{0} \forall t \in [a, b]$.

2.9. Sia γ la curva piana di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi].$$

a. Stabilire se la curva γ è continua, chiusa.
b. Calcolare il vettore derivato e il suo modulo, semplificando le espressioni trovate.
c. Stabilire se la curva è regolare, precisando in caso contrario i punti non regolari.

2.10.★ Coniche in forma polare. Dimostrare che la curva descritta dall'equazione polare

$$\rho = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon \cos \vartheta},$$

dove ε, p sono parametri positivi e ϑ varia nell'intervallo in cui il secondo membro è definito e positivo, è una conica, e precisamente:

$$\begin{cases} \text{un'ellisse} & \text{se } \varepsilon < 1 \\ \text{una parabola} & \text{se } \varepsilon = 1 \\ \text{un'iperbole} & \text{se } \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Lo stesso vale per l'equazione polare

$$\rho = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon \cos \vartheta}.$$

2.11. Sia γ la curva piana di equazione polare

$$\rho = \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \text{ per } \vartheta \in [0, 2\pi].$$

a. Scrivere le equazioni parametriche di γ.
b. Stabilire se la curva è continua, chiusa.
c. Calcolare il vettore derivato e il suo modulo, semplificando le espressioni trovate.
d. Stabilire se la curva è regolare, precisando in caso contrario i punti non regolari.

2.12. Sia γ la curva piana di equazione polare

$$\rho = 2 + \cos\vartheta \text{ per } \vartheta \in [0, \pi].$$

a. Scrivere le equazioni parametriche di γ.
b. Stabilire se la curva è continua, chiusa.
c. Calcolare il vettore derivato e il suo modulo, semplificando le espressioni trovate.
d. Stabilire se la curva è regolare, precisando in caso contrario i punti non regolari.

2.13. Sia γ la curva piana di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = te^{-t} \\ y = (t-1)^2 e^{-t} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

a. Stabilire se la curva è: continua, chiusa.
b. Calcolare il vettore derivato e il suo modulo, semplificando le espressioni trovate.
c. Stabilire se la curva è regolare, precisando in caso contrario i punti non regolari.

2.14.★ Sia γ la curva piana (detta *sestica di Cayley*[4]) di equazione polare

$$\rho = \cos^3\left(\frac{\vartheta}{3}\right) \text{ per } \vartheta \in [0, 3\pi].$$

---

[4] Se si scrive l'equazione *cartesiana* di questa curva si trova un'equazione del 6° ordine, da cui il nome di sestica. Questa curva fu studiata per primo da MacLaurin nel 1718. Il nome di "sestica di Cayley" fu attribuito alla curva nel 1900.

Scrivere le equazioni parametriche di γ; stabilire se la curva è: continua, chiusa; calcolare il vettore derivato e il suo modulo, semplificando le espressioni trovate; stabilire se la curva è regolare, precisando in caso contrario i punti non regolari.

2.15.★ Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = t^2 \end{cases}$$

Stabilire se la curva è continua, chiusa; calcolare il vettore derivato e il suo modulo, semplificando le espressioni trovate; stabilire se la curva è regolare, precisando in caso contrario i punti non regolari; scrivere il versore tangente.

2.16.★ Si consideri la curva piana (detta *trattrice*[5]) di equazioni:

$$\underline{r}(t) = \left(a(t - \tanh t), \frac{a}{\cosh t}\right) \text{ per } t \in \mathbb{R},$$

dove a è un parametro positivo.

a. Si dimostri che la curva è continua, non chiusa, semplice, regolare a tratti con un unico punto singolare, e dotata di un asintoto.

b. Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva nel generico punto P_0 della curva, si consideri il punto P_1 di intersezione di questa retta con l'asse x, e si calcoli la lunghezza del segmento P_0P_1, verificando che questa lunghezza è *costante* (questa è la proprietà caratteristica della trattrice).

[*Suggerimento*: scrivere l'equazione della retta tangente nel generico punto della curva nella forma $\underline{\alpha}(u) = \underline{r}(t) + u\underline{r}'(t)$ dove u è il parametro sulla retta e t si pensa fissato; poi esprimere il funzione di t il punto di intersezione di questa retta con l'asse x, e calcolare in funzione di t la distanza tra questo punto e $\underline{r}(t)$. Il risultato dev'essere indipendente da t].

---

[5] Questa curva fu introdotta da Claude Perrault nel 1670, e studiata in seguito da Isaac Newton nel 1676 e da Christian Huygens nel 1692. La sua proprietà interessante è quella espressa nel punto *b* dell'esercizio. Inoltre, la superficie di rotazione che si ottiene facendo ruotare questa curva attorno all'asse y è detta *pseudosfera*, ed è un oggetto importante nella geometria differenziale delle superfici.

2.17.★ Si consideri la curva (detta *Lemniscata di Gerone*[6] o Gerono)

$$\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t \cos t) \text{ per } t \in [0, 2\pi].$$

Stabilire se la curva è continua, chiusa, semplice, regolare.

2.18.★ Si consideri la curva (detta *Chiocciola di Pascal*[7])

$$\underline{r}(t) = ((1 + a\cos t)\cos t, (1 + a\cos t)\sin t) \text{ per } t \in [0, 2\pi]$$

dove a è un parametro positivo[8]. Stabilire, al variare del parametro $a > 0$, se la curva è continua, chiusa, semplice, regolare.

[6] Curva studiata da Camille-Cristophe Gerono (1799-1891).

[7] Curva studiata originariamente da Albrecht Dürer bel 1525, riscoperta successivamente da Etienne Pascal (padre di Blaise Pascal).

[8] Questa equazione parametrica sembrerebbe immediatamente traducibile in forma polare $\rho = 1 + a\cos t$. Tuttavia si osservi che quest'ultima quantità può diventare negativa se $a < 1$, contro il significato geometrico di equazione polare.

Soluzioni §2.1

2.1. *b.*

2.2.
a. C; *b.* A; *c.* C; *d.* B; *e.* C

2.3.
a. 0 *b.* $-\underline{j}$ *c.* 0 *d.* $-\underline{k}$
e. $-\underline{j}$ *f.* 1 *g.* -1 *h.* 0

2.4.
a. $\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ *b.* $\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = -2\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi]$

Si noti che, rispetto alla parametrizzazione del punto *a*, abbiamo sostituito t con $-t$ per invertire il verso di percorrenza, e abbiamo raddoppiato l'intervallo del parametro per fare due giri.

c. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad t \in [0, +\infty)$

La semiretta si costruisce in forma vettoriale ponendo

$$\underline{r}(t) = (1,2) + t[(-1,3) - (1,2)] \text{ con } t \geq 0$$

d. $\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 1 + 3\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

e. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$

Prestare attenzione all'intervallo dei parametri.

f. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$

Il segmento si costruisce in forma vettoriale ponendo

$$\underline{r}(t) = (1,2) + t[(2,-1) - (1,2)] \text{ con } t \in [0,1]$$

2.5. Si ha:

$$\underline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1);$$

$$\underline{r}(t) \cdot \underline{r}'(t) = (\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) = -\sin t \cos t + \sin t \cos t + t = t;$$

$$\underline{r}(t) \times \underline{r}'(t) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos t & \sin t & t \\ -\sin t & \cos t & 1 \end{vmatrix} = (\sin t - t\cos t, -\cos t - t\sin t, 1)$$

$$|\underline{r}(t) \times \underline{r}'(t)| = \sqrt{(\sin t - t\cos t)^2 + (-\cos t - t\sin t)^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 t + t^2\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + \cos^2 t + t^2\sin^2 t + 2t\sin t\cos t + 1} = \sqrt{2 + t^2}.$$

Infine, il prodotto misto $\underline{r}(t) \cdot (\underline{r}(t) \times \underline{r}'(t))$ è ovviamente nullo perché due dei tre vettori sono uguali tra loro, quindi in particolare paralleli.

2.6. Si ha:

$$\underline{r}(t) = \left(R\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), R\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right), \text{ per } t \in \mathbb{R}.$$

Velocità e velocità scalare:

$$\underline{v}(t) = \underline{r}'(t) = R\frac{2\pi}{T}\left(-\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right);$$

$$|\underline{v}(t)| = \frac{2\pi R}{T};$$

Accelerazione e accelerazione scalare:

$$\underline{a}(t) = \underline{r}''(t) = R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left(-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), -\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)$$

$$|\underline{a}(t)| = R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Notiamo che

$$\underline{a}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \underline{r}(t).$$

2.7. Si ha:

$$\underline{r}'(t) = (R(1 - \cos t), R\sin t),$$

$$\underline{r}''(t) = (R\sin t, R\cos t), |\underline{r}''(t)| = R.$$

L'accelerazione scalare vale R.

2.8.

a. Falso (confrontare con la domanda *f*)

b. Falso. Manca la richiesta $\underline{r}'(t) \neq \underline{0}\,\forall t$

c. Falso. E' vero solo se $\underline{r}'(t) \neq \underline{0}\,\forall t$ (in quanto il vettore nullo non può dirsi tangente a una curva, dal punto di vista geometrico).

d. Falso. Ad esempio, la circonferenza è semplice e chiusa.

e. Vero. Infatti e^t, e quindi $\underline{r}(t)$, non assume due volte lo stesso valore

f. Vero.

g. Vero.

h. Vero. Si dimostra derivando l'identità $1 = \underline{r}(t) \cdot \underline{r}(t)$.

i. Falso. Si confronti con la domanda *b*: questa volta ci si è dimenticati di richiedere che innanzitutto dev'essere $\underline{r} \in C^1([a,b])$ (ipotesi senza la quale la richiesta $\underline{r}'(t) \neq \underline{0}\,\forall t$ non ha neppure senso).

2.9.

a. Sia $\underline{r}(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t)$. Le componenti di $r(t)$ sono funzioni continue, quindi la curva è continua.

$\underline{r}(-\pi) = (-1, -\pi)$; $\underline{r}(\pi) = (-1, \pi) \neq \underline{r}(-\pi)$, dunque la curva non è chiusa.

b. $$\underline{r}'(t) = (t\cos t, t\sin t);\ |\underline{r}'(t)| = |t|.$$

c. $\underline{r}'(t) = 0$ per $t = 0$, cioè in $\underline{r}(0) = (1,0)$.

Il punto $(1,0)$ è l'unico punto singolare della curva.

2.10. Riscriviamo l'equazione nella forma

$$\rho - \varepsilon\rho\cos\vartheta = \varepsilon p$$

e quindi passiamo alle coordinate cartesiane, ricordando che $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\rho\cos\vartheta = x$. Si ha:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \varepsilon(x+p)$$

e, per $x \geq -p$,
$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2\left(x^2 + 2px + p^2\right)$$

$$x^2\left(1-\varepsilon^2\right) + y^2 - 2p\varepsilon^2 x - \varepsilon^2 p^2 = 0.$$

Questa è una curva algebrica di secondo grado, quindi una conica. Osservando la parte di secondo grado si osserva che per $0 < \varepsilon < 1$ si ha un'ellisse (coefficienti di x^2 e y^2 concordi), per $\varepsilon > 1$ un'iperbole (coefficienti di x^2 e y^2 discordi), per $\varepsilon = 1$ si ottiene

$$y^2 - 2px - p^2 = 0,$$

che è una parabola. Notiamo che nel caso dell'iperbole si trova un ramo solo, come suggerito dalla limitazione $x \geq -p$.

L'equazione $\rho = \frac{\varepsilon p}{1+\varepsilon\cos\vartheta}$ si tratta allo stesso modo: in questo caso si ha

$$\sqrt{x^2+y^2} = \varepsilon(-x+p)$$

e, per $x \leq p$, elevando al quadrato si trova un'equazione con la stessa parte di secondo grado del caso precedente.

2.11.

a. $$\begin{cases} x = \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\vartheta \\ y = \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\vartheta \end{cases} \quad \text{per } \vartheta \in [0, 2\pi].$$

b. La curva è continua, è chiusa: $\underline{r}(0) = \underline{r}(2\pi) = (0,0)$.

c. $$\underline{r}'(\vartheta) =$$

$$= \left(\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\vartheta - \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\vartheta, \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta + \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\vartheta\right)$$

$$\rho'(\vartheta) = \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right);$$

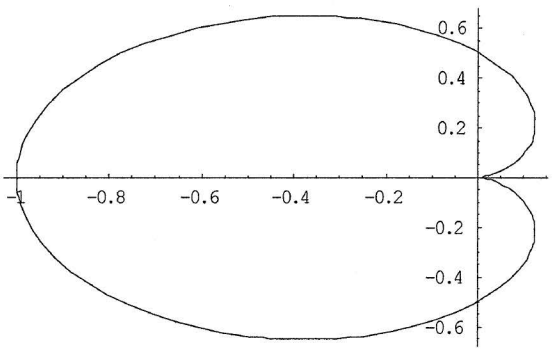


Fig. 2.3. La curva dell'esercizio 2.11.

$$|r'(\vartheta)| = \sqrt{\rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta)^2} = \sqrt{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} =$$

$$= \left|\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right| = 0 \text{ per } \vartheta = 0, \vartheta = 2\pi.$$

d. La curva non è regolare, ha un punto singolare in $\underline{r}(0) = \underline{r}(2\pi) = (0,0)$.

2.12.

a.
$$\begin{cases} x = (2+\cos\vartheta)\cos\vartheta \\ y = (2+\cos\vartheta)\sin\vartheta \end{cases}$$

b. La curva è continua, non chiusa perché $x(0) = 3; x(\pi) = -1$.

c.
$$\underline{r}'(\vartheta) = (-2\sin\vartheta - \sin 2\vartheta, 2\cos\vartheta + \cos 2\vartheta);$$

$$|\underline{r}'(\vartheta)| = \sqrt{5 + 4(\sin\vartheta\sin 2\vartheta + \cos\vartheta\cos 2\vartheta)} =$$

$$= \sqrt{5 + 4\cos(2\vartheta - \vartheta)} = \sqrt{5 + 4\cos\vartheta} \neq 0 \ \forall\vartheta \text{ (perché } 5 + 4\cos\vartheta \geq 1)$$

d. La curva è regolare in quanto il suo vettore tangente è sempre definito e mai nullo.

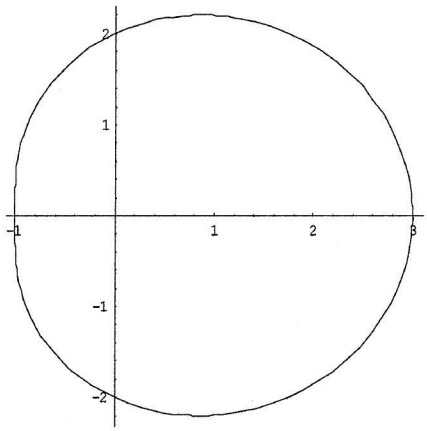


Fig. 2.4. La curva dell'esercizio 2.12

2.13.

a. La curva è continua, non è chiusa: $x(0) = 0, x(1) = e^{-1}$.

b.
$$\underline{r}'(t) = e^{-t}(t-1)(-1, 3-t)$$

$$|\underline{r}'(t)| = e^{-t}(1-t)\sqrt{1 + (3-t)^2} =$$

$$e^{-t}(1-t)\sqrt{t^2 - 6t + 10} = 0 \text{ per } t = 1.$$

c. La curva non è regolare, ha un punto singolare $r(1) = (e^{-1}, 0)$.

2.14.

$$\begin{cases} x = \cos^3\left(\frac{\vartheta}{3}\right)\cos\vartheta \\ y = \cos^3\left(\frac{\vartheta}{3}\right)\sin\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 3\pi]$$

La curva è continua perché le due funzioni componenti sono continue; chiusa perché $\underline{r}(0) = (1,0), \underline{r}(3\pi) = (1,0)$.

$$\underline{r}'(\vartheta) =$$

$$\left(-\cos^2\left(\frac{\vartheta}{3}\right)\sin\frac{\vartheta}{3}\cos\vartheta - \cos^3\left(\frac{\vartheta}{3}\right)\sin\vartheta, -\cos^2\left(\frac{\vartheta}{3}\right)\sin\frac{\vartheta}{3}\sin\vartheta + \cos^3\left(\frac{\vartheta}{3}\right)\cos\vartheta\right) =$$

$$= \cos^2\left(\frac{\vartheta}{3}\right)\left(-\sin\frac{\vartheta}{3}\cos\vartheta - \cos\frac{\vartheta}{3}\sin\vartheta, -\sin\frac{\vartheta}{3}\sin\vartheta + \cos\frac{\vartheta}{3}\cos\vartheta\right) =$$

$$= \cos^2\left(\frac{\vartheta}{3}\right)\left(-\sin\left(\frac{4}{3}\vartheta\right), \cos\left(\frac{4}{3}\vartheta\right)\right).$$

$$|\underline{r}'(\vartheta)| = \cos^2\left(\frac{\vartheta}{3}\right) = 0 \text{ per } \frac{\vartheta}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \vartheta = \frac{3}{2}\pi.$$

La curva non è regolare nel punto $\underline{r}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0,0)$.

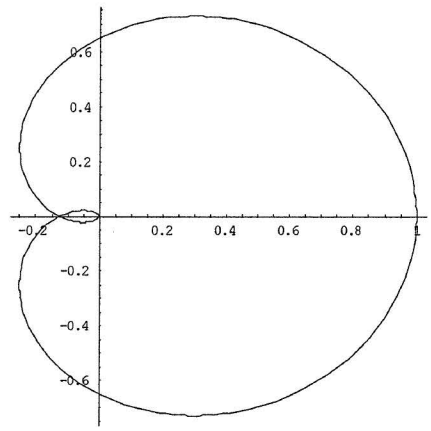


Fig. 2.5. La sestica di Cayley, esercizio 2.14

2.15. La curva è continua perché le 3 componenti sono funzioni continue; non è chiusa perché ad esempio $z(0) = 0$ e $z(2\pi) = 4\pi^2$.

$$\underline{r}'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 2t)$$

$$|\underline{r}'(t)| = \sqrt{1+5t^2} \neq 0 \text{ per ogni } t,$$

perciò l'arco di curva è regolare.

$$\text{vers}(\underline{r}'(t)) = \frac{(\text{cost} - t\text{sint}, \text{sint} + t\text{cost}, 2t)}{\sqrt{1+5t^2}}.$$

2.16. *a.* Si vede che le componenti della curva sono funzioni continue ($\cosh t \neq 0$ $\forall t$), perciò la curva è continua. Per $t \to \pm\infty$ si ha:

$$x(t) \sim at \to \pm\infty, \; y(t) \to 0.$$

Questo mostra che la curva ha l'asintoto $y = 0$, e mostra anche che non è chiusa. Calcoliamo

$$\underline{r}'(t) = a\left(1 - (1 - \tanh^2 t), -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right) = a\left(\tanh^2 t, -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right).$$

Notiamo che $\underline{r}' \in C(\mathbb{R})$, perciò $\underline{r} \in C^1(\mathbb{R})$, e $\underline{r}'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Quindi la curva è regolare a tratti, con l'unico punto singolare $\underline{r}(0) = (0, a)$.

Poiché $x'(t) = \tanh^2 t \geq 0 \, \forall t$, la componente $x(t)$ è strettamente crescente, perciò non ripete i suoi valori; a maggior ragione la curva è semplice.

b. La retta tangente alla curva nel suo generico punto $\left(a(t - \tanh t), \frac{a}{\cosh t}\right)$ è:

$$(x(u), y(u)) = \left(a(t - \tanh t), \frac{a}{\cosh t}\right) + u\left(\tanh^2 t, -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right)$$

cioè

$$\begin{cases} x(u) = a(t - \tanh t) + u\tanh^2 t \\ y(u) = \frac{a}{\cosh t} - u\frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \end{cases}$$

che interseca l'asse x per $y(u) = 0$, cioè

$$\frac{a}{\cosh t} - u\frac{\sinh t}{\cosh^2 t} = 0, u = \frac{a}{\cosh t} \cdot \frac{\cosh^2 t}{\sinh t} = a\frac{\cosh t}{\sinh t}$$

e quindi

$$x = a(t - \tanh t) + a\frac{\cosh t}{\sinh t}\tanh^2 t = at - a\tanh t + a\tanh t = at$$

Dunque il punto di intersezione tra la tangente e l'asse x è $(at, 0)$ e la lunghezza L del segmento di tangenza è

$$L^2 = (at - a\tanh t - at)^2 + \left(\frac{a}{\cosh t}\right)^2 = a^2\left(\tanh^2 t + \frac{1}{\cosh^2 t}\right) = a^2,$$

quindi è costante.

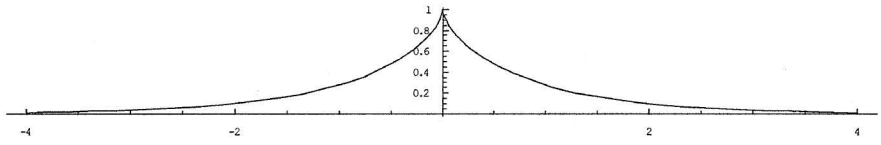


Fig. 2.6. La trattrice, Esercizio 2.16.

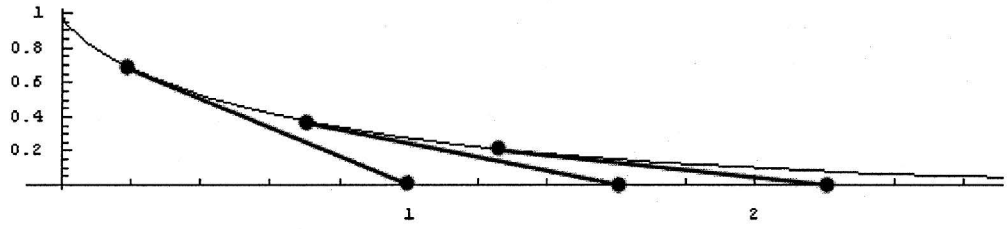


Fig. 2.7. La proprietà caratteristica della trattrice.

2.17. La curva è ovviamente continua. E' chiusa perché $\underline{r}(0) = \underline{r}(2\pi) = (1,0)$. Per capire se è semplice o no, osserviamo che, per $t \in [0, 2\pi]$, $\cos t = 0$ per $t_1 = \frac{\pi}{2}, t_2 = \frac{3}{2}\pi$. Per questi due diversi valori del parametro si ha

$$\underline{r}(t_1) = \underline{r}(t_2) = (0,0)$$

perciò la curva non è semplice (passa due volte dall'origine). Calcoliamo

$$\underline{r}'(t) = \left(-\sin t, \cos^2 t - \sin^2 t\right) = (-\sin t, \cos 2t).$$

La curva è di classe C^1, $x'(t) = 0$ per $t = 0, \pi, 2\pi$ valori per cui si ha $y'(t) = 1$, perciò $\underline{r}'$ non si annulla mai, e la curva è regolare (v. fig. 2.8).

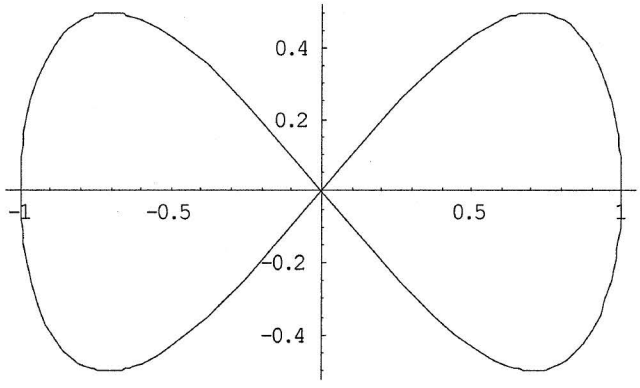


Fig. 2.8. Lemniscata di Gerone, Esercizio 2.17.

2.18. La curva è ovviamente continua e di classe C^1. E' chiusa perché

$$\underline{r}(0) = \underline{r}(2\pi) = (1,0).$$

- Se $0 < a \leq 1$ si ha $1 + a\cos t \geq 0$ e la curva ha equazione polare

$$\rho = 1 + a\cos\vartheta \text{ per } \vartheta \in [0, 2\pi]$$

In questo caso $$\rho' = -a\sin\vartheta$$

$$|r'(\vartheta)| = \sqrt{(1 + a\cos\vartheta)^2 + a^2\sin^2\vartheta} = \sqrt{(1 + a^2) + 2a\sin\vartheta}.$$

Questa quantità è strettamente positiva se $a < 1$, perché l'equazione

$$\sin t = -\frac{1 + a^2}{2a}$$

non ha soluzioni in quanto $\frac{1+a^2}{2a} > 1$ per $a \in (0, 1)$. Quindi la curva è regolare se $0 < a < 1$.

Se $a = 1$ si ha

$$|r'(\vartheta)| = \sqrt{2(1 + \cos\vartheta)} = 0 \text{ per } \vartheta = \pi,$$

e il punto $$\underline{r}(\pi) = (0, 0)$$

è singolare.

Per $0 < a \leq 1$, inoltre, poiché $\rho \geq 1$ e ϑ fa un solo giro intorno all'origine, la curva non può intrecciarsi, perciò è semplice.

- Se $a > 1$ è ancora vero che

$$|r'(t)| = \sqrt{(1 + a^2) + 2a\sin t}$$

(anche se t non ha più il significato di angolo con l'asse x) e $|r'(t)| \neq 0$ per ogni t (per la stessa ragione di sopra), perciò la curva è regolare.

In questo caso però la curva non è semplice in quanto l'equazione

$$1 + a\cos t = 0, \cos t = -\frac{1}{a},$$

per $a > 1$ ha due soluzioni distinte in $[0, 2\pi]$,

$$t_1 = \arccos\left(-\frac{1}{a}\right), t_2 = 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{a}\right)$$

e per questi due diversi valori del parametro è $\underline{r}(t) = (0, 0)$, ossia la curva passa dall'origine due volte.

Riassumendo:

La curva è sempre continua e chiusa.

La curva è regolare per $a \neq 1$, ha un punto singolare per $a = 1$.

La curva è semplice se $0 < a \leq 1$, intrecciata se $a > 1$.

I tre grafici di seguito illustrano le tre situazioni:

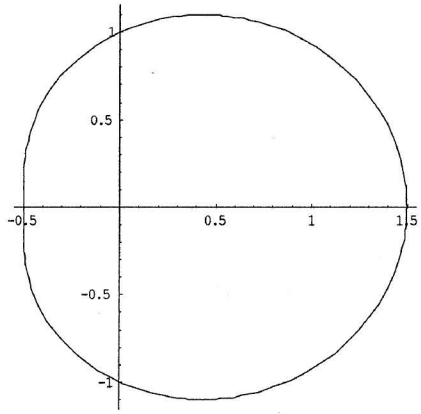


Fig. 2.9. Chiocciola di Pascal per $a = 0.5$. Semplice e regolare

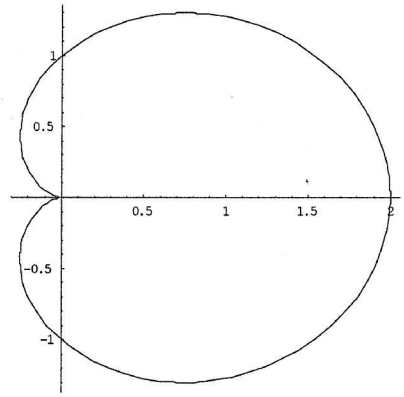


Fig. 2.10. Chiocciola di Pascal per $a = 1$. Semplice e non regolare

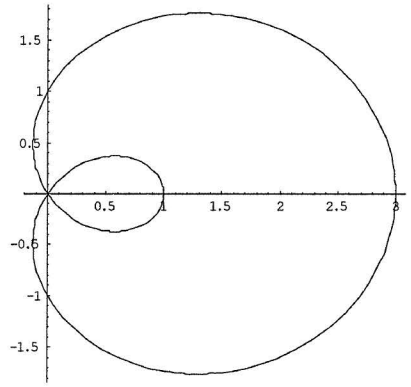


Fig. 2.11. Chiocciola di Pascal per $a = 2$. Intrecciata e regolare

2.2. Lunghezza di un arco di curva e integrali di linea di prima specie

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 2, §4, 5.

Linguaggio e notazioni per gli integrali di linea di prima specie

2.19.★ Quali delle seguenti scritture possono indicare correttamente un *integrale di linea di prima specie*? Per ciascuna scrittura, dire se è corretta o scorretta, nel secondo caso spiegando con precisione perché. Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere le successive.

a. $$\int_a^b f(t)\underline{r}'(t)dt$$

b. $$\int_\gamma f(t)|\underline{r}'(t)|dt$$

c. $$\int_a^b f(\underline{r}(t))|\underline{r}'(t)|dt$$

d. $$\int_\gamma f\,ds$$

e. $$\int_a^b f(t)|\underline{r}'(t)|ds$$

2.20.★ Quali delle seguenti scritture possono indicare correttamente la coordinata y del centroide di una linea materiale omogenea γ? Per ciascuna scrittura, dire se è corretta o scorretta, nel secondo caso spiegando con precisione perché. Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere le successive.

a. $$y_c = \frac{1}{L}\int_a^b y\underline{r}'(t)dt$$

b. $$y_c = \frac{1}{L}\int_a^b y|\underline{r}'(t)|dt$$

c. $$y_c = \frac{1}{L}\int_a^b y(t)|\underline{r}'(t)|dt$$

d. $$y_c = \frac{1}{L}\int_\gamma y ds$$

e. $$y_c = \frac{1}{L}\int_\gamma y(t)|\underline{r}'(t)|dt$$

2.21.★ Quali delle seguenti scritture possono indicare correttamente il momento d'inerzia rispetto all'asse y di una linea materiale omogenea γ di massa m? Per ciascuna scrittura, dire se è corretta o scorretta, nel secondo caso spiegando con precisione perché. Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere le successive.

a. $$I = \frac{m}{L}\int_a^b y^2(t)|\underline{r}'(t)|dt$$

b. $$I = \frac{m}{L}\int_a^b \left[x^2(t) + y^2(t)\right]|\underline{r}'(t)|dt$$

c. $$I = \frac{m}{L}\int_\gamma \left(x^2 + z^2\right) ds$$

d. $$I = \frac{m}{L}\int_a^b \left[x^2(t) + z^2(t)\right]\underline{r}'(t)dt$$

e. $$I = \frac{m}{L}\int_a^b \left[x^2(t) + z^2(t)\right]|\underline{r}'(t)|dt$$

Curve rettificabili

2.22.★ Scegliere "Vero" o "Falso" per ciascuna delle seguenti affermazioni. Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere le successive.

Sia γ una curva parametrizzata da $\underline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. Allora:

a. Se γ è un arco di curva continua, certamente γ è rettificabile.

b. Si dice che γ è rettificabile se $\int_a^b |\underline{r}'(t)|dt$ è finito.

c. Se γ è un arco di curva regolare a tratti, allora è rettificabile.
d. Esistono curve rettificabili non regolari a tratti.
e. Esistono curve continue non rettificabili.
f. Se una curva è rettificabile ma non è regolare a tratti, non è possibile calcolarne la lunghezza.
g. Se una curva è regolare a tratti, la sua lunghezza è uguale a $\int_a^b |\underline{r}'(t)|dt$.

Esempi svolti

Esempio 2.3. Si calcolino la lunghezza e il momento d'inerzia rispetto all'asse x dell'*elica cilindrica*[9] omogenea di massa m descritta dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R\cos\vartheta \\ y = R\sin\vartheta \\ z = \frac{h}{2\pi}\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

R, h sono parametri positivi.

Calcoliamo anzitutto il vettore derivato, e quindi l'elemento d'arco:

$$\underline{r}'(\vartheta) = \left(-R\sin\vartheta, R\cos\vartheta, \frac{h}{2\pi}\right);$$

$$ds = |\underline{r}'(\vartheta)|d\vartheta = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}d\vartheta.$$

Possiamo ora calcolare la lunghezza

$$L = \int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}d\vartheta = 2\pi\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = \sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}.$$

Si osservi il significato geometrico della formula trovata: $2\pi R$ è la lunghezza della circonferenza di raggio R, su cui si proietta l'elica, vista dall'alto; h è il "passo" dell'elica, cioè la distanza in verticale tra due spire successive. Il risultato trovato ci dice che una spira di elica è lunga come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti la circonferenza rettificata e il passo dell'elica.

---

[9] Tra le curve nello spazio tridimensionale, questa è una delle più semplici ed importanti. Si può caratterizzare come l'unica curva dello spazio (assieme alla retta e alla circonferenza, che si possono vedere come eliche degeneri, rispettivamente per $R = 0$ e per $h = 0$) ad avere *curvatura costante*. (Per la definizione del concetto di curvatura, si veda il testo [BPS2], cap.2, §6.1).

Veniamo al momento d'inerzia. Si chiede di calcolarlo rispetto all'asse x, perciò la formula da usare è:

$$I = \frac{m}{L}\int_\gamma (y^2+z^2)ds =$$

$$= \frac{m}{2\pi\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}}\int_0^{2\pi}\left(R^2\sin^2\vartheta+\frac{h^2}{4\pi^2}\vartheta^2\right)\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}d\vartheta =$$

$$= \frac{m}{2\pi}\left(\pi R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{(2\pi)^3}{3}\right) = m\left(\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{3}h^2\right).$$

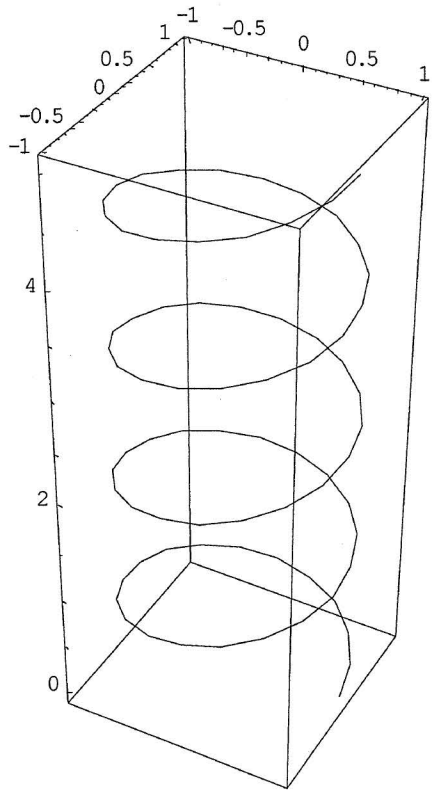


Fig. 2.12. L'elica cilindrica, Esempio 2.3.

Esempio 2.4. Si consideri l'arco di curva γ parametrizzata in forma polare da:

$$\rho = 1 + \cos\vartheta, \quad \vartheta \in [-\pi, \pi].$$

a. Stabilire se è l'arco di curva è continua, chiusa, regolare, determinando gli eventuali punti non regolari.

b. Calcolare l'integrale di linea di prima specie:

$$\int_\gamma |y| ds.$$

a. La curva è chiusa perché $\rho(\pm\pi) = 0$ (ai due estremi la curva passa dall'origine).

Possiamo usare la formula per il calcolo dell'elemento d'arco valido per una curva in forma polare:

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\vartheta.$$

Calcoliamo perciò $\rho' = -\sin\vartheta$ e quindi

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\vartheta = \sqrt{(1+\cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta} = \sqrt{2(1+\cos\vartheta)} d\vartheta.$$

Perciò la curva è regolare tranne che per $\cos\vartheta = -1$, cioè per $\vartheta = \pm\pi$.

L'origine (corrispondente a $\vartheta = \pm\pi$) è l'unico punto non regolare della curva.[10]

b. $y = \rho\sin\vartheta = (1+\cos\vartheta)\sin\vartheta$, perciò

$$\int_\gamma |y| ds = \int_{-\pi}^{\pi} |(1+\cos\vartheta)\sin\vartheta| \sqrt{2(1+\cos\vartheta)} d\vartheta =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} (1+\cos\vartheta)^{3/2} \sin\vartheta d\vartheta =$$

$$[\cos\vartheta = t; -\sin\vartheta d\vartheta = dt; t \in [1, -1]]$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-1}^{1} (1+t)^{3/2} dt = 2\sqrt{2} \left[\frac{2}{5} (1+t)^{5/2} \right]_{-1}^{1} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{32}{5}.$$

[10] Notiamo che questa curva è una chiocciola di Pascal (v. Esercizio 2.18), del tipo non regolare.

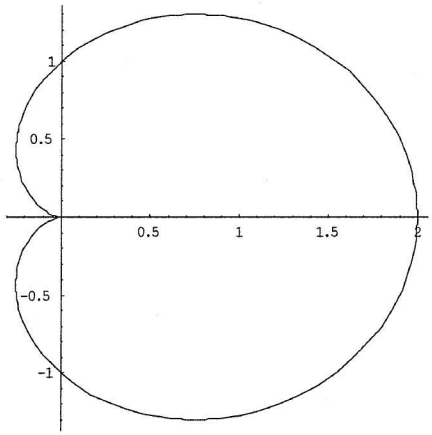


Fig. 2.13. La curva dell'Esempio 2.4.

Esempio 2.5. Calcolare la lunghezza e le coordinate del centroide dell'arco di curva omogenea (*catenaria*[11]) di equazione

$$y = \mathrm{Ch}x \quad x \in [-1, 1].$$

Trattandosi di una curva piana che è grafico di una funzione di una variabile $y = f(x)$, applichiamo la formula per il calcolo dell'elemento d'arco

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx,$$

perciò essendo $y' = \mathrm{Sh}x$,

$$ds = \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 x}dx = \mathrm{Ch}x\, dx.$$

Quindi la lunghezza è:

$$L = \int_{-1}^{1} \mathrm{Ch}x dx = 2\int_{0}^{1} \mathrm{Ch}x dx = 2[\mathrm{Sh}x]_0^1 = 2\mathrm{Sh}1.$$

Il centroide ha coordinate (x_c, y_c), dove $x_c = 0$ per simmetria, mentre

$$y_c = \frac{1}{L}\int_\gamma y ds = \frac{1}{2\mathrm{Sh}1}\int_{-1}^{1} \mathrm{Ch}x \cdot \mathrm{Ch}x\, dx = \frac{1}{\mathrm{Sh}1}\int_0^1 \mathrm{Ch}^2 x\, dx =$$

[11] Si può dimostrare che questa curva, o meglio la curva più generale $a\mathrm{Ch}bx$, descrive la forma di una fune pesante appesa per le estremità. Questa proprietà fu messa in luce per la prima volta nel 1669 da Joachim Jungius. Il nome "catenaria" fu introdotto, proprio per questa sua proprietà, da Huygens.

$$= \frac{1}{\mathrm{Sh}1}\left[\frac{\mathrm{Sh}x\mathrm{Ch}x + x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{\mathrm{Sh}1}\frac{\mathrm{Sh}1\mathrm{Ch}1 + 1}{2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ch}1 + \frac{1}{\mathrm{Sh}1}\right).$$

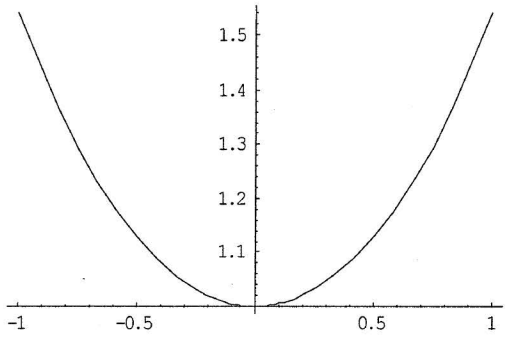
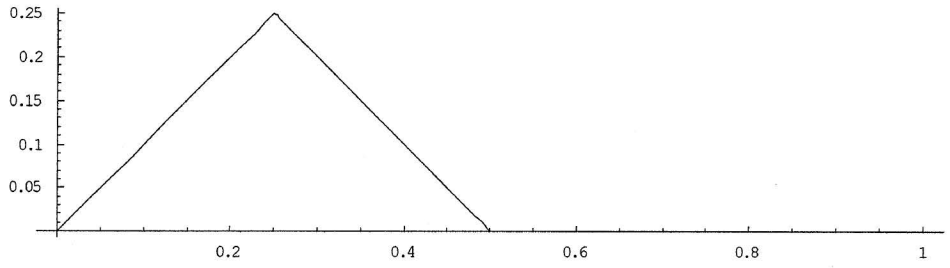


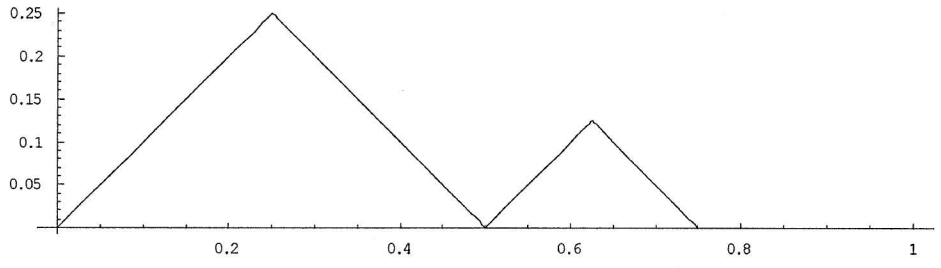
Fig. 2.14. La catenaria, Esempio 2.5

Esempio 2.6. Una curva rettificabile ma non regolare a tratti. Mostriamo un esempio esplicito di arco di curva continua che risulta rettificabile pur non essendo regolare a tratti. La curva, che è un grafico di funzione, $y = f(x)$ con $x \in [0, 1]$, si definisce bene con una costruzione geometrica iterativa.

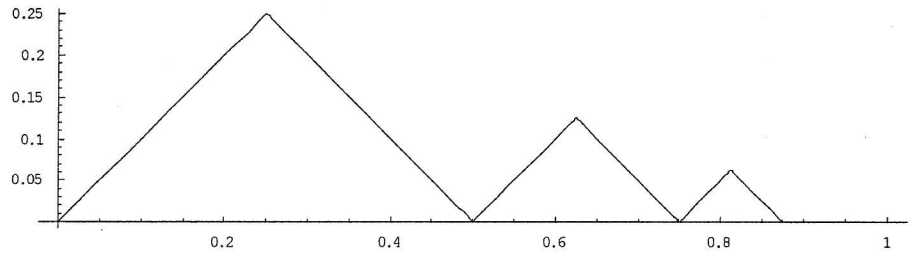
Definiamo prima $f(x)$ in $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, come la funzione che ha il seguente grafico ("a triangolo", con segmenti di pendenza 45°):



Poi la definiamo anche in $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right]$ aggiungendo in questo intervallo un grafico simile, ma dimezzato in scala:

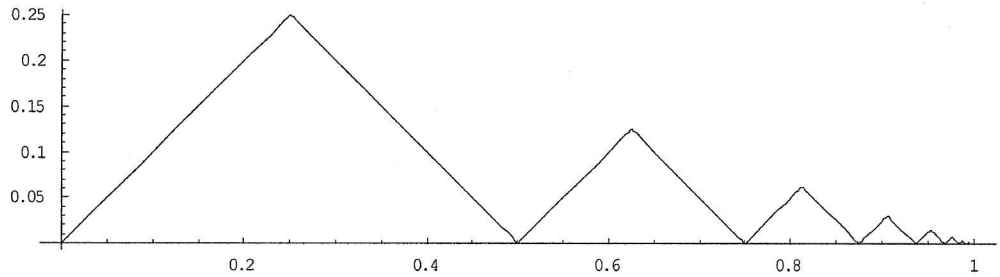


Poi la definiamo in $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right]$ aggiungendo un altro grafico simile a quello di partenza ma ridotto di $\frac{1}{4}$:



...e procediamo indefinitamente, definendo così la funzione in $[0,1)$. Infine poniamo $f(1)=0$. La funzione risulta così definita in tutto $[0,1]$; è facile rendersi conto che si tratta di un arco di curva continua. Inoltre, la sua lunghezza può essere approssimata dalla lunghezza dei primi passi della sua costruzione: ad ogni passo intermedio della costruzione *è una poligonale*, e se distendiamo i suoi lati lungo la diagonale del quadrato che ha per lato l'intervallo $[0,1]$, ci accorgiamo che la lunghezza totale della curva, ossia l'estremo superiore delle lunghezze di queste poligonali, è uguale alla lunghezza della diagonale del quadrato di lato 1:

$$L=\sqrt{2}.$$



Questa curva d'altro canto *non è regolare a tratti*, perché l'intervallo $[0,1]$ può essere suddiviso in un numero *infinito*, ma non in un numero finito, di sottointervalli su ciascuno dei quali la curva è regolare. *Ecco quindi una curva non regolare a tratti ma rettificabile*. Per questa curva la lunghezza si è calcolata appellandosi direttamente alla definizione.

Per chi è curioso, una definizione analitica della funzione è la seguente. Si definisce prima, per ogni $x\in\mathbb{R}$, la funzione "madre"

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\left|x-\frac{1}{2}\right| & \text{se } x\in[0,1]\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

e poi si pone, per $x \in [0,1]$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g(2^k x - 2^k + 2)}{2^k}.$$

Esercizi

Lunghezza di un arco di curva, parametro arco

2.23.★ Si consideri la *cicloide*[12]:

$$\underline{r}(t) = (R(t - \text{sin}t), R(1 - \text{cos}t)), t \in \mathbb{R}.$$

a. Si verifichi che è una curva regolare a tratti, e si individuino i punti singolari.

b. Si calcoli la lunghezza dell'arco di cicloide che si ottiene per $t \in [0, 2\pi]$.

c. Si riparametrizzi l'arco di curva per $t \in [0, \pi]$ mediante il parametro arco.

2.24.★ Calcolare la lunghezza dell'*arco di spirale logaritmica*, espressa in forma polare da:

$$\rho = ae^{b\vartheta} \text{ per } \vartheta \in [-\vartheta_0, \vartheta_0],$$

in funzione dei parametri positivi a, b, ϑ_0. Quindi scrivere le equazioni parametriche della curva mediante il parametro arco.

2.25.★ Calcolare la lunghezza dell'*arco di trattrice*[13]:

$$\underline{r}(t) = \left(a(t - \text{tanh}t), \frac{a}{\text{cosh}t}\right) \text{ per } t \in [0, T],$$

in funzione dei parametri positivi a, T. Quindi, riparametrizzare la curva rispetto al parametro arco, per $t > 0$.

---

[12] La cicloide si può definire come la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza che rotola lungo una retta (pensare ad esempio alla linea tracciata da un punto su una ruota di bicicletta in movimento). Il nome "cicloide" fu introdotto nel 1599 da Galileo.

[13] Già incontrata nell'esercizio 2.16.

[14] L'epicicloide si può definire come la curva generata da un punto di una circonferenza che rotola sulla superficie esterna di un'altra circonferenza. Il termine viene usato

2.26.★ Si consideri la famiglia di curve dette *epicicloidi*[14], definite da:

$$\underline{r}(\vartheta) = (\alpha\cos\vartheta - \cos(\alpha\vartheta), \alpha\sin\vartheta - \sin(\alpha\vartheta))$$

dove $\alpha > 1$ è un parametro reale. L'intervallo in cui varia t va scelto opportunamente in dipendenza da α. Infatti:

a. Dimostrare che se α è razionale la curva è chiusa.

b. Se α è un intero ≥ 2, determinare il minimo $T > 0$ per cui la curva per $t \in [0, T]$ è chiusa.

c. Nelle ipotesi del punto precedente (α intero ≥ 2 e T scelto in modo che la curva sia chiusa e semplice), mostrare che la curva è regolare a tratti e determinare i suoi punti singolari. Quanti sono?

d. Nelle ipotesi del punto precedente, calcolare la lunghezza dell'arco di curva. [Suggerimento: si può riutilizzare parte del calcolo fatto nell'esercizio 2.23 sulla cicloide].

2.27. Si consideri la famiglia di curve dette *ipocicloidi*[15], definite da:

$$\underline{r}(\vartheta) = \left((a-b)\cos\vartheta - b\cos\left(\frac{(a-b)}{b}\vartheta\right), (a-b)\sin\vartheta + b\sin\left(\frac{(a-b)}{b}\vartheta\right)\right)$$

dove a, b sono parametri reali. In questo esercizio supporremo per semplicità che a, b siano interi positivi primi tra loro, $a > b$. Sotto queste ipotesi, le funzioni $x(t), y(t)$ sono periodiche di periodo $2\pi b$.

a. Nelle ipotesi precedenti, mostrare che l'arco di curva (chiusa) per $t \in [0, 2\pi b]$ è regolare a tratti e determinare i suoi punti singolari. Quanti sono?

b. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva per $t \in [0, 2\pi b]$. [Suggerimento: si può utilizzare un calcolo simile, ma non identico, a quello fatto nell'esercizio 2.23 sulla cicloide].

---

tradizionalmente anche per indicare ad es. la traiettoria della Luna rispetto al Sole (dal momento che la luna ruota intorno alla terra, che ruota intorno al sole), o la traiettoria di un pianeta rispetto alla terra. Tuttavia queste traiettorie non sono epicicloidi secondo questa definizione matematica, ma *epitrocoidi*.

[15] L'ipocicloide si può definire come la curva generata da un punto di una circonferenza che rotola sulla superficie interna di un'altra circonferenza.

[16] Daremo qualche notizia su questa curva nelle soluzioni, per non anticipare qui la proprietà caratteristica che l'esercizio vuole mettere in evidenza.

[17] Come suggerisce il nome, questa curva è disegnata sul cono $x^2 + y^2 = z^2$, anziché su un cilindro come l'elica cilindrica.

[18] Questa curva è una particolare *ipocicloide*. Si veda l'Esercizio 2.27 per la definizione di ipocicloide.

[19] Archimede di Siracusa ($\sim$ 200 a.C.) studiò questa curva nel suo libro "Sulle spirali",

2.28.★ Si consideri la *spirale di Cornu*[16]

$$\underline{r}(t) = \left(\int_0^t \sin\left(\frac{u^2}{2}\right) du, \int_0^t \cos\left(\frac{v^2}{2}\right) dv \right) \quad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Riparametrizzare questa curva mediante il parametro arco. Calcolare quindi la quantità

$$|\underline{r}''(s)|$$

(cioè la curvatura della curva). Ripetere l'esercizio per la *spirale di Cornu generalizzata*

$$\underline{r}(t) = \left(\int_0^t \sin\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) du, \int_0^t \cos\left(\frac{v^{n+1}}{n+1}\right) dv \right) \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$

Baricentri e momenti d'inerzia

2.29.★ Calcolare il momento d'inerzia di una circonferenza omogenea di massa m e raggio R che ruota attorno ad una sua retta tangente.

(Il risultato finale dev'essere espresso in funzione dei soli parametri m, R).

2.30. Calcolare la lunghezza e le coordinate del centroide del seguente arco di elica cilindrica:

$$\begin{cases} x = R\cos\vartheta \\ y = R\sin\vartheta \\ z = h\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 3\pi].$$

2.31.★ Calcolare il momento d'inerzia di una linea materiale omogenea rappresentata da una circonferenza di raggio R e massa M, rispetto a un asse passante per un punto della circonferenza e perpendicolare al piano che la contiene.

2.32.★ Calcolare la lunghezza e il centroide di una linea materiale omogenea rappresentata dall'arco di parabola

---

[16] Daremo qualche notizia su questa curva nelle soluzioni, per non anticipare qui la proprietà caratteristica che l'esercizio vuole mettere in evidenza.

$$y = x^2 \text{ per } x \in [-a, a]$$

in funzione del parametro $a > 0$.

Esercizi vari

2.33. Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma z^3 ds$$

dove γ è l'arco di *elica conica*[17]:

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \left[\sqrt{2}, \sqrt{7}\right].$$

2.34.★ Si consideri l'arco di curva parametrizzata da:

$$\begin{cases} x = t^2(1+t) \\ y = t^2(1-t) \end{cases} \quad t \in [-1, 1].$$

a. Stabilire se è l'arco di curva è continua, chiusa, regolare, determinando gli eventuali punti non regolari.

b. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva.

2.35.★ Si consideri l'arco di curva parametrizzata in forma polare da:

$$\rho = |\sin\vartheta|, \text{ per } \vartheta \in [0, 2\pi].$$

a. Stabilire se è l'arco di curva è continua, chiusa, semplice, regolare, determinando gli eventuali punti non regolari.

b. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva.

2.36.★ Si consideri l'arco di curva γ parametrizzata in forma polare da:

$$\rho = 1 + \sin\vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi].$$

a. Stabilire se è l'arco di curva è: continua, chiusa, regolare, determinando gli eventuali punti non regolari.

---

[17] Come suggerisce il nome, questa curva è disegnata sul cono $x^2 + y^2 = z^2$, anziché su un cilindro come l'elica cilindrica.

b. Calcolare l'integrale di linea di prima specie:

$$\int_\gamma |x| ds.$$

2.37.★ Calcolare la lunghezza dell'arco di curva:

$$\begin{cases} x = 3t\cos t \\ y = 3t\sin t \quad t \in [0,5] \\ z = 4t \end{cases}$$

2.38.★ Calcolare il momento d'inerzia di una linea materiale omogenea rappresentata da un quarto di circonferenza di raggio R e massa M, rispetto a un asse tangente alla curva in uno dei due estremi.

2.39. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva piana la cui equazione in forma polare è:

$$\rho = \left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2, \ \vartheta \in [0, 2\pi].$$

2.40. Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma \sqrt{z} ds$$

dove γ è l'arco di curva: $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \quad t \in [0, 2\pi]. \\ z = t^2 \end{cases}$

2.41.★ Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma y ds$$

dove γ è l'arco di sinusoide $y = \sin x$ per $x \in [0, \pi]$.

2.42.★ Sia γ l'arco di curva:

$$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi].$$

Si calcoli l'integrale di linea: $\displaystyle\int_\gamma z^2 \, ds.$

2.43. Si consideri una linea materiale omogenea (detta *astroide*[18]) di equazioni:

$$\begin{cases} x = R\cos^3\vartheta \\ y = R\sin^3\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Si calcoli la sua lunghezza e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse y, indicando con M la massa totale.

2.44.★ Si consideri ancora la linea materiale astroide dell'esercizio precedente. Se ne calcoli il momento d'inerzia rispetto a un asse passante per il centro e perpendicolare al piano della curva, ricordando che la lunghezza della curva è $L = 6R$.

2.45.★ Si consideri la *spirale di Archimede*[19], descritta in forma polare da:

$$\rho = A\vartheta,$$

con $A > 0$ fissato. Si calcoli la lunghezza dell'arco di spirale costituito da n giri completi, ossia per $\vartheta \in [0, 2n\pi]$.

---

[18] Questa curva è una particolare *ipocicloide.* Si veda l'Esercizio 2.27 per la definizione di ipocicloide.

[19] Archimede di Siracusa ($\sim$ 200 a.C.) studiò questa curva nel suo libro "Sulle spirali", ottenendo due risultati che per le idee coinvolte anticipano il calcolo infinitesimale moderno: il calcolo dell'area racchiusa dal primo giro di spirale, e la determinazione della pendenza della retta tangente in ogni punto. Archimede dà di questa curva una definizione cinematica: una retta che ha un'estremità fissata ruota uniformemente; su di essa si muove di moto uniforme un punto. La curva descritta dal punto è la spirale di Archimede. Come si vede, questa definizione corrisponde esattamente alla nostra equazione in forma polare.

2.46.★ Sia γ la curva piana di equazione polare

$$\rho = e^{\vartheta},\ \vartheta \in [-2\pi, 2\pi].$$

a. Calcolare la lunghezza della curva.
b. Calcolare le coordinate del centroide.

2.47.★ Si consideri l'arco di circonferenza

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Calcolare le coordinate del centroide.

2.48. Si consideri la curva di equazioni:

$$\begin{cases} x = \cos^3\vartheta \\ y = \sin^3\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Si calcoli l'integrale di linea $\displaystyle\int_\gamma (x+y)\,ds.$

2.49. Sia γ la curva piana di equazione polare

$$\rho = \cos\vartheta,\ \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

a. Verificare che è una curva chiusa, continua, regolare.

b. Calcolare l'integrale di linea $\displaystyle\int_\gamma \vartheta^2 ds.$

2.50. Si consideri l'arco di circonferenza omogenea, di massa M,

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right].$$

Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse y.

2.51. Sia γ l'arco di curva:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

(R, h costanti positive). Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma yz\, ds.$$

2.52.★ Sia γ la curva piana di equazione polare

$$\rho = \vartheta^2,\ \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Dopo aver scritto le equazioni parametriche della curva e aver calcolato l'elemento d'arco ds, calcolare la lunghezza della curva. Questa linea è regolare? In caso negativo, quanti punti singolari ha, e quali sono?

2.53.★ Sia γ la curva piana di equazione polare

$$\rho = 2e^{\vartheta},\ \vartheta \in [0, 4\pi].$$

Dopo aver scritto le equazioni parametriche della curva e aver calcolato l'elemento d'arco ds, calcolare l'integrale di linea:

$$\int_\gamma x\, ds$$

2.54.★ Sia γ la linea materiale omogenea di massa m, rappresentata dall'arco di curva piana, grafico della funzione $y = \log x$ per $x \in [1, 3]$. Dopo aver scritto l'elemento d'arco ds, calcolare il momento d'inerzia di γ rispetto all'asse y.

2.55.★ Sia γ l'arco di cicloide, di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

Calcolare l'integrale di linea:

$$\int_\gamma \sqrt{2y - y^2}\, ds$$

2.56.★ Sia γ l'arco di curva di equazione polare:

$$\rho = \vartheta^4,\ \vartheta \in [0, \pi].$$

a. Calcolare l'elemento d'arco ds, semplificando l'espressione ottenuta.
b. Stabilire se la curva è regolare, determinando in caso contrario i punti singolari dela curva.
c. Calcolare la lunghezza della curva.

2.57.★ Sia γ l'arco di curva grafico della funzione

$$y = \frac{1}{2}\mathrm{Ch}2x,\ x \in [-\log 2, \log 2].$$

a. Calcolare l'elemento d'arco ds.
b. Calcolare la lunghezza di γ, semplificando l'espressione ottenuta.
c. Calcolare le coordinate del centroide di γ (supponendo che si tratti di una linea materiale omogenea).

Soluzioni §2.2.

2.19.

a. Scorretto. Manca il modulo al vettore derivato.

b. Scorretto. Poiché la variabile di integrazione è t, sul simbolo di integrale dovrebbero comparire gli estremi di integrazione, $\int_a^b$, non il simbolo γ.

c. Corretto. Questo è l'integrale di linea scritto in forma esplicita.

d. Corretto. Questo è l'integrale di linea scritto in forma simbolica.

e. Scorretto. Questo integrale dovrebbe essere in dt, non in ds.

2.20.

a. Scorretto. Nell'integranda manca il modulo al vettore derivato; inoltre, essendo un integrale in dt, dovrebbe comparire $y(t)$, non y.

b. Scorretto. Essendo un integrale in dt, dovrebbe comparire $y(t)$, non y.

c. Corretto. Questo è l'integrale che assegno y_c scritto in forma esplicita.

d. Corretto. Questo è l'integrale che assegno y_c scritto in forma simbolica.

e. Scorretto. Poiché è un integrale in dt, sul segno di integrale dovrebbero comparire gli estremi di integrazione, così: $\int_a^b$, e non l'indicazione simbolica di integrale sulla curva γ.

2.21.

a. Scorretto. La distanza al quadrato dall'asse y non è y^2, ma $x^2 + z^2$.

b. Scorretto. La distanza al quadrato dall'asse y non è $x^2 + y^2$, ma $x^2 + z^2$.

c. Corretto. Questo è il momento d'inerzia scritto in forma simbolica.

d. Scorretto. Manca il modulo al vettore derivato.

e. Corretto. Questo è il momento d'inerzia scritto in forma esplicita.

2.22.

a. Falso. Esistono curve continue non rettificabili, v. [BPS2], cap.2, §4.1, Esempio 4.4.

b. Falso. La definizione di rettificabilità si dà mediante l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte, e la definizione ha senso anche per curve non regolari, per le quali $\underline{r}'(t)$ potrebbe non esistere.

c. Vero, questo è un teorema (v. [BPS2], cap.2, §4.1, Teorema 2.4).

d. Vero, come si capisce implicitamente dalle due risposte precedenti. Non è immediato costruire un esempio di questo tipo, tuttavia. Se ne fornirà uno nell'Esempio 2.6.

e. Vero, v. risposta *a.*

f. Falso, si può pensare di calcolarne la lunghezza direttamente dalla definizione, anziché usando l'integrale della velocità scalare.

g. Vero, questo è un teorema (v. [BPS2], cap.2, §4.1, Teorema 2.4).

2.23.

a. La curva è evidentemente di classe C^1. Si ha:

$$\underline{r}'(t) = (R(1 - \cos t), R\sin t);$$

$$|\underline{r}'(t)| = R\sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{2}R\sqrt{1 - \cos t} = 0 \text{ per:}$$

$$\cos t = 1, \text{ cioè } t = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

I punti singolari sono $\underline{r}(2k\pi) = (k2\pi R, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

b. Calcoliamo ora la lunghezza dell'arco per $t \in [0, 2\pi]$:

$$L = \sqrt{2}R\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = \sqrt{2}R\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{1 + \cos t}}\, dt =$$

$$= \sqrt{2}R\int_0^{2\pi} \frac{|\sin t|}{\sqrt{1 + \cos t}} dt = 2\sqrt{2}R\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos t}} dt =$$

$$[\cos t = u; -\sin t dt = du]$$

$$= 2\sqrt{2}R\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 + u}} = 2\sqrt{2}R\Big[2\sqrt{1 + u}\Big]_{-1}^{1} = 2\sqrt{2}R \cdot 2\sqrt{2} = 8R.$$

c. Calcoliamo per $t \in [0, \pi]$ il parametro arco:

$$s = \sqrt{2}R\int_0^t \sqrt{1 - \cos\tau}\, d\tau =$$

(con i calcoli fatti sopra)

$$= \sqrt{2}R\int_0^t \frac{\sin\tau}{\sqrt{1 + \cos\tau}} d\tau = \sqrt{2}R\int_{\cos t}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 + u}} = \sqrt{2}R\Big[2\sqrt{1 + u}\Big]_{\cos t}^{1} =$$

$$= 2\sqrt{2}R\Big(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos t}\Big),$$

da cui

$$\sqrt{1 + \cos t} = \sqrt{2} - \frac{s}{2\sqrt{2}R} = \sqrt{2}\Big(1 - \frac{s}{4R}\Big)$$

$$\cos t = 2\Big(1 - \frac{s}{4R}\Big)^2 - 1$$

$$t = \arccos\left[2\Big(1 - \frac{s}{4R}\Big)^2 - 1\right]$$

$$\sin t = \sqrt{1-\left[2\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2-1\right]^2} = \sqrt{-\left[4\left(1-\frac{s}{4R}\right)^4+4\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2\right]}$$

$$= 2\left(1-\frac{s}{4R}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2}$$

e la parametrizzazione mediante s è:

$$\underline{r}(s) = R\left(\arccos\left[2\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2-1\right] - 2\left(1-\frac{s}{4R}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2}, 2-2\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2\right)$$

per $s \in [0, 4R]$.

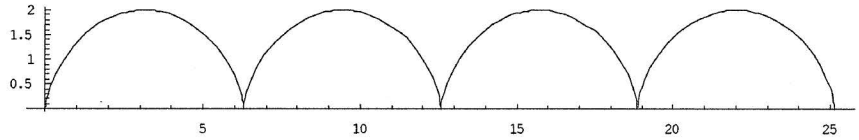


Fig.2.15. La cicloide (per $t \in [0, 8\pi]$).

2.24. Calcoliamo:

$$\rho' = abe^{b\vartheta};$$

$$ds = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\vartheta = \sqrt{(ae^{b\vartheta})^2+(abe^{b\vartheta})^2}d\vartheta = ae^{b\vartheta}\sqrt{1+b^2}d\vartheta.$$

$$L = \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} ae^{b\vartheta}\sqrt{1+b^2}d\vartheta = a\sqrt{1+b^2}\left[\frac{e^{b\vartheta}}{b}\right]_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} =$$

$$= \frac{a\sqrt{1+b^2}}{b}\left(e^{b\vartheta_0}-e^{-b\vartheta_0}\right) = \frac{2a\sqrt{1+b^2}}{b}\sinh(b\vartheta_0).$$

Calcoliamo ora il parametro arco:

$$s = \int_0^{\vartheta} ae^{bt}\sqrt{1+b^2}dt = a\sqrt{1+b^2}\left[\frac{e^{bt}}{b}\right]_0^{\vartheta} = \frac{a\sqrt{1+b^2}}{b}\left(e^{b\vartheta}-1\right)$$

da cui $$e^{b\vartheta} = 1 + \frac{bs}{a\sqrt{1+b^2}}$$

e $$\vartheta = \frac{1}{b}\log\left(1 + \frac{bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right) \text{ per } s \in [0, +\infty).$$

Osservando che $$e^{b\vartheta} = \left(1 + \frac{bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right),$$

le equazioni parametriche sono quindi ora:

$$\begin{cases} x = ae^{b\vartheta(s)}\cos\vartheta(s) = a\left(1 + \frac{bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right)\cos\left[\frac{1}{b}\log\left(1 + \frac{bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right)\right] \\ y = ae^{b\vartheta(s)}\sin\vartheta(s) = a\left(1 + \frac{bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right)\sin\left[\frac{1}{b}\log\left(1 + \frac{bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right)\right] \end{cases}$$

per $s \in [0, +\infty)$.

2.25. Si ha:

$$\underline{r}'(t) = a\left(1 - (1 - \tanh^2 t), -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right) = a\left(\tanh^2 t, -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right).$$

$$|\underline{r}'(t)| = a\sqrt{\frac{\sinh^4 t}{\cosh^4 t} + \frac{\sinh^2 t}{\cosh^4 t}} = a\frac{|\sinh t|}{\cosh^2 t}\sqrt{\sinh^2 t + 1} = a\frac{|\sinh t|}{\cosh t}.$$

$$L = \int_0^T a\frac{\sinh t}{\cosh t}dt = [a\log\cosh t]_0^T = a\log\cosh T.$$

Calcoliamo ora, per $t > 0$:

$$s = \int_0^t a\frac{\sinh\tau}{\cosh\tau}d\tau = a\log\cosh t$$

da cui

$$\cosh t = e^{s/a}, \quad t = \text{SettCh}\left(e^{s/a}\right) = \log\left(e^{s/a} + \sqrt{e^{2s/a} - 1}\right)$$

$$\tanh t = \frac{\sqrt{e^{2s/a} - 1}}{e^{s/a}} = \sqrt{1 - e^{-2s/a}}$$

$$\underline{r}(s) = \left(a\left(\log\left(e^{s/a} + \sqrt{e^{2s/a} - 1}\right) - \sqrt{1 - e^{-2s/a}}\right), ae^{-s/a}\right)$$

per $s \in [0, +\infty]$

2.26. *a.* Poiché $\cos\vartheta$ ha periodo 2π e $\cos(\alpha\vartheta)$ ha periodo $2\pi/\alpha$, la funzione $x(\vartheta) = \alpha\cos\vartheta - \cos(\alpha\vartheta)$ è periodica se e solo se il rapporto tra i periodi, cioè α, è razionale[20]. Lo stesso vale per la funzione $y(\vartheta)$. Perciò quando α è razionale $\underline{r}(\vartheta)$ è periodica e la curva è chiusa.

b. Se $\alpha \geq 2$ è un intero, $r(t)$ è periodica di periodo $T = 2\pi$. La curva $\underline{r}(t)$ per $t \in [0, 2\pi]$ è chiusa.

c. La curva è di classe C^1. Calcoliamo:

$$\underline{r}'(t) = (-\alpha\sin\vartheta + \alpha\sin(\alpha\vartheta), \alpha\cos\vartheta - \alpha\cos(\alpha\vartheta))$$

$$|\underline{r}'(t)| = \alpha\sqrt{2 - 2\sin\vartheta\sin(\alpha\vartheta) - 2\cos\vartheta\cos(\alpha\vartheta)} = \alpha\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos[(\alpha - 1)\vartheta]} = 0 \text{ per:}$$

$$\cos[(\alpha - 1)\vartheta] = 1, (\alpha - 1)\vartheta = 2k\pi,$$

$$\vartheta = \frac{2k\pi}{\alpha - 1}, \text{ per } k = 0, 1, 2, ..., \alpha - 2.$$

Ci sono $\alpha - 1$ valori di $\vartheta \in [0, 2\pi]$ che danno punti singolari della curva:

$$\underline{r}\left(\frac{2k\pi}{\alpha - 1}\right) = \left(\alpha\cos\frac{2k\pi}{\alpha - 1} - \cos\left(\alpha\frac{2k\pi}{\alpha - 1}\right), \alpha\sin\frac{2k\pi}{\alpha - 1} - \sin\left(\alpha\frac{2k\pi}{\alpha - 1}\right)\right)$$

per $k = 0, 1, 2, ..., \alpha - 2$.

d. Calcoliamo la lunghezza dell'arco di curva per $t \in [0, 2\pi]$:

$$L = \int_0^{2\pi} \alpha\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos[(\alpha - 1)\vartheta]}\, d\vartheta = \left[(\alpha - 1)\vartheta = t; d\vartheta = \frac{dt}{\alpha - 1}\right]$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha - 1}\int_0^{2\pi(\alpha-1)} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha - 1} \cdot (\alpha - 1)\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt =$$

(il calcolo di questo integrale è stato fatto nell'Esercizio 2.23 e fa $8/\sqrt{2}$)

$$= \alpha\sqrt{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} = 8\alpha.$$

[20] v. [BPS1], cap. 2, Complementi, Esercizio 8.

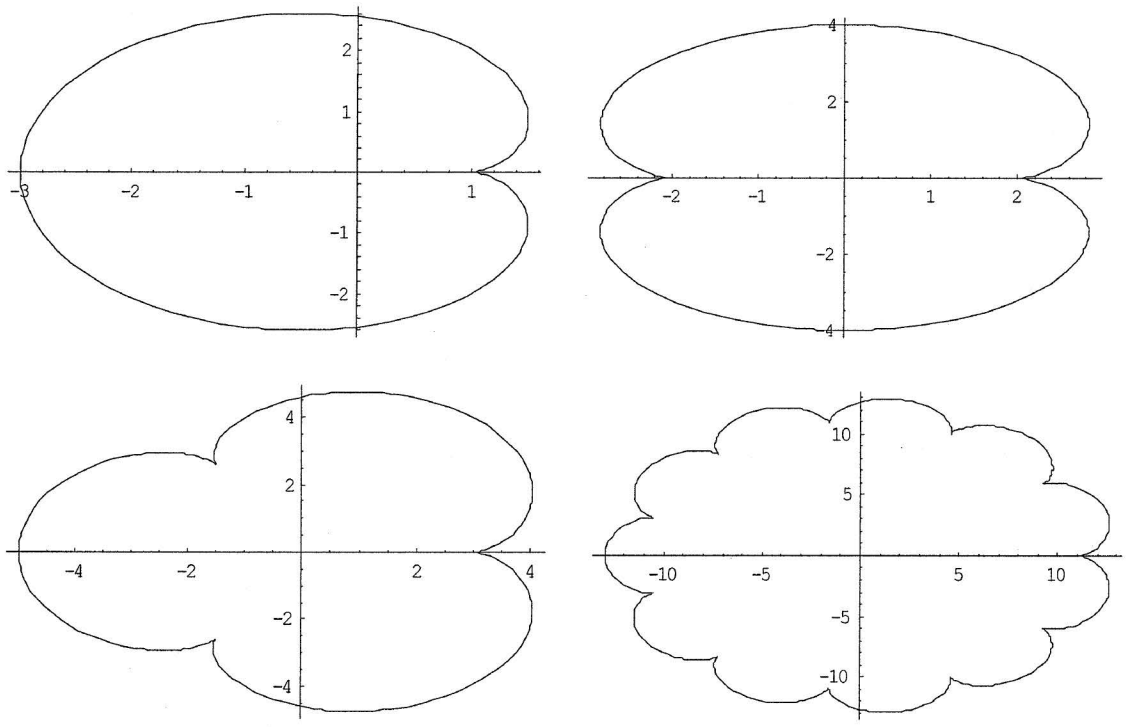


Fig. 2.16. Alcune epicicloidi, rispettivamente per $\alpha = 2, \alpha = 3, \alpha = 4, \alpha = 12$

2.27. *a.* La curva è di classe C^1.

$$|\underline{r}'(t)| = (a-b)\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\left(\frac{a}{b}\vartheta\right)} = 0 \text{ per: } \quad \vartheta = \frac{b}{a}\pi(1+2k), \text{ per } k \in \mathbb{Z}.$$

Poiché a è un intero ≥ 2, i valori di k per cui è $\vartheta \in [0, 2\pi b]$ si hanno per $k = 0, 1, 2, ..., a-1$. Ci sono a punti singolari della curva:

$$\underline{r}\left(\frac{b}{a}\pi(1+2k)\right) = \left((a-b)\cos\left(\frac{b}{a}\pi(1+2k)\right) - b\cos\left(\frac{(a-b)}{a}\pi(1+2k)\right),\right.$$

$$\left.(a-b)\sin\left[\frac{b}{a}\pi(1+2k)\right] + b\sin\left(\frac{(a-b)}{a}\pi(1+2k)\right)\right)$$

per $k = 0, 1, 2, ..., \alpha - 1$.

b. $$L = \int_0^{2\pi b} (a-b)\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\left(\frac{a}{b}\vartheta\right)}\,d\vartheta = \left[\frac{a}{b}\vartheta = t; d\vartheta = \frac{b}{a}dt\right]$$

$$= (a-b)\sqrt{2}\frac{b}{a}\cdot a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\,dt =$$

(il calcolo di questo integrale è simile a quello fatto nell'Esercizio 2.23)

$$= (a-b)\sqrt{2}b\int_0^{2\pi}\frac{|\sin t|}{\sqrt{1-\cos t}}dt = 8b(a-b).$$

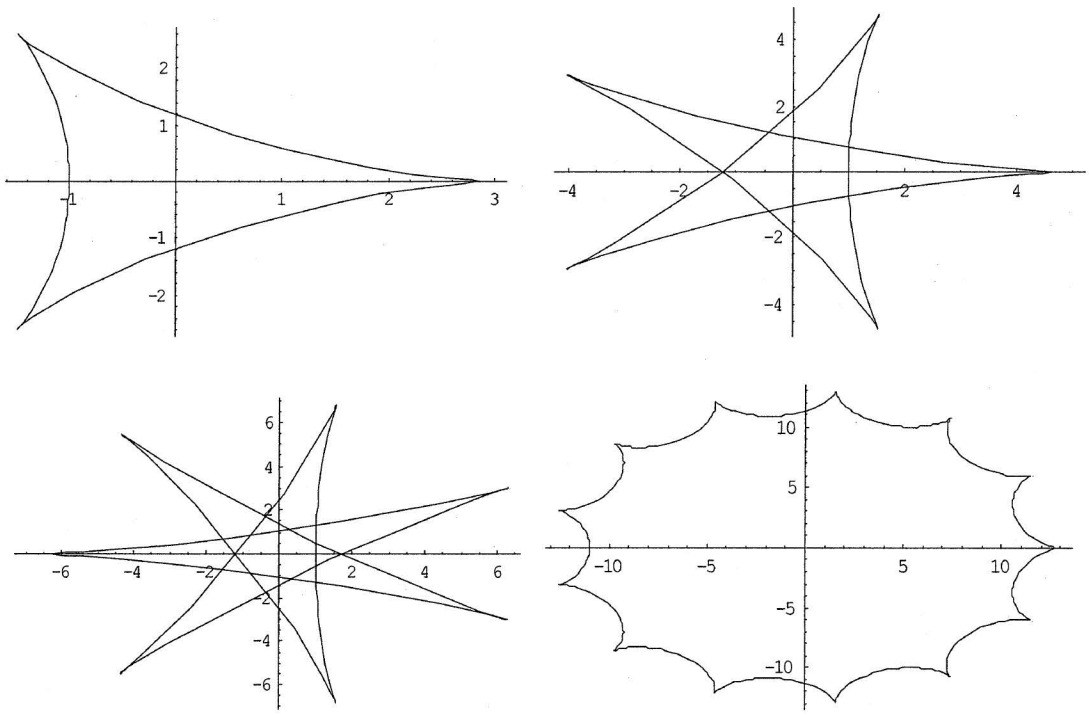


Fig. 2.17. Alcune ipocicloidi, rispettivamente per $(a = 3, b = 2)$; $(b = a, b = 2)$; $(a = 7, b = 4)$; $(a = 13, b = 12)$;

2.28. Calcoliamo

$$\underline{r}'(t) = \left(\sin\left(\frac{t^2}{2}\right), \cos\left(\frac{t^2}{2}\right)\right), \quad |\underline{r}'(t)| = 1,$$

perciò t è già il parametro arco! La curva è già parametrizzata nel modo richiesto:

$$\underline{r}'(s) = \left(\sin\left(\frac{s^2}{2}\right), \cos\left(\frac{s^2}{2}\right)\right)$$

Ora:
$$\underline{r}''(s) = \left(s\cos\left(\frac{s^2}{2}\right), -s\sin\left(\frac{s^2}{2}\right)\right),$$

$$|\underline{r}''(s)| = s.$$

La curvatura di questa spirale coincide col parametro arco: più arco percorriamo, più la linea si incurva[21].

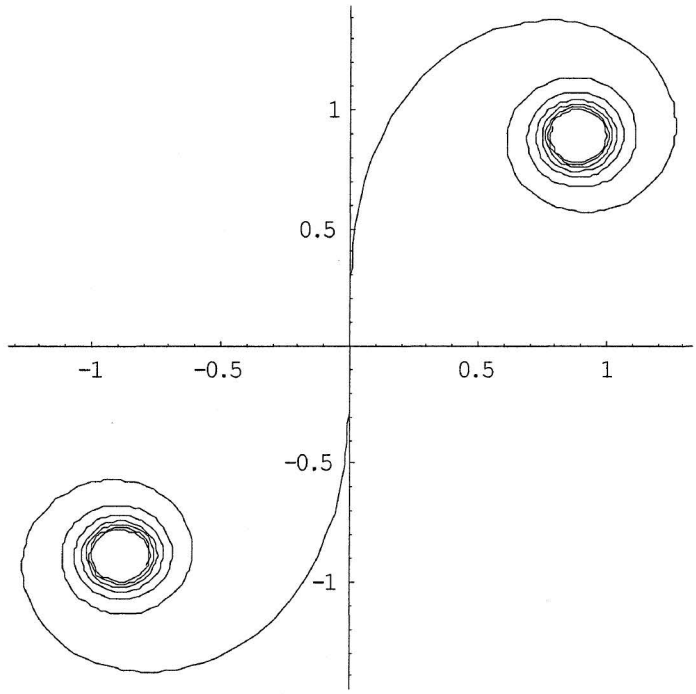


Fig.2.18. La spirale di Cornu ($n = 1$).

[21] In particolare, questo significa che la linea si incurva *molto gradualmente*, permettendo una transizione continua della curvatura tra la linea retta e una curva con raggio di curvatura assegnato. Per questo motivo questa linea, detta anche clotoide, è utilizzata nella progettazione di tracciati stradali e ferroviari. Invece, le due funzioni integrali $x(t), y(t)$, sono dette funzione seno integrale e coseno integrale di Fresnel, e intervengono in ottica geometrica, nello studio di fenomeni di rifrazione.

Caso generale, n intero ≥ 2:

$$\underline{r}'(t) = \left(\sin\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right), \cos\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)\right),$$

di nuovo $|\underline{r}'(t)| = 1$ e $t = s$.

$$\underline{r}''(s) = \left(s^n \cos\left(\frac{s^{n+1}}{n+1}\right), -s^n \sin\left(\frac{s^{n+1}}{n+1}\right)\right) \quad \text{e} \quad |\underline{r}''(s)| = s^n.$$

In questo caso la curvatura coincide con la potenza ennesima dell'ascissa curvilinea.

Fatto ciò che richiedeva l'esercizio, torniamo a considerare la spirale di Cornu per $n = 1$. Il grafico mostra che la curva spiraleggia attorno a due "zone limite". Se calcoliamo, ad esempio

$$\lim_{s \to +\infty} \underline{r}(s) = \left(\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{u^2}{2}\right) du, \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{v^2}{2}\right) dv\right)$$

troviamo un punto le cui coordinate sono date dagli *integrali generalizzati di Fresnel*, che convergono ai valori

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right).$$

(Questo fatto si può dimostrare con metodi di analisi complessa). Perciò effettivamente la curva tende a un punto limite per $s \to +\infty$ (e al punto opposto per $s \to -\infty$).

2.29. Scriviamo l'equazione della circonferenza in modo che l'asse di rotazione sia l'asse y:

$$\begin{cases} x = R + R\cos\vartheta \\ y = R\sin\vartheta \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

(Infatti, l'asse y è tangente a questa circonferenza).

$$L = 2\pi R; \, ds = R d\vartheta;$$

$$I = \frac{m}{L}\int_\gamma x^2 ds = \frac{m}{2\pi R}\int_0^{2\pi} (R + R\cos\vartheta)^2 R d\vartheta =$$

$$= \frac{mR^3}{2\pi R}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\vartheta + \cos^2\vartheta) d\vartheta = \frac{mR^2}{2\pi}\{2\pi + 0 + \pi\} = \frac{3}{2} mR^2.$$

Osserviamo che per il calcolo degli integrali definiti non siamo passati attraverso la primitiva, ma abbiamo ricordato che

$$\int_0^{2\pi} \cos\vartheta d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sin\vartheta d\vartheta = 0 \text{ per simmetria,}$$

mentre

$$\int_0^{k\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta d\vartheta = \int_0^{k\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta d\vartheta = k\frac{\pi}{4} \quad \text{per } k = 1, 2, 3, ...$$

(integrale definito notevole, v. [BPS1], cap.6, §5.4, Esempio 5.24)

2.30. $$L = 3\pi\sqrt{R^2 + h^2}.$$

Centroide: $$C = \left(0, \frac{2R}{3\pi}, \frac{3\pi h}{2}\right).$$

2.31. Scriviamo l'equazione di una circonferenza passante per l'origine, in modo che l'origine sia il centro di rotazione:

$$\underline{r}(\vartheta) = (R + R\cos\vartheta, R\sin\vartheta), \vartheta \in [0, 2\pi]$$

L'asse di rotazione è l'asse z, quindi la distanza del punto dall'asse è la sua distanza dall'origine nel piano (x, y):

$$I = \frac{M}{L}\int_\gamma (x^2 + y^2)ds = \frac{M}{2\pi R}\int_0^{2\pi} R^2\left[(1 + \cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta\right]Rd\vartheta =$$

$$= \frac{MR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2(1 + \cos\vartheta)d\vartheta = \frac{MR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2d\vartheta = \frac{MR^2}{2\pi}4\pi = 2MR^2.$$

2.32. Poiché $y = f(x)$ con $f'(x) = 2x$, si ha:

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \sqrt{1 + 4x^2}dx;$$

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + 4x^2}dx = 2\int_0^a \sqrt{1 + 4x^2}dx =$$

$$\left[2x = \sinh u; dx = \frac{1}{2}\cosh u du\right]$$

$$= 2\int_0^{\text{SettSh2}a} \sqrt{1+\sinh^2 u}\cdot\frac{1}{2}\cosh u du = \int_0^{\text{SettSh2}a} \cosh^2 u\, du =$$

$$= \left[\frac{u+\sinh u\cosh u}{2}\right]_0^{\text{SettSh2}a} = \frac{\text{SettSh2}a + 2a\sqrt{1+4a^2}}{2}.$$

Il centroide per simmetria avrà ascissa $x_C = 0$, mentre

$$y_C = \frac{1}{L}\int_\gamma y ds = \frac{1}{L}\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{2}{L}\int_0^a x^2\sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$\left[2x = \sinh u;\, dx = \frac{1}{2}\cosh u du\right]$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^{\text{SettSh2}a} \frac{\sinh^2 u}{4}\cosh^2 u\, du.$$

Ricordiamo ora che è

$$\sinh u\cosh u = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)\left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right) = \left(\frac{e^{2u} - e^{-2u}}{4}\right) = \frac{1}{2}\sinh 2u,$$

perciò

$$y_C = \frac{1}{2L}\int_0^{\text{SettSh2}a} \frac{1}{4}(\sinh 2u)^2 du = \frac{1}{8L}\left[\frac{\sinh 2u\cosh 2u - 2u}{4}\right]_0^{\text{SettSh2}a}$$

Ricordando ora che

$$\sinh 2u = 2\sinh u\cosh u;\, \cosh 2u = \cosh^2 u + \sinh^2 u$$

si ha:

$$\sinh 2u\cosh 2u_{/u=\text{SettSh2}a} = 2\sinh u\cosh u\left(\cosh^2 u + \sinh^2 u\right)_{/u=\text{SettSh2}a} =$$

$$= 2\cdot 2a\sqrt{1+4a^2}\left(1+4a^2+4a^2\right) = 4a\sqrt{1+4a^2}\left(1+8a^2\right);$$

$$y_C = \frac{\frac{4a\sqrt{1+4a^2}(1+8a^2)-2\text{SettSh2}a}{4}}{8\frac{\text{SettSh2}a+2a\sqrt{1+4a^2}}{2}} = \frac{2a\sqrt{1+4a^2}(1+8a^2) - \text{SettSh2}a}{8\left(\text{SettSh2}a + 2a\sqrt{1+4a^2}\right)}.$$

2.33.
$$\int_\gamma z^3 ds = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} t^3\sqrt{2+t^2}dt = \left[\sqrt{2+t^2} = u\right]$$

$$= \int_2^3 (u^4 - 2u^2)du = \frac{3^5}{5} - 2\cdot 3^2 - \frac{2^5}{5} + 2\frac{2^3}{3} = \frac{383}{15}.$$

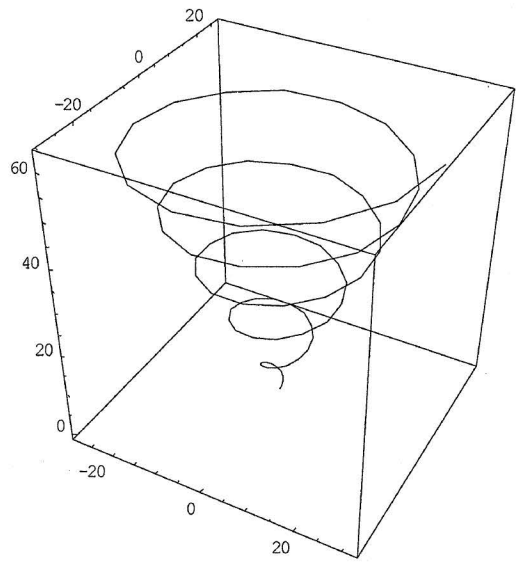


Fig. 2.19. Elica conica (Esercizio 2.33)

2.34. *a.* La curva è continua, non è chiusa: $x(-1) = 0; x(1) = 2$.

$$\underline{r}'(t) = \left(2t + 3t^2, 2t - 3t^2\right)$$

$$|\underline{r}'(t)| = |t|\sqrt{(2+3t)^2 + (2-3t)^2} = |t|\sqrt{2(4+9t^2)}.$$

Quindi la curva è regolare tranne per $t = 0$, cioè l'origine.

b.
$$L = \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{2(4+9t^2)}dt = 2\sqrt{2}\int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\frac{2}{3\cdot 18}\left(4+9t^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{27}\left(13^{3/2} - 8\right).$$

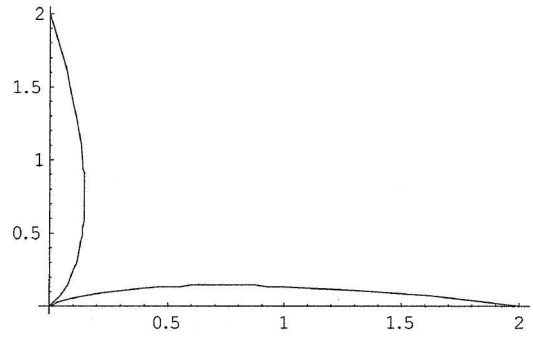


Fig.2.20. La curva dell'Esercizio 2.32

2.35. *a.* La curva è continua, chiusa.
Non è semplice perché per $\vartheta = 0, \pi, 2\pi$ si ha $\rho = 0$.

$$\begin{cases} x = |\sin\vartheta|\cos\vartheta \\ y = |\sin\vartheta|\sin\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Per $\vartheta \neq 0, \pi, 2\pi$, $|\underline{r}'(\vartheta)| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta} = 1$.

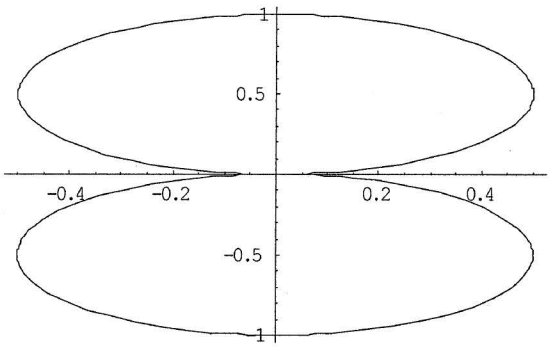


Fig.2.21. La curva dell'Esercizio 2.35

Nei punti $\vartheta = 0, \pi, 2\pi$ (corrispondenti all'origine) non esiste $\rho'(\vartheta)$ e quindi la curva non è regolare. Al di fuori di quel punto, è regolare.

b. $$L = \int_0^{2\pi} 1 d\vartheta = 2\pi.$$

2.36.

a. $$\rho' = \cos\vartheta; ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\vartheta = \sqrt{2(1 + \sin\vartheta)} d\vartheta,$$

la curva è continua e regolare per $\vartheta \in [0, \pi]$. La curva in forma parametrica standard è

$$\underline{r}(\vartheta) = ((1+\sin\vartheta)\cos\vartheta, (1+\sin\vartheta)\sin\vartheta)$$

poiché $\underline{r}(0) = (1,0)$ e $\underline{r}(\pi) = (-1,0)$, la curva non è chiusa.

b. $x = (1+\sin\vartheta)\cos\vartheta$, perciò

$$\int_\gamma |x| ds = \int_0^\pi |(1+\sin\vartheta)\cos\vartheta| \sqrt{2(1+\sin\vartheta)}\, d\vartheta =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^\pi (1+\sin\vartheta)^{3/2} |\cos\vartheta| d\vartheta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} (1+\sin\vartheta)^{3/2}\cos\vartheta d\vartheta =$$

$$[\sin\vartheta = t; \cos\vartheta d\vartheta = dt; t \in [0,1]]$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^1 (1+t)^{3/2} dt = 2\sqrt{2}\left[\frac{2}{5}(1+t)^{5/2}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2} = \frac{32}{5}.$$

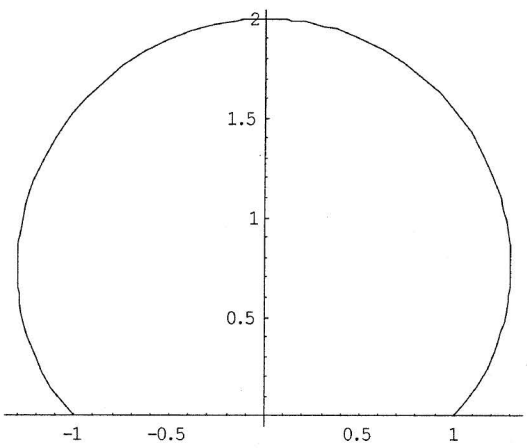


Fig.2.22. La curva dell'Esercizio 2.36.

2.37. $\underline{r}'(t) = (3\cos t - 3t\sin t, 3\sin t + 3t\cos t, 4)$

$$ds = |\underline{r}'(t)| dt = \sqrt{25+9t^2}\, dt$$

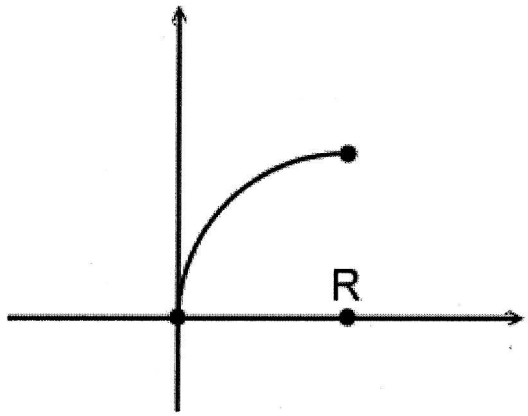
$$L = \int_0^5 \sqrt{25+9t^2}\, dt =$$

$$\left[3t = 5\mathrm{Sh}u; 25+9t^2 = 25\left(1+\mathrm{Sh}^2 u\right) = 25\mathrm{Ch}^2 u; dt = \frac{5}{3}\mathrm{Ch}u\, du; \mathrm{Sh}u \in [0,3]\right]$$

$$= \int_0^{\text{SettSh3}} 5\text{Ch}u \cdot \frac{5}{3}\text{Ch}u\,du = \frac{25}{3}\int_0^{\text{SettSh3}} \text{Ch}^2u\,du =$$

$$= \frac{25}{3}\left[\frac{\text{Sh}u\text{Ch}u + u}{2}\right]_0^{\text{SettSh3}} = \frac{25}{6}\left(3\sqrt{10} + \text{SettSh3}\right).$$

2.38. Consideriamo l'arco di circonferenza:



descritto dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R + R\cos\vartheta \\ y = R\sin\vartheta \end{cases} \qquad \vartheta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

$$ds = Rd\vartheta$$

L'asse di rotazione (tangente alla curva in un estremo, cioè l'origine) è l'asse y, perciò

$$\delta^2(x,y) = x^2 = R^2(1+\cos\vartheta)^2$$

$$I = \frac{M}{L}\int_\gamma \delta^2 ds = \frac{M}{\frac{\pi R}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} R^2(1+\cos\vartheta)^2 R d\vartheta = \frac{2MR^2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+2\cos\vartheta+\cos^2\vartheta)d\vartheta =$$

$$= \frac{2MR^2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + [2\sin\vartheta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2MR^2}{\pi}\left(\frac{3}{4}\pi - 2\right) = MR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right).$$

2.39. $$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\vartheta = \left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right|d\vartheta.$$

$$L = \int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right|d\vartheta = 2\int_0^{\pi}\sin t dt = 4.$$

2.40. $$|\underline{r}'(t)| = \sqrt{1+5t^2}dt.$$

$$\int_\gamma \sqrt{z}ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{1+5t^2}dt = \frac{1}{15}\left[\left(1+20\pi^2\right)^{3/2} - 1\right].$$

2.41. $$ds = \sqrt{1+f'(x)^2}dx = \sqrt{1+\cos^2 x}dx$$

$$\int_\gamma y ds = \int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx = [\cos x = t]$$

$$= \int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}dt = 2\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt = [t = \mathrm{Sh}u]$$

$$= 2\int_0^{\mathrm{SettSh1}}\mathrm{Ch}^2 u du = [\mathrm{Sh}u\mathrm{Ch}u + u]_0^{\mathrm{SettSh1}} = \sqrt{2} + \mathrm{SettSh1}.$$

2.42. $\underline{r}(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t)$; $\underline{r}'(t) = (-4\sin t, 4\cos t, 3)$;

$$ds = |\underline{r}'(t)|dt = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 9}\, dt = 5\, dt.$$

$$\int_\gamma z^2\, ds = \int_0^{4\pi} 9t^2 5\, dt = 45\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{4\pi} = 960\,\pi^3.$$

2.43. $$ds = |\underline{r}'(\vartheta)|d\vartheta = 3R|\sin\vartheta\cos\vartheta|d\vartheta.$$

$$L = 3R\cdot 4\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta = 12R\left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2} = 6R.$$

$$I = \frac{M}{L}\int_\gamma x^2 ds = \frac{1}{2}MR^2 \cdot 4\int_0^{\pi/2} \cos^7\vartheta \sin\vartheta d\vartheta = \frac{1}{4}MR^2.$$

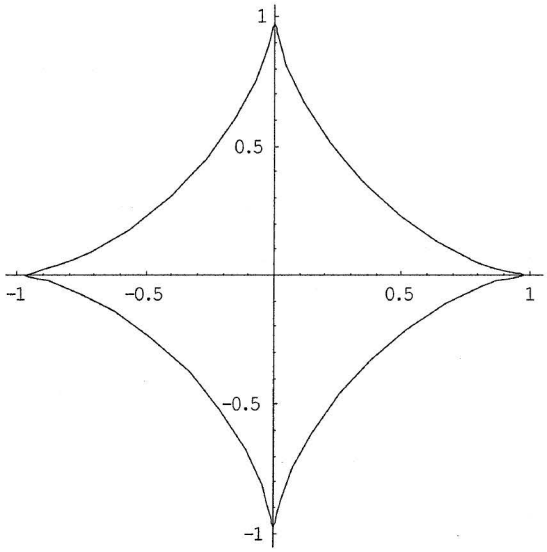


Fig.2.23. L'astroide (Esercizio 2.43)

2.44. $$I = \frac{M}{L}\int_\gamma (x^2+y^2) ds =$$

(utilizzando i calcoli dell'esercizio precedente)

$$= \frac{M}{6R}\int_0^{2\pi} R^2(\cos^6\vartheta + \sin^6\vartheta) 3R|\sin\vartheta\cos\vartheta| d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}MR^2 \cdot 4\int_0^{\pi/2} (\cos^6\vartheta + \sin^6\vartheta)\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta =$$

$$= 2MR^2\left[-\frac{\cos^8\vartheta}{8} + \frac{\sin^8\vartheta}{8}\right]_0^{\pi/2} = 2MR^2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}MR^2$$

2.45. Si ha:

$$\rho' = A; ds = \sqrt{(A\vartheta)^2 + A^2} d\vartheta = A\sqrt{\vartheta^2+1}\, d\vartheta$$

$$L = \int_0^{2n\pi} A\sqrt{\vartheta^2 + 1}\, d\vartheta = [\vartheta = \sinh t;\, d\vartheta = \cosh t dt]$$

$$= \int_0^{\mathrm{SettSh}(2n\pi)} A\cosh^2 t dt = A\left[\frac{\sinh t\cosh t + t}{2}\right]_0^{\mathrm{SettSh}(2n\pi)} =$$

$$= \frac{A}{2}\left(2n\pi\sqrt{1 + (2n\pi)^2} + \mathrm{SettSh}(2n\pi)\right).$$

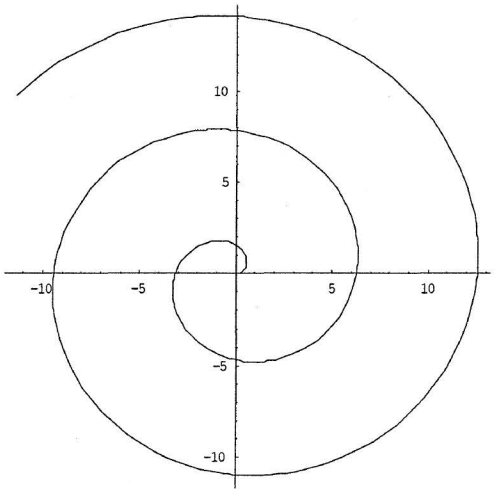


Fig.2.24. La spirale di Archimede (Esercizio 2.45).

2.46.

a. $$ds = \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta)}\, d\vartheta = \sqrt{e^{2\vartheta} + e^{2\vartheta}}\, d\vartheta = e^{\vartheta}\sqrt{2}\, d\vartheta$$

$$L = \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{\vartheta}\sqrt{2}\, d\vartheta = \sqrt{2}\left[e^{\vartheta}\right]_{-2\pi}^{2\pi} = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right).$$

b. $$\underline{r}(\vartheta) = \left(e^{\vartheta}\cos\vartheta, e^{\vartheta}\sin\vartheta\right)$$

$$\overline{x} = \frac{1}{L}\int_\gamma x\, ds = \frac{1}{\sqrt{2}(e^{2\pi} - e^{-2\pi})}\int_{-2\pi}^{2\pi} e^{\vartheta}\cos\vartheta \cdot e^{\vartheta}\sqrt{2}\, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{2\vartheta} \cos\vartheta \, d\vartheta;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{2\vartheta} \sin\vartheta \, d\vartheta.$$

Calcoliamo i due integrali simultaneamente col metodo della variabile complessa:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} e^{2\vartheta} \cos\vartheta \, d\vartheta + i \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{2\vartheta} \sin\vartheta \, d\vartheta = \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{\vartheta(2+i)} \, d\vartheta = \left[\frac{e^{\vartheta(2+i)}}{2+i} \right]_{-2\pi}^{2\pi} =$$

$$= \frac{e^{2\pi(2+i)}}{2+i} - \frac{e^{-2\pi(2+i)}}{2+i} = \frac{e^{4\pi} - e^{-4\pi}}{2+i} = \frac{e^{4\pi} - e^{-4\pi}}{5}(2-i)$$

perciò

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} e^{2\vartheta} \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{2}{5}\left(e^{4\pi} - e^{-4\pi}\right); \quad \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{2\vartheta} \sin\vartheta \, d\vartheta = -\frac{1}{5}\left(e^{4\pi} - e^{-4\pi}\right)$$

e il centroide ha coordinate:

$$\overline{x} = \frac{2}{5}\left(\frac{e^{4\pi} - e^{-4\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}\right); \quad \overline{y} = -\frac{1}{5}\left(\frac{e^{4\pi} - e^{-4\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}\right).$$

2.47. $\left(\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi}\right)$

2.48. $\frac{3}{2}$

2.49.

a. $\underline{r}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,0)$; $\underline{r}'(\vartheta) = (-\sin 2\vartheta, \cos 2\vartheta) \neq (0,0)$.

b. $\frac{\pi^3}{12}$

2.50. $\frac{Mr^2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

2.51. $\pi R h \sqrt{R^2 + h^2}$

2.52.

$$\begin{cases} x = \vartheta^2 \cos\vartheta \\ y = \vartheta^2 \sin\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

$$ds = \sqrt{f(\vartheta)^2 + f'(\vartheta)^2} \, d\vartheta; \; f(\vartheta) = \vartheta^2; \; f'(\vartheta) = 2\vartheta$$

$$ds = \sqrt{\vartheta^4 + 4\vartheta^2} \, d\vartheta = \vartheta \sqrt{\vartheta^2 + 4} \, d\vartheta$$

$$L = \int_0^{2\pi} \vartheta\sqrt{\vartheta^2+4}\,d\vartheta = \left[\frac{1}{3}(\vartheta^2+4)^{3/2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(4\pi^2+4)^{3/2} - 4^{3/2}\right] = \frac{8}{3}\left[(\pi^2+1)^{3/2} - 1\right].$$

La curva è regolare tranne per $\vartheta = 0$; punto singolare: $(0,0)$.

2.53. $\begin{cases} x = 2e^{\vartheta}\cos\vartheta \\ y = 2e^{\vartheta}\sin\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 4\pi].$

$$ds = \sqrt{f(\vartheta)^2 + f'(\vartheta)^2}\,d\vartheta = \sqrt{4e^{2\vartheta} + 4e^{2\vartheta}}\,d\vartheta = 2\sqrt{2}\,e^{\vartheta}\,d\vartheta$$

$$\int_\gamma x\,ds = \int_0^{4\pi} 2e^{\vartheta}\cos\vartheta \cdot 2\sqrt{2}\,e^{\vartheta}\,d\vartheta = 4\sqrt{2}\int_0^{4\pi} e^{2\vartheta}\cos\vartheta\,d\vartheta.$$

$$\int_0^{4\pi} e^{2\vartheta}\cos\vartheta\,d\vartheta = \left[e^{2\vartheta}\sin\vartheta\right]_0^{4\pi} - \int_0^{4\pi} 2e^{2\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= 2\left\{\left[e^{2\vartheta}\cos\vartheta\right]_0^{4\pi} - \int_0^{4\pi} 2e^{2\vartheta}\cos\vartheta\,d\vartheta\right\} = 2\left(e^{8\pi}-1\right) - 4\int_0^{4\pi} e^{2\vartheta}\cos\vartheta\,d\vartheta.$$

Quindi:
$$\int_0^{4\pi} e^{2\vartheta}\cos\vartheta\,d\vartheta = \frac{2}{5}\left(e^{8\pi}-1\right)$$

$$\int_\gamma x\,ds = \frac{8}{5}\sqrt{2}\left(e^{8\pi}-1\right).$$

2.54. $f(x) = \log x;\ f'(x) = \dfrac{1}{x};$

$$ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$$

$$L = \int_\gamma ds = \int_1^3 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx =$$

$$\left[\sqrt{1+x^2}=t;\, x\,dx=t\,dt;\, \frac{dx}{x}=\frac{x\,dx}{x^2}=\frac{t\,dt}{t^2-1};\, t\in\left(\sqrt{2},\sqrt{10}\right)\right]$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}}\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt=\left[t+\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}}=$$

$$=\sqrt{10}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\left[\frac{\left(\sqrt{10}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{10}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}\right]\equiv L$$

$$I=\frac{m}{L}\int_\gamma x^2\,ds=\frac{m}{L}\int_1^3 x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx=$$

$$=\frac{m}{L}\int_1^3 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{m}{L}\left[\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\right]_1^3=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{m}{L}\left[10^{3/2}-2^{3/2}\right]=\frac{m\left[10^{3/2}-2^{3/2}\right]}{3\left\{\sqrt{10}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\left[\frac{(\sqrt{10}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{10}+1)(\sqrt{2}-1)}\right]\right\}}.$$

2.55.

a. $$\underline{r}'(t)=(1-\cos t,\sin t)$$

$$ds=\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$

b. $\underline{r}'(t)=0$ per $\cos t=1$, cioè per $t=0$, e quindi il punto $(0,0)$ è singolare.

c.

$$\sqrt{2y-y^2}=\sqrt{2-2\cos t-(1-\cos t)^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sin t$$

$$\int_\gamma\sqrt{2y-y^2}\,ds=\sqrt{2}\int_0^\pi \sin t\sqrt{1-\cos t}\,dt=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2}\left[(1-\cos t)^{3/2}\right]_0^\pi=\frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{8}{3}$$

2.56. $\rho'=4\vartheta^3$;

$$ds=\sqrt{\rho(\vartheta)^2+\rho'(\vartheta)^2}\,d\vartheta=\sqrt{\vartheta^8+16\vartheta^6}\,d\vartheta=\vartheta^3\sqrt{\vartheta^2+16}\,d\vartheta$$

$$L = \int_\gamma ds = \int_0^\pi \vartheta^3 \sqrt{\vartheta^2 + 16}\, d\vartheta =$$

$$\left[\sqrt{\vartheta^2 + 16} = t; \vartheta^2 + 16 = t^2; \vartheta^2 = t^2 - 16; \vartheta\, d\vartheta = t\, dt\right]$$

$$= \int_4^{\sqrt{\pi^2+16}} (t^2 - 16)t^2 dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{16}{3}t^3\right]_4^{\sqrt{\pi^2+16}} =$$

$$= (\pi^2 + 16)^{3/2}\left(\frac{\pi^2 + 16}{5} - \frac{16}{3}\right) - 64\left(\frac{16}{5} - \frac{16}{3}\right) =$$

$$= (\pi^2 + 16)^{3/2}\left(\frac{\pi^2}{5} - \frac{32}{15}\right) + \frac{64 \cdot 32}{15}.$$

2.57.

a. $$f'(x) = \mathrm{Sh}2x$$

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 x}\, dx = \mathrm{Ch}2x\, dx.$$

b.

$$L = \int_{-\log 2}^{\log 2} \mathrm{Ch}2x\, dx = 2\int_0^{\log 2} \mathrm{Ch}2x\, dx = [\mathrm{Sh}2x]_0^{\log 2} = \mathrm{Sh}(2\log 2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}.$$

c. Per simmetria, $\overline{x} = 0$.

$$\overline{y} = \frac{1}{L}\int_\gamma y\, ds = \frac{8}{15}\int_{-\log 2}^{\log 2} \frac{1}{2}\mathrm{Ch}2x \cdot \mathrm{Ch}2x\, dx = \frac{8}{15}\int_0^{\log 2} \mathrm{Ch}^2 2x\, dx =$$

$$= \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{4}[\mathrm{Ch}2x\mathrm{Sh}2x + 2x]_0^{\log 2} = \frac{2}{15}\left(\frac{1}{2}\left(4 + \frac{1}{4}\right)\frac{15}{8} + 2\log 2\right) =$$

$$= \frac{17}{32} + \frac{4}{15}\log 2.$$

2.3. Applicazioni fisiche

Deduzione delle leggi di Keplero dalle leggi di Newton

Contesto. Nel 1608, 1609 e 1619, rispettivamente, Keplero formulò le sue tre leggi sul moto planetario. Si trattava della prima descrizione cinematica del moto dei pianeti che fosse al tempo stesso quantitativamente esatta e matematicamente semplice. I sistemi sia tolemaico che copernicano infatti offrivano entrambi la possibilità di calcolare le posizioni dei pianeti in buon accordo con le osservazioni, ma a prezzo di una pesante complicazione matematica, conseguenza del voler descrivere le traiettorie a partire da circonferenze (e quindi "epicicli") anziché ellissi. Le leggi di Keplero sono queste:

Prima legge. L'orbita descritta da un pianeta attorno al sole è un'ellisse, col sole in uno dei fuochi.

Seconda legge. Il raggio vettore che unisce il sole a un pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.

Terza legge. I quadrati dei tempi di rivoluzione dei vari pianeti intorno al sole sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle rispettive orbite.

Newton, nella sua grande opera del 1687, formulò le leggi fondamentali della dinamica e la legge di gravitazione universale, creando un quadro coerente all'interno del quale le leggi di Keplero si possono dedurre matematicamente come particolari applicazioni. Nella teoria di Newton il moto dei pianeti riceve per la prima volta non solo una descrizione, ma qualcosa di più simile ad una vera *spiegazione causale*: tutto è conseguenza della legge di gravitazione universale, che assegna la forza che il sole esercita su un pianeta, e della legge fondamentale della dinamica, che fornisce l'accelerazione del pianeta, nota la sua massa e la forza che agisce su di esso.

Presentiamo ora una deduzione matematica delle tre leggi di Keplero a partire dalle leggi di Newton (legge di gravitazione universale e legge fondamentale della dinamica). Come si vedrà è coinvolta molta matematica studiata in questo capitolo, ed anche altra di carattere più algebrico-geometrico.

Consideriamo un punto materiale di massa m (es. un pianeta) posto nel campo gravitazionale di un punto materiale di massa M molto più grande (es. il sole) posta nell'origine. In base alla legge di gravitazione universale, sulla massa m agirà una forza attrattiva

$$\underline{F} = -\frac{GMm}{|\underline{r}|^3}\underline{r}$$

e quindi, in base alla seconda legge della dinamica, l'accelerazione della massa m

sarà

$$\underline{r}'' = \frac{\underline{F}}{m} = -\frac{GM}{|\underline{r}|^3}\underline{r}. \tag{1}$$

Questo è un sistema di 3 equazioni differenziali non lineari del second'ordine. Non lo sappiamo risolvere determinando la legge oraria $\underline{r}(t)$, ma mostreremo come dall'equazione vettoriale (1) si possano dedurre le 3 leggi di Keplero sul moto dei pianeti.

Il fatto che sia lecito, ai fini del calcolo che stiamo facendo, considerare queste masse come punti materiali anziché come corpi estesi è un ulteriore problema, a cui si può rispondere utilizzando il calcolo integrale: affronteremo effettivamente questo problema nel capitolo sul calcolo integrale, e mostreremo che questo modo di procedere è effettivamente giustificato. Per ora prendiamolo per buono e procediamo come segue.

La deduzione procede in vari passi.

1. Dimostriamo anzitutto che

$$\underline{r} \times \underline{r}' = \underline{h} = \text{costante}. \tag{2}$$

Infatti derivando:

$$(\underline{r} \times \underline{r}')' = \underline{r}' \times \underline{r}' + \underline{r} \times \underline{r}'' = 0 \text{ perché:}$$

il primo addendo è zero perché il prodotto vettoriale di un vettore con se stesso è sempre nullo; il secondo è zero perché i due vettori $\underline{r}, \underline{r}''$ sono tra loro paralleli, come si legge dalla (1). Perciò il vettore $\underline{r} \times \underline{r}'$ è costante perché ha derivata nulla rispetto al tempo.

La (2) implica che il moto della massa m avviene in un piano, quello passante per l'origine e perpendicolare al vettore $\underline{h}$. Sceglieremo in seguito un sistema di riferimento opportuno, per ora solo l'origine è fissato (nel punto della massa M).

2. Vogliamo ora riformulare la (1) in un modo più semplice, che elimini il denominatore $|\underline{r}|^3$. Introduciamo il versore

$$\underline{u}(t) = \text{vers}(\underline{r}(t)) \text{ e poniamo } r(t) = |\underline{r}(t)|, \text{ per cui si ha:}$$

$$\underline{r} = r\underline{u}.$$

Ora calcoliamo:

$$\underline{r}'' \times \underline{h} = -\frac{GM}{|\underline{r}|^3}\underline{r} \times (\underline{r} \times \underline{r}') = -\frac{GM}{r^3} r\underline{u} \times [r\underline{u} \times (r\underline{u}' + r'\underline{u})] =$$

$$= -\frac{GM}{r^2}\underline{u} \times (r\underline{u} \times r\underline{u}') = -GM\underline{u} \times (\underline{u} \times \underline{u}'). \tag{3}$$

3. Ora ricordiamo che poiché $\underline{u}$ ha modulo costante (perché è un versore), $\underline{u}$ e $\underline{u}'$ sono ortogonali[22], perciò

$$\underline{u}, \underline{u}', \underline{u} \times \underline{u}' \text{ sono una terna destrorsa, quindi}$$

$$\underline{u} \times (\underline{u} \times \underline{u}') = -\underline{u}'$$

e la (3) si riscrive

$$\underline{r}'' \times \underline{h} = GM\underline{u}'. \tag{4}$$

4. La (4) consente di abbassare l'ordine dell'equazione differenziale di partenza, infatti essendo $\underline{h}$ costante si ha

$$\underline{r}'' \times \underline{h} = (\underline{r}' \times \underline{h})' \text{ perciò}$$

$$(\underline{r}' \times \underline{h})' = GM\underline{u}'$$

e quindi

$$\underline{r}' \times \underline{h} = GM(\underline{u} + \underline{c}) \tag{5}$$

con $\underline{c}$ vettore costante (di integrazione).

5. Vogliamo ora scegliere il sistema di riferimento in modo opportuno e dedurre dall'equazione differenziale precedente la traiettoria del moto.

Scegliamo l'asse z coincidente con il vettore $\underline{h}$, in modo che il moto si svolge nel piano xy. Poiché sia $\underline{u}$ che $\underline{r}' \times \underline{h}$ si trovano in questo piano, per differenza vi sta anche $\underline{c}$. Scegliamo l'asse delle x coincidente con il vettore $\underline{c}$, e introduciamo nel piano xy le coordinate polari, perciò $r(t)$ è ρ, mentre ϑ è l'angolo formato da $\underline{c}$ con $\underline{u}$.

Moltiplichiamo ora scalarmente per $\underline{r}$ ambo i membri della (5):

$$\underline{r} \cdot (\underline{r}' \times \underline{h}) = GM\underline{r} \cdot (\underline{u} + \underline{c}) = GM(r + rc\cos\vartheta)$$

con $c = |\underline{c}|$, mentre a primo membro (proprietà circolare del prodotto misto)

[22] v. [BPS2], cap.2, §6.1, Proposizione 2.5.

$$\underline{r} \cdot (\underline{r}' \times \underline{h}) = \underline{h} \cdot (\underline{r} \times \underline{r}') = \underline{h} \cdot \underline{h} = |\underline{h}|^2 = h^2,$$

per definizione del vettor $\underline{h}$. Perciò abbiamo ottenuto

$$GM(r + r\text{ccos}\vartheta) = h^2,$$

$$r = \frac{h^2}{GM(1 + c\text{cos}\vartheta)} \tag{6}$$

che è l'equazione di una conica in forma polare. Dal fatto che sia $c < 1$, $= 1$, > 1 dipende il fatto che la conica sia un'iperbole, parabola, ellisse, rispettivamente. Ricordiamo che c è una costante di integrazione, dipende perciò dalle condizioni iniziali. Il calcolo fatto fin qui vale infatti per qualsiasi corpo orbitante intorno al sole, non necessariamente un pianeta (potrebbe ad es. essere una cometa che passa una volta sola vicino al sole su un'orbita iperbolica e poi se ne allontana per sempre); se il corpo orbitante è un pianeta, e quindi l'orbita è chiusa, l'orbita sarà necessariamente un'ellisse, con un fuoco nell'origine[23]. Abbiamo quindi ottenuto la *prima legge di Keplero.*

Notiamo che quella ottenuta è la descrizione geometrica della traiettoria, non la descrizione cinematica della legge oraria: abbiamo ottenuto $r(\vartheta)$, non $\underline{r}(t)$.

6. Deduciamo ora la seconda legge di Keplero. Per questo torniamo alla (2). Notiamo che, per il significato geometrico del prodotto vettoriale,

$$\frac{1}{2}|\underline{r} \times \underline{r}'|$$

è l'area del triangolo aventi due lati $\underline{r}, \underline{r}'$; ossia, essendo $\underline{r}' = d\underline{r}/dt$, è la velocità istantanea di variazione dell'area del triangolo di lati $\underline{r}, d\underline{r}$, e questa (v. fig. 2.25) è proprio l'area $S(t)$ spazzata dal raggio vettore $\underline{r}$.

Perciò abbiamo:

$$\frac{dS}{dt} = 2|\underline{h}| = \text{costante}, \tag{7}$$

che è la *seconda legge di Keplero*: il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali, ossia la velocità areolare dS/dt è costante.

[23] v. [BPS2], cap.2, §3.5, "Coniche in forma polare".

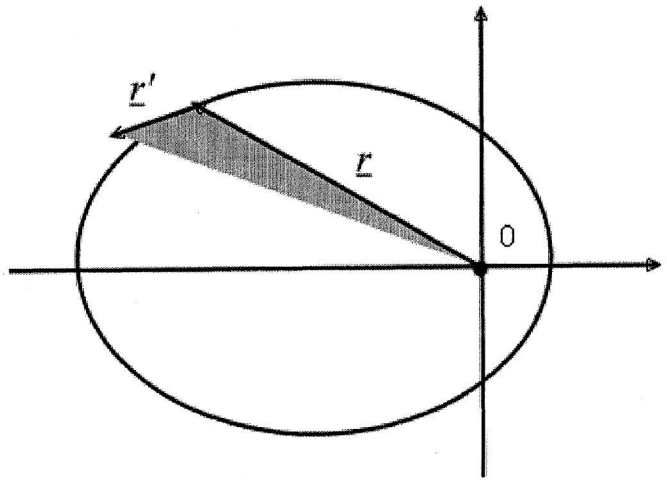


Fig. 2.25.

7. Deduciamo infine la terza legge di Keplero, che mette in relazione il periodo di rivoluzione attorno al sole con il semiasse maggiore dell'orbita. Dalla (7) otteniamo, integrando su tutto il periodo $[0, T]$:

$$\text{Area ellisse} = 2hT$$

con $h = |\underline{h}|$. L'area dell'ellisse vale πab, dove a, b sono i semiassi. (Questo è un risultato che si può ottenere col calcolo integrale in una variabile[24]). Quindi

$$T = \frac{\pi ab}{2h}. \tag{8}$$

Il problerma è esprimere la costante h in funzione di parametri noti, in particolare dei semiassi dell'ellisse. La (6) suggerisce di ricavare h in funzione delle costanti G, M e di qualche lunghezza legata all'ellisse, sostituendo a ϑ qualche valore notevole. Per sbarazzarci della costante di integrazione c (che non sappiamo esprimere in funzione di altri parametri), imponiamo $\vartheta = \pi/2$, che dà

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{h^2}{GM}. \tag{9}$$

Il numero $r\left(\frac{\pi}{2}\right)$ è la lunghezza del segmento che si ottiene tracciando, da un fuoco dell'ellisse, il segmento parallelo all'asse minore, finché taglia la curva. E' chiaro che questa è una grandezza legata alla geometria dell'ellisse, che dev'essere

[24] v.[BPS1], cap.6, §5.5, Esempio 5.27.

possibile esprimere in funzione dei semiassi a, b dell'ellisse stesso (v. fig. 2.26)

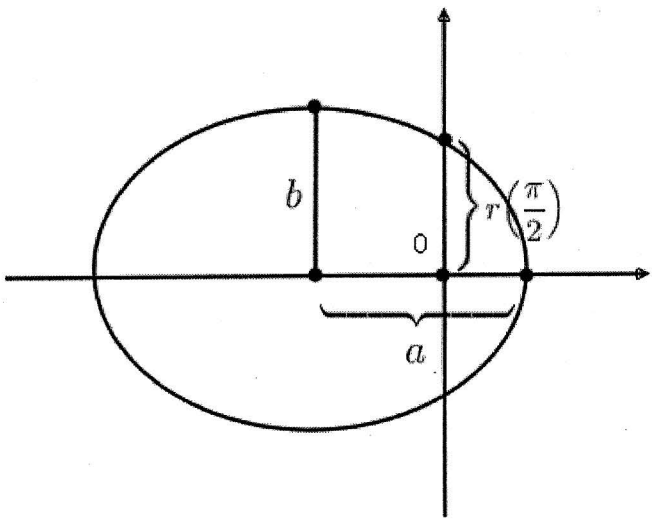


Fig. 2.26.

Per far questo occorre usare però non l'equazione dell'ellisse in forma polare, ma l'equazione cartesiana dell'ellisse, e la proprietà caratteristica dei fuochi dell'ellisse.

Dall'equazione cartesiana dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(ora l'origine è nel centro dell'ellisse, non in un fuoco) leggiamo che se $\pm x_0$ sono le ascisse dei fuochi, $r\left(\frac{\pi}{2}\right)$ è l'ordinata del punto di intersezione dell'ellisse con la retta $x = x_0$, perciò

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}. \tag{10}$$

D'altro canto, la proprietà caratteristica dei fuochi dell'ellisse ("l'ellisse è il luogo dei punti per cui la somma delle distanze dai fuochi è costante") otteniamo, uguagliando la somma delle distanze di $(a, 0)$ dai due fuochi alla somma delle

distanza di $(0, b)$ dai due fuochi (v. fig. 2.27),

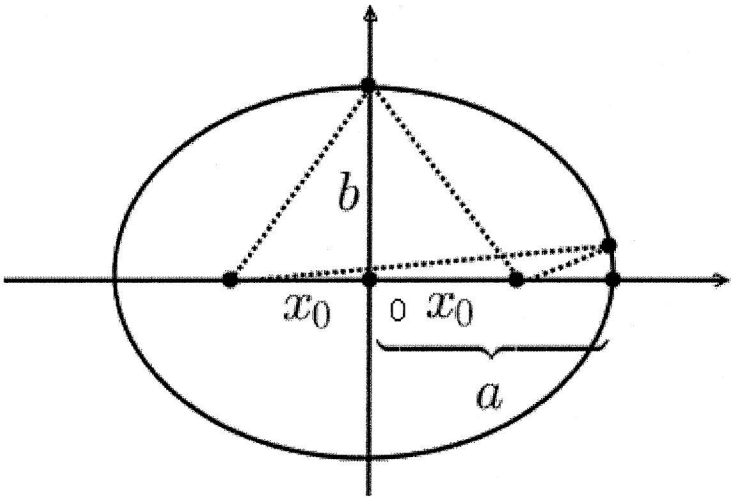


Fig. 2.27.

$$(a + x_0) + (a - x_0) = 2\sqrt{b^2 + x_0^2}$$

$$a = \sqrt{b^2 + x_0^2}$$

$$x_0^2 = a^2 - b^2. \tag{11}$$

Questa è la relazione che ci mancava. Infatti sostituendo la (11) nella (10) si ha

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = b\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)} = b\sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b^2}{a},$$

che sostituita nella (9) dà

$$h^2 = GM\frac{b^2}{a} \tag{12}$$

che sostituita nella (8) (dopo aver elevato al quadrato ambo i membri della (8)) dà

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{4h^2} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{4GM\frac{b^2}{a}} = \frac{\pi^2}{4GM}a^3,$$

e infine
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{4GM}{\pi^2}, \tag{13}$$

che è la terza *legge di Keplero*, che esprime la costanza del rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'ellisse e il quadrato del periodo di rivoluzione.

E' curioso il fatto che la geometria dell'ellisse entri in questa formula solo mediante il *semiasse maggiore* (e non entrambi). Questo significa che, fissato il semiasse maggiore, se rimpiccioliamo il semiasse minore il periodo non cambia; d'altro canto l'orbita si è accorciata, dunque questo è possibile solo se il pianeta ha diminuito la propria velocità. Difatti la (12) ci dice che rimpicciolendo il semiasse *minore*, la velocità areolare diminuisce.

Osservazioni. Notiamo quali sono gli strumenti matematici utilizzati in questa deduzione:

- Calcolo vettoriale (algebrico): proprietà del prodotto scalare, vettoriale, misto, significato geometrico del prodotto vettoriale.
- Calcolo differenziale vettoriale: regole di derivazione del prodotto scalare e vettoriale, ortogonalità di $\underline{u}$ e $\underline{u}'$ se $\underline{u}(t)$ ha modulo costante.
- Proprietà dell'ellisse: abbiamo usato la proprietà caratteristica dei fuochi dell'ellisse (definizione metrica di ellisse), l'equazione dell'ellisse in forma polare (che si basa su una *diversa* caratterizzazione metrica dell'ellisse, mediante fuoco e direttrice), l'equazione cartesiana dell'ellisse, e la formula per l'area.

Notiamo anche che le leggi di Keplero, nella forma in cui le abbiamo dedotte dalle leggi di Newton, contengono *più informazioni quantitative* rispetto a quelle che emergono dalla loro usuale formulazione "verbale". Questo è particolarmente evidente per la terza legge, che nella formulazione usuale (che è quella originaria) afferma che il rapporto a^3/T^2 è costante, mentre la deduzione dalle leggi di Newton specifica *quanto vale la costante*. La conseguenza è che mentre nella formulazione originaria la legge consente solo di fare raffronti tra pianeti diversi (ad esempio, noti T e a per il pianeta A e a per il pianeta B, si ricava T per il pianeta B), questa formulazione ha un effettivo contenuto predittivo anche su un singolo pianeta (ad es., noto a si ricava T).

Cap. 3. Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

3.1. Grafici e insiemi di livello

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 3, §1.

Si considerino le seguenti funzioni reali di due variabili. (Sono funzioni molto semplici che lo studente ha già -o potrebbe avere già- incontrato). Ragionando sull'espressione analitica, ed eventualmente tracciando alcune linee di livello, immaginare e cercare di tracciare il grafico della funzione. Controllare quindi la soluzione, cercando di capire perché il grafico è quello che è.

3.1. $f(x,y) = x^2 + y^2$

3.2. $f(x,y) = x^2 - y^2$

3.3. $f(x,y) = 2 + 3y - x$

3.4. $f(x,y) = xy$

3.5. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

3.6. $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$

3.7. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

3.8. $f(x,y) = x^4 + y^4$

3.9. $f(x,y) = \sin x$

3.10. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

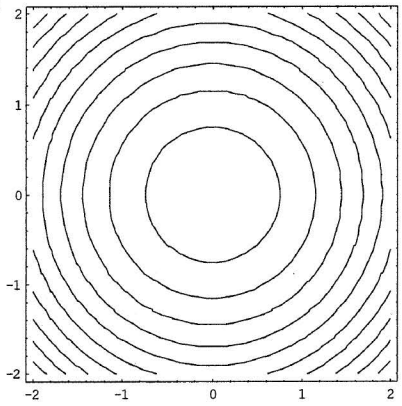
3.11. $f(x,y) = e^x \sin y$

Si considerino i grafici di linee di livello riportati qui di seguito. Per ciascuno di essi, si dica quale funzione descrivono, scegliendo una delle seguenti:

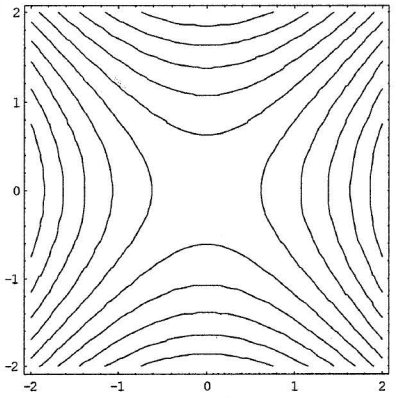
a.	xy	*b.*	xe^y
c.	$\sqrt{x^2 + y^2}$	*d.*	$x + 2y - 3$
e.	$x^2 - y^2$	*f.*	$\cos y$
g.	$e^{-x^2-y^2}$	*h.*	$x^2 + y^2$
i.	$\sin x \sin y$	*l.*	$\cos x$

Grafici delle linee di livello:

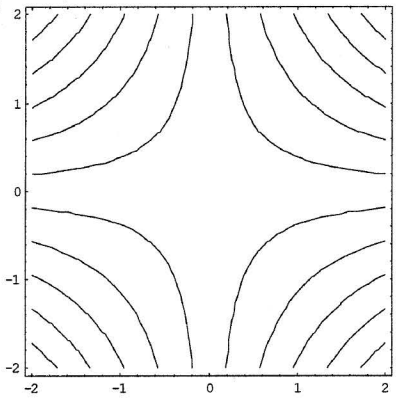
3.12.★



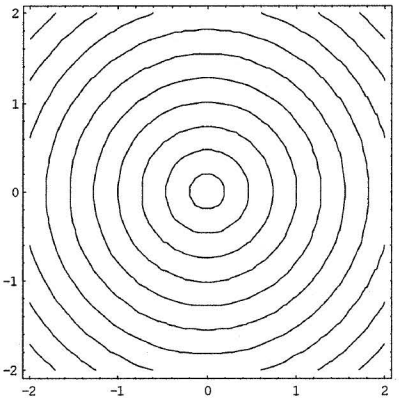
3.13.★



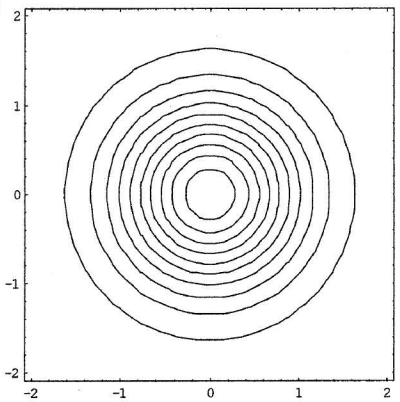
3.14.★



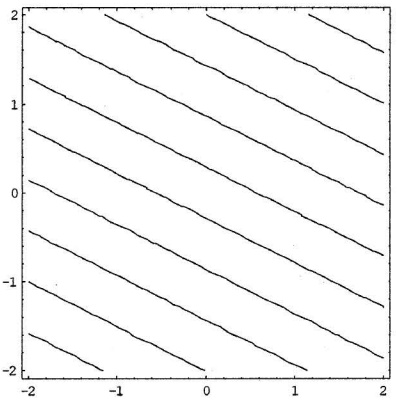
3.15.★



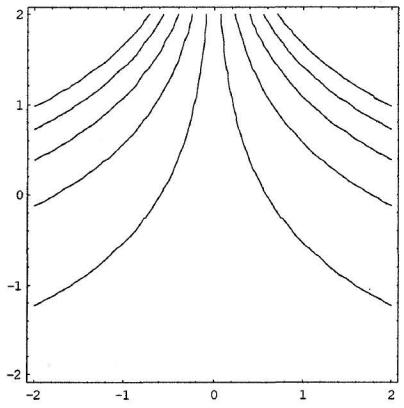
3.16.★



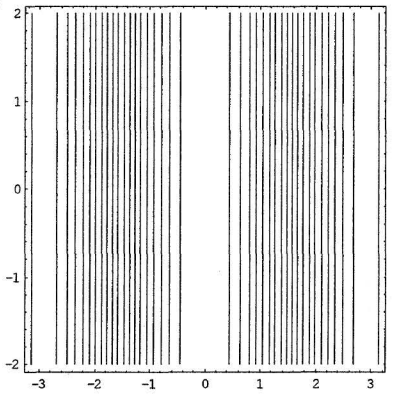
3.17.★



3.18.★

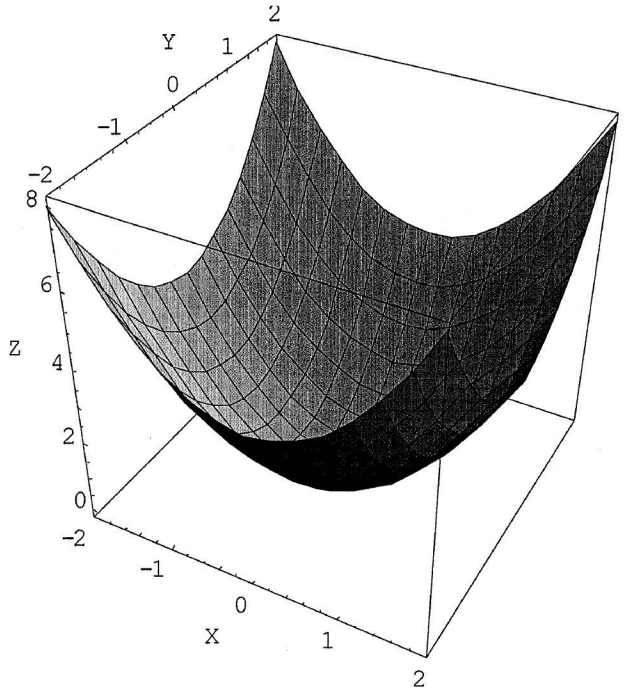


3.19.★

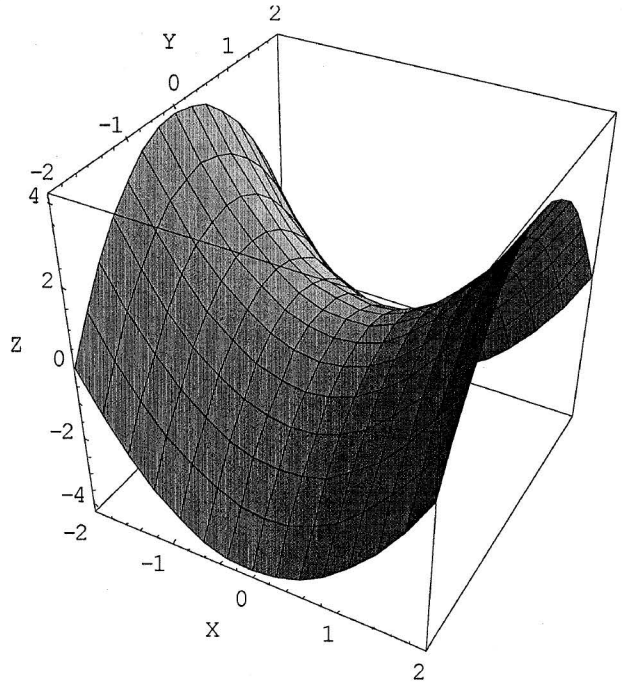


Soluzioni § 3.1

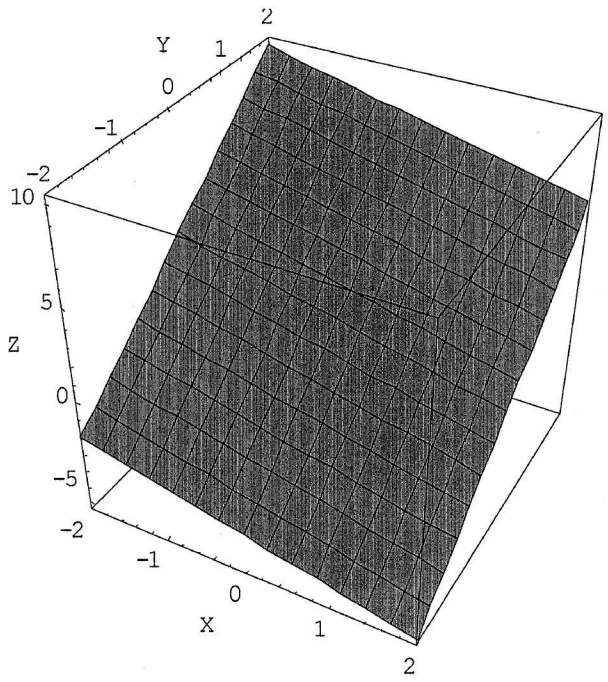
3.1. $x^2 + y^2$



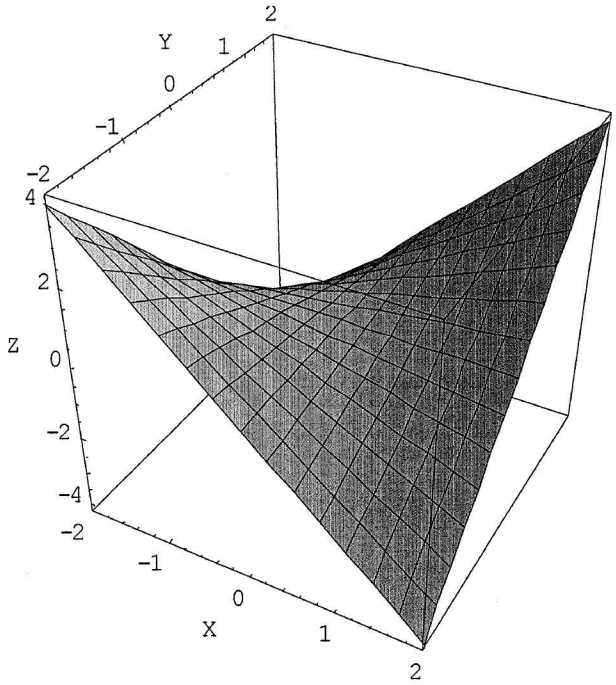
3.2. $x^2 - y^2$



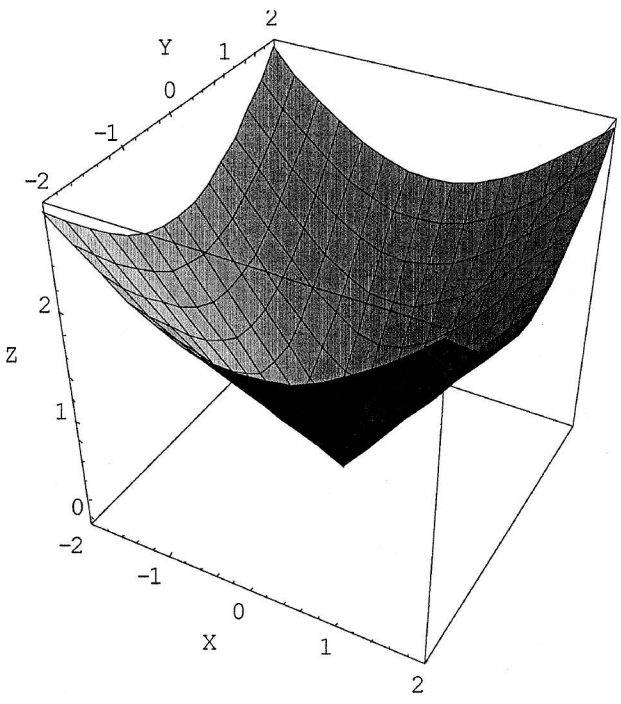
3.3. $2 + 3y - x$



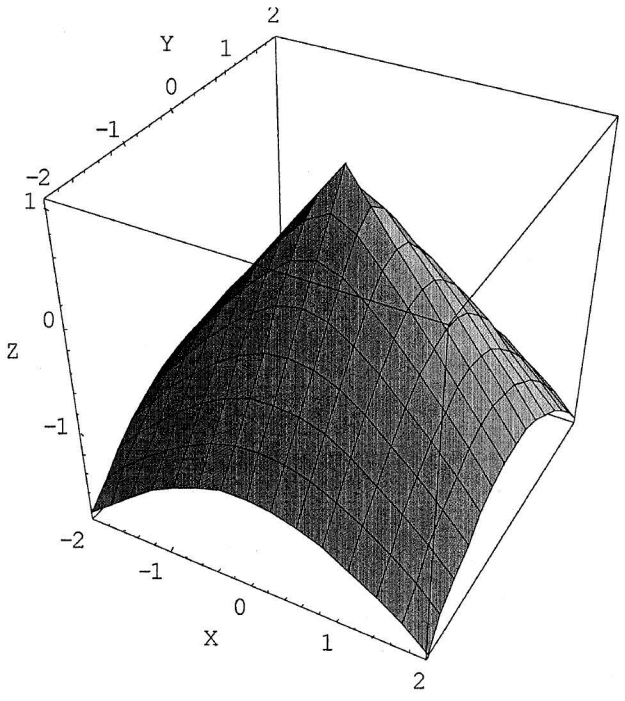
3.4. xy



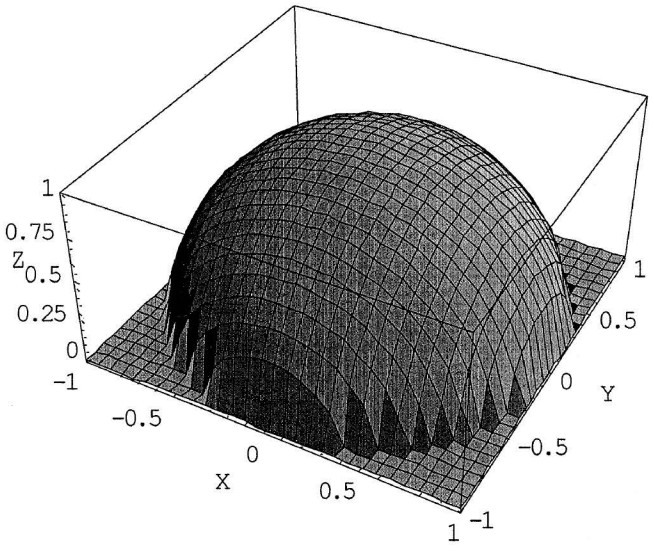
3.5. $\sqrt{x^2+y^2}$



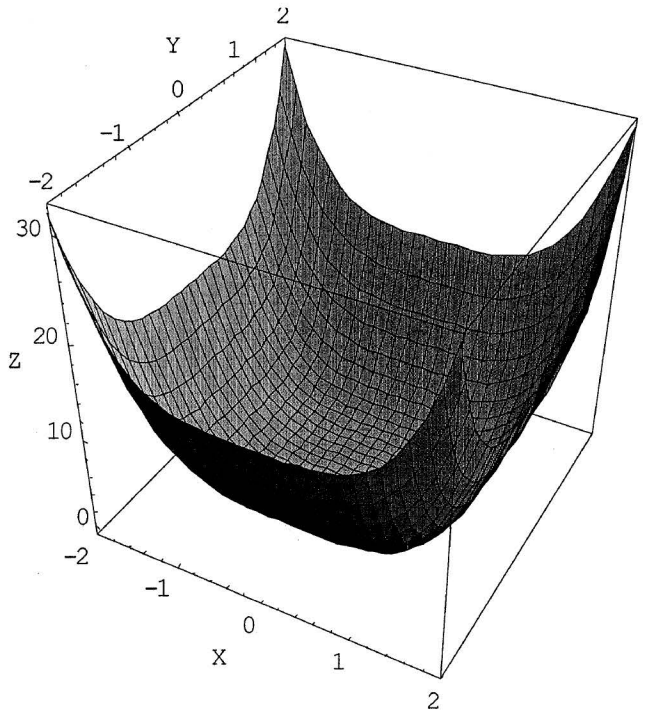
3.6. $1-\sqrt{x^2+y^2}$



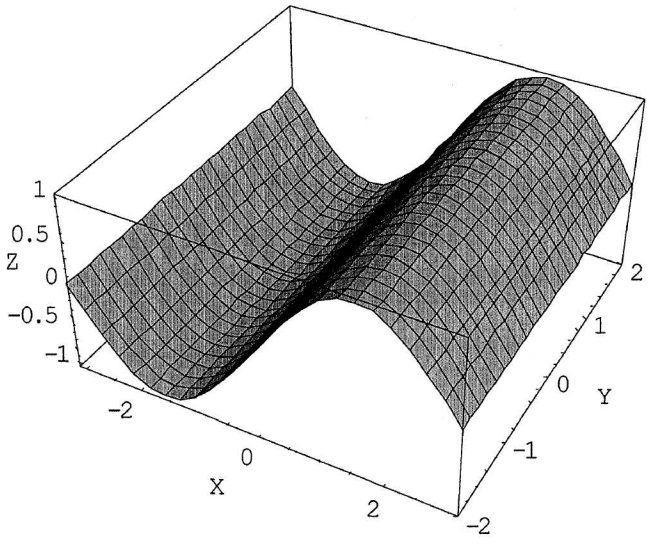
3.7. $\sqrt{1-x^2-y^2}$



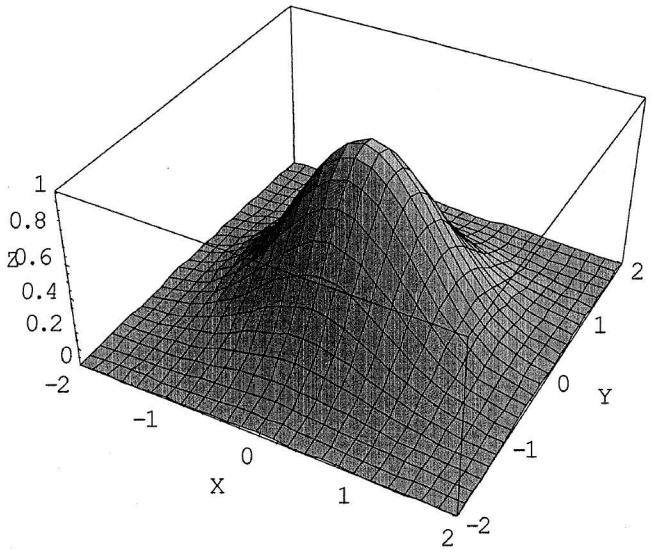
3.8. x^4+y^4



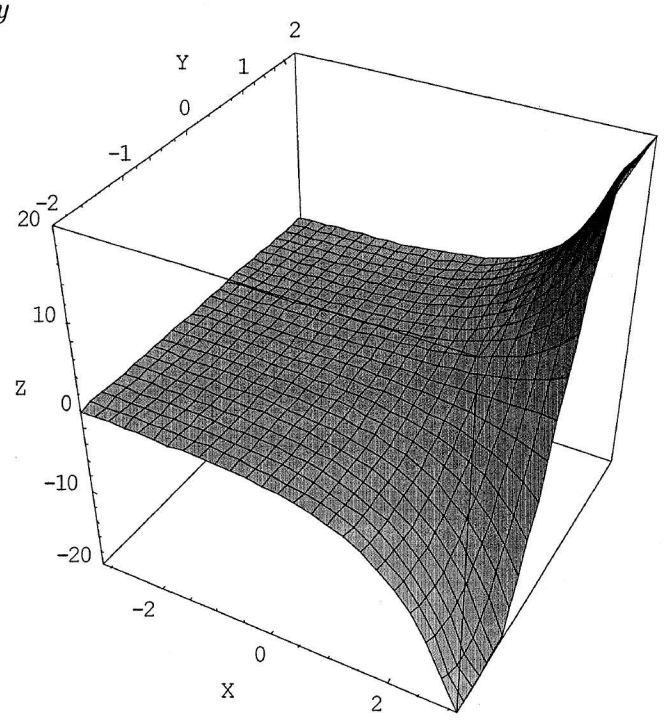
3.9. $\sin x$



3.10. $e^{-x^2-y^2}$



3.11. $e^x \sin y$



3.12. *h.* $x^2 + y^2$

Le linee di livello sono circonferenze, perciò la funzione è radiale; allontanandosi dall'origine le linee di livello diventano più vicine, perciò il grafico della funzione diventa più ripido. Tra le funzioni proposte, la h è l'unica con queste carattaristiche.

3.13. *e.* $x^2 - y^2$

Le linee di livello sono iperboli aventi asintoti $y = \pm x$.

3.14. *a.* xy

Le linee di livello sono iperboli aventi per asintoti gli assi coordinati.

3.15. *c.* $\sqrt{x^2 + y^2}$

Le linee di livello sono circonferenze, perciò la funzione è radiale, e sono equispaziate, perciò la funzione ha pendenza costante: il grafico è un cono.

3.16. *g.* $e^{-x^2-y^2}$

Le linee di livello sono circonferenze, perciò la funzione è radiale. Le linee sono ravvicinate in una zona intermedia, in cui il grafico della funzione sarà ripido, e scompaiono (cioè sono rade) vicino all'origine e lontano dall'origine: significa che nell'origine la funzione ha un punto di massimo o di minimo e lontano dall'origine il grafico è quasi orizzontale. La superficie Gaussiana "a campana" è l'unica con queste caratteristiche, tra quelle proposte.

3.17. *d.* $x + 2y - 3$

Le linee di livello sono rette parallele ed equispaziate, perciò la superficie è un piano.

3.18. *b.* xe^y

Le linee di livello assomigliano a delle curve esponenziali (se guardiamo l'asse y come asse delle ascisse). Tra le funzioni proposte, la *b* ha proprio questa caratteristica.

3.19. *l.* $\cos x$

Le linee di livello sono rette verticali, perciò la funzione dipende solo dalla variabile x (e non è una funzione lineare perché le linee non sono equispaziate). Tra quelle proposte, questa è l'unica possibilità.

3.2. Limiti e continuità per funzioni di più variabili

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 3, §2.

Esempi introduttivi sui limiti di funzioni di due variabili

Il calcolo dei limiti per funzioni reali di due o più variabili è delicato, perché introduce fenomeni nuovi rispetto a quelli che si presentano nello studio delle funzioni di una variabile. Il primo problema per lo studente è *rendersi conto di qual è il problema.*

I prossimi esempi non sono ancora esempi svolti di calcolo di limiti, ma esempi di situazioni di vario tipo, che vogliono far riflettere su certi fenomeni che si possono presentare in due variabili. Trarremo spunto da questi esempi per fare alcune puntualizzazione di valore generale.

Esempio 3.1. Si considerino i limiti:

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{y+1}\cos x}{x^2+4}; \quad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2};$$

a. La funzione è continua in tutto il piano, perché ottenuta per prodotti e quozienti di funzioni continue, e il denominatore non si annulla mai. Quindi il limite si calcola semplicemente sostituendo il valore del punto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Questo semplice esempio è solo per ricordare che il *problema*, nel calcolo dei limiti in due variabili così come in una variabile, nasce solo quando troviamo qualche *forma di indeterminazione.*

b. Qui siamo in presenza di una forma di indeterminazione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Vogliamo capire cosa succede quando $(x,y) \to (0,0)$. Ma cosa vuol dire studiare la funzione quando (x,y) tende a $(0,0)$? Se pensassimo di imitare i ragionamenti unidimensionali, potremmo pensare ad esempio di far tendere prima la x a zero:

$$\text{per } x \to 0, \quad \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2} \to \frac{y^4}{y^2} = y^2;$$

ora facciamo tendere anche y a zero e abbiamo $y^2 \to 0$. Con questo abbiamo dimostrato, in effetti, che

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}\right)=0.$$

Ma è quello che dovevamo fare? Notiamo che se avessimo fatto tendere a zero prima la y e poi la x avremmo trovato:

$$\text{per } y\to 0,\ \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}\to\frac{x^2}{x^4}=\frac{1}{x^2}$$

e questo per $x\to 0$ tende a $+\infty$. In altre parole:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}\right)=+\infty.$$

In realtà questo limite in due variabili *non esiste*. La conclusione è che:

non è lecito calcolare un limite in due variabili facendo tendere le due variabili al punto limite separatamente, una dopo l'altra,

così $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)$ oppure così $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)$.

Si consideri anche quest'altro possibile ragionamento:

"Per $(x,y)\to(0,0)$, $x^2+y^4\sim x^2$, perciò $\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}\sim\dfrac{x^2}{x^4+y^2}$". Errato!!

Questa stima asintotica, che può essere suggerita dall'imitazione meccanica di procedure usate nei limiti in una variabile ("la seconda potenza prevale sulla quarta potenza, per $x\to 0$") non è lecita, perché a priori non c'è nessuna relazione tra x e y, quindi non c'è ragione per affermare che y^4 sia trascurabile rispetto a x^2.

In un limite per $(x,y)\to(0,0)$ *le variabili x, y sono infinitesimi indipendenti*, non possiamo confrontare una potenza di x con una potenza di y. Per questo e per altri motivi,

non faremo mai uso di stime asintotiche su funzioni di più variabili.

Esempio 3.2. Si considerino i limiti:

$$(a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4};\quad (b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2};$$

a. Forma di indeterminazione $[0/0]$.

Possiamo vedere cosa succede facendo tendere (x, y) a $(0, 0)$ lungo una qualsiasi retta $y = mx$:

$$f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2} \to 0 \text{ per } x \to 0.$$

Dunque avvicinandoci all'origine da qualunque direzione[1] otteniamo limite zero. Verrebbe da concludere che il limite è zero. Tuttavia *questa conclusione non è lecita*:

il comportamento della funzione lungo alcune o tutte le rette che si avvicinano a (x_0, y_0) non permette di concludere l'esistenza del limite per $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

In realtà si dimostra che questo limite non esiste. Ce ne si può rendere conto osservando ad esempio che lungo la curva $x = y^2$ si ha:

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2},$$

perciò avvicinandoci all'origine lungo questa curva la funzione ha valore costante $1/2$, dunque non tende a zero.

Non saremmo autorizzati a concludere l'esistenza del limite nemmeno se sondassimo il comportamento della funzione lungo alcune (o numerose) curve diverse dalle rette. Si osservi che il procedimento criticato nell'Esempio 3.1.*b*, consistente nel calcolare

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right)$$

dal punto di vista geometrico significa far tendere il punto (x, y) al punto $(0, 0)$ lungo la spezzata che unisce (x, y) a $(x, 0)$ e poi a $(0, 0)$. (v. Fig.3.1)

Analogamente l'altro limite iterato corrisponde all'altra spezzata. Anche queste sono solo *particolari* curve, che non descrivono il modo *generico* in cui $(x, y) \to (0, 0)$.

---

[1] Per la verità le rette $y = mx$ escludono *una* direzione, quella della retta $x = 0$; tuttavia lungo questa retta la funzione è identicamente nulla, quindi l'affermazione fatta è vera.

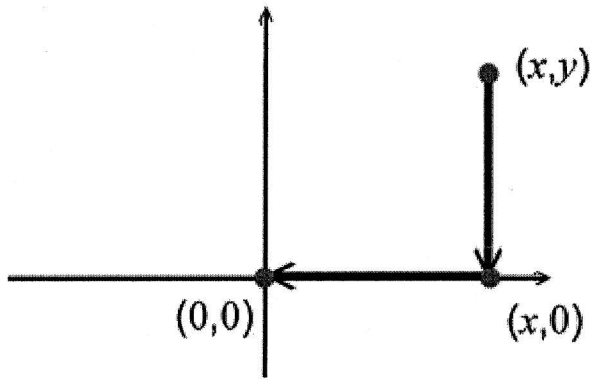


Fig. 3.1.

Concetti e tecniche di base sul calcolo dei limiti in due variabili

Come si fa dunque a dimostrare rigorosamente che un limite in più variabili (che dà luogo a una forma di indeterminazione) esiste o non esiste? Lo studente è invitato a studiare con attenzione quanto illustrato sul testo: [BPS2], cap.3., §2.2, e quindi proseguire con le prossime domande di verifica della comprensione teorica, seguite dagli esempi svolti e dagli esercizi.

Esercizi (domande di comprensione della teoria)

Per ciascuna affermazione, dire se è vera o falsa. (Possono essercene più di una vere). Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere le successive.

3.20. Si voglia calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Supponiamo di aver verificato che per ogni retta $y = mx$ passante per l'origine si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = l.$$

Allora:

a. si può concludere che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ esiste e vale l

b. si può concludere che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ se esiste vale l

3.21. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e sia $f(\rho, \vartheta)$ la stessa funzione scritta in coordinate polari. Se $\forall \vartheta \in [0, 2\pi)$

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\vartheta) = 0,$$

allora:

a. esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

b. se esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, allora tale limite è zero (ma potrebbe non esistere)

c. è possibile che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ esista e sia diverso da zero

3.22. Si voglia calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

La "tecnica delle restrizioni" di f a curve può essere usata:

a. per dimostrare che il limite esiste (ma non che non esiste)

b. per dimostrare che il limite non esiste (ma non che esiste)

c. per dimostrare sia che il limite esiste sia che il limite non esiste

3.23. Si voglia calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

La "tecnica delle maggiorazioni di f mediante funzioni radiali" può essere usata:

a. per dimostrare che il limite esiste (ma non che non esiste)

b. per dimostrare che il limite non esiste (ma non che esiste)

c. per dimostrare sia che il limite esiste sia che il limite non esiste

3.24. Si voglia calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Si supponga di aver dimostrato che:

a. $f(x,y) \leq 2xy^2$. Allora il limite esiste e vale zero.

b. $|f(x,y)| \leq |2xy^2|$. Allora il limite esiste e vale zero.

c. $|f(x,y)| \leq \left|\frac{2}{x^2}\right|$. Allora il limite esiste ed è $+\infty$.

d. $|f(x,y)| \leq 2^{x^2y}$. Allora il limite esiste e vale 1.

Esempi svolti

Esempio 3.3. Calcolare il seguente limite, ossia: dimostrare che il limite esiste e vale ℓ, oppure dimostrare che non esiste, applicando criteri o teoremi studiati.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(2y^2+x^3)}{x^4+y^2}.$$

E' una forma di indeterminazione $[0/0]$. Per cominciare a farci qualche idea, esaminiamo le restrizioni della funzione lungo le rette $y = mx$:

$$f(x,mx) = \frac{x^2(2x^2+x^3)}{x^4+x^2} = \frac{2x^2+x^3}{x^2+1} \sim 2x^2 \to 0.$$

Pertanto il limite della funzione, *se esiste*, vale zero.[2] Cerchiamo di dimostrare che esiste con la *tecnica della maggiorazione mediante una funzione radiale infinitesima* (v. [BPS2], cap.3, §2.2).

Passando in coordinate polari si ha (una spiegazione dettagliata dei prossimi passaggi sarà data nel box posto al termine dell'esempio):

$$|f(\rho,\vartheta)| = \left|\frac{\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta(2\rho^2\sin^2\vartheta+\rho^3\cos^3\vartheta)}{\rho^4\cos^4\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta}\right| =$$

$$= \left|\frac{2\rho^2\cos\vartheta\sin^3\vartheta+\rho^3\cos^4\vartheta\sin\vartheta}{\rho^2\cos^4\vartheta+\sin^2\vartheta}\right| \le \frac{2\rho^2|\cos\vartheta\sin^3\vartheta|}{\rho^2\cos^4\vartheta+\sin^2\vartheta} + \frac{\rho^3\cos^4\vartheta|\sin\vartheta|}{\rho^2\cos^4\vartheta+\sin^2\vartheta} \le$$

$$\le \frac{2\rho^2|\cos\vartheta\sin^3\vartheta|}{\sin^2\vartheta} + \frac{\rho^3\cos^4\vartheta|\sin\vartheta|}{\rho^2\cos^4\vartheta} = 2\rho^2|\cos\vartheta\sin\vartheta| + \rho|\sin\vartheta| \le$$

$$\le 2\rho^2+\rho.$$

L'ultima funzione trovata è una maggiorante radiale infinitesima; *perciò il limite esiste e vale zero.*

---

[2] Nel passaggio qui sopra abbiamo fatto una stima asintotica. Questo non è in contrasto con quanto dichiarato negli esempi introduttivi ("non useremo mai il simbolo di asintotico su funzioni di più variabili") in quanto stiamo usando la stima asintotica nello studio di una *restrizione di* f, che *è una funzione di una sola variabile.* Lo faremo spesso.

Tecniche standard delle maggiorazioni.

L'esempio precedente ci dà l'occasione per puntualizzare alcuni fatti standard che si usano nelle maggiorazioni, e con cui lo studente può non essere familiare. Commentiamo quindi i vari passaggi con cui si è maggiorato $f(\rho, \vartheta)$.

Scritta f in coordinate polari ed eseguita la semplificazione algebrica per ρ^2 (prime due uguaglianza) si applica la disuguaglianza triangolare:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

come segue. Prima si spezza la frazione (dentro il modulo) come somma di due addendi, poi si applica la disuguaglianza triangolare:

$$\left|\frac{2\rho^2\cos\vartheta\sin^3\vartheta + \rho^3\cos^4\vartheta\sin\vartheta}{\rho^2\cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta}\right| = \left|\frac{2\rho^2\cos\vartheta\sin^3\vartheta}{\rho^2\cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta} + \frac{\rho^3\cos^4\vartheta\sin\vartheta}{\rho^2\cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{2\rho^2\cos\vartheta\sin^3\vartheta}{\rho^2\cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta}\right| + \left|\frac{\rho^3\cos^4\vartheta\sin\vartheta}{\rho^2\cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta}\right| =$$

$$= \frac{2\rho^2|\cos\vartheta\sin^3\vartheta|}{\rho^2\cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta} + \frac{\rho^3\cos^4\vartheta|\sin\vartheta|}{\rho^2\cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta}.$$

L'ultima uguaglianza segue dal riscrivere opportunamente il modulo dei quozienti: nel nostro caso il denominatore è sempre positivo, quindi si può lasciare il modulo al solo numeratore, anzi ai soli fattori del numeratore che hanno segno variabile (ρ e potenze pari di $\cos\vartheta$ sono già ≥ 0). Ora si fa un'altra maggiorazione, di questo tipo:

se $a, b, c \geq 0$, $\qquad \dfrac{a}{b+c} \leq \dfrac{a}{b}$ (perché $b + c \geq b$)

in altre parole maggioriamo la frazione sopprimendo uno degli addendi a denominatore. L'addendo da sopprimere è scelto "bene", in modo che *quello che resta si semplifichi col numeratore*. Perciò facciamo

$$\frac{2\rho^2|\cos\vartheta\sin^3\vartheta|}{\rho^2\cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta} \leq \frac{2\rho^2|\cos\vartheta\sin^3\vartheta|}{\sin^2\vartheta} = 2\rho^2|\cos\vartheta\sin\vartheta|$$

(sopprimiamo $\rho^2\cos^4\vartheta$ a denominatore in modo che $\sin^2\vartheta$ si semplifichi col numeratore) e analogamente nella seconda frazione

$$\frac{\rho^3\cos^4\vartheta|\sin\vartheta|}{\rho^2\cos^4\vartheta+\sin^2\vartheta} \leq \frac{\rho^3\cos^4\vartheta|\sin\vartheta|}{\rho^2\cos^4\vartheta} = \rho|\sin\vartheta|$$

(sopprimiamo $\sin^2\vartheta$ a denominatore in modo che $\rho^2\cos^4\vartheta$ si semplifichi col numeratore). Infine, eliminati ormai i denominatori, applichiamo il fatto ovvio che

$$|\cos\vartheta| \leq 1, |\sin\vartheta| \leq 1$$

e otteniamo la maggiorante radiale infinitesima, $2\rho^2+\rho$.

Lo studente è invitato a riflettere con attenzione su questi e simili passaggi che troverà negli esempi svolti, e impadronirsi di queste tecniche standard.[3]

Osservazione 3.1. La "maggiorante radiale infinitesima" dev'essere radiale! E' opportuno un altro commento sull'esempio precedente. Un errore piuttosto comune consiste nell'arrestarsi troppo presto nelle maggiorazioni precedenti, scrivere qualcosa come:

$$|f(\rho,\vartheta)| \leq (\text{dopo vari passaggi}) \leq 2\rho^2|\cos\vartheta\sin\vartheta|+\rho|\sin\vartheta| \to 0 \text{ per } \rho \to 0,$$

e pretendere di concludere che il limite è zero. *Questo è scorretto!* [4] Si noti che non c'è niente di errato nella catena di relazioni scritte qui sopra, ma queste *non provano nulla.* Infatti il criterio che abbiamo studiato richiede di trovare una funzione maggiorante di $|f|$ che sia radiale e infinitesima; ora la funzione

$$g(\rho,\vartheta) = 2\rho^2|\cos\vartheta\sin\vartheta|+\rho|\sin\vartheta|$$

è sì infinitesima, ma non è radiale. L'ultimo semplice passaggio, che consiste nello scrivere

$$2\rho^2|\cos\vartheta\sin\vartheta|+\rho|\sin\vartheta| \leq 2\rho^2+\rho$$

è fondamentale per l'applicabilità del criterio. Non si sottovalutino questi aspetti logici: in questo genere di problemi, importante non è tanto "indovinare" il limite giusto, ma dimostrarlo correttamente.

---

[3] Spiegazioni ancora più dettagliate e approfondimenti si possono trovare nel testo Bramanti, Travaglini: "Matematica. Questione di metodo." Zanichelli 2009, Cap.14. "Maggiorazioni".

[4] Intendiamo dire che è *logicamente scorretto il ragionamento*, anche se la conclusione (esistenza del limite) è vera (ma andrebbe giustificata diversamente).

Esempio 3.4. Lo stesso esercizio si sarebbe potuto svolgere, in alternativa, con maggiorazioni che non fanno uso delle coordinate polari. Si osservino i prossimi passaggi:

$$\left|\frac{xy(2y^2+x^3)}{x^4+y^2}\right| = \left|\frac{2xy^3+x^4y}{x^4+y^2}\right| \le \frac{2|xy^3|}{x^4+y^2} + \frac{x^4|y|}{x^4+y^2}$$

$$\le \frac{2|xy^3|}{y^2} + \frac{x^4|y|}{x^4} = 2|xy| + |y| \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Per il *teorema del confronto*, il limite di partenza esiste e vale zero.

Si noti che qui si è applicato un criterio diverso da quello usato nell'esempio precedente, per provare l'esistenza del limite: l'ultima funzione scritta, $g(x,y) = 2|xy| + |y|$, non è una funzione radiale, ma è evidentemente una funzione continua in tutto il piano, perciò per $(x,y) \to (0,0)$ tende a $g(0,0) = 0$; per il teorema del confronto, anche f tende a zero. Anche questa è un'argomentazione corretta, che fa uso di un diverso teorema.

Esempio 3.5. Calcolare il seguente limite, ossia: dimostrare che il limite esiste e vale ℓ, oppure dimostrare che non esiste, applicando criteri o teoremi studiati.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x\sin^2 y + 3xy^4}{x^2+2y^4}\right)$$

E' una forma di indeterminazione $[0/0]$. Poiché la funzione è somma di due addendi che sembrano avere diverso ordine di grandezza ($x\sin^2 y$ tende a zero come ρ^3, $3xy^4$ tende a zero come ρ^5), spezziamo anzitutto la funzione nella somma dei due addendi e studiamoli separatamente:

$$\frac{x\sin^2 y + 3xy^4}{x^2+2y^4} = \frac{x\sin^2 y}{x^2+2y^4} + \frac{3xy^4}{x^2+2y^4} \equiv f(x,y) + g(x,y).$$

Il secondo addendo sembra essere il più piccolo dei due; cerchiamo di dimostrare che tende a zero:

$$|g(x,y)| = \frac{3|x|y^4}{x^2+2y^4} \le \frac{3|x|y^4}{2y^4} = \frac{3|x|}{2} \to 0$$

quindi per il teorema del confronto $g(x,y) \to 0$. (La funzione $\frac{3|x|}{2}$ è continua e perciò tende a zero nell'origine).

Studiamo ora il limite di f. Il fatto che il numeratore sia di grado complessivo 3 mentre il denominatore è x^2+2y^4 suggerisce che il limite potrebbe non esistere.

Mostriamo che *non esiste il limite*, mediante la *tecnica delle restrizioni*:

$$f(x,x) = \frac{x\sin^2 x}{x^2+2x^4} \sim \frac{x^3}{x^2} = x \to 0;$$

$$f(y^2,y) = \frac{y^2\sin^2 y}{y^4+2y^4} = \frac{y^2\sin^2 y}{3y^4} \to \frac{1}{3}.$$

Poiché lungo curve diverse il limite ha valori diversi, il limite in due variabili *non esiste*. Quindi non esiste neppure il limite di partenza: se $f+g$ avesse limite, poiché g ha limite, anche f avrebbe limite.

Osservazione 3.2. Come si cercano le curve che mostrano la non esistenza del limite? Lo studente si può chiedere "come sia venuto in mente" di provare proprio le curve $y=x$ e $x=y^2$. L'idea è che, se vogliamo mostrare che il limite *non* esiste, dobbiamo trovare due curve che evidenzino due comportamenti diversi della funzione. La retta $y=x$ "pesa" allo stesso modo le due variabili; si ottiene un limite in una variabile in cui il denominatore è x^2+2x^4, quindi asintotico a x^2. Nel denominatore (x^2+2y^4), quindi, *lungo questa retta* prevale x^2 ed è trascurabile $2y^4$; detto altrimenti: rispetto all'infinitesimo campione x, il denominatore è di 2° grado. L'altra curva, $x=y^2$, è scelta in modo da rendere il termine $2y^4$ non trascurabile: osservando gli esponenti delle due potenze a denominatore, scegliamo la curva $x=y^2$ in modo da rendere i due addendi in (x^2+2y^4) di ugual peso; ora rispetto all'infinitesimo campione y il denominatore è di quarto grado. Per illustrare con un altro esempio questa tecnica: se, in un caso simile ma diverso, avessimo un denominatore del tipo (x^6+3y^4), potrebbe essere utile provare le restrizioni $y=x$ e $y=x^{3/2}$. Altri esempi evidenzieranno situazioni ancora diverse.

Esercizi

Calcolare i seguenti limiti, ossia: dimostrare che il limite esiste e vale ℓ, oppure dimostrare che non esiste, applicando criteri o teoremi studiati. Ulteriori esercizi sui limiti si troveranno nel § 3.4.B.

Nota bene. Alcuni dei prossimi esercizi diventano molto facili se si utilizzano alcuni fatti relativi alle funzioni positivamente omogenee (v. [BPS2], cap.3, §9.2). Per maggiore gradualità, qui *non* abbiamo voluto dare per scontato che lo studente conosca già queste nozioni, e quindi non le abbiamo usate. Nel successivo

paragrafo relativo alla differenziabilità, ci troveremo a calcolare altri limiti, e a quel punto utilizzeremo anche il concetto di funzione positivamente omogenea.

3.25.★ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy^2 + 3yx^2}{x^4 + y^2 + 5y^4} \right)$

3.26.★ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\log(1+xy)}{x^2\sin^2 x + 2y^2}$

3.27.★ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3 + y^5}{x^2 + y^4} \right)$

3.28.★ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{y^3 + x^5}{x^2 + y^4} \right)$

3.29.★ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^{1/3}y^{5/3}}{x^2 + y^2} \right)$

3.30.★ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin xy \left(\frac{x^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \right)$

3.31.★ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy^2 + 2y^{1/3}\sin^2 x}{x^2 + y^2} \right) e^{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)}$

3.32.★ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 2}{x^2 + y^2} \right)$

3.33.★ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{y\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right)$

3.34.★ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^{5/3}y^3 + x^3y}{(x^2 + y^2)^2} \right)$

3.35.★ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xe^{\sqrt{x^2+y^2}} - x}{x^2 + y^2} \right)$

3.36.★ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(e^{-y}\cos x + \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

3.37.★ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}.$$

3.38.★ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2}.$$

3.39.★ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y}.$$

3.40.★ Dimostrare che la funzione $f(x,y) = y^x$, definita per $x > 0, y > 0$, non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$.

(Notare che *questo* è il motivo per cui all'espressione 0^0 non viene attribuito significato).

Soluzioni § 3.2

3.20.

a. Falso. La restrizione lungo rette non consente di dimostrare l'esistenza del limite.

b. Vero. Se il limite esiste, è tale anche lungo tutte le restrizioni.

3.21.

a. Falso. Fare il limite per $\rho \to 0$ per ϑ fissato (qualsiasi) è come fare il limite lungo qualsiasi semiretta: non consente di concludere l'esistenza del limite.

b. Vero. (Si veda la risposta precedente e la risposta *b* dell'esercizio precedente).

c. Falso. (v. risposta precedente).

3.22.

a. Falso.; *b.* Vero.; *c.* Falso.

3.23.

a. Vero.; *b.* Falso.; *c.* Falso.

3.24.

a. Falso. Se non si dimostra la maggiorazione *in valore assoluto*, nulla si può concludere.

b. Vero, per il teorema del confronto.

c. Falso. Se f ha una *maggiorante* che tende a $+\infty$ non è detto che f tenda a $+\infty$. Potremmo concludere questo se f avesse una *minorante* che tende a $+\infty$.

d. Falso: la disuguaglianza scritta, togliendo il modulo, si traduce in

$$-2^{x^2y} \leq f(x,y) \leq 2^{x^2y}.$$

Perciò f è compresa tra una funzione che tende a 1 ed una che tende a -1 (limiti diversi): il teorema del confronto evidentemente non permette di concludere nulla.

3.25.

$$\frac{xy^2+3yx^2}{x^4+y^2+5y^4} = \frac{xy^2}{x^4+y^2+5y^4} + \frac{3yx^2}{x^4+y^2+5y^4} \equiv f(x,y)+g(x,y).$$

$$|f(x,y)| = \frac{|x|y^2}{x^4+y^2+5y^4} \leq \frac{|x|y^2}{y^2} = |x| \to 0,$$

perciò $f(x,y) \to 0$ (teorema del confronto).

$$g(x,x) = \frac{3x^3}{x^2+6x^4} \sim 3x \to 0; \quad g(x,x^2) = \frac{3x^4}{2x^4+5x^8} \to \frac{3}{2}.$$

Perciò non esiste il limite di g, e pertanto neanche il limite di partenza.

3.26. Calcoliamo il limite di qualche restrizione.

$$f(x,x) = \frac{x\log(1+x^2)}{x^2\sin^2 x + 2x^2} \sim \sim \frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2} \to 0.$$

$$f(x,x^2) = \frac{x\log(1+x^3)}{x^2\sin^2 x + 2x^4} \sim \frac{x\cdot x^3}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

Poiché restrizioni di f lungo curve diverse hanno limiti diversi, il limite di partenza non esiste.

3.27. Maggioriamo come segue:

$$\left|\frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}\right| \le \frac{|x^3|}{x^2+y^4} + \frac{|y^5|}{x^2+y^4} \le \frac{|x^3|}{x^2} + \frac{|y^5|}{y^4} = |x| + |y|.$$

(Spiegazione: primo passaggio: disuguglianza triangolare; il denominatore è somma di termini positivi quindi togliamo il modulo; secondo passaggio: somma di due quantità positive è $\ge$ di una sola di esse, quindi passando al reciproco valgono le maggiorazioni scritte; terzo passaggio: semplificazione algebrica).

Poiché $g(x,y) = |x| + |y|$ è una funzione continua che per $(x,y) \to (0,0)$ tende a zero, per il teorema del confronto il limite cercato esiste e vale 0.

3.28. Una maggiorazione come nell'esempio precedente (il testo del limite è apparentemente molto simile, perciò ripetere quella tecnica è invitante) non funziona perché

$$\left|\frac{y^3+x^5}{x^2+y^4}\right| \le \frac{|y^3|}{x^2+y^4} + \frac{|x^5|}{x^2+y^4} \le \frac{|y^3|}{y^4} + \frac{|x^5|}{x^2} = \frac{1}{|y|} + |x^3|$$

ed ora la funzione $\frac{1}{|y|}$ non tende a zero per $(x,y) \to (0,0)$, perciò per questa via *nulla si può concludere*. Attenzione: questi calcoli *non provano* che il limite non esiste, ma *suggeriscono* che non esista, perciò cerchiamo ora di dimostrare che il limite non esiste mediante la tecnica delle restrizioni.

$$f(x,x) = \frac{x^3+x^5}{x^2+x^4} \sim \frac{x^3}{x^2} = x \to 0.$$

Una curva su cui il comportamento potrebbe essere diverso da questo è $x = y^2$ (che sostituita nella funzione, pareggia gli esponenti a denominatore). Si ha:

$$f(y^2,y) = \frac{y^3+y^{10}}{y^4+y^4} \sim \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y} \to \pm\infty \text{ per } y \to 0^{\pm}.$$

Pertanto il limite in due variabili non esiste.

3.29. Il numeratore è una funzione algebrica di grado complessivo $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$, il denominatore ha grado 2, l'idea è che il quoziente *non* abbia limite. Calcoliamo qualche

restrizione.

$$f(x,0)=\frac{0}{x^2}=0; \qquad f(x,x)=\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

Pertanto il limite non esiste.

3.30. Il denominatore è ρ^4, il numeratore si annulla almeno di ordine 5 ($\sin xy$ si annulla del second'ordine), quindi cerchiamo una maggiorante radiale infinitesima. Conviene cominciare ad osservare che

$$|\sin xy| \le |xy| \quad \text{perciò} \quad |f(x,y)| \le \left| xy \left(\frac{x^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} \right) \right|$$

$$|f(\rho,\vartheta)| \le \left| \rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \frac{\rho^3\cos^3\vartheta - \rho^5\sin^5\vartheta}{\rho^4} \right| =$$

$$= \left|\cos\vartheta\sin\vartheta\left(\rho\cos^3\vartheta - \rho^3\sin^5\vartheta\right)\right| \le \left|\rho\cos^4\vartheta\sin\vartheta\right| + \left|\rho^3\cos\vartheta\sin^6\vartheta\right| \le \rho+\rho^3$$

maggiorante radiale e infinitesima. Perciò il limite esiste e vale zero.

3.31. Cominciamo ad osservare la quantità

$$g(x,y)=\left(\frac{xy^2+2y^{1/3}\sin^2 x}{x^2+y^2}\right).$$

Il denominatore è ρ^2, il numeratore si annulla di grado maggiore di 2, quindi si dovrebbe poter trovare una maggiorante radiale infinitesima e provare che $g(x,y)\to 0$. Infatti:

$$|g(\rho,\vartheta)| = \left| \frac{\rho^3\cos\vartheta\sin^2\vartheta + 2\rho^{1/3}(\sin\vartheta)^{1/3}\sin^2(\rho\cos\vartheta)}{\rho^2} \right| \le$$

$$\le \left|\rho\cos\vartheta\sin^2\vartheta\right| + \left| \frac{2\rho^{1/3}(\sin\vartheta)^{1/3}\sin^2(\rho\cos\vartheta)}{\rho^2} \right| \le \rho + \frac{2\rho^{1/3}(\rho\cos\vartheta)^2}{\rho^2} \le$$

$$\le \rho + \frac{2\rho^{2+1/3}}{\rho^2} = \rho + 2\rho^{1/3},$$

maggiorante radiale infinitesima. Perciò $g(x,y)\to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$.

Osserviamo ora

$$e^{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)}.$$

L'esponente $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ è una funzione che per $(x,y)\to(0,0)$ non ammette limite, ma è limitata,

in quanto

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

Perciò $$0 < e^{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)} \leq e$$

e $$\left|g(x,y)e^{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)}\right| \leq e|g(x,y)| \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Per il teorema del confronto, il limite di partenza esiste e vale zero.

3.32. Per $(x,y) \to (0,0)$,

$$e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 2 \to -1,$$

$$x^2+y^2 \to 0^+,$$

perciò $$f(x,y) \to -\infty.$$

Abbiamo applicato in questo caso i teoremi sull'algebra dei limiti (nel caso di limiti infiniti).

3.33. Osserviamo che la funzione ha la seguente struttura:

$$f(x,y) = y \cdot g(x,y)$$

con g funzione *radiale*[5]. La funzione g è perciò sostanzialmente una funzione di una sola variabile,

$$g(\rho,\vartheta) = \frac{\log(1+\rho^2)}{\rho^2} \to 1 \text{ per } \rho \to 0.$$

Questo suggerisce che f tenda a zero come y, perciò cerchiamo la maggiorante radiale infinitesima. E' molto facile:

$$|f(\rho,\vartheta)| = \left|\rho\sin\vartheta \cdot \frac{\log(1+\rho^2)}{\rho^2}\right| \leq \frac{\log(1+\rho^2)}{\rho}.$$

Questa è una funzione radiale, infinitesima perché

$$\frac{\log(1+\rho^2)}{\rho} \sim \frac{\rho^2}{\rho} = \rho \to 0.$$

Perciò il limite cercato esiste ed è zero.

---

[5] Di funzioni radiali parleremo più diffusamente nel §3.4.

3.34. Il denominatore è ρ^4, il numeratore è somma di un addendo di grado complessivo $\frac{14}{3}$ (>4) e uno di grado complessivo 4. L'idea è che il primo addendo tenda a zero ma il secondo non ammetta limite (e quindi il limite complessivo non esista). Seguendo quest'idea, scriviamo:

$$f(x,y)=\frac{x^{5/3}y^3}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^3y}{(x^2+y^2)^2}\equiv f_1+f_2.$$

$$|f_1(\rho,\vartheta)|=\left|\frac{\rho^{3+\frac{5}{3}}(\cos\vartheta)^{5/3}(\sin\vartheta)^3}{\rho^4}\right|\le\rho^{2/3},$$

maggiorante radiale infinitesima, perciò $f_1\to 0$.

Mostriamo che f_2 non ha limite calcolando il limite delle restrizioni lungo diverse rette $y=mx$

$$f_2(x,mx)=\frac{mx^4}{x^4(1+m^2)^2}=\frac{m}{(1+m^2)^2}.$$

La funzione f_2 ha valore costante (e diverso) su ogni semiretta per l'origine, quindi ha limite diverso lungo ogni semiretta. Perciò il limite di f_2 non esiste, e poiché f_1 ha limite, f_1+f_2 non ha limite: il limite di partenza non esiste.

3.35. Scrivendo in coordinate polari la f,

$$f(\rho,\vartheta)=\rho\cos\vartheta\left(\frac{e^\rho-1}{\rho^2}\right)=\cos\vartheta\left(\frac{e^\rho-1}{\rho}\right),$$

osserviamo che $$\lim_{\rho\to 0}f(\rho,\vartheta)=\cos\vartheta,$$

il che significa che il limite lungo ogni semiretta passante per l'origine dà un valore diverso. Pertanto il limite di partenza non esiste.

3.36. Il primo addendo,

$$f_1(x,y)=e^{-y}\cos x,$$

è una funzione continua che pertanto tende a $f_1(0,0)=1$.

Il secondo addendo, $$f_2(x,y)=\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}$$

è una funzione radiale, $$f_2(\rho,\vartheta)=\frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\rho^4}.$$

Questa funzione di una sola variabile tende a zero per $\rho \to 0$ (gerarchia degli infiniti). Pertanto f_2 è essa stessa la maggiorante radiale infinitesima di... f_2, e quindi tende a zero[6].

Pertanto il limite cercato è 1.

3.37.

$$\left|\frac{xy^2}{x^4+y^2}\right| = \frac{|x|y^2}{x^4+y^2} \leq \frac{|x|y^2}{y^2} = |x| = \rho|\cos\vartheta| \leq \rho.$$

Poiché $|f(x,y)| \leq \rho$, maggiornate radiale infinitesima, il limite è zero.

3.38.

$$0 \leq \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} = \frac{\rho^4(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)^2}{\rho^2} = \rho^2\left(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\right)^2 \leq \rho^2$$

perciò la funzione tende a zero per $(x,y) \to (0,0)$.

3.39. Lungo la retta $y = x$ è $f = x \to 0$; lungo la curva $y = x^2$ è $f = 1$. Perciò il limite non esiste.

3.40.

$$y^x = e^{x\ln y}.$$

Lungo la retta $y = x$ si ha $x\ln y = x\ln x \to 0$, dunque $f \to 1$.

Lungo la curva $y = e^{-1/x}$ ($e^{-1/x} \to 0$ per $x \to 0^+$) si ha $x\ln y = -1$, dunque $f \to e^{-1}$. Perciò il limite non esiste.

---

[6] Questo è un ragionamento un po' contorto che si può evitare a favore di un argomento generale: se una funzione è radiale, il suo limite si può calcolare come limite in una variabile per $\rho \to 0$.

3.3. Topologia e proprietà delle funzioni continue

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 3, §3.

3.3.A. Insiemi del piano definiti da equazioni o disequazioni

Nello studio delle funzioni di due o più variabili si ha spesso a che fare con insiemi del piano (o dello spazio) definiti da una o più equazioni o disequazioni. Mentre lo studente ha già una certa familiarità a trattare insiemi definiti da *equazioni* (almeno i grafici di funzioni $y = f(x)$, $x = g(y)$, e le curve elementari studiate in geometria analitica -sostanzialmente le coniche-), è possibile che abbia poca o nessuna consuetudine a individuare quale insieme è rappresentato da una certa *disequazione*, o viceversa con quali disequazioni si può tradurre un certo luogo geometrico. Si tratta di una questione di matematica elementare, che però, come vedremo, si intreccia con le *proprietà delle funzioni continue di più variabili*. Per questo può essere opportuno affrontarla ora. Quanto segue è davvero molto elementare, e per molti studenti può risultare superfluo. Ad ogni modo, l'esperienza dice che per altri non lo è...

Sopragrafici, sottografici, semipiani.

a. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su un intervallo I, il suo grafico $y = f(x)$ rappresenta un arco di curva continua, e il *sopragrafico*

$$y \geq f(x)$$

definito, più precisamente, come l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \geq f(x)\}$$

rappresenta la regione del piano compresa tra le rette verticali $x = a, x = b$ e che sta sopra il grafico di f. Ad esempio:

$$y \geq \log x \text{ per } 0 < x < 2$$

è l'insieme in fig.3.2.

Analogamente $y \leq f(x)$ sarà il *sottografico*; le disequazioni $y < f(x), y > f(x)$ indicano lo stesso insieme privato della linea del grafico stesso.

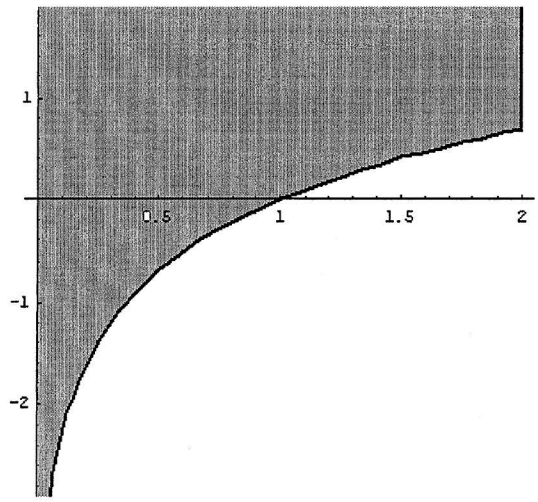


Fig. 3.2.

b. Come caso particolare del precedente, una disequazione

$$ax + by + c \geq 0$$

(≤ 0, < 0, > 0) rappresenta un *semipiano*, comprensivo (nel caso $\leq$, $\geq$) o non comprensivo (nel caso $<$, $>$) della sua retta origine $ax + by + c = 0$.

Come si fa a capire quale dei due semipiani delimitati dalla retta $ax + by + c = 0$ è descritto dalla disequazione? La cosa più semplice è esplicitare la disequazione rispetto ad y, ad esempio

$$2x - 3y + 1 \geq 0 \quad \text{la riscriviamo come} \quad y \leq \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

e questo mostra che il semipiano è il *sottografico* della retta $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Analogamente,

$$3y - 2x + 1 \geq 0 \quad \text{la riscriviamo come} \quad y \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

e questo è il *sopragrafico* della retta $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

Disequazioni

$$y \geq 3,\ y < 2, \text{ecc.}$$

indicano gli opportuni semipiani limitati da rette orizzontali.

c. Tutto quanto detto fin qui si può riferire anche a funzioni $x = g(y)$. Basta... girare il foglio e ragionare. Ad esempio:

$$x - y - e^y \geq 0$$

indica l'insieme dei punti che stanno alla *destra* del grafico della funzione $x = y + e^y$ (v. fig. 3.3)

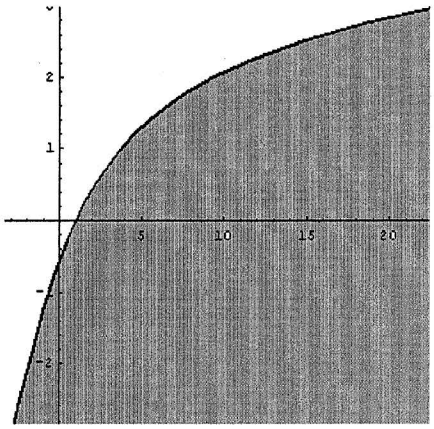


Fig. 3.3.

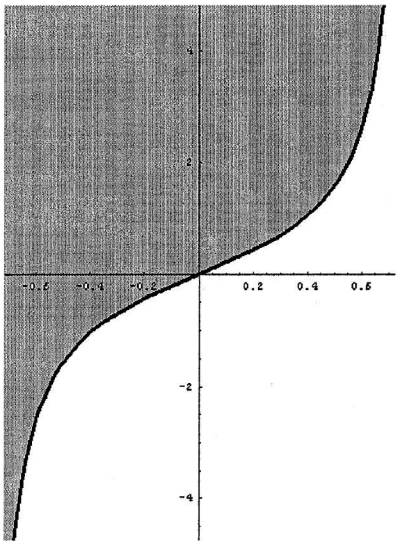


Fig. 3.4.

L'insieme cercato è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme

mentre $$\arctan y - 2x \geq 0$$

indicherà l'insieme dei punti che stanno a sinistra del grafico della funzione $x = \frac{1}{2}\arctan y$ (v. fig.3.4). In particolare, disequazioni come

$$x \leq 3, x > 1$$

indicano semipiani limitati da rette verticali.

Interno ed esterno di un cerchio o un'ellisse.

La disequazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

indica l'insieme dei punti del piano la cui distanza (al quadrato) da (x_0, y_0) è

minore di r^2. Perciò stiamo parlando del cerchio[7] di centro (x_0, y_0) e raggio r. Se ci fosse la disuguaglianza $<$, sarebbe il cerchio privato della circonferenza, e se ci fosse la disuguaglianza $\geq$ o $>$, sarebbe la regione del piano *esterna* al cerchio, rispettivamente compresa o esclusa la circonferenza stessa.

Per analogia, si capisce che

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \quad (\text{oppure } \geq 1)$$

indicherà la regione del piano *interna* (rispettivamente, esterna) all'ellisse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Disequazioni corrispondenti a curve più generali. Proprietà delle funzioni continue

Consideriamo la disequazione

$$x^2 - y^2 \geq 1.$$

Poiché $x^2 - y^2 = 1$ è l'equazione di un'iperbole, ci aspettiamo che la disequazione denoti una delle regioni in cui l'iperbole divide il piano, ma quale? Qui non è possibile l'intepretazione in termini di distanza (e quindi di interno ed esterno) data nel caso del cerchio: in effetti l'iperbole è una linea in due rami, che divide il piano in *tre* regioni, tutte illimitate (non c'è una regione esterna ed una interna). Naturalmente in questo esempio molto semplice ci sono vari modi di capire facilmente quale luogo geometrico è descritto dalla disequazione, ma vale la pena usare questo esempio per illustrare un fatto generale.

1. Se $f(x, y)$ è una funzione continua definita in tutto il piano, la disequazione $f(x, y) \neq 0$ definisce un insieme aperto del piano, costituito da un certo numero (eventualmente infinito) di aperti *connessi*. Supponiamo per semplicità che siano un numero finito:

$$A_1, A_2, ..., A_n.$$

2. Studiamo ora il segno di f in ciascuna di queste regioni. Consideriamo ad esempio A_1. In essa per definizione $f(x, y) \neq 0$; inoltre sappiamo che f è continua in A_1 e che A_1 è aperto e connesso. Per il teorema degli zeri per funzioni continue di più variabili (v. [BPS2], cap. 3,§3.2), se in A_1 esistessero due punti

[7] Ricordiamo che, in geometria elementare, *cerchio* denota la figura piena, *circonferenza* la sua linea di contorno. Le due parole vengono confuse spesso nel linguaggio comune.

diversi in cui f ha segni opposti, dovrebbe esistere un terzo punto di A_1 in cui f si annulla, cosa impossibile. Concludiamo che f ha segno costante in A_1.

3. Questo ragionamento si può ripetere per ciascuna componente connessa $A_1, A_2, ..., A_n$. *In ciascuna regione A_i il segno di f non cambia* (anche se può cambiare da una regione all'altra). E' sufficiente allora valutare f in un solo punto di ciascuna regione per conoscere il segno di f in tutta quella regione.

Applichiamo questa argomentazione all'esempio elementare

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 1.$$

L'iperbole $f(x,y) = 0$ divide il piano in 3 aperti connessi in cui $f(x,y) \neq 0$:

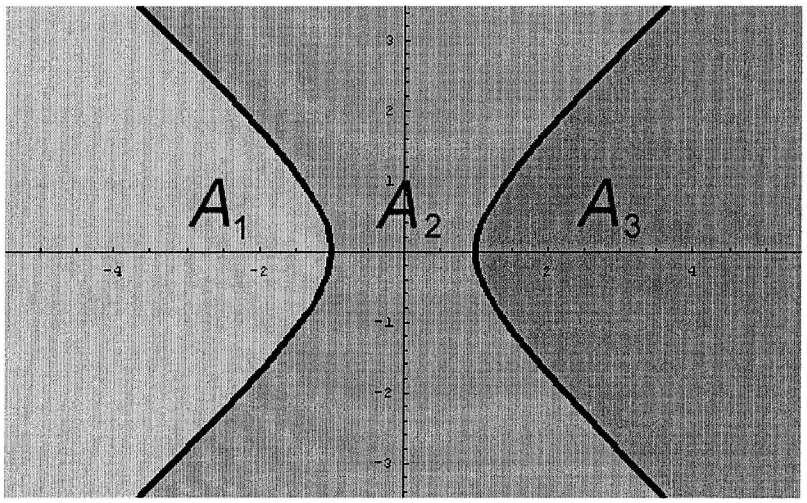


Fig. 3.5.

In ciascuna delle 3 regioni sappiamo che il segno di f non cambia, perciò valutiamo ad esempio:

$f(0,0) = -1 < 0$, quindi in tutto A_2 sarà $f(x,y) < 0$

$f(2,0) = 3 > 0$, quindi in tutto A_3 sarà $f(x,y) > 0$

$f(-2,0) = 3 > 0$, quindi in tutto A_1 sarà $f(x,y) > 0$

In definitiva, il luogo descritto dalla disequazione

$$x^2 - y^2 \geq 1$$

è l'unione dell'insieme A_1 con l'insieme A_3 e con il grafico dell'iperbole.

Sistemi di equazioni e disequazioni. Unioni e intersezioni di insiemi.

Infine, quando abbiamo un insieme definito da più equazioni o disequazioni che devono valere simultaneamente o alternativamente, dovremo considerare l'intersezione o l'unione (rispettivamente) degli insiemi definiti dalle singole relazioni. Ad esempio,

$$1 < x \leq 2$$

rappresenta l'intersezione dei due semipiani $x > 1$ e $x \leq 2$, quindi la *striscia* verticale compresa tra le rette $x = 1$ (esclusa) e $x = 2$ (compresa). Analogamente, le condizioni

$$y < 0 \text{ o } y > 2$$

rappresenta la regione *esterna* alla striscia compresa tra le rette orizzontali $y = 0$ e $y = 2$, ed esclude le rette stesse.

Le condizioni

$$y \geq x^2, x^2 + y^2 \leq 1$$

rappresentano la regione che è interna al cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1 e sta anche sopra il grafico della parabola $y = x^2$, ossia:

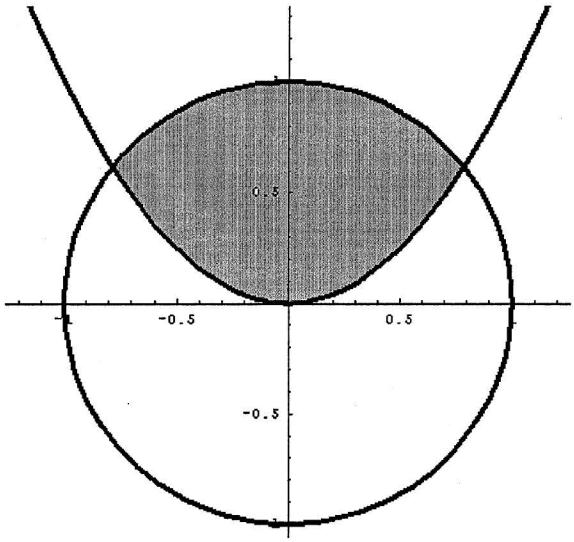


Fig. 3.6. L'insieme cercato è quello in grigio.
I bordi in **nero** appartengono all'insieme

3.3.B. Topologia

Esempi svolti

Esempio 3.6. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\log(x^3 - y)}{\sqrt{1 - xy}}.$$

Dopo aver determinato analiticamente l'insieme E ed averlo disegnato, dire se E è aperto, se è chiuso, se è limitato, se è connesso.

Imponiamo che l'argomento del logaritmo sia positivo:

$$x^3 - y > 0,$$

e che il radicando sia non negativo, anzi positivo perché la radice è a denominatore:

$$1 - xy > 0.$$

Perciò: $$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^3, xy < 1\}.$$

La disuguaglianza $y < x^3$ descrive il sottografico della cubica $y = x^3$.

Per l'altra disuguaglianza: $xy = 1$ è un'iperbole equilatera di asintoti gli assi cartesiani, posta nel 1° e 3° quadrante; questa divide il piano in 3 regioni; detto $f(x,y) = xy - 1$ notiamo che

$$f(0,0) < 0, f(2,2) > 0, f(-2,-2) > 0,$$

perciò il metodo illustrato nel §3.3.A consente di concludere che $xy < 1$ rappresenta la regione di piano compresa tra i due rami dell'iperbole (quella contenente gli assi cartesiani). L'insieme E è l'intersezione dei due insiemi definiti

dalle due disequazioni, perciò:

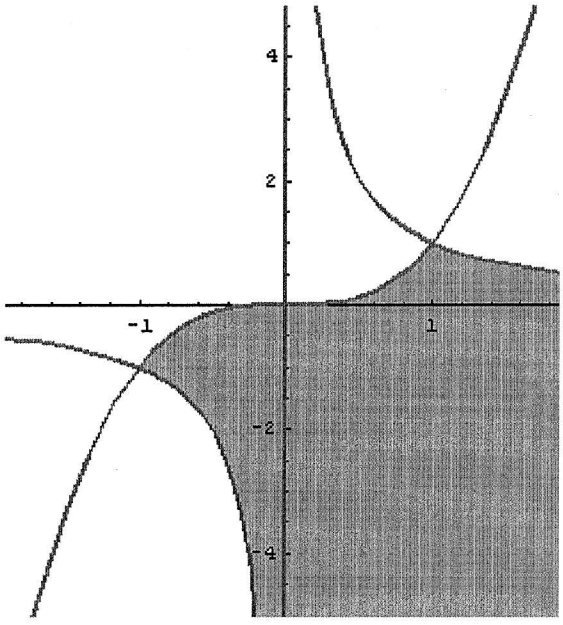


Fig. 3.7. L'insieme E è quello in grigio.
I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme

Notiamo che un *errore grossolano* (ma frequente!) consiste nel "riscrivere" la disequazione $xy < 1$ come $y < \frac{1}{x}$, il che evidentemente porta a un insieme diverso. (Per chi non se ne fosse accorto: non è lecito dividere per x i due membri della disequazione, visto che x ha segno variabile).

Ora rispondiamo alle domande. Ciascuna delle due disequazioni $y < x^3, xy < 1$ definisce un insieme *aperto*, per il teorema sugli aperti e chiusi definiti da funzioni continue[8].

Essendo intersezione di due aperti, E è aperto.

E non è chiuso, perché è aperto e non è né vuoto né tutto il piano[9].

E non è limitato, ad esempio perché comprende tutto il 4° quadrante, quindi nessun cerchio lo può contenere.

E è connesso, come si vede dalla figura.

---

[8] v. [BPS2], cap.3, § 3.1, Teorema 3.5.

[9] Si può dimostrare infatti che gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ ad essere simultaneamente aperti e chiusi sono il vuoto e l'intero $\mathbb{R}^n$.

Esempio 3.7. Studiare il segno della funzione

$$f(x,y) = (y-3)\big(x^2+y^2-2\big),$$

ossia: determinare analiticamente l'insieme γ_0 su cui si annulla e disegnarlo; stabilire quindi il segno di f in ciascun aperto connesso in cui γ_0 spezza l'insieme di definizione di f.

L'insieme degli zeri di f è:

$$\gamma_0 = \big\{(x,y) : y = 3 \text{ o } x^2+y^2 = 2\big\}$$

quindi l'unione di una retta e una circonferenza (che non si intersecano). Questo insieme spezza il piano in 3 regioni aperte e connesse:

$$A_1 = \big\{(x,y) : x^2+y^2 < 2\big\}$$

(l'interno del cerchio);

$$A_2 = \big\{(x,y) : x^2+y^2 > 2 \text{ e } y < 3\big\}$$

(la regione esterna al cerchio ma sotto la retta orizzontale);

$$A_1 = \{(x,y) : y > 3\}$$

(la regione sopra la retta orizzontale).

Seguendo il metodo illustrato nel §3.3.A, valutiamo f in un solo punto di ciascuna delle 3 regioni.

$$f(0,0) = 6 > 0, \text{perciò in } A_1 \text{ è } f(x,y) > 0;$$

$$f(2,0) = -6 < 0, \text{perciò in } A_2 \text{ è } f(x,y) < 0;$$

$$f(0,4) = 14 > 0, \text{perciò in } A_3 \text{ è } f(x,y) > 0.$$

Con ciò il segno di f è studiato.

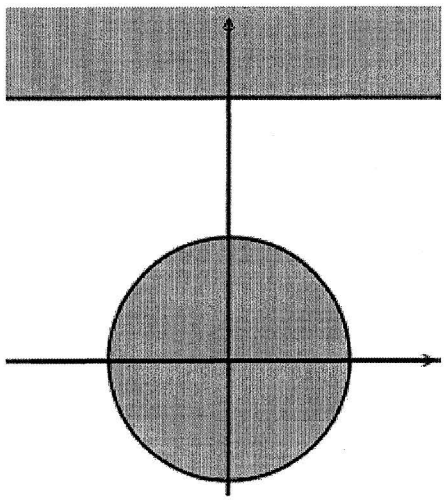


Fig. 3.8. In grigio le regioni in cui $f(x,y) > 0$; in bianco le regioni dove $f(x,y) < 0$

Osservazione 3.3. Ad ogni confine cambia il segno di f? Il metodo appena presentato per studiare il segno di f (valutarne il segno in un solo punto di ciascuna regione connessa in cui l'insieme degli zeri divide il piano) talvolta può essere ulteriormente snellito, a questo modo. Cominciamo a valutare il segno di f (col metodo appena descritto) in una sola delle regioni connesse, per esempio A_1 (nell'esempio sopra); scopriamo così che in A_1 è $f > 0$. Attraversando il confine tra A_1 e A_2 notiamo che la funzione deve necessariamente cambiare di segno, perché

$$f(x,y) = (y-3)\big(x^2+y^2-2\big),$$

e il fattore (x^2+y^2-2) cambia di segno attraversando la circonferenza (mentre il fattore $(y-3)$ non lo cambia). Perciò in A_2 sarà $f < 0$. Passando ora in A_3 si attraversa un solo confine, lungo il quale il fattore $(y-3)$ (e solo questo) cambia di segno. Dunque in A_3 sarà $f > 0$. Questo argomento (ad ogni attraversamento di confine si cambia il segno) va usato con una certa cautela: se la funzione contiene fattori del tipo

$$\big(x^2+y^2-2\big)^2$$

(che non cambiano segno attraversando la curva lungo cui si annullano) o contiene fattori di tipo diverso che cambiano ciascuno segno all'attraversamento dello stesso confine, ad esempio

$$(x-y) \quad \text{e} \quad \log(1+x-y)$$

si potranno avere eccezioni alla regola precedente.

Esercizi

Di ciascuno dei seguenti oggetti geometrici, si dica se è un insieme aperto, chiuso, limitato, connesso. (Talvolta la risposta potrebbe anche essere "dipende da caso a caso").

3.41. Nel piano $\mathbb{R}^2$:
a. Una retta.
b. Il piano privato di una retta.
c. Il grafico di una funzione $y = f(x)$ continua, definita su $[0,1]$.
d. Il grafico di una funzione $y = f(x)$ continua, definita su $(0,1)$.
e. Il grafico di una funzione $y = f(x)$ continua, definita su $\mathbb{R}$.

3.42. Nello spazio $\mathbb{R}^3$:
a. Una retta.
b. Lo spazio privato di una retta.
c. La regione compresa tra due sfere concentriche, comprese le superfici delle sfere.
d. Il sostegno di un arco di curva continua $\underline{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$.
e. Il sostegno di un arco di curva continua $\underline{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. (Quest'ultima domanda è più difficile delle altre...)

Stabilire se ciascuno dei seguenti insiemi è o non è: aperto; chiuso; limitato; connesso. (Disegnare l'insieme solo se necessario per rispondere alle domande).

3.43.★ $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \log(x^2+y^2-2) \leq 3\}$

3.44.★ $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \log(x^2-y^2) > 3\}$

3.45.★ $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3+y^3 = 3\}$

3.46.★ $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4+y^2 = 3\}$

3.47.★ $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z+x^2-y^2 > 0\}$

3.48.★ $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2\}$

3.49.★ $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 < x^2 + y^2\}$

3.50.★ $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 > x^2 + y^2\}$

3.51. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$;

3.52. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \text{ o } x^2 + y^2 \geq 3\}$;

3.53. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x + y < 2,\ 2x - y > 0\}$.

Determinare analiticamente l'insieme di definizione E della seguente funzione f. Quindi, stabilire se E è o non è: aperto; chiuso; limitato; connesso. (Disegnare l'insieme solo se necessario per rispondere alle domande).

3.54. $f(x,y) = \dfrac{\log(x^2 + y^2 - 4)}{y - 3}$

3.55. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[4]{y - x}}{\sqrt{y - x^2}}$

3.56. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[4]{2 - (x^2 + y^2)}}{\log x}$

3.57. $f(x,y) = \dfrac{\arcsin(3 - x^2 - y^2)}{y - 4}$

Studiare il segno della funzione f, ossia: determinare analiticamente l'insieme γ_0 su cui si annulla e disegnarlo; stabilire quindi il segno di f in ciascun aperto connesso in cui γ_0 spezza l'insieme di definizione di f.

3.58. $f(x,y) = \big(y - x^2 + 1\big)\big(x^2 + y^2 - 1\big)$

3.59. $f(x,y) = (y - 4)\log\big(x^2 + y^2 - 2\big)$

3.60. $f(x,y) = y\sin\sqrt{x^2+y^2}$

Determinare analiticamente l'insieme di definizione E della seguente funzione f e disegnarlo. Quindi, stabilire se E è o non è: aperto; chiuso; limitato; connesso.

3.61. $f(x,y) = \dfrac{\log(x+1)}{\sqrt{y^2-x^2-1}}$.

3.62. $f(x,y) = \sqrt{2-\sqrt{y-x^2}}$

3.63. $f(x,y) = \dfrac{\log(x^2+y^2-4)}{y-3x-1}$.

3.64. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-2}}{1+\log(x^2+y^2-1)}$.

3.65. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1-\log(x^2+y^2)}}{x-1}$.

3.66. $f(x,y) = \dfrac{x\log(y-x^2+1)}{\sqrt[3]{\log(x^2+y^2)-2}}$.

3.67. $f(x,y) = \dfrac{(y-3)\log\left[x^2+(y-1)^2\right]}{\sqrt{1-\log(y-x^2)}}$.

3.68. $f(x,y) = \dfrac{\log y}{x-1}\sqrt{2-y-(x-1)^2}$.

3.69. $f(x,y) = \dfrac{\log(4-x^2-y^2)+\sqrt{x+4}}{(x-1)^2}$.

3.70. $f(x,y) = \dfrac{\log(1-x^2-4y^2)}{y\sin x}$.

3.71. $$f(x,y) = \frac{1}{\log(1-\log(x^2+y))}.$$

3.72. $$f(x,y) = \frac{\log(1+xy)}{\sqrt{5-x^2-y^2}}$$

3.73. $$f(x,y) = \frac{\sqrt{xy}}{3x+2y-4}$$

3.74. $$f(x,y) = \sqrt{4-\log(x^2+y^2-2)}$$

3.75. $$f(x,y) = \sqrt{3x-5y+1}\arcsin\left(x^2+y^2\right)$$

3.76. $$f(x,y) = \frac{\log(xy)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

3.77. $$f(x,y) = \sqrt{y-\log x}\cdot\log\left(x^2+4y^2-1\right)$$

3.78. $$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{9}-1}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

3.79. $$f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\log(x^2-y-1)}$$

3.80. $$f(x,y) = \sqrt{1+\log\left((x+y)^2-1\right)}.$$

3.81.
a. Determinare l'insieme di definizione E della funzione

$$f(x,y) = \log\left(1-\log\left(x^2+y^2-1\right)\right).$$

b. Dire poi se l'insieme E è aperto, chiuso, limitato, connesso (rispondere sì o no a ogni domanda).

c. Determinare l'insieme F in cui $f(x,y) > 0$.

Soluzioni § 3.3

3.41.

a. Non aperto, chiuso, illimitato, connesso.
b. Aperto, non chiuso, illimitato, non connesso.
c. Non aperto, chiuso, limitato, connesso.
d. Non aperto, non chiuso, limitato, connesso.
e. Non aperto, chiuso, illimitato, connesso.

3.42.

a. Non aperto, chiuso, illimitato, connesso.
b. Aperto, non chiuso, illimitato, connesso.
c. Non aperto, chiuso, limitato, connesso.
d. Non aperto, chiuso, limitato, connesso.
e. Non aperto, connesso. Può essere limitato o illimitato, dipende dalla curva: una retta è una curva di questo tipo col sostegno illimitato; una circonferenza percorsa infinite volte è una curva di questo tipo col sostegno limitato. Può anche essere chiuso o non chiuso, dipende dalla curva. Una retta ha sostegno chiuso. Una spirale logaritmica, descritta in forma polare da $\rho = e^{\vartheta}, \vartheta \in \mathbb{R}$ invece no, perché il suo complementare non è aperto; infatti l'origine, che appartiene al complementare del sostegno, non è un punto *interno* del complementare: qualsiasi intorno, pur piccolo, dell'origine, contiene punti della spirale.

3.43. Notiamo anzitutto che occorre imporre la condizione di positività dell'argomento del logaritmo:

$$x^2 + y^2 - 2 > 0.$$

Inoltre,

$$\log\left(x^2 + y^2 - 2\right) \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 \leq e^3.$$

Perciò

$$E = \left\{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 \leq 2 + e^3\right\}.$$

L'insieme E è perciò una *corona circolare*, comprensiva della circonferenza esterna ma non

di quella interna. Per questi motivi è: non aperto, non chiuso, limitato, connesso.

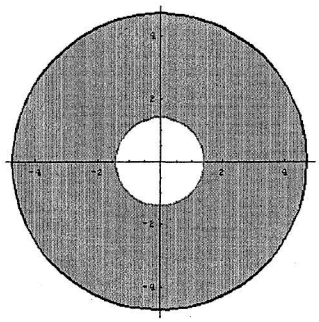


Fig. 3.9. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme, i bordi in **grigio** non appartengono

3.44. Occorre imporre la condizione $x^2 - y^2 > 0$, peraltro implicita nella seconda,

$$x^2 - y^2 > e^3.$$

Si tratta certamente di un insieme aperto e non chiuso. (Teorema su aperti e chiusi definiti da funzioni continue).

E' anche illimitato, perché $x^2 - y^2 = e^3$ è un'iperbole, che spezza il piano in 3 regioni tutte illimitate.

Per capire se è connesso o no dobbiamo capire meglio che insieme rappresenta. L'iperbole $x^2 - y^2 = e^3$ ha asintoti $y = \pm x$ e vertici sull'asse x. La disequazione $x^2 - y^2 > e^3$ indica le *due* regioni esterne ai due rami, come si vede ad esempio valutando $x^2 - y^2 - e^3$ lungo i punti $(0, 0), (\pm e^3, 0)$. Pertanto l'insieme non è connesso.

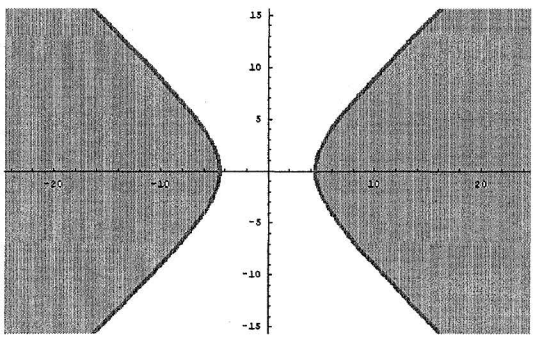


Fig. 3.10. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme.

3.45. Insieme chiuso, non aperto. Esplicitando l'equazione nella forma

$$y = \sqrt[3]{3 - x^3}$$

vediamo che E è il grafico di una funzione continua definita su tutto $\mathbb{R}$, perciò E è connesso e non è limitato[10].

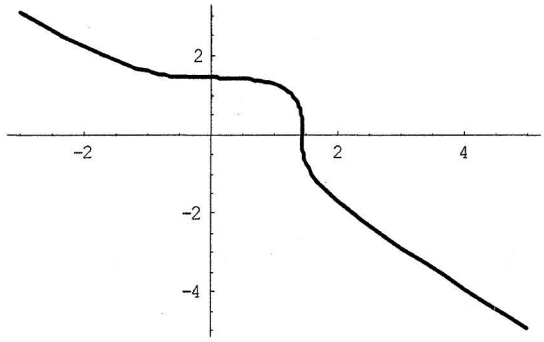


Fig. 3.11. L'insieme E è il grafico disegnato

3.46. Insieme chiuso, non aperto. Esplicitando l'equazione nella forma

$$y = \pm\sqrt{3 - x^4}$$

vediamo che E è l'unione dei grafici di due funzioni definite su $\left[-\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3}\right]$, continue (e perciò limitate per il teorema di Weierstrass) , perciò E è limitato. Inoltre E è connesso, perché ciascuno dei due grafici è un arco di curva continuo, perciò è connesso, e i due grafici si toccano negli estremi dell'intervallo.

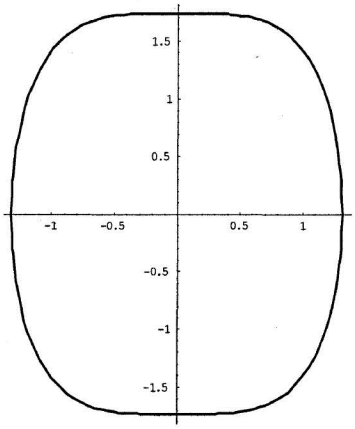


Fig. 3.12. L'insieme E è la curva disegnata (unione di due grafici)

[10] Si osservi che questo non dipende dal fatto che la funzione $\sqrt[3]{3 - x^3}$ sia illimitata (cosa che pure è vera) ma semplicemente dal fatto che il grafico di qualsiasi funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme illimitato del piano: non è contenuto in nessun cerchio.

3.47. L'equazione $z + x^2 - y^2 = 0$ descrive una superficie quadrica, precisamente un paraboloide iperbolico. Ad ogni modo, si può vedere come grafico di una funzione di 2 variabili, $z = y^2 - x^2$continua e definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Questo spezza lo spazio in 2 regioni, sopra e sotto il grafico; E è il sopragrafico, grafico escluso. Perciò è un insieme aperto, non chiuso, illimitato, connesso.

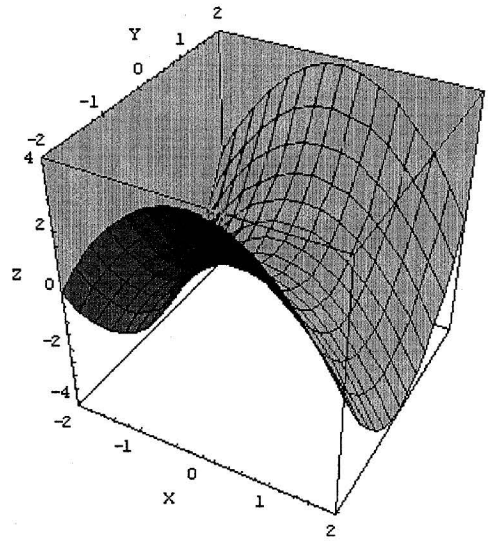


Fig. 3.13. L'insieme E è la regione tridimensionale in grigio (sopragrafico)

3.48. L'equazione $z^2 = x^2 + y^2$ descrive un cono a due falde. Questo spezza lo spazio in 3 regioni, una contenente il semiasse z per $z > 0$, una contenente il semiasse z per $z < 0$, la terza non contenente l'asse z; E rappresenta quest'ultima, compresa la superficie stessa del cono. Perciò è un insieme non aperto, chiuso, illimitato, connesso.

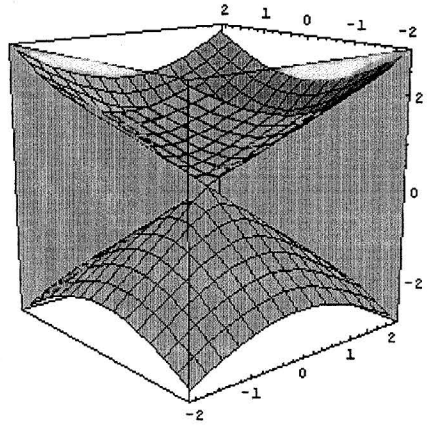


Fig. 3.14. L'insieme E è la regione tridimensionale in grigio (compresa tra le due superfici coniche)

3.49. Si veda l'esercizio precedente. Ora E rappresenta la stessa regione di prima, ma esclusa la superficie stessa del cono. Perciò è un insieme aperto, non chiuso, illimitato, acora connesso.

3.50. Si vedano i due esercizi precedenti. Ora E rappresenta l'unione delle due regioni che stanno dentro le due falde del cono, e sono disgiunte perché la superficie stessa del cono è esclusa. Perciò è un insieme aperto, non chiuso, illimitato, non connesso.

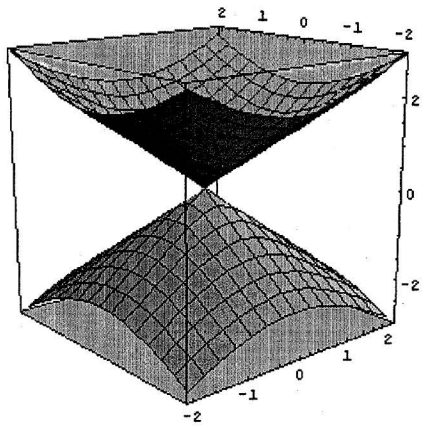


Fig. 3.15. L'insieme E è la regione tridimensionale in grigio (composta di due regioni distinte, ciascuna interna a una falda del cono)

3.51.

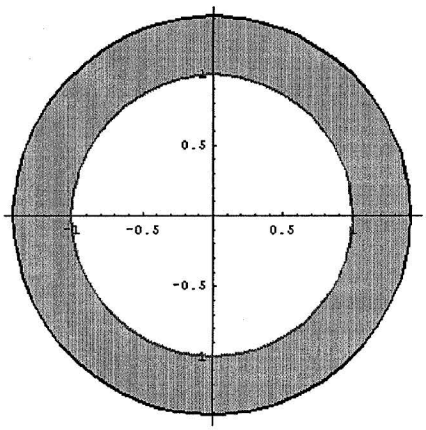


Fig. 3.16. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme, i bordi in **grigio** non appartengono

E non è aperto, non è chiuso, è limitato, è connesso.

3.52.

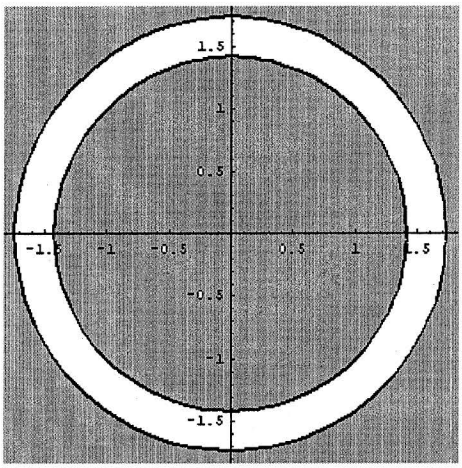


Fig. 3.17. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme

E non è aperto, è chiuso, non è limitato, non è connesso.

3.53.

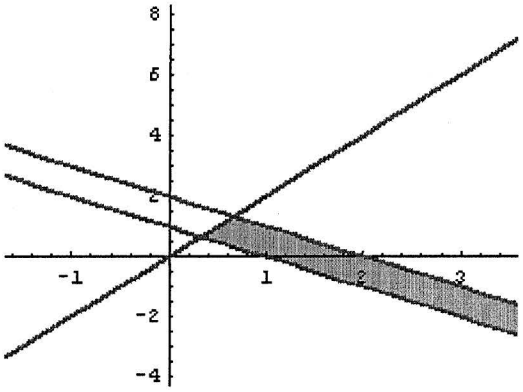


Fig. 3.18. L'insieme E è quello in grigio.
I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme

E è aperto, non è chiuso, non è limitato, è connesso.

3.54. $E = \{(x, y) : y \neq 3, x^2 + y^2 > 4\}$.

E è aperto, non chiuso, illimitato, non connesso.

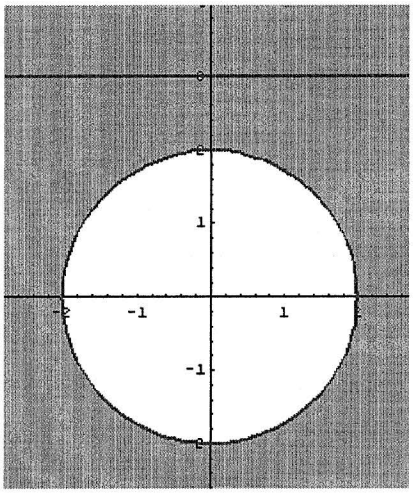


Fig. 3.19. L'insieme E è quello in grigio.
I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme

3.55. $E = \{(x, y) : y \geq x \text{ e } y > x^2\}$.

E è non aperto, non chiuso, illimitato, connesso.

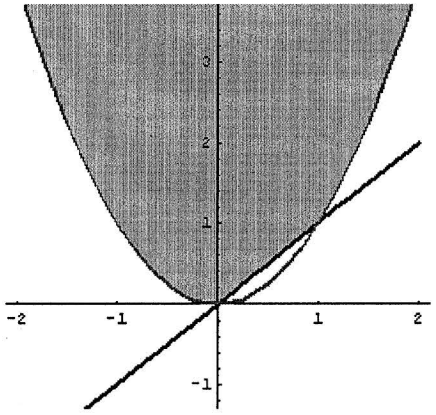


Fig. 3.20. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme,
i bordi in **grigio** non appartengono

3.56. $E = \{(x,y) : x > 0, x \neq 1, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

E è non aperto, non chiuso, limitato, non connesso.

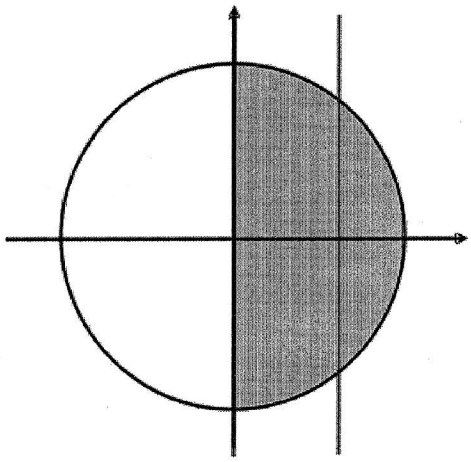


Fig. 3.21. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme, i bordi in **grigio** non appartengono

3.57.

$$E = \{(x,y) : y \neq 4, 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} = \{(x,y) : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(La condizione $y \neq 4$ è implicita nell'altra). Dunque:
E è non aperto, chiuso, limitato, connesso.

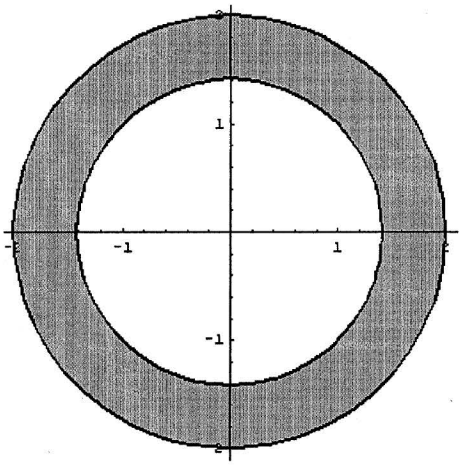


Fig. 3.22. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme

3.58. $\gamma_0 = \{(x,y) : y = x^2 - 1 \text{ o } x^2 + y^2 = 1\}$

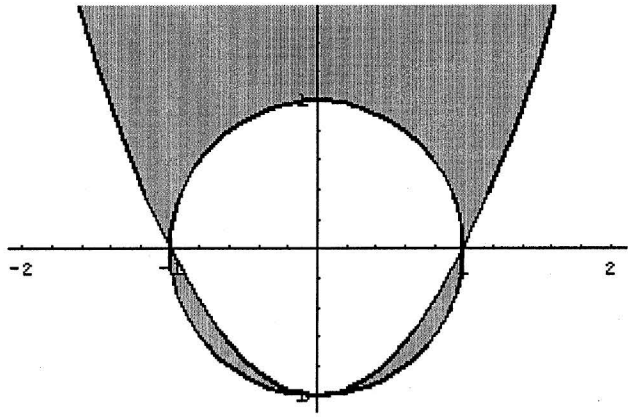


Fig. 3.23. Regione grigia: f positiva; regione bianca: f negativa

3.59. $\gamma_0 = \{(x,y) : y = 4 \text{ o } x^2 + y^2 = 3\}$

Ricordiamo che f è definita solo per $x^2 + y^2 > 2$.

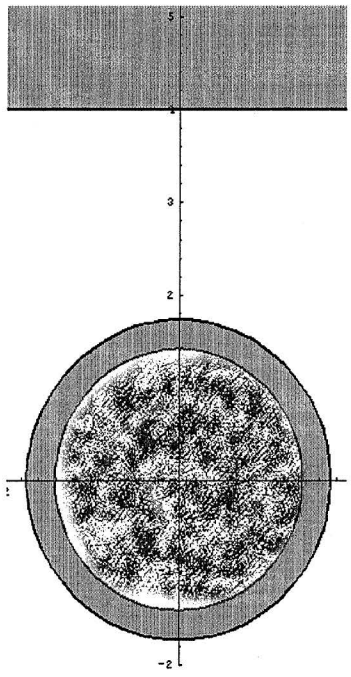


Fig. 3.24. Regione grigia: f positiva; regione bianca: f negativa; regione punteggiata: f non definita

3.60.

$$\gamma_0 = \left\{(x,y) : y = 0 \text{ o } \sqrt{x^2+y^2} = k\pi \text{ per } k = 0,1,2,...\right\}$$

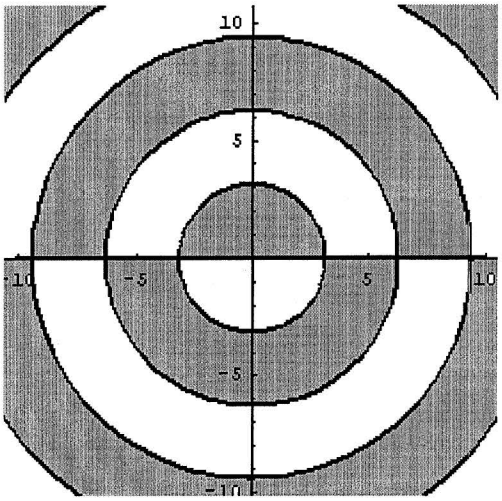


Fig. 3.25. Regione grigia: f positiva; regione bianca: f negativa

Questo esempio è particolarmente significativo alla luce dell'Osservazione 2.3: qui, più che valutare f in ciascuna regione, ragioniamo sul fatto che ad ogni attraversamento di confine il segno di f *deve* cambiare, i quanto i fattori y e $\sin\sqrt{x^2+y^2}$ si annullano su curve diverse, e sempre del prim'ordine. Basta quindi valutare il segno di f in *una* di queste regioni, e poi colorare la figura "a scacchiera".

3.61.

$$E = \left\{(x,y) : x > -1 \text{ e } \left(y > \sqrt{x^2+1} \text{ o } y < -\sqrt{x^2+1}\right)\right\}$$

E è aperto, non chiuso, limitato, non connesso

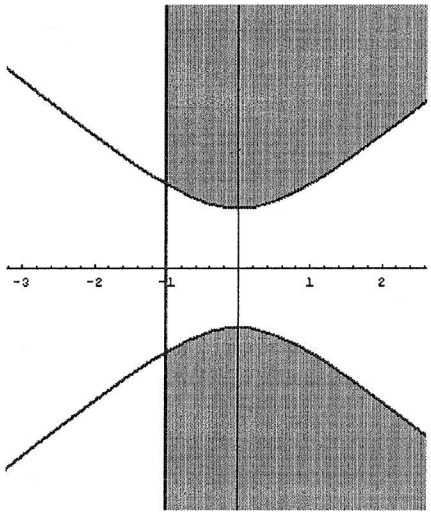
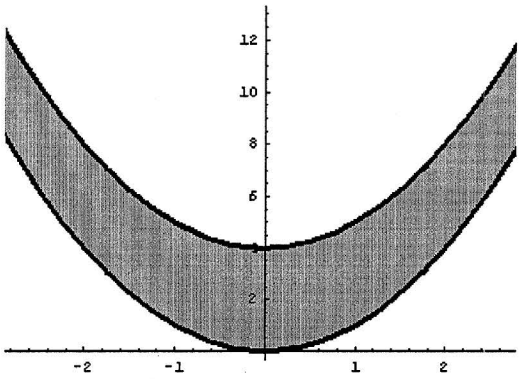


Fig. 3.26. L'insieme E è quello in grigio.
I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme

3.62. $$E = \left\{(x,y) : x^2 \leq y \leq x^2 + 4\right\}.$$

E non è aperto, è chiuso, non è limitato, è connesso.



L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme

3.63. $$E = \left\{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} > 2, y \neq 3x+1\right\}$$

E è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è connesso

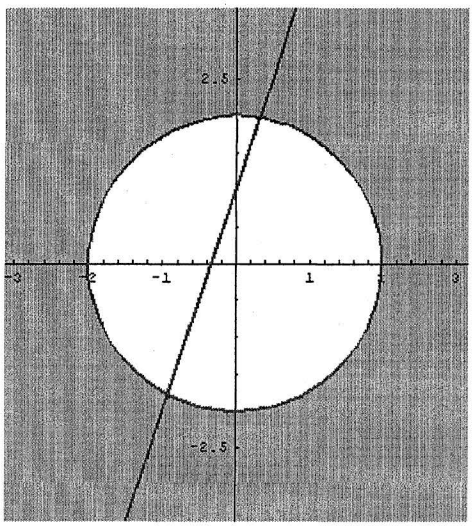


Fig. 3.27. L'insieme E è quello in grigio.
I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme

3.64. $$E = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \geq 2\right\}$$

E non è aperto; è chiuso; non è limitato; è connesso.

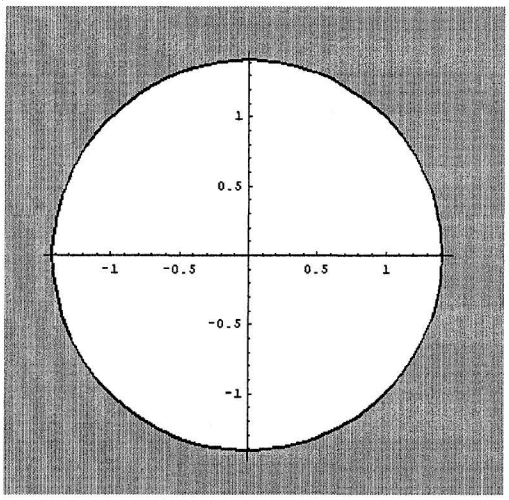


Fig. 3.28. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme,
i bordi in **grigio** non appartengono

3.65. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq e; x \neq 1\}$

E non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è connesso.

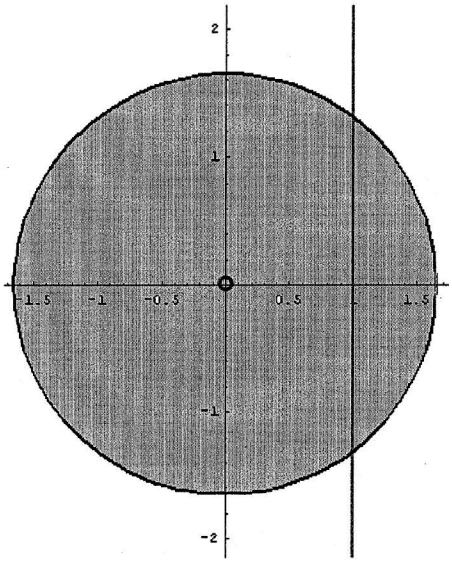


Fig. 3.29. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme, i bordi in **grigio** non appartengono; il cerchietto indica un punto rimosso

3.66.

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0, x^2 + y^2 \neq e^2; y > x^2 - 1\}$$

E è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è connesso.

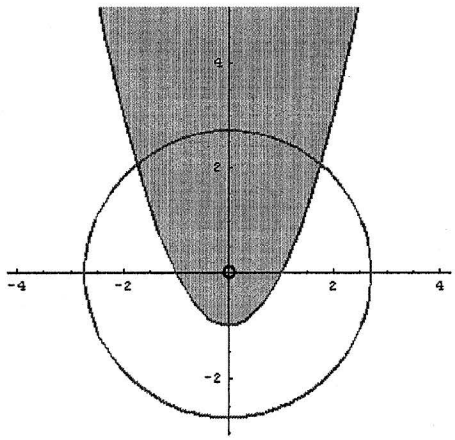


Fig. 3.30. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme; il cerchietto indica un punto rimosso

3.67. $E = \{(x,y) : x^2 < y < x^2 + e, (x,y) \neq (0,1)\}$

E è aperto, non è chiuso, non è limitato, è connesso.

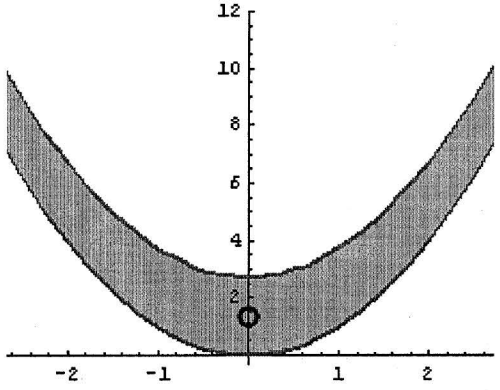


Fig. 3.31. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme; il cerchietto indica un punto rimosso

3.68. $E = \{(x,y) : 0 < y \leq 2 - (x-1)^2, x \neq 1\}$

E non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è connesso.

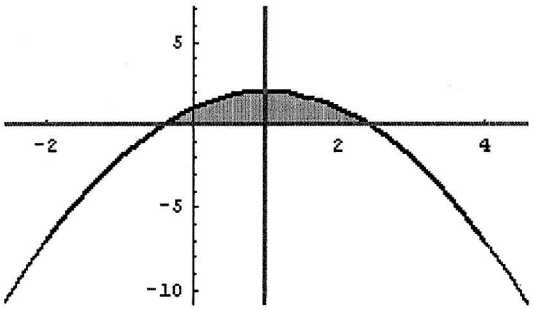


Fig. 3.32. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme, i bordi in **grigio** non appartengono

3.69. $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4, x \neq 1\}$.

E è aperto, non è chiuso, è limitato, non è connesso.

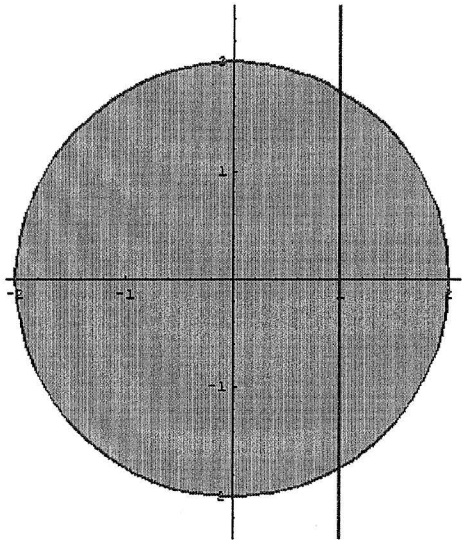


Fig. 3.33. L'insieme E è quello in grigio.
I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme

3.70. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < 1; x \neq 0, y \neq 0\}$.

E è aperto, non è chiuso, è limitato, non è connesso.

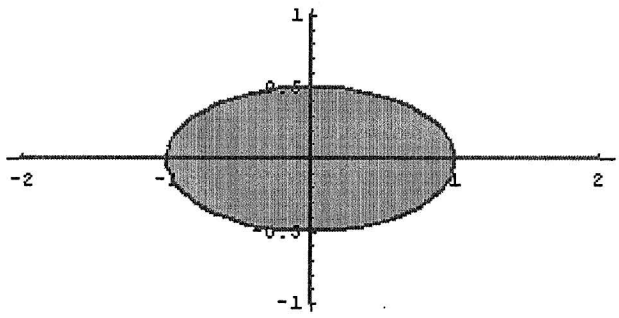


Fig. 3.34. L'insieme E è quello in grigio.
I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme

3.71.

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y < 1 \text{ o } 1 < x^2 + y < e\}.$$

E è aperto, non E è chiuso, non è limitato, non è connesso.

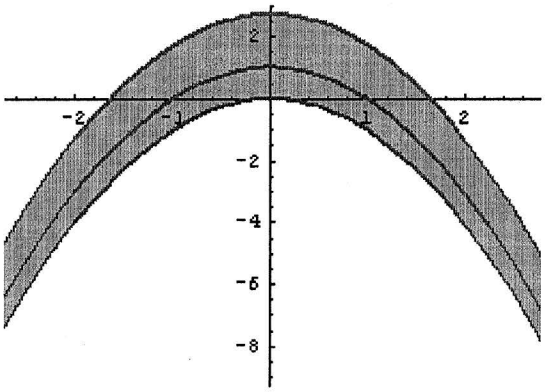


Fig. 3.35. L'insieme E è quello in grigio.
I bordi in grigio non appartengono all'insieme

3.72. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1, x^2 + y^2 < 5\}$

E è aperto, non è chiuso, è limitato, è connesso.

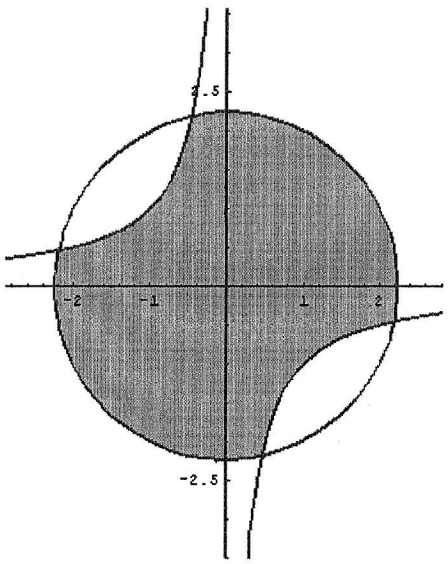


Fig. 3.36. L'insieme E è quello in grigio.
I bordi in grigio non appartengono all'insieme

3.73. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0, 3x + 2y - 4 \neq 0\}$

E non è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è connesso.

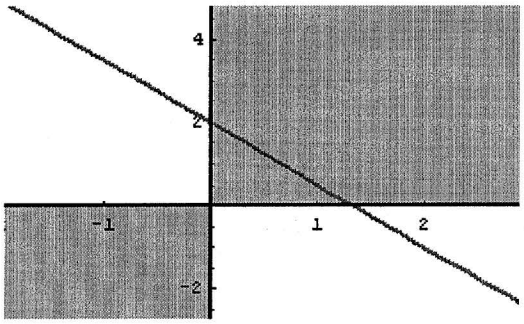


Fig. 3.37. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme, i bordi in **grigio** non appartengono

3.74. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x^2 + y^2 \leq e^4 + 2\}$

E non è aperto, non è chiuso, è limitato, è connesso.

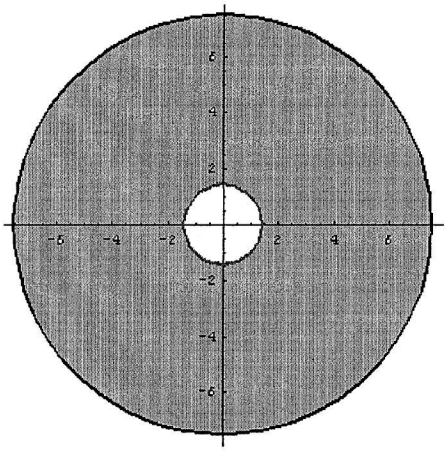


Fig. 3.38. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme, i bordi in **grigio** non appartengono

3.75. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1; 3x - 5y + 1 \geq 0\}$

E non è aperto, è chiuso, è limitato, è connesso.

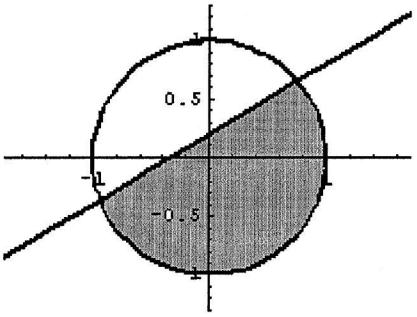


Fig. 3.39. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme

3.76. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0, x^2 + y^2 < 1\}$

E è aperto, non è chiuso, è limitato, non è connesso.

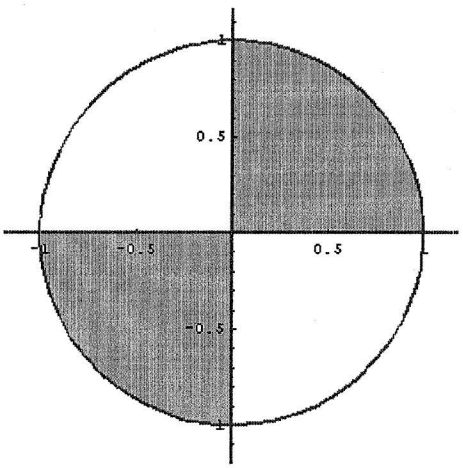


Fig. 3.40. L'insieme E è quello in grigio.
I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme

3.77. $E = \{(x,y) : x > 0, y \geq \log x, x^2 + 4y^2 > 1\}$.

E non è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è connesso.

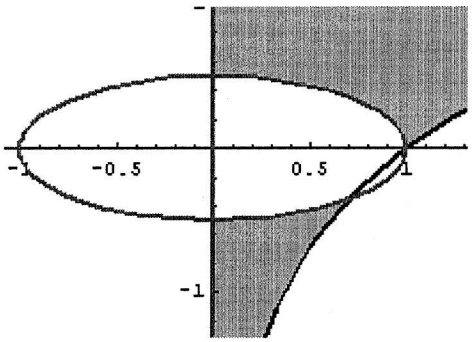


Fig. 3.41. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme, i bordi in **grigio** non appartengono

3.78. $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{9} \geq 1, x^2 + y^2 < 4\right\}$

E non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è connesso.

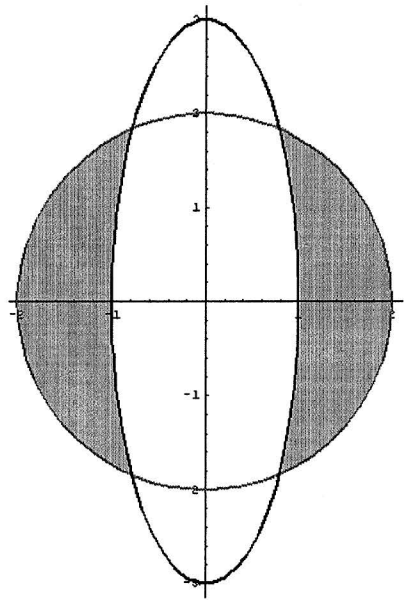


Fig. 3.42. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme, i bordi in **grigio** non appartengono

3.79.

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y < x^2 - 1, y \neq x^2 - 2\right\}$$

E non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è connesso.

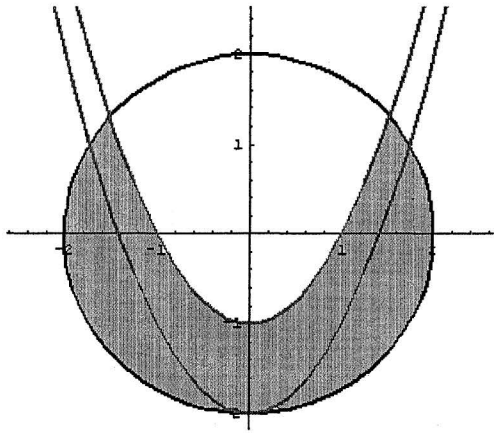


Fig. 3.43. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme, i bordi in **grigio** non appartengono

3.80.

$$E = \left\{(x, y) : y \geq -x + \sqrt{1 + \frac{1}{e}} \text{ o } y \leq -x - \sqrt{1 + \frac{1}{e}}\right\}.$$

E non è aperto, è chiuso, non è limitato, non è connesso.

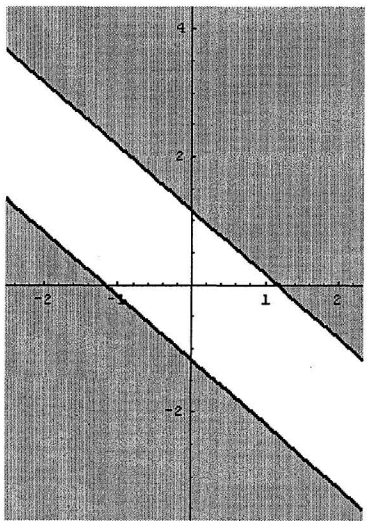


Fig. 3.44. L'insieme E è quello in grigio. I bordi in **nero** appartengono all'insieme

3.81.

a. $E = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 1 + e\}$.

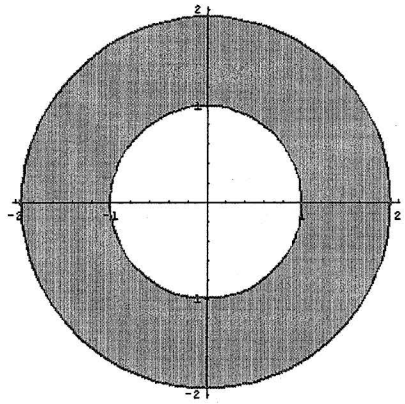


Fig. 3.45. L'insieme E è quello in grigio.
I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme

b. E è aperto, non è chiuso, è limitato, è connesso.

c. $F = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$.

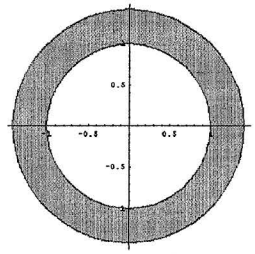


Fig. 3.46. L'insieme E è quello in grigio.
I bordi in **grigio** non appartengono all'insieme

3.4. Derivate parziali e differenziabilità

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 3, §4.

3.4.A. Calcolo di derivate parziali, piano tangente

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 3, §4.1, 4.2.

Esempi svolti

Esempio 3.8. Calcolare le derivate parziali della seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{xe^y}{x^2+y^2} \text{ per } (x,y) \neq (0,0).$$

Fuori dall'origine la funzione è derivabile in quanto composta di funzioni elementari derivabili, e possiamo calcolare la derivata parziale con le usuali regole di calcolo studiate nel calcolo differenziale in una variabile:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xe^y}{x^2+y^2}\right) =$$

derivando questa come funzione della sola x, pensando y costante

$$= \frac{e^y(x^2+y^2) - 2x(xe^y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{e^y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Analogamente, pensando ora la x come costante e la y come variabile, calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xe^y}{x^2+y^2}\right) = \frac{xe^y(x^2+y^2) - 2y(xe^y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xe^y(x^2+y^2-2y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Esempio 3.9. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = \sin(x\log y) \text{ nel punto } (x_0,y_0) = (\pi, e).$$

Calcoliamo anzitutto:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sin(x\log y)) = \cos(x\log y)\cdot \log y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin(x\log y)) = \cos(x\log y)\cdot \frac{x}{y}.$$

Quindi valutiamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi, e) = -1; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\pi, e) = -\frac{\pi}{e}; \quad f(\pi, e) = 0.$$

Perciò il piano tangente è:

$$z = f(\pi, e) + \frac{\partial f}{\partial x}(\pi, e)(x - \pi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\pi, e)(y - e)$$

cioè

$$z = -(x - \pi) - \frac{\pi}{e}(y - e)$$

ossia

$$z = -x - \frac{\pi}{e}y + 2\pi.$$

Esempio 3.10. Calcolare, se esistono, le derivate parziali indicate, nel solo punto richiesto.

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\cos(xy)\right) \text{ in } (0, 1).$$

Si chiede di calcolare le derivate parziali di una certa funzione in un punto specifico. Non essendo richieste le derivate parziali in (x, y) generico, possiamo applicare la definizione di derivata parziale come derivata rispetto ad una variabile di un'opportuna restrizione della funzione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}(f(x, y_0))_{/x=x_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\cos(xy)\right)(0, 1) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 + 1}\cos x\right)_{x=0} = 0.$$

Si osservi il primo passaggio: abbiamo anzitutto sostituito $y = 1$ nell'espressione di $f(x, y)$, ottenendo una funzione della sola x; si tratta quindi di derivare questa funzione in $x = 0$. Poiché la funzione $\sqrt{x^2 + 1}\cos x$ è certamente derivabile in $x = 0$ (perché composta di funzioni derivabili), ed è simmetrica pari, ha necessariamente derivata nulla in $x = 0$.

Se non avessimo fatto quest'ultima osservazione, avremmo potuto calcolare la derivata in x generico e poi sostituire il valore $x = 0$:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\cos x\right)_{x=0} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cos x - \sqrt{x^2+1}\sin x\right)_{/x=0} = 0.$$

Analogamente:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\cos(xy)\right)(0,1) = \frac{d}{dy}\left(\sqrt{y^2}\right)_{y=1} = \frac{d}{dy}(y)_{y=1} = 1.$$

Si osservi che $\sqrt{y^2} = |y|$, noi dobbiamo derivare questa funzione in $y = 1$, e vicino a questo punto è $|y| = y$.

Osservazione 3.4. Calcolo di derivate parziali mediante la definizione. Si confrontino i due modi di calcolare le derivate parziali usati negli Esempi 3.8 e 3.10 precedenti.

Il primo modo si può usare per funzioni di cui sappiamo a priori che le derivate parziali esistono in tutto un aperto; si calcolano allora le derivate parziali usando le regole di calcolo differenziale imparate in analisi 1, vedendo la funzione di due (o più) variabili come funzione di una sola variabile (quella rispetto a cui si deriva), mentre l'altra (le altre) resta fissata. Questo è un metodo di uso molto comune, e sicuramente quello più familiare allo studente.

Il secondo modo sfrutta fino in fondo la definizione di derivata parziale. Dovendo, ad esempio, calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

anziché (primo modo) calcolare prima

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y),$$

in un punto generico, e poi sostituire $(x, y) = (x_0, y_0)$, si sostituisce subito $y = y_0$ (il valore della variabile rispetto a cui *non* si deriva è fissato), quindi si calcola

$$\frac{d}{dx}(f(x, y_0)),$$

e infine si sostituisce $x = x_0$. Lo studente di solito preferisce il primo metodo (certamente più meccanico) e non vede che vantaggi ci siano ad usare il secondo.

Tuttavia, quando ciò che interessa è calcolare la derivata parziale *in un punto specifico*, i vantaggi ci sono:

- La funzione $f(x, y_0)$ potrebbe risultare derivabile per un certo y_0 fissato, mentre non lo è per y generico, quindi il calcolo fatto in questo modo risulta praticabile in *più* casi.
- La funzione $f(x, y_0)$ potrebbe risultare molto semplice (ad esempio: costante!) e quindi banale da derivare, mentre $f(x, y)$ potrebbe non esserlo.

Nel seguito ci riferiremo al metodo usato nell'Esempio 3.10 come "calcolo della derivata parziale usando la definizione", e al metodo usato nell'Esempio 3.8 come "calcolo della derivata parziale usando le regole di calcolo differenziale".[11]

Esercizi

Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni, nei punti indicati, semplificando le espressioni trovate.

Ulteriori esercizi sul calcolo di derivate parziali e piano tangente si trovano nel §3.6.

3.82. $3x^2y^3 - 5xy^2 + 2x^3 - 2xy$ per ogni (x, y)

3.83.★ $\dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ per $(x, y) \neq (0, 0)$;

3.84.★ $\log(xy)$ per $xy > 0$;

3.85.★ $\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$ per $y \neq 0$;

3.86.★ $\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$ per $(x, y) \neq (1, -2)$

3.87. x^y per $x > 0$.

[11] E' chiaro che si tratta di due denominazioni un po' convenzionali e criticabili (anche la prima rispetta le regole di calcolo, anche la seconda rispetta la definizione!), ma è tanto per capirci.

3.88. $\dfrac{e^{-x^2/y}}{\sqrt{y}}$ per $y > 0$.

3.89. $\sqrt[3]{x}y^2$ per $x \neq 0$.

3.90.★ $\dfrac{xy + ze^y}{x^2 + y^2 + z^2}$ per $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $z = f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) assegnato:

3.91.★ $e^{2x}\sin y$ in $\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

3.92.★ $\log(x^2 + y^4)$ in $(1, -1)$;

3.93.★ $\dfrac{xy}{x^2 + y^4}$ in $(2, 1)$;

3.94.★ $x^2 3^{-y}$ in (x_0, y_0) (punto generico)

3.95.★ $\mathrm{Sh}(xy) - \mathrm{Sh}x\mathrm{Sh}y$ in $(1, 0)$.

Calcolare, se esistono, le derivate parziali indicate, nei soli punti richiesti (in altre parole: non calcolare le derivate parziali nel punto generico (x, y), per poi sostituire le coordinate del punto richiesto; utilizzare invece la definizione di derivata parziale, come nell'Esempio 3.10):

3.96.★ $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right)$ in $(0, 1)$;

3.97.★ $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}(\sqrt[3]{x}y^3)$ in $(1, 0)$;

3.98.★ $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{e^{x^2 y}}{1 + x^3}\right)$ in $(1, 2)$;

3.99.★ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{|x|y^3}{y^2+|x|}\right)$ in $(-1,1)$;

3.100.★ $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}(\sin(xy)\sin x)$ in $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

3.101.★ $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{xy}{x^2+z^2}\right)$ in $(1,1,0)$.

3.4.B. Derivabilità, differenziabilità, derivate direzionali

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 3, §4.3, 4.4, 9.2.

Il concetto di funzione differenziabile, per funzioni di più variabili, è molto più delicato del concetto di funzione derivabile per funzioni di una variabile. Per questo motivo, in questo argomento più che mai, è assolutamente necessario aver studiato, compreso e assimilato la teoria in modo solido, prima di affrontare qualsiasi esercizio. Perciò, oltre a rimandare ai riferimenti opportuni sul libro di testo, iniziamo questo paragrafo con delle domande di verifica teorica.

Domande di comprensione teorica su derivabilità, differenziabilità, derivate direzionali

3.102. Di ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa (giustificando l'affermazione fatta). Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere le domande successive.

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

a. Si dice che f è differenziabile in $\underline{x}_0$ se le sue derivate parziali sono continue in $\underline{x}_0$.

b. Se f è continua in $\underline{x}_0$ e ha tutte le derivate parziali in $\underline{x}_0$, allora f è differenziabile in $\underline{x}_0$.

c. I termini "derivabile" e "differenziabile" hanno lo stesso significato.

d. Se f è differenziabile in $\underline{x}_0$ allora f è continua in $\underline{x}_0$.

e. Se f è differenziabile in $\underline{x}_0$ allora f è derivabile in $\underline{x}_0$.

f. Se f è derivabile in $\underline{x}_0$ allora f è continua in $\underline{x}_0$.

g. La "formula del gradiente" serve per calcolare il gradiente di una funzione.

h. Se una funzione possiede in un punto tutte le derivate parziali, allora (per la "formula del gradiente") possiede in quel punto tutte le derivate direzionali.

i. Se una funzione è derivabile in un punto, allora il gradiente indica in quel punto la direzione di massimo accrescimento.

l. Se una funzione è differenziabile in un punto, allora (per la "formula del gradiente") possiede in quel punto tutte le derivate direzionali.

m. Se una funzione è differenziabile in un punto, allora il gradiente indica in quel punto la direzione di massimo accrescimento.

3.103. Quali delle seguenti scritture possono indicare correttamente una *derivata parziale*? Per ciascuna scrittura, dire se è corretta o scorretta (possono essercene più di una corrette), nel secondo caso spiegando con precisione perché. Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere le successive.

a. $$\frac{df}{dx}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

b. $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

c. $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{e}_i) - f(\underline{x}_0)}{h\underline{e}_i}$$

d. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}[f(x, y_0)]_{/x=x_0}$$

e. $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{e}_i) - f(\underline{x}_0)}{h}$$

3.104. Quali delle seguenti scritture indicano correttamente la *definizione* di derivata direzionale? Per ciascuna scrittura, dire se è corretta o scorretta (possono essercene più di una corrette), nel secondo caso spiegando con precisione perché. Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere le successive.

a. $$D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$$

b. $$D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0) = \frac{d}{dt}[f(\underline{x}_0 + t\underline{v})]_{/t=0}$$

c. $$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\cos\vartheta, y_0 + h\sin\vartheta) - f(x_0, y_0)}{h}$$

con $\underline{v} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$

d. $$D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{h\underline{v}}$$

e. $$D_{\underline{v}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\cos\vartheta, y_0 + h\sin\vartheta) - f(x_0, y_0)}{h}$$

con $\underline{v} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$

f. $$D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{h}$$

3.105. Di ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa (giustificando l'affermazione fatta). Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere le domande successive.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e sia γ una curva regolare passante per (x_0, y_0), che è una linea di livello di f. Allora:

a. $\nabla f(x_0, y_0)$ è tangente a γ in (x_0, y_0).
b. La derivata direzionale di f nella direzione tangente a γ è nulla.
c. La derivata direzionale di f nella direzione perpendicolare a γ è nulla.
d. $\nabla f(x_0, y_0)$ è perpendicolare a γ in (x_0, y_0).

3.106. Di ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa (giustificando l'affermazione fatta). Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere le domande successive.

Sotto opportune ipotesi di componibilità e differenziabilità delle funzioni coinvolte, valgono le seguenti identità, per $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \underline{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:

a. $\nabla[f(\underline{r}(t))] = \nabla f(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)$
b. $\frac{d}{dt}[f(\underline{r}(t))] = f'(\underline{r}(t)) \cdot \nabla \underline{r}(t)$
c. $\frac{d}{dt}[f(\underline{r}(t))] = \nabla f(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)$
d. $\nabla[f(\underline{r}(t))] = f'(\underline{r}(t)) \cdot \nabla \underline{r}(t)$

Domande di comprensione teorica sulle funzioni omogenee

Poiché negli svolgimenti degli esercizi sulla differenziabilità utilizzeremo sistematicamente i criteri visti per funzioni omogenee, invitiamo il lettore, dopo aver studiato attentamente questa parte (v. [BPS2], cap.3, §9.2) ad affrontare le prossime domande di verifica.

Di ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa (possono esserci più risposte vere). Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere la successiva.

3.107. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice *positivamente omogenea di grado* $\alpha \in \mathbb{R}$ se:

a. f è omogenea di esponente α positivo.
b. $f(\lambda^\alpha \underline{x}) = \lambda f(\underline{x}) \; \forall \lambda > 0 \; \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{x} \neq \underline{0}$.
c. $f(\lambda \underline{x}) = \lambda^\alpha f(\underline{x}) \; \forall \lambda > 0 \; \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{x} \neq \underline{0}$.
d. $f(\alpha \underline{x}) = \alpha f(\underline{x}) \; \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{x} \neq \underline{0}$.

3.108. Sia $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Allora:

a. Se $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$ è positivamente omogenea di grado α, i suoi valori in Σ determinano i suoi valori in tutto $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$.

b. Se $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$ è positivamente omogenea di grado α ed è continua in Σ, allora è continua in tutto $\mathbb{R}^n$.

c. Se $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$ è positivamente omogenea di grado α ed è continua in Σ, allora è continua in tutto $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$.

d. Se $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$ è positivamente omogenea di grado $\alpha > 0$ ed è continua in Σ, allora è continua in tutto $\mathbb{R}^n$.

3.109. Se $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$ è positivamente omogenea di grado $1/3$, allora (scegliere una sola risposta tra le seguenti):

a. f è continua in $\underline{0}$.
b. f è discontinua in $\underline{0}$.
c. f può essere continua o discontinua in $\underline{0}$.

3.110. Se $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$ è continua fuori dall'origine e positivamente omogenea di grado $1/3$, allora (scegliere una sola risposta tra le seguenti):

a. f è differenziabile in $\underline{0}$.
b. f non è differenziabile in $\underline{0}$.
c. f può essere o non essere differenziabile in $\underline{0}$.

Cogliamo l'occasione per ricordare qui anche il seguente risultato per *funzioni radiali*, che useremo talvolta accanto ai risultati validi per funzioni omogenee:

Teorema 3.5. (Criterio di continuità e differenziabilità per funzioni radiali). *Sia* $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$ *una funzione radiale, cioè* $f(\underline{x}) = g(|\underline{x}|)$ *con* $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *e sia* f *continua fuori dall'origine. Allora:*

a. f *è continua in* $\underline{0}$ *se e solo se esiste finito* $\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho)$;

b. f *è differenziabile in* 0 *se e solo se esiste* $g'(0) = 0$.

La dimostrazione è un facile esercizio.

Esempi svolti

Esempio 3.11. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{3/5}y^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

a. Stabilire in quali punti del piano è derivabile, calcolando esplicitamente le derivate in tal caso (semplificare le espressioni trovate!);

b. Stabilire in quali punti del piano è differenziabile;

c. Determinare il più grande insieme aperto A del piano in cui f è C^1.

a. Osserviamo che, fuori dall'origine, la funzione è certamente derivabile se $x \neq 0$ (notare che la funzione di una variabile $x^{3/5}$ non è derivabile per $x = 0$). Di più, possiamo osservare fin da subito che f è C^1 nell'aperto[12] $\{x \neq 0\}$ e quindi è certamente differenziabile in quell'aperto (condizione sufficiente di differenziabilità, v. [BPS2], cap.3, §4.3, Teorema 3.8).

Calcoliamo, per $x \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{3}{5x^{2/5}}y^3(x^2+y^2) - 2x\left(x^{3/5}y^3\right)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3y^5 - 7x^2y^3}{5x^{2/5}(x^2+y^2)^2}$$

[12] Notiamo che per affermare che f è C^1 nell'aperto $\{x \neq 0\}$ non è necessario calcolare preventivamente le derivate parziali: è sufficiente *osservare la forma analitica della funzione* $f(x,y)$ e notare che è composta di funzioni elementari regolari, tranne che per $x = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3x^{3/5}y^2(x^2+y^2) - 2y\left(x^{3/5}y^3\right)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^{3/5}y^4 + 3x^{13/5}y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Nei punti $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ f non è derivabile (perché $x^{3/5}$ non è derivabile in $x = 0$).

In $(0,0)$ invece f è derivabile con derivate nulle, perché è identicamente nulla sugli assi; esplicitamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}(f(x,0))_{/x=0} = \frac{d}{dx}(0) = 0$$

(e analogamente per $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$).

b-c. Abbiamo già osservato che $f \in C^1(A)$ con $A = \{x \neq 0\}$, ed è perciò ivi differenziabile.

Nei punti $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ f non è differenziabile perché non è derivabile.

Rimane da studiare l'origine. E' importante che lo studente capisca *perché* questo punto va studiato a parte. Da una parte, l'origine non appartiene all'aperto in cui f è C^1, quindi non c'è un motivo ovvio per affermare che f *è* differenziabile; d'altro canto, la funzione nell'origine è derivabile (con derivate parziali nulle), quindi non c'è un motivo ovvio per affermare che *non è* differenziabile. In queste situazioni, solitamente occorre rimboccarsi le maniche ed applicare la *definizione* di differenziabilità, che coinvolge il calcolo di un limite in due variabili ed è quindi un po' delicata.

In questo esercizio, però, siamo facilitati dal fatto che f è una funzione continua fuori dall'origine e omogenea di grado $1 + \frac{3}{5} > 1$. Infatti

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{3+\frac{3}{5}-2}\frac{x^{3/5}y^3}{x^2+y^2}.$$

Perciò, per le proprietà delle funzioni positivamente omogenee (v. [BPS2], cap.3, §9.2, Teorema 3.32), f è differenziabile nell'origine.

Esempio 3.12. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire in quali punti del piano è derivabile, calcolando esplicitamente le derivate in tal caso;

b. Stabilire in quali punti del piano è differenziabile;

c. Determinare il più grande insieme aperto A del piano in cui f è C^1.

a. Per $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione è derivabile (anzi, nell'aperto $\{(x,y) \neq (0,0)\}$ f è C^1 e quindi differenziabile). Calcoliamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2-4xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{8y^3(x^2+y^2) - 2y(x^3+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4y^5+8x^2y^3-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

Calcoliamo in base alla definizione le derivate in $(0,0)$.

$$f(x,0) = x; \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1;$$

$$f(0,y) = 2y^2; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

b.-c. $f \in C^1(A)$ con $A = \{(x,y) \neq (0,0)\}$ (questo si stabilisce semplicemente osservando la forma analitica della funzione), e perciò è ivi differenziabile.

Studiamo la differenziabilità nell'origine. Occorre verificare se

$$f(x,y) - f(0,0) - x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

per $(x,y) \to (0,0)$, ossia se:

$$f(x,y) - x = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad \text{per } (x,y) \to (0,0).$$

Esplicitamente, ciò significa dimostrare che per $(x,y) \to (0,0)$ il seguente quoziente tende a zero:

$$\frac{f(x,y)-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2y^4 - xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \qquad (*)$$

$$= \frac{2y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \equiv g_1(x,y) + g_2(x,y).$$

Ora g_1 è positivamente omogenea di grado 1, continua fuori dall'origine, perciò

tende a zero per $(x,y) \to (0,0)$, mentre g_2 è positivamente omogenea di grado 0 (senza essere costante), perciò non ammette limite.

Quindi il quoziente $(*)$ non tende a zero, e f *non è* differenziabile nell'origine.

Esempio 3.13. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Calcolare le derivate direzionali di f nell'origine per un generico versore $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$.

b. Verificare se vale o no la formula del gradiente. Di conseguenza, si può dire se la funzione è differenziabile nell'origine o no?

a. $$g(t) = f(t\cos\vartheta, t\sin\vartheta) = \frac{t\cos\vartheta\sin(t^2)}{t^2(\cos^2\vartheta + t^2\sin\vartheta)}.$$

Per $\cos\vartheta \neq 0$ e $t \to 0$,

$$g(t) \sim \frac{t^3\cos\vartheta}{t^2\cos^2\vartheta} = \frac{t}{\cos\vartheta}; \quad D_{\underline{v}}f(0,0) = g'(0) = \frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Per $\cos\vartheta = 0$ abbiamo $g(t) = 0$ e $D_{\underline{v}}f(0,0) = 0$.

b. La formula del gradiente non vale, in quanto

$$\underline{v} \cdot \nabla f(0,0) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \cdot (1,0) = \cos\vartheta$$

mentre $$D_{\underline{v}}f(0,0) = \frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Perciò la funzione certamente non è differenziabile nell'origine (in quanto se fosse differenziabile, certamente varrebbe la "formula del gradiente", v. [BPS2], cap.3, § 4.4, Teorema 3.9).

Esempio 3.14. Stabilire se la seguente funzione è continua, derivabile, differenziabile in $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\log(x^2+y^2)} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Per come è definita f, verificare la continuità significa provare che $f(x,y) \to (0,0)$ per $(x,y) \to (0,0)$. Cerchiamo di dimostrare questo, cercando una maggiorante di f radiale infinitesima (come abbiamo visto nel §3.2).

$$\left|\frac{x}{\log(x^2+y^2)}\right| = \left|\frac{\rho\cos\vartheta}{2\log\rho}\right| \leq \frac{\rho}{2|\log\rho|} \to 0 \text{ per } \rho \to 0,$$

quindi f è continua in $(0,0)$.

Calcoliamo le derivate parziali nell'origine, in base alla definizione.

$$f(x,0) = \begin{cases} \frac{x}{\log(x^2)} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

perciò $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\log(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log(x^2)} = 0.$$

Si noti che in questo caso la definizione analitica di $f(x,0)$ costringe a calcolare la derivata come limite del rapporto incrementale.

Inoltre $$f(0,y) = 0; \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0.$$

In particolare, f è derivabile.

f allora è differenziabile in $(0,0)$ se risulta $f(x,y) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

$$\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{\rho\cos\vartheta}{2\rho\log\rho}\right| \leq \frac{1}{2|\log\rho|} \to 0 \text{ per } \rho \to 0,$$

quindi (criterio della maggiorante radiale infinitesima), $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, e f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizi

3.111.★ Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-3y^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Calcolare le derivate parziali di f per $(x,y) \neq (0,0)$ (semplificando le espressioni ottenute).

b. Calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$ e stabilire se f è differenziabile nell'origine.

c. Determinare il più grande insieme aperto A del piano in cui f è C^1.

3.112.★ Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^3+x^2y^2+2xy^2+4y^5}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$ e stabilire se f è differenziabile nell'origine.

b. Calcolare la derivata direzionale $D_{\underline{v}}f(0,0)$ per $\underline{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$, giustificando il procedimento seguito.

3.113.★ Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y-2x^3-2xy^2}{x^2+y^2+x^2y^2} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua o meno nell'origine.
b. Stabilire se f è derivabile o meno nell'origine.
c. Stabilire se f è differenziabile o meno nell'origine.

3.114.★ Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{-x^2/y^2}}{x^2+y^2} & \text{per } y\neq 0\\ 0 & \text{per } y=0.\end{cases}$$

a. Stabilire se esistono le derivate parziali di f nei punti dell'asse x (ossia nel generico punto $(x_0,0)$ con $x_0\in\mathbb{R}$), calcolandole in caso affermativo.

b. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}$ nei punti che non stanno sull'asse x (ossia nel generico punto (x,y) con $y\neq 0$).

3.115.★ Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(e^x-e^{2y})(x-y)^2}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Stabilire se esistono le derivate parziali di f nell'origine, e calcolarle esplicitamente.

b. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nell'origine (non si richiede di verificare se f è differenziabile o no).

3.116.★ Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(\log(x+2)-\log(y+2))(2x-3y)^2}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Stabilire se esistono le derivate parziali di f nell'origine, e calcolarle esplicitamente.

b. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nell'origine (non si richiede di verificare se f è differenziabile o no).

3.117.★ Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Calcolare la derivata direzionale di f nell'origine rispetto al generico versore $(\cos\vartheta,\sin\vartheta)$.

b. Stabilire se nell'origine vale la formula del gradiente.

c. Stabilire se f è differenziabile o meno nell'origine.

3.118.★ Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^6+y^6}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Stabilire in quali punti del piano è derivabile, calcolando esplicitamente le derivate in tal caso (e semplificare le espressioni trovate);

b. Stabilire in quali punti del piano è differenziabile;

3.119.★ Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y+x^3-2y^3}{x^2+y^2+x^2y^2} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Stabilire se è derivabile o meno nell'origine, calcolando esplicitamente le derivate *in tal punto* (*non* si chiede di calcolare le derivate in *ogni* punto del piano);

b. Stabilire se nell'origine è differenziabile o meno.

3.120.★ Sia

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y)\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Calcolare *in base alla definizione* le derivate direzionali $D_{\underline{v}}f(0,0)$ nell'origine, con $\underline{v}=(\cos\vartheta,\sin\vartheta)$, ed in particolare le derivate parziali.

b. Osservare se in questo caso la formula del gradiente è verificata oppure no. Cosa si può concludere riguardo alla differenziabilità di f nell'origine?

3.121.★ Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)+xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Stabilire se *nell'origine* f è continua e se è differenziabile, giustificando le proprie conclusioni in base a criteri studiati.

b. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}$ in tutti i punti del piano e stabilire se $\frac{\partial f}{\partial x}$ è continua nell'origine.

(Suggerimento: *non* cercare di dedurre il punto *a* dal calcolo delle derivate parziali in (x,y) generico, cioè dal punto *b*, ma studiare la funzione *nell'origine*, in base ai criteri studiati).

3.122.★ Calcolare le derivate parziali della seguente funzione in tutti i punti in cui esistono. Scrivere poi l'equazione del piano tangente in $(1,2)$.

$$f(x,y)=\begin{cases}x\log(x^2+y^2) & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

3.123.★ Calcolare in base alla definizione la derivata direzionale della seguente funzione nell'origine, rispetto a un generico versore $(\cos\vartheta,\sin\vartheta)$. Calcolare in particolare le derivate parziali nell'origine, e stabilire se in questo caso vale la formula del gradiente.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Stabilire se la seguente funzione è differenziabile nell'origine (dopo averla eventualmente ridefinita nell'origine per renderla continua). "Stabilire" significa: dimostrare che lo è o che non lo è, applicando criteri o teoremi studiati.

3.124. $$f(x,y) = \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

3.125. $$f(x,y) = \frac{\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

3.126. $$f(x,y) = \frac{x^{7/3}|y|^{3/4}}{x^2+y^2}$$

3.127. $$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot e^{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)}$$

3.128.★ $$f(x,y) = \left(e^{\sin x}-1\right)\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

3.129.★ $$f(x,y) = \left(e^{\sin x}-e^{\cos y}\right)\frac{xy}{x^2+y^2}$$

3.130.★ $$f(x,y) = e^{\sin x}\left(\frac{x^2y^2-2xy^4}{x^2+y^2}\right)$$

3.131.★ $$f(x,y) = \frac{\left(x^3+y^3\right)^2}{x^2+y^4}$$

Stabilire in quale sottoinsieme del piano la seguente funzione è derivabile, e in quale è differerenziabile. "Stabilire" significa: dimostrare che lo è o che non lo è, applicando criteri o teoremi studiati, o eseguendo calcoli opportuni.

3.132.★ $$f(x,y) = \sqrt[3]{x}\cdot y^{4/5}$$

3.133.★ $$f(x,y) = (x-1)^{3/5}\cdot y^{4/3}$$

3.134.★ $f(x,y) = xe^{\sqrt{x^2+y^2}}$

3.135. Sia

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Calcolare le derivate parziali di $f(x,y)$ in tutti i punti del piano. (Suggerimento: trattare separatamente il caso $(x,y) = (0,0)$). Scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $(2,1)$.

3.136. Sia

$$f(x,y) = x\sqrt[3]{y}$$

Calcolare le derivate parziali di $f(x,y)$. (Suggerimento: trattare separatamente i punti $y = 0$). Calcolare la derivata direzionale nel punto $(1,-1)$ secondo il vettore $\underline{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.137.★ Sia

$$f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$$

Calcolare le derivate parziali di $f(x,y)$. (Suggerimento: trattare separatamente il punto $(x,y) = (0,0)$). Scrivere il differenziale di f nel punto $(-1,1)$.

3.138.★ Sia

$$f(x,y) = y\log(x^2+y^2)$$

Calcolare le derivate parziali di $f(x,y)$. (Suggerimento: trattare separatamente il punto $(x,y) = (0,0)$). Scrivere il versore che indica la direzione di massima crescita di f nel punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

3.139. Sia

$$f(x,y) = \sqrt[3]{y^2(x+1)} + y.$$

a. Calcolare le derivate parziali di f in tutti i punti in cui esistono.
b. Qual è il più grande aperto A di $\mathbb{R}^2$ in cui f è C^1?
c. Dire se f è differenziabile in $(0,1)$, giustificando la risposta.

d. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(0,1)$.

3.140. Sia

$$f(x,y) = x^y.$$

a. Calcolare le derivate parziali di f in tutti i punti del semipiano $x > 0$.
b. Provare che f è differenziabile in tutto il semipiano $x > 0$.
c. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(e,2)$.
d. Calcolare la derivata direzionale $D_{\underline{v}} f(2,2)$ per $\underline{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, giustificando il procedimento seguito.

3.141.★ Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

a. Calcolare le derivate parziali di f in tutti i punti in cui esistono.
b. Qual è il più grande aperto A di $\mathbb{R}^2$ in cui f è C^1?
c. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(3,2)$.
d. Calcolare, mediante la definizione, la derivata direzionale $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per il generico versore $\underline{v} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$. Provare poi a calcolare $D_{\underline{v}} f(0,0)$ usando la "formula del gradiente". Cosa si osserva? f è differenziabile in $(0,0)$?

3.142.★ Sia

$$f(x,y) = \sqrt[3]{y} e^{-x^2 y}$$

a. Calcolare le derivate parziali di f in tutti i punti in cui esistono.
b. Qual è il più grande aperto A di $\mathbb{R}^2$ in cui f è C^1?
c. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $\left(\sqrt{2}, 1\right)$.
d. Calcolare la derivata direzionale $D_{\underline{v}} f\left(\sqrt{2}, 1\right)$ per il generico versore $\underline{v} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, giustificando il procedimento seguito.

3.143. Sia

$$f(x,y) = y e^{\sqrt[3]{x}}.$$

a. Calcolare le derivate parziali di f in tutti i punti in cui esistono.
b. Qual è il più grande aperto A di $\mathbb{R}^2$ in cui f è C^1?

c. Dire se f è differenziabile in $(1,-1)$, giustificando la risposta.
d. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1,-1)$.
e. Calcolare, mediante la definizione, la derivata direzionale $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per il generico versore $\underline{v} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$.

3.144.★ Sia

$$f(x,y) = \frac{x^2 \sqrt[3]{y}}{x^2+y^2}.$$

Si dica (giustificando la risposta) in quale insieme del piano la funzione f risulta:
a. continua;
b. derivabile;
c. differenziabile.

3.145.★ Sia

$$f(x,y) = \frac{x \sqrt[3]{y}}{1+x^2+y^2}.$$

Si dica (giustificando la risposta) in quale insieme del piano la funzione f risulta:
a. continua;
b. derivabile;
c. differenziabile.

3.146.
a. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \log\left(2+\frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

b. Nel caso tale limite l esista finito, prolungare con continuità la funzione ponendo $f(0,0) = l$, e calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$.
c. Stabilire quindi se f è differenziabile nell'origine.

3.147. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{7/3}y^{5/3}}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}.$$

a. Calcolare le derivate parziali di f in ogni punto del piano.
b. Stabilire se le derivate parziali di f sono continue in tutto il piano.

c. Stabilire se la funzione è differenziabile nell'origine.

3.148. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^4+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}.$$

Stabilire su quale sottoinsieme del piano la funzione è:

a. Continua;

b. derivabile;

c. differenziabile.

3.149.

a. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xe^{\frac{xy}{x^2+y^2}}.$$

b. Nel caso tale limite l esista finito, prolungare con continuità la funzione ponendo $f(0,0) = l$, e calcolare quindi le derivate parziali di f in $(0,0)$.

c. Stabilire quindi se f è differenziabile nell'origine.

3.4.C. Derivazione di funzioni composte

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 3, §4.5.

Esercizi

3.150. Sia

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2}\sin y}{1+x^2+y^2}.$$

a. Calcolare le derivate parziali di f nel generico punto (x,y) e semplificare le espressioni ottenute.

b. Detta $\underline{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \underline{r}(t) = (a(t), b(t))$ un generico arco di curva regolare nel piano e f la funzione considerata al punto *a*, calcolare la derivata della funzione composta:

$$\frac{d}{dt}[f(\underline{r}(t))].$$

3.151. Sia $f(x,y)$ una funzione differenziabile in $\mathbb{R}^2$, e si consideri la curva:

$$\underline{r}(t) = (2\cos t, 3\sin t) \text{ per } t \in [0, 2\pi].$$

Scrivere la formula che assegna la derivata di $f(\underline{r}(t))$.

3.152. Sia

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^4)}$$

e sia $$\underline{r}(t) = (x(t), y(t)) \text{ per } t \in [a,b]$$

un arco di curva regolare. Scrivere la formula che assegna la derivata di $f(\underline{r}(t))$.

3.153. Sia $f(x,y)$ una funzione differenziabile in $\mathbb{R}^2$, e sia

$$g(x,y) = xe^{f(x,y)}.$$

Scrivere la formula che assegna il gradiente di g.

3.154. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Scrivere la formula che assegna il gradiente di

$$f(x,y) = g\big(x^2 \sin^3 y\big).$$

3.155. Sia $\underline{r}(t) = (\alpha(t), \beta(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare, $g(x,y) = x^2 e^y$, e sia $f(t) = g(\underline{r}(t))$. Scrivere l'espressione di $f'(t)$ e di $f'(2)$.

3.156. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile, e sia $f(t) = g(t^2, e^t)$. Scrivere l'espressione di $f'(t)$ e di $f'(2)$.

3.157. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, e sia $f(x,y) = g(x^2 + y^2)$. Scrivere l'espressione di $\nabla f(x,y)$ e di $\nabla f(2,1)$.

3.158. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile e positiva, e sia $f(x,y) = \log(g(x,y))$. Scrivere l'espressione di $\nabla f(x,y)$, e valutare $\nabla f(1,0)$.

Caratteristica dei prossimi due esercizi (tranne il punto c del secondo) è essere ambientato in $\mathbb{R}^n$ con n qualsiasi. Va svolto per n qualsiasi (e non per $n = 2$ o 3), usando le opportune notazioni.

3.159.★ Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(\underline{x}) = e^{-|\underline{x}|}, \text{ per } \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

a. Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$ per $i = 1, 2, ..., n$.

b. Scrivere esplicitamente e semplificare l'espressione:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}).$$

3.160.★ Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(\underline{x}) = \log^2 |\underline{x}|, \text{ per } \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus (0, 0).$$

a. Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$ per $i = 1, 2, ..., n$.

b. Detto $\underline{r}(t) : I \to \mathbb{R}^n$ un arco di curva regolare, calcolare

$$\frac{d}{dt}[f(\underline{r}(t))]$$

dove f è la funzione del punto *a*, e semplificare l'espressione ottenuta.

c. Applicare la formula trovata al punto *b* alla curva $\underline{r} : (0, 1) \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\underline{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$$

e semplificare l'espressione trovata.

Soluzioni § 3.4

3.82. $$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3 - 5y^2 + 6x^2 - 2y;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2 - 10xy - 2x.$$

3.83. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^4) - 2x(xy^2)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{y^2(-x^2+y^4)}{(x^2+y^4)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy(x^2+y^4) - 4y^3(xy^2)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}.$$

3.84. $\log(xy) = \log|x| + \log|y|$, perciò

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}.$$

3.85. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

3.86. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}} = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y+2}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}.$$

3.87. $$\frac{\partial f}{\partial x} = (y-1)x^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x.$$

3.88. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2xe^{-x^2/y}}{y\sqrt{y}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2/y}\left(\frac{x^2\sqrt{y}}{y^2} - \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)\frac{1}{y}$$

3.89.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{3x^{2/3}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\sqrt[3]{x}y.$$

3.90.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2+z^2) - 2x(xy+ze^y)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{y(-x^2+y^2+z^2) - 2xze^y}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x+ze^y)(x^2+y^2+z^2) - 2y(xy+ze^y)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{e^y(x^2+y^2+z^2) - 2z(xy+ze^y)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{e^y(x^2+y^2-z^2) - 2xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

3.91.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x}\sin y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x}\cos y$$

$$\nabla f\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); f\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Piano tangente:
$$z = \frac{1}{2} + x + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{\pi}{6}\right).$$

3.92.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^4}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y^3}{x^2+y^4}$$

$$\nabla f(1,-1) = (1,-2); f(1,-1) = \log 2$$

Piano tangente:
$$z = \log 2 + (x-1) - 2(y+1).$$

3.93.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^4) - 2x(xy)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{y(-x^2+y^4)}{(x^2+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^4) - 4y^3(xy)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{x(x^2-3y^4)}{(x^2+y^4)^2}$$

$$\nabla f(2,1) = \left(-\frac{3}{25}, \frac{2}{25}\right); f(2,1) = \frac{2}{5}$$

Piano tangente: $$z = \frac{2}{5} - \frac{3}{25}(x-2) + \frac{2}{25}(y-1)$$

ossia $$z = \frac{14}{25} - \frac{3}{25}x + \frac{2}{25}y.$$

3.94. $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x3^{-y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 3^{-y}\log 3;$$

Piano tangente:

$$z = x_0^2 3^{-y_0} + 2x_0 3^{-y_0}(x - x_0) - x_0^2 3^{-y_0}\log 3(y - y_0)$$

3.95. $$\frac{\partial f}{\partial x} = y\mathrm{Ch}(xy) - \mathrm{Ch}x\mathrm{Sh}y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\mathrm{Ch}(xy) - \mathrm{Sh}x\mathrm{Ch}y$$

$$\nabla f(1,0) = (0, 1 - \mathrm{Sh}1); f(1,0) = 0$$

Piano tangente: $$z = (1 - \mathrm{Sh}1)y.$$

3.96. $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)_{/(0,1)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)_{/(0)} = 1$$

perché $$\frac{x}{1+x^2} \sim x \text{ per } x \to 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)_{/(0,1)} = \frac{d}{dy}(0)_{/(1,0)} = 0;$$

3.97. $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[3]{x}y^3\right)_{/(1,0)} = \frac{d}{dx}(0) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt[3]{x}y^3\right)_{/(1,0)} = \frac{d}{dy}\left(y^3\right)_{/(0)} = 0.$$

3.98. $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{x^2 y}}{1+x^3}\right)_{/(1,2)} = \frac{d}{dy}\left(\frac{e^y}{2}\right)_{/(2)} = \left(\frac{e^y}{2}\right)_{/(2)} = \frac{e^2}{2}.$$

3.99.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{|x|y^3}{y^2+|x|}\right)_{/(-1,1)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)_{/(-1)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x-1}\right)_{/(-1)} =$$

$$= \left(\frac{x-1-x}{(x-1)^2}\right)_{/(-1)} = -\frac{1}{4}.$$

3.100.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sin(xy)\sin x)_{/(\frac{\pi}{2},1)} = \frac{d}{dx}(\sin^2 x)_{/(\frac{\pi}{2})} = (2\sin x\cos x)_{/(\frac{\pi}{2})} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin(xy)\sin x)_{/(\frac{\pi}{2},1)} = \frac{d}{dy}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)_{/(1)} = \left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)_{/(1)} = 0.$$

3.101. $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{xy}{x^2+z^2}\right)$ in $(1,1,0)$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2+z^2}\right)(1,1,0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)_{/x=1} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)_{/x=1} = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x^2+z^2}\right)(1,1,0) = \frac{d}{dy}(y)_{/y=1} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy}{x^2+z^2}\right)(1,1,0) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)_{/z=0} = 0$$

(perché $\frac{1}{1+z^2}$ è derivabile e simmetrica pari, perciò ha derivata nulla in $z=0$).

3.102.

a. Falso. Questa è una condizione sufficiente per la differenziabilità, non la definizione.

b. Falso. Continuità e derivabilità non implicano differenziabilità:

c. Falso. (Studiare le definizioni!)

d. Vero. Questo è un teorema (v. [BPS2] cap.3, §4.3, Proposizione 3.2).

e. Vero. Questo è un teorema. (Stessa Proposizione citata qui sopra).

f. Falso. Esistono contresempi.

g. Falso. La "formula del gradiente" serve per calcolare le derivate direzionali di una funzione, se si conosce il gradiente e si sa che la funzion è differenziabile.

h. Falso. Se non si suppone che f sia differenziabile, la formula del gradiente può non valere.

i. Falso. L'affermazione è vera se si sa che f è differenziabile.

l. Vero. E' proprio quello che afferma il teorema noto come "formula del gradiente".

m. Vero. E' una conseguenza della formula del gradiente. (In senso stretto, è vero solo se il gradiente non si annulla, altrimenti questo non indica alcuna direzione).

3.103.

a. Scorretta. Per le derivate parziali non si usa il simbolo $\frac{df}{dx}$.

b. Corretta.

c. Scorretta. A denominatore c'è il vettore $h\underline{e}_i$, e questo non ha senso.

d. Corretta.

e. Corretta.

3.104.

a. Scorretta. Questa non è la definizione, ma il modo di calcolare una derivata direzionale mediante la formula del gradiente (che, oltre tutto, potrebbe non valere, se f non è differenziabile, anche per una funzione che effettivamente possiede derivate direzionali).

b. Corretta.

c. Scorretta. Il simbolo $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}$ non si usa.

d. Scorretta. A denominatore c'è il vettore $h\underline{v}$, e questo non ha senso.

e. Corretta.

f. Corretta.

3.105.

a. Falso; *b.* Vero; *c.* Falso; *d.* Vero

3.106.

a. Falso. Nella formula compare la scrittura $\nabla[f(\underline{r}(t))]$ che non ha senso, essendo $f(\underline{r}(t))$ una funzione reale di una sola variabile.

b. Falso. Nella formula compare la scrittura $\nabla\underline{r}(t)$, che non ha senso, essendo $\underline{r}(t)$ una funzione vettoriale di variabile reale, e non una funzione reale di più variabili.

c. Vero.

d. Falso. Nella formula compare la scrittura $f'(\underline{r}(t))$, che non ha senso, essendo f una funzione di più variabili.

3.107.

a. Falso; *b.* Falso; *c.* Vero.; *d.* Falso.

3.108.

a. Vero; *b.* Vero; *c.* Falso; *d.* Vero

3.109. *c.* Se non si richiede la continuità fuori dall'origine, nulla si può concludere. Se si richiede la continuità fuori dall'origine, allora certamente f è continua.

3.110. *b.*

3.111.

a. Per $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2x(x^2y - 3y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2-9y^2)(x^2+y^2) - 2y(x^2y - 3y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - 10x^2y^2 - 3y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

b. $$f(x,0) = 0; f_x(0,0) = 0;$$

$$f(0,y) = \frac{-3y^3}{y^2} = -3y; f_y(0,0) = -3.$$

f è differenziabile nell'origine se

$$\frac{f(x,y) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

$$\frac{f(x,y) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{x^2y-3y^3}{x^2+y^2} + 3y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2y - 3y^3 + 3x^2y + 3y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = [\text{in coordinate polari}] = \frac{4\rho^3\cos^2\vartheta\sin\vartheta}{\rho^3} = 4\cos^2\vartheta\sin\vartheta$$

non tende a zero con ρ, perciò f non è differenziabile.

Oppure, si poteva citare il teorema: poiché f è una funzione continua fuori dall'origine, omogenea di grado 1 ma non lineare, non è differenziabile nell'origine. (v. [BPS2], cap.3, §9.2, Teorema 3.32).

c. Il più grande aperto in cui f è C^1 è il piano privato dell'origine: fuori dall'origine le derivate parziali sono evidentemente continue; d'altro canto f non può essere C^1 in tutto il piano perché f non è differenziabile nell'origine.

3.112.

a. $$f(x,0) = \frac{2x^3}{x^2} = 2x; f_x(0,0) = 2;$$

$$f(0,y) = \frac{4y^5}{y^2} = 4y^3; f_y(0,0) = 0.$$

f è differenziabile nell'origine se

$$\frac{f(x,y) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

$$\frac{f(x,y) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{2x^3+x^2y^2+2xy^2+4y^5}{x^2+y^2} - 2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2y^2+4y^5}{(x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$= [\text{in coordinate polari}] = \frac{\rho^4\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta + 4\rho^5\sin^5\vartheta}{\rho^3} = \rho\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta + 4\rho^2\sin^5\vartheta.$$

Perciò

$$\left|\frac{f(x,y) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\rho\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta + 4\rho^2\sin^5\vartheta\right| \le \rho + 4\rho^2,$$

che è una maggiorante radiale infinitesima; pertanto la funzione a primo membro tende a zero per $(x,y) \to (0,0)$, perciò f è differenziabile.

b. Poiché f è differenziabile nell'origine possiamo applicare la formula del gradiente e affermare che:

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot\underline{v} = (2,0)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}.$$

3.113. *a.* Proviamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

$$|f(x,y)| \le \frac{|x^3y| + 2|x|^3 + 2|x|y^2}{x^2+y^2+x^2y^2} \le \frac{|x^3y| + 2|x|^3 + 2|x|y^2}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{|x^3y|}{x^2+y^2} + \frac{2|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{2|x|y^2}{x^2+y^2} \equiv f_1 + f_2 + f_3.$$

Ora: f_1 è positivamente omogenea di grado 2, f_2 è positivamente omogenea di grado 1, f_3 è positivamente omogenea di grado 1, sono tutte continue fuori dall'origine, quindi ciascuna delle tre tende a 0 per $(x,y) \to (0,0)$. Per il teorema del confronto anche $f(x,y) \to 0$, quindi è continua.

b. $$f(x,0) = -\frac{2x^3}{x^2} = -2x; \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -2.$$

$$f(0,y) = 0; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

In particolare, f è derivabile nell'origine.

c. f differenziabile nell'origine se e solo se:

$$\frac{f(x,y)+2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

$$\left|\frac{f(x,y)+2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{\frac{x^3y-2x^3-2xy^2}{x^2+y^2+x^2y^2}+2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{x^3y+2x^3y^2}{(x^2+y^2+x^2y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|x^3y|+2|x|^3y^2}{(x^2+y^2+x^2y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x^3y|+2|x|^3y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{|x^3y|}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{2|x|^3y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \equiv g_1 + g_2.$$

Ora: g_1 è positivamente omogenea di grado 1, g_2 è positivamente omogenea di grado 2, quindi entrambe tendono a zero. Per il teorema del confronto, il limite desiderato è zero, e f è differenziabile nell'origine.

3.114.

a. $f(x,0) = 0$ perciò $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$f(x_0,y) = \frac{e^{-x_0^2/y^2}}{x_0^2+y^2}$$

Distinguiamo ora: per $x_0 = 0$ si ha

$$f(0,y) = \frac{1}{y^2} \text{ che non è derivabile in } y=0, \text{ perciò non esiste } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Per $x_0 \neq 0$ si ha che per $y \to 0$, $\frac{e^{-x_0^2/y^2}}{x_0^2+y^2} \sim \frac{e^{-x_0^2/y^2}}{x_0^2} \to 0$ con velocità esponenziale, quindi con derivata nulla. Perciò esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = 0$ se $x_0 \neq 0$.

In conclusione, la funzione è derivabile tranne che nell'origine.

b. $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{e^{-x^2/y^2}\left(-\frac{2x^2}{y^3}(x^2+y^2) - 2y\right)}{(x^2+y^2)^2}.$$

3.115.

a. $$f(x,0) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(e^x-1)x^2}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{array} \right\} = (e^x - 1).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}[e^x - 1]_{x=0} = (e^x)_{x=0} = 1.$$

$$f(0,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(1-e^{2y})y^2}{y^2} & \text{per } y \neq 0 \\ 0 & \text{per } y = 0 \end{array} \right\} = \left(1 - e^{2y}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy}\left[1 - e^{2y}\right]_{y=0} = \left(-2e^{2y}\right)_{y=0} = -2.$$

b. L'equazione del piano tangente è:

$$z = f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

ossia

$$z = x - 2y.$$

3.116.

a. $$f(x,0) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(\log(x+2)-\log 2)4x^2}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{array} \right\} = 4\log\left(1 + \frac{x}{2}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}\left[4\log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]_{x=0} = \left(\frac{2}{1+\frac{x}{2}}\right)_{x=0} = 2.$$

$$f(0,y)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{(\log(2)-\log(y+2))9y^2}{y^2} & \text{per } y\neq 0\\ 0 & \text{per } y=0\end{array}\right\}=-9\log\left(1+\frac{y}{2}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{d}{dy}\left[-9\log\left(1+\frac{y}{2}\right)\right]_{y=0}=\left(-\frac{9}{2+y}\right)_{y=0}=-\frac{9}{2}.$$

b. L'equazione del piano tangente è:

$$z=f(0,0)+x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

ossia

$$z=2x-\frac{9}{2}y.$$

3.117.

a.

$$g(t)\equiv f(t\cos\vartheta,t\sin\vartheta)=\frac{2t^3\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{t^2\cos^2\vartheta+t^4\sin^4\vartheta}=$$

$$=\frac{2t\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta+t^2\sin^4\vartheta}\sim\frac{2t\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\ \text{per } t\to 0,$$

purché sia $\cos\vartheta\neq 0$. Per $\cos\vartheta\neq 0$ si ha

$$D_{(\cos\vartheta,\sin\vartheta)}f(0,0)=g'(0)=\frac{2\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta};$$

per $\cos\vartheta=0$ è $g(t)\equiv 0$ e $D_{(0,\pm 1)}f(0,0)=0$.

b. La formula del gradiente non vale nell'origine perché la generica derivata direzionale non è combinazione lineare di $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$.

c. Pertanto f non è differenziabile nell'origine.

3.118.

a. Fuori dall'origine f è certamente derivabile. Calcoliamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{6x^5(x^2+y^4)-2x(x^6+y^6)}{(x^2+y^4)^2}=\frac{4x^7+6x^5y^4-2xy^6}{(x^2+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{6y^5(x^2+y^4)-4y^3(x^6+y^6)}{(x^2+y^4)^2}=\frac{6x^2y^5+2y^9-4x^6y^3}{(x^2+y^4)^2}$$

Nell'origine: $f(x,0) = x^4; \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0;$

$$f(0,y) = y^2; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

b. Le derivate parziali calcolate al punto precedente sono evidentemente continue fuori dall'origine, quindi $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$ e pertanto è differenziabile fuori dall'origine. Studiamo la differenziabilità nell'origine.

f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

$$\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{x^6+y^6}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{x^6}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^6}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \leq$$

$$\leq \frac{x^6}{x^2\sqrt{x^2}} + \frac{y^6}{y^4\sqrt{y^2}} = |x^3| + |y| \to 0$$

per $(x,y) \to (0,0)$. Per il teorema del confronto, anche $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$, e f è differenziabile nell'origine.

3.119. *a.* Calcoliamo le derivate parziali nell'origine.

$$f(x,0) = \frac{x^3}{x^2} = x; \text{quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1.$$

$$f(0,y) = \frac{-2y^3}{y^2} = -2y; \text{quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -2.$$

La funzione è derivabile nell'origine.

b. La funzione è differenziabile se e solo se la seguente espressione tende a zero per $(x,y) \to (0,0)$:

$$\Delta \equiv \frac{f(x,y) - x - 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{x^2y+x^3-2y^3}{x^2+y^2+x^2y^2} - x + 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{x^2y + x^3 - 2y^3 - x^3 - xy^2 - x^3y^2 + 2x^2y + 2y^3 + 2x^2y^3}{(x^2 + y^2 + x^2y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \frac{3x^2y - xy^2 - x^3y^2 + 2x^2y^3}{(x^2 + y^2 + x^2y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy(3x - y - x^2y + 2xy^2)}{(x^2 + y^2 + x^2y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Poiché numeratore e denominatore sono entrambi dell'ordine di grandezza di ρ^3, l'idea è che il limite non esista. Dimostriamo dunque che questo quoziente non ha limite (quindi il quoziente Δ non ha limite, quindi f non è differenziabile nell'origine), passando in coordinate polari:

$$\Delta(\rho, \vartheta) = \frac{\rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta (3\cos\vartheta - \sin\vartheta - \cos^2\vartheta \sin\vartheta + 2\cos\vartheta \sin^2\vartheta)}{\rho^3(1 + \rho^2 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta)} =$$

$$= \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta (3\cos\vartheta - \sin\vartheta - \rho^2 \cos^2\vartheta \sin\vartheta + 2\rho^2 \cos\vartheta \sin^2\vartheta)}{(1 + \rho^2 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta)} \to \cos\vartheta \sin\vartheta (3\cos\vartheta - \sin\vartheta)$$

per $\rho \to 0$, e per ogni ϑ fissato con $\cos\vartheta \sin\vartheta \neq 0$. Poiché si ottengono limiti diversi lungo diverse direzioni, il limite non esiste.

3.120.

a. $$f(t\cos\vartheta, t\sin\vartheta) = \frac{t(\cos\vartheta + \sin\vartheta)\sin[t^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)]}{t^2} =$$

$$= \frac{(\cos\vartheta + \sin\vartheta)\sin[t^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)]}{t}.$$

Per ϑ fissato e $t \to 0$ è

$$f(t\cos\vartheta, t\sin\vartheta) \sim \frac{(\cos\vartheta + \sin\vartheta)t^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)}{t} =$$

$$= (\cos\vartheta + \sin\vartheta)t(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$$

e quindi

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = \frac{d}{dt}[f(t\cos\vartheta, t\sin\vartheta)]_{/t=0} = (\cos\vartheta + \sin\vartheta)(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).$$

In particolare (per $\vartheta = 0, \vartheta = \frac{\pi}{2}$):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1.$$

b. Osserviamo che:

$$\nabla f(0,0)\cdot(\cos\vartheta,\sin\vartheta)=\cos\vartheta-\sin\vartheta\neq(\cos\vartheta+\sin\vartheta)\big(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta\big),$$

quindi in questo caso la formula del gradiente non è verificata. Se ne deduce che f non è differenziabile nell'origine.

3.121.

a.
$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\sin\big(x^2+y^2\big)+\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\equiv f_1(x,y)+f_2(x,y)$$

dove: f_1 è continua radiale, cioè

$$f_1(x,y)=g\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big)\text{ con }g(\rho)=\rho\sin\big(\rho^2\big).$$

Inoltre g è derivabile in $\rho=0$ con derivata nulla (perché $g(\rho)\sim\rho^3$), perciò f_1 è differenziabile nell'origine.

f_2 è positivamente omogenea di grado 2 e continua fuori dall'origine, quindi continua e differenziabile nell'origine. Pertanto f è continua e differenziabile nell'origine.

b. Calcoliamo prima $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$$f(x,0)=\frac{(x^2)\sin(x^2)}{\sqrt{x^2}}=|x|\sin\big(x^2\big)\sim|x|x^2,$$

perciò
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0.$$

Calcoliamo ora la derivata fuori dall'origine:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)+xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2}\left\{\big[2x\sin\big(x^2+y^2\big)+2x\big(x^2+y^2\big)\cos\big(x^2+y^2\big)+y^2\big]\sqrt{x^2+y^2}+\right.$$

$$\left.-\big[\big(x^2+y^2\big)\sin\big(x^2+y^2\big)+xy^2\big]\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}.$$

Ora:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\rho,\vartheta)\right| \leq \frac{[2\rho^3+2\rho^3+\rho^2]\rho+[\rho^4+\rho^3]}{\rho^2} = \frac{5\rho^4+2\rho^3}{\rho^2} = 5\rho^2+2\rho,$$

e poiché la maggiorante è funzione radiale e infinitesima per $\rho \to 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Pertanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ è continua nell'origine.

3.122. Per $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_x(x,y) = \log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2};$$

$$f_y(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Per calcolare $\nabla f(0,0)$, consideriamo

$$f(x,0) = 2x\log|x|,$$

che non è derivabile nell'orgine. Quindi non esiste $f_x(0,0)$.

$$f(0,y) = 0,$$

quindi $f_y(0,0) = 0$.

Piano tangente in $(1,2)$:

$$z = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$$

$$z = \log 5 + \left(\log 5 + \frac{2}{5}\right)(x-1) + \frac{4}{5}(y-2).$$

3.123.

$$g(t) = f(t\cos\vartheta, t\sin\vartheta) = \frac{t^3\cos^2\vartheta\sin\vartheta}{t^2} = t\cos^2\vartheta\sin\vartheta;$$

dunque se $\underline{v} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$,

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = \cos^2\vartheta\sin\vartheta.$$

In particolare,

$$\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0,$$

perciò in questo caso la formula del gradiente non vale. (Se valesse, *tutte* le derivate direzionali sarebbero nulle nell'origine).

3.124. f è una funzione radiale, $f(x,y) = g\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$ con

$$g(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho}.$$

$g(\rho) \to 1$ per $\rho \to 0$. Ridefinendo $g(0) = 1$ si ha g derivabile e $g'(0) = 0$ (perché g è pari) quindi f è differenziabile nell'origine con gradiente nullo. (Criterio valido per funzioni radiali).

3.125. f è una funzione radiale, $f(x,y) = g\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$ con

$$g(\rho) = \frac{\cos\rho - 1}{\rho}.$$

$g(\rho) \to 0$ per $\rho \to 0$. Ridefinendo $g(0) = 0$ si ha g derivabile e $g'(0) = 1$ quindi f non è differenziabile nell'origine. (Criterio valido per funzioni radiali, v. Teorema 3.5).

3.126. La funzione è positivamente omogenea di grado $\frac{7}{3} + \frac{3}{4} - 2 = \frac{13}{12} > 1$, fuori dall'origine è continua, perciò è differenziabile nell'origine.

3.127. La funzione è positivamente omogenea di grado $4 - 3 = 1$ (si noti che l'esponente è omogeneo di grado 0), non è lineare, perciò non è differenziabile nell'origine.

3.128.
$$f(x,y) = \big(e^{\sin x} - 1\big)\frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

$f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to 0$ perché $\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ è omogenea di grado 1 quindi tende a zero, e $\big(e^{\sin x} - 1\big) \to 0$, per $(x,y) \to (0,0)$. Perciò prolunghiamo per continuità f in $(0,0)$ ponendola uguale a 0.

Sugli assi coordinati f si annulla, quindi ha derivate parziali nulle nell'origine.

Perciò f è differenziabile nell'origine se e solo se è $o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$. Ora:

$$\big(e^{\sin x} - 1\big)\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \equiv \big(e^{\sin x} - 1\big)g(x,y)$$

dove $g(x,y)$ è positivamente omogenea di grado 0 e continua fuori dall'origine, perciò è limitata, $\big(e^{\sin x} - 1\big) \to 0$, perciò il loro prodotto tende a zero (teorema del confronto). Pertanto f è differenziabile nell'origine.

3.129. Per $(x,y) \to 0$,

$$\big(e^{\sin x} - e^{\cos y}\big) \to e^0 - e^1 = 1 - e,$$

$\frac{xy}{x^2+y^2}$ non ha limite perché è omogenea di grado 0, perciò non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

La f non è quindi prolungabile per continuità nell'origine. A maggior ragione non è differenziabile.

3.130. $$f(x,y) = e^{\sin x}\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy^4}{x^2+y^2}\right),$$

dove, per $(x,y) \to (0,0)$:

$$e^{\sin x} \to 1;\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \to 0 \text{ (omogenea di grado 2);}$$

$$\frac{2xy^4}{x^2+y^2} \to 0 \text{ (omogenea di grado 3).}$$

Pertanto $f(x,y) \to 0$, ridefiniamola uguale a 0 nell'origine.

f è identicamente nulla sugli assi, quindi ha derivate parziali nulle nell'origine. Pertanto è differenziabile se e solo se $f(x,y) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Ora:

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = e^{\sin x}\left(\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

dove, per $(x,y) \to (0,0)$:

$$e^{\sin x} \to 1;\ \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ (omogenea di grado 1);}$$

$$\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ (omogenea di grado 2).}$$

Pertanto $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$, e f è differenziabile.

3.131. $$\left|\frac{(x^3+y^3)^2}{x^2+y^4}\right| \le \frac{x^6}{x^2+y^4} + \frac{y^6}{x^2+y^4} + \frac{2|x^3y^3|}{x^2+y^4} \le$$

$$\le \frac{x^6}{x^2} + \frac{y^6}{y^4} + \frac{2|x^3y^3|}{x^2} = x^4 + y^2 + 2|xy^3| \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)$$

(teorema del confronto), perciò prolunghiamo per continuità f in $(0,0)$ ponendola uguale a 0. Derivate parziali nell'origine:

$$f(x,0) = \frac{x^6}{x^2} = x^4, \text{ quindi } f_x(0,0) = 0;$$

$$f(0,y) = \frac{y^6}{y^4} = y^2, \text{ quindi } f_y(0,0) = 0;$$

perciò f è differenziabile nell'origine se e solo se è $o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

In polari:

$$\left|\frac{f(\rho,\vartheta)}{\rho}\right| \le \frac{\rho^6\cos^6\vartheta}{\rho^3(\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^4\vartheta)} + \frac{\rho^6\sin^6\vartheta}{\rho^3(\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^4\vartheta)} + \frac{2\rho^6|\cos^3\vartheta\sin^3\vartheta|}{\rho^3(\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^4\vartheta)} \le$$

$$\le \frac{\rho^6\cos^6\vartheta}{\rho^3\cos^2\vartheta} + \frac{\rho^6\sin^6\vartheta}{\rho^3(\rho^2\sin^4\vartheta)} + \frac{2\rho^6|\cos^3\vartheta\sin^3\vartheta|}{\rho^3(\cos^2\vartheta)} =$$

$$= \rho^3\cos^4\vartheta + \rho\sin^2\vartheta + 2\rho^3|\cos\vartheta\sin^3\vartheta| \le \rho^3 + \rho + 2\rho^3,$$

maggiorante radiale infinitesima, quindi $f(x,y) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, e f è differenziabile nell'origine.

3.132. Nell'aperto $\{(x,y) : xy \neq 0\}$ f è C^1, pertanto è differenziabile.

Sui due assi, ma fuori dall'origine, una o l'altra delle derivate parziali non esistono, f non è derivabile e quindi non è differenziabile.

f è continua fuori dall'origine e positivamente omogenea di grado $\frac{1}{3} + \frac{4}{5} = \frac{17}{15} > 1$, perciò è differenziabile nell'origine.

3.133. Nell'aperto $\{(x,y) : x \neq 1\}$ f è C^1, pertanto è differenziabile.

Nei punti $(1, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ non esiste f_x, quindi f non è derivabile e quindi non è differenziabile.

Studiamo $(1,0)$ traslando nell'origine: è come studiare l'origine per la funzione $g(x,y) = x^{3/5}y^{4/3}$.

g è continua fuori dall'origine e positivamente omogenea di grado $\frac{3}{5} + \frac{4}{3} = \frac{29}{15} > 1$, perciò è differenziabile nell'origine. Quindi f è differenziabile in $(1,0)$.

3.134. Fuori dall'origine f è C^1, quindi differenziabile. $f(0,0) = 0$.

Derivate parziali nell'origine:

$$f(x,0) = xe^{|x|} \sim x, \text{ perciò } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$f(0,y) = 0, \text{ perciò } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Perciò f è differenziabile nell'origine se tende a zero il seguente quoziente:

$$\frac{xe^{\sqrt{x^2+y^2}}-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = x\cdot\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \equiv xg(x,y),$$

dove la funzione g è radiale,

$$g(\rho) = \frac{e^{\rho}-1}{\rho} \to 1 \text{ per } \rho \to 0.$$

Perciò per $(x,y)\to(0,0)$, $\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 1, x \to 0$, e il prodotto tende a zero. Pertanto f è differenziabile nell'origine.

3.135. Per $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

Poiché $f(x,0)=f(0,y)=0$, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

$$z = \frac{4}{5}+\frac{4}{25}(x-2)+\frac{32}{25}(y-1)$$

$$z = \frac{4}{25}x+\frac{32}{25}y-\frac{4}{5}.$$

3.136. Per $y\neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt[3]{y};\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{3y^{2/3}}$$

Se $y=0$: $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=0;\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_0=0 \\ \text{non esiste} & \text{se } x_0\neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = -1;\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \frac{1}{3}$$

$$D_{\underline{v}}f(1,-1) = \nabla f(1,-1)\cdot\underline{v} = \left(-1,\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

3.137. Se $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Se $(x,y) = (0,0)$:
poiché $f(x,0) = x|x|$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$; poiché $f(0,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$df(-1,1) = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)dx - \frac{1}{\sqrt{2}}dy$$

3.138. Se $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}$$

Se $(x,y) = (0,0)$:
poiché $f(x,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Poiché $f(0,y) = 2y\log|y|$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\left|\nabla f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right| = \left|\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}\right)\right| = \sqrt{\frac{8}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$\text{vers}\left(\nabla f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right) = \frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}\right)}{\frac{2}{3}\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

3.139. *a.* $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^{2/3}}{3(x+1)^{2/3}} \text{ se } x \neq -1;$$

nei punti $(-1, y_0)$ con $y_0 \neq 0$, f non è derivabile; $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2(x+1)^{1/3}}{y^{1/3}} + 1 \text{ se } y \neq 0;$$

nei punti $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq -1$, f non è derivabile; $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 0) = 0$.

b. $$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -1 \text{ e } y \neq 0\}.$$

c. Poiché $(0, 1) \in A$, f è differenziabile in $(0, 1)$.

d. $$z = 2 + \frac{1}{3}x + 3(y - 1)$$

3.140. *a.* $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \log x.$$

b. Poiché le derivate parziali sono continue in tutto l'aperto $\{x > 0\}$, la funzione f è ivi differenziabile.

c. $f(e, 2) = e^2; \nabla f(e, 2) = (2e, e^2)$. Piano tangente:

$$z = e^2 + 2e(x - e) + e^2(y - 2).$$

d. Poiché la funzione è differenziabile, si può calcolare la derivata direzionale mediante la formula del gradiente:

$$D_{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} f(2, 2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \nabla f(2, 2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (4, 4\log 2) =$$

$$= 2 + 2\sqrt{3}\log 2.$$

3.141.

a. $$f_x(x, y) = -\frac{y^2}{x^2}; \; f_y(x, y) = \frac{2y}{x}, \text{ per } x \neq 0.$$

Se $x = 0$:

$$f_y(0, y_0) = 0 \; \forall y_0; \; f_x(0, y_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } y_0 = 0 \\ \text{non esiste} & \text{se } y_0 \neq 0 \end{cases}$$

b. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

c. $$\nabla f(3,2) = \left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right);\ f(3,2) = \frac{4}{3}$$

Piano tangente: $$z = \frac{4}{3} - \frac{4}{9}(x-3) + \frac{4}{3}(y-2)$$

ossia $$z = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}y.$$

d. $$g(t) = \begin{cases} f(t\cos\vartheta, t\sin\vartheta) & \text{se } \vartheta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0 & \text{se } \vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{t\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta} & \text{se } \cos\vartheta \neq 0 \\ 0 & \text{se } \cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = \begin{cases} \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta} & \text{se } \cos\vartheta \neq 0 \\ 0 & \text{se } \cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

Invece, poiché $\nabla f(0,0) = (0,0)$,

$$\nabla f(0,0) \cdot (\cos\vartheta, \sin\vartheta) = 0$$

quindi la formula del gradiente non vale nell'origine. Ciò implica che f non è differenziabile nell'origine.

3.142. *a.* $$f_x(x,y) = -2xy\sqrt[3]{y}e^{-x^2y}$$

$$f_y(x,y) = e^{-x^2y}\left(-x^2\sqrt[3]{y} + \frac{1}{3y^{2/3}}\right) \text{ per } y \neq 0$$

$f_y(x_0, 0)$ non esiste per nessun x_0.

b. $A = \{(x,y) : y \neq 0\}$

c. $\nabla f\left(\sqrt{2}, 1\right) = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{e^2}, -\frac{5}{3e^2}\right)$; $f\left(\sqrt{2}, 1\right) = \frac{1}{e^2}$. Piano tangente:

$$z = \frac{1}{e^2} - \frac{2\sqrt{2}}{e^2}\left(x - \sqrt{2}\right) - \frac{5}{3e^2}(y-1).$$

d. Poiché f è differenziabile in $\left(\sqrt{2},1\right)$ (in quanto il punto sta in A), vale la formula del gradiente:

$$D_v f\left(\sqrt{2},1\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{e^2}\cos\vartheta - \frac{5}{3e^2}\sin\vartheta.$$

3.143. *a.* $f_x(x,y) = \dfrac{y}{3x^{2/3}}e^{\sqrt[3]{x}}$ per $x \neq 0$; $f_y(x,y) = e^{\sqrt[3]{x}}$

$$f_x(0,y_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } y_0 = 0 \\ \text{non esiste} & \text{se } y_0 \neq 0 \end{cases}$$

b. $A = \{(x,y) : x \neq 0\}$.

c. f è differenziabile in $(1,-1)$ perché $(1,-1) \in A$.

d. $\nabla f(1,-1) = \left(-\frac{e}{3}, e\right)$; $f(1,-1) = -e$. Piano tangente:

$$z = -\frac{e}{3}(x-1) + e(y+1) - e$$

cioè:

$$z = -\frac{e}{3}x + ey + \frac{e}{3}$$

e.

$$g(t) = f(t\cos\vartheta, t\sin\vartheta) = t\sin\vartheta e^{\sqrt[3]{t\cos\vartheta}};$$

$$g'(t) = \sin\vartheta e^{\sqrt[3]{t\cos\vartheta}}\left(1 + \frac{t\sqrt[3]{\cos\vartheta}}{3t^{2/3}}\right) = \sin\vartheta e^{\sqrt[3]{t\cos\vartheta}}\left(1 + \frac{\sqrt[3]{t\cos\vartheta}}{3}\right);$$

$$D_v f(0,0) = g'(0) = \sin\vartheta$$

3.144. *a.* f è ovviamente continua fuori dall'origine. Nell'origine il limite esiste e vale zero, infatti:

$$\left|\frac{x^2\sqrt[3]{y}}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2\sqrt[3]{|y|}}{x^2+y^2} \leq \sqrt[3]{|y|} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Perciò la funzione è prolungabile con continuità anche in $(0,0)$, ed è quindi continua in tutto $\mathbb{R}^2$.

b. f è ovviamente derivabile (e differenziabile) fuori dalla retta $y = 0$, poiché la funzione di una variabile $\sqrt[3]{y}$ non è derivabile per $y = 0$.

Calcoliamo le derivate nei punti $(x_0, 0)$.

$$f(x,0) = 0, \text{ perciò } f_x(x_0,0) = 0.$$

$$f(x_0, y) = \frac{x_0^2 \sqrt[3]{y}}{x_0^2 + y^2},$$

che non è derivabile in $y = 0$, tranne che per $x_0 = 0$. Dunque:

f è derivabile nei punti del piano in cui $y \neq 0$, ed inoltre è derivabile in $(0,0)$.

c. f è ovviamente differenziabile per $y \neq 0$ (perché è un aperto in cui le derivate parziali sono continue); non è differenziabile in $(x_0, 0)$ se $x_0 \neq 0$ (perché in tal caso non è derivabile). Rimane da verificare se è differenziabile in $(0,0)$ (dove è derivabile, con derivate nulle); questo accade se

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0.$$

In coordinate polari, quest'espressione è uguale a:

$$\frac{\rho^2 \cos^2\vartheta \sqrt[3]{\rho \sin\vartheta}}{\rho^3} = \frac{\cos^2\vartheta \sqrt[3]{\sin\vartheta}}{\rho^{2/3}}.$$

Essendoci una potenza positiva di ρ a denominatore, certamente per $\rho \to 0$ questa quantità nnon è infinitesima, quindi f non è differenziabile in $(0,0)$. In conclusione, è differenziabile nei punti con $y \neq 0$.

3.145. *a.* f è continua in tutto $\mathbb{R}^2$ (notare che il denominatore non si annulla mai).

b. f è derivabile (e differenziabile) per $y \neq 0$ e (ragionando come nell'esercizio precedente) è derivabile in $(0,0)$ (con derivate nulle), ma non lo è in $(x_0, 0)$ per $x_0 \neq 0$.

c. Certamente f è differenziabile per $y \neq 0$ e non è differenziabile in $(x_0, 0)$ per $x_0 \neq 0$. Rimane da studiare la differenziabilità in $(0,0)$.

$$\left| \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{\left| x \sqrt[3]{y} \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\left| \rho \cos\vartheta \sqrt[3]{\rho \sin\vartheta} \right|}{\rho} \leq \sqrt[3]{\rho}.$$

Poiché $\sqrt[3]{\rho}$ è una maggiorante radiale infinitesima, $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$, e f è differenziabile in $(0,0)$.

3.146. *a.* 0.

b. $f_x(0,0) = 0$; $f_y(0,0) = \log 2$.

c. f non è differenziabile in $(0,0)$, in quanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - y\log 2}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ non esiste.}$$

3.147. *a.* Per $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_x(x,y) = \frac{x^{10/3}y^{5/3} + 7x^{4/3}y^{11/3}}{3(x^2+y^2)^2};\ f_y(x,y) = \frac{5x^{13/3}y^{2/3} - x^{7/3}y^{8/3}}{3(x^2+y^2)^2};$$

mentre in $(0,0)$, le derivate parziali sono entrambe nulle.

b. Le derivate parziali sono continue in tutto $\mathbb{R}^2$ (per $(x,y) \to (0,0)$ tendono a zero perché entrambe funzioni omogenee di grado 1 e continue fuorti dall'origine) e di conseguenza:

c. f è differenziabile (anche) nell'origine.

3.148. *a.* $\mathbb{R}^2$; *b.* $\mathbb{R}^2$; *c.* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3.149.

a. 0

b. $f_x(0,0) = 1;\ f_y(0,0) = 0$

c. f non è differenziabile in $(0,0)$, in quanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ non esiste.}$$

3.150. *a.*

$$f_x(x,y) = \frac{e^{x^2}2x\sin y(1+x^2+y^2) - 2xe^{x^2}\sin y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{e^{x^2}2x\sin y(x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{e^{x^2}[\cos y(1+x^2+y^2) - 2y\sin y]}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

b.

$$\frac{d}{dt}[f(\underline{r}(t))] = f_x(a(t),b(t))a'(t) + f_y(a(t),b(t))b'(t) =$$

$$= \frac{e^{a(t)^2}2a(t)\sin b(t)\left(a(t)^2+b(t)^2\right)}{\left(1+a(t)^2+b(t)^2\right)^2}a'(t) +$$

$$+ \frac{e^{a(t)^2}\left[\cos b(t)\left(1+a(t)^2+b(t)^2\right) - 2b(t)\sin b(t)\right]}{\left(1+a(t)^2+b(t)^2\right)^2}b'(t).$$

3.151.

$$\frac{d}{dt}[f(\underline{r}(t))] = \frac{d}{dt}[f(2\cos t, 3\sin t)] =$$

$$= -2\sin t\frac{\partial f}{\partial x}(2\cos t, 3\sin t) + 3\cos t\frac{\partial f}{\partial y}(2\cos t, 3\sin t).$$

3.152.
$$\frac{d}{dt}[f(\underline{r}(t))] = \frac{d}{dt}\left[e^{-(x(t)^2+y(t)^4)}\right] =$$

$$= e^{-(x(t)^2+y(t)^4)}\left(-2x(t)x'(t) - 4y^3(t)y'(t)\right).$$

3.153.
$$\nabla g(x,y) = \nabla\left[xe^{f(x,y)}\right] = \left(e^{f(x,y)} + xe^{f(x,y)}f_x(x,y), xe^{f(x,y)}f_y(x,y)\right)$$

3.154.
$$\nabla f(x,y) = \nabla\left[g\left(x^2\sin^3 y\right)\right] = g'\left(x^2\sin^3 y\right)\cdot\nabla\left(x^2\sin^3 y\right) =$$

$$= g'\left(x^2\sin^3 y\right)\cdot\left(2x\sin^3 y, 3x^2\sin^2 y\cos y\right).$$

3.155.
$$f'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(\underline{r}(t))\alpha'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(\underline{r}(t))\beta'(t) =$$

$$= 2\alpha(t)e^{\beta(t)}\alpha'(t) + \alpha^2(t)e^{\beta(t)}\beta'(t).$$

$$f'(2) = 2\alpha(2)e^{\beta(2)}\alpha'(2) + \alpha^2(2)e^{\beta(2)}\beta'(2).$$

3.156.
$$f'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}\left(t^2, e^t\right)2t + \frac{\partial g}{\partial y}\left(t^2, e^t\right)e^t$$

$$f'(2) = 4\frac{\partial g}{\partial x}\left(4, e^2\right) + e^2\frac{\partial g}{\partial y}\left(4, e^2\right).$$

3.157.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'\left(x^2+y^2\right)2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g'\left(x^2+y^2\right)2y$$

$$\nabla f(x,y) = \left(2xg'\left(x^2+y^2\right), 2yg'\left(x^2+y^2\right)\right)$$

$$\nabla f(2,1) = (4g'(5), 2g'(5))$$

3.158.
$$\nabla f(x,y) = \frac{\nabla g(x,y)}{g(x,y)}; \quad \nabla f(1,0) = \frac{(\nabla g)(1,0)}{g(1,0)}$$

3.159. *a.*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{-|\underline{x}|}\right) = -e^{-|\underline{x}|}\frac{\partial}{\partial x_i}(|\underline{x}|) = -e^{-|\underline{x}|}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right) =$$

$$= -e^{-|\underline{x}|}\frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} = -e^{-|\underline{x}|}\cdot\frac{x_i}{|\underline{x}|}.$$

b.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(-e^{-|\underline{x}|}\cdot\frac{x_i}{|\underline{x}|}\right) = -e^{-|\underline{x}|}\cdot\frac{1}{|\underline{x}|}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 =$$

$$= -e^{-|\underline{x}|}\cdot\frac{1}{|\underline{x}|}\cdot|\underline{x}|^2 = -e^{-|\underline{x}|}\cdot|\underline{x}|.$$

3.160. *a.*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\log^2|\underline{x}|\right) = \frac{2\log|\underline{x}|}{|\underline{x}|}\cdot\frac{x_i}{|\underline{x}|} = \frac{2x_i\log|\underline{x}|}{|\underline{x}|^2}.$$

b.

$$\frac{d}{dt}[f(\underline{r}(t))] = \nabla f(\underline{r}(t))\cdot\underline{r}'(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{2r_i(t)\log|\underline{r}(t)|}{|\underline{r}(t)|^2}r_i'(t) = \frac{2\log|\underline{r}(t)|}{|\underline{r}(t)|^2}\sum_{i=1}^{n} r_i(t)r_i'(t).$$

c.

$$\frac{d}{dt}[f(\underline{r}(t))] = \frac{2\log|\underline{r}(t)|}{|\underline{r}(t)|^2}\sum_{i=1}^{3} r_i(t)r_i'(t)$$

$$\underline{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t); \qquad |\underline{r}(t)| = \sqrt{2t^2} = t\sqrt{2};$$

$$\underline{r}'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$$

$$\sum_{i=1}^{3} r_i(t)r_i'(t) = t\cos t(\cos t - t\sin t) + t\sin t(\sin t + t\cos t) + t = 2t.$$

$$\frac{d}{dt}f(\underline{r}(t)) = \frac{2\log\left(t\sqrt{2}\right)}{2t^2}2t = \frac{2\log\left(t\sqrt{2}\right)}{t} = \frac{2\log t + \log 2}{t}.$$

3.5. Derivate successive

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 3, §5.1, 5.2.

3.161.★ Sia $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Calcolare (nei punti in cui esiste)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

e semplificare l'espressione ottenuta.

(Suggerimento: ponendo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $f(x,y) = g(\rho)$, si può usare opportunamente il teorema di differenziazione delle funzioni composte...)

3.162.★ Sia $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Calcolare (nei punti in cui esiste)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

e semplificare l'espressione ottenuta.

(Suggerimento: ponendo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $f(x,y) = g(\rho)$, si può usare opportunamente il teorema di differenziazione delle funzioni composte...)

3.163. Scrivere la matrice hessiana delle seguenti funzioni (nei punti in cui esiste), semplificando le espressioni ottenute:

a. $\arctan\frac{y}{x}$ *b.* $\sqrt{x^2+y^2}$ *c.* $\frac{xy}{x^2+y^2}$

3.164. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al second'ordine per le seguenti funzioni:

a. xe^y *b.* $y\cos x + x\sin y$ *c.* $e^x \log(1+x+y)$

3.165. Verificare che per ogni $k \in \mathbb{R}$ le funzioni

$u(x,t) = \sin(kx)\cdot\sin(kct)$
$u(x,t) = \sin(kx)\cdot\cos(kct)$
$u(x,t) = \cos(kx)\cdot\cos(kct)$
$u(x,t) = \cos(kx)\cdot\sin(kct)$

soddisfano l'*equazione delle onde*: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

3.166. Verificare che le seguenti funzioni risolvono l'equazione di Laplace in due variabili,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$u_1(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
$u_2(x,y) = x^3y - xy^3$
$u_3(x,y) = e^x \sin y$
$u_4(x,y) = \cosh x \cos y$

3.167. Scrivere lo sviluppo di Taylor al 2° ordine, con resto secondo Peano, nel punto $(1,1)$, per la funzione

$$f(x,y) = x\log(1+y^2)$$

nella forma $f(1+h,1+k) = \ldots$

3.168. Scrivere lo sviluppo di Taylor al 2° ordine, con resto secondo Peano, nel punto $(1,1)$, per la funzione

$$f(x,y) = x\arctan y$$

nella forma $f(1+h,1+k) = \ldots$

3.169.★ Scrivere lo sviluppo di Taylor al 2° ordine, con resto secondo Peano, nel punto $(1,1)$, per la funzione

$$f(x,y) = x\log y - ye^x$$

nella forma $f(1+h,1+k) = \ldots$

3.170.★ Scrivere lo sviluppo di Taylor al 2° ordine, con resto secondo Peano, nel punto $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$, per la funzione

$$f(x,y) = x\sin y - y\cos x$$

nella forma $f\left(\frac{\pi}{4}+h,\frac{\pi}{4}+k\right) = \ldots$

Stabilire se le seguenti funzioni sono di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ o no, se sono di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ o no. "Stabilire" significa: dimostrare che lo è o che non lo è, applicando criteri o teoremi studiati, o eseguendo calcoli opportuni (ma evitare calcoli non necessari!)

3.171. $$f(x,y) = \frac{xy(x^3 - y^3)}{x^2 + y^2}$$

3.172. $$f(x,y) = \sqrt[3]{x}\left(x^2 + y^2\right)$$

3.173. $$f(x,y) = \frac{x^3 + 2xy^2 + 5x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

3.174. $$f(x,y) = \frac{(x - 2y)^3}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$$

3.175.★ **Equazione del calore in $\mathbb{R}^n$.** Verificare che la funzione

$$u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

$$u(\underline{x}, t) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|\underline{x}|^2}{4t}}$$

risolve l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

cioè

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

in $\mathbb{R}^{n+1}$ (per $t \neq 0$).

Soluzioni § 3.5

3.161. $$f(x,y)=\rho;\ \nabla\rho=\frac{(x,y)}{\rho};$$

$$\rho_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\right)=\frac{\rho-\frac{x^2}{\rho}}{\rho^2}=\frac{\rho^2-x^2}{\rho^3};\quad \rho_{yy}=\frac{\rho^2-y^2}{\rho^3}$$

$$\rho_{xx}+\rho_{yy}=\frac{\rho^2-x^2}{\rho^3}+\frac{\rho^2-y^2}{\rho^3}=\frac{2\rho^2-\rho^2}{\rho^3}=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

3.162. $$f(x,y)=g(\rho)\ \text{con}\ g(\rho)=\frac{1}{\rho};\quad \nabla\rho=\frac{(x,y)}{\rho};$$

$$\nabla f(x,y)=g'(\rho)\nabla\rho=-\frac{1}{\rho^2}\frac{(x,y)}{\rho}=-\frac{(x,y)}{\rho^3}$$

$$f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{\rho^3}\right)=-\frac{\rho^3-3\rho^2\frac{x^2}{\rho}}{\rho^6}=\frac{3x^2-\rho^2}{\rho^5};\quad f_{yy}=\frac{3y^2-\rho^2}{\rho^5}$$

$$f_{xx}+f_{yy}=\frac{3x^2-\rho^2}{\rho^5}+\frac{3y^2-\rho^2}{\rho^5}=\frac{3\rho^2-2\rho^2}{\rho^5}=\frac{1}{\rho^3}=\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

3.163.

a. $$Hf=\begin{pmatrix}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}$$

b. $$Hf=\begin{pmatrix}\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\\ -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{pmatrix}$$

c. $$Hf=\begin{pmatrix}\frac{2xy(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} & \frac{-x^4+6x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^3}\\ \frac{-x^4+6x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^3} & \frac{2xy(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}\end{pmatrix}$$

3.164.

a. $x+xy+o(x^2+y^2)$

b. $y+xy+o(x^2+y^2)$

c. $x+y+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+o(x^2+y^2)$

3.165. In tutti e 4 i casi si ha:
$u_{xx} = -u$, $u_{tt} = -c^2u$, $u_{tt} - c^2u_{xx} = -c^2u + c^2u = 0$.

3.166.
$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2; \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 12y^2 - 12x^2;$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 6xy; \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = -6xy;$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = -e^x \sin y;$$

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} = \cosh x \cos y; \quad \frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} = -\cosh x \cos y.$$

3.167. $f(1+h, 1+k) = \log 2 + h\log 2 + k + hk + o\left(h^2 + k^2\right)$

3.168. $f(1+h, 1+k) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}h + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}hk - \frac{1}{4}k^2 + o\left(h^2 + k^2\right)$

3.169.
$$f_x = \log y - ye^x; \; f_y = \frac{x}{y} - e^x$$

$$f_{xx} = -ye^x; \; f_{xy} = \frac{1}{y} - e^x; \; f_{yy} = -\frac{x}{y^2}$$

$$f(1,1) = -e; f_x(1,1) = -e; f_y(1,1) = 1 - e;$$

$$f_{xx}(1,1) = -e; f_{xy}(1,1) = 1 - e; f_{yy}(1,1) = -1$$

$$f(1+h, 1+k) =$$

$$-e - eh + (1-e)k + \frac{1}{2}\left(-eh^2 + 2(1-e)hk - k^2\right) + o\left(h^2 + k^2\right)$$

3.170. $$f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=0;$$

$$f_x=\sin y+y\sin x;\ f_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_y=x\cos y-\cos x;\ f_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_{xx}=y\cos x;\ f_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$f_{xy}=\cos y+\sin x;\ f_{xy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

$$f_{yy}=-x\sin y;\ f_{yy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}+h,\frac{\pi}{4}+k\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)h+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+\frac{\pi}{4}\right)k+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{4}h^2+2\sqrt{2}hk-\sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}k^2\right\}+o\left(h^2+k^2\right).$$

3.171. La funzione è continua fuori dall'origine ed è omogenea di grado $5-2=3$.

Le derivate parziali prime saranno continue fuori dall'origine e omogenee di grado 2. In particolare, sono continue anche nell'origine, quindi $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Le derivate parziali seconde saranno continue fuori dall'origine e omogenee di grado 1. In particolare, sono continue anche nell'origine, quindi $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$.

3.172. $$f(x,y)=\sqrt[3]{x}\left(x^2+y^2\right)=x^{7/3}+x^{1/3}y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}+\frac{y^2}{3x^{2/3}}.$$

La funzione $\frac{\partial f}{\partial x}$ non è continua in $x=0$ (almeno fuori dall'origine), quindi f non è $C^1(\mathbb{R}^2)$.

3.173. $$f(x,y)=\frac{x^3+2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{5x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}\equiv f_1(x,y)+f_2(x,y)$$

con f_1 positivamente omogenea di grado $3-1=2$, f_2 positivamente omogenea di grado $4-1=3$. Entrambe le funzioni sono continue fuori dall'origine.

f_1 ha derivate parziali prime positivamente omogenee di grado 1, continue fuori dall'origine, quindi continue anche in $(0,0)$, perciò $f_1 \in C^1(\mathbb{R}^2)$. (Si ricordi che ogni derivata parziale prima di una funzione positivamente omogenea di grado α, se esiste, è una funzione positivamente omogenea di grado $\alpha - 1$, v. [BPS2], cap.3, §9.2, Esercizio 4).

f_2 ha derivate parziali prime positivamente omogenee di grado 2, continue fuori dall'origine, quindi continue anche in $(0,0)$, perciò $f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Iterando il discorso si vede che le derivate parziali seconde di f_2 sono omogenee di grado 1 quindi $f_2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, ma le derivate parziali seconde di f_1 sono omogenee di grado 0 quindi discontinue nell'origine. Perciò $f_2 \notin C^2(\mathbb{R}^2)$.

Conclusione: $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$; $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$.

3.174. La funzione è positivamente omogenea di grado $3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$ e continua fuori dall'origine. Le derivate parziali prime saranno positivamente omogenee di grado $\frac{4}{3}$, le derivate parziali seconde saranno positivamente omogenee di grado $\frac{1}{3}$. Se ne deduce che $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. (Si vedano le argomentazioni più dettagliate dell'esercizio precedente).

3.175. Calcoliamo

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(-\frac{x_i}{2t}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{t^{n/2}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(-\frac{x_i}{2t}\right)\right] = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{n/2}} \left[\frac{x_i^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left[-\frac{n}{2} \frac{1}{t^{1+\frac{n}{2}}} + \frac{1}{t^{n/2}} \frac{|x|^2}{4t^2} \right];$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left\{ -\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2} - \left[\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right] \right\} = 0.$$

3.6. Massimi e minimi liberi

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 3, §6.

Esempi svolti

Esempio 3.15. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo o sella).

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + xy$$

Calcoliamo le derivate parziali e risolviamo il sistema per trovare i punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x = 2xy - y^2 + y = y(2x - y + 1) = 0 \\ f_y = x^2 - 2xy + x = x(x - 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Essendo il primo esempio, discutiamo in dettaglio la risoluzione del sistema. La prima equazione dà

$$y = 0 \text{ oppure } y = 2x + 1$$

Se $y = 0$ la seconda equazione dà

$$x(x+1) = 0, \text{ cioè } x = 0 \text{ o } x = -1,$$

cioè i punti $(0,0), (-1,0)$.

Se $y = 2x + 1$ la seconda equazione dà

$$x(-3x - 1) = 0, \text{ cioè } x = 0 \text{ o } x = -\frac{1}{3},$$

valori che sostituiti in $y = 2x + 1$ danno i punti $(0,1), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

In conclusione i punti stazionari sono:

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right); (-1,0);\ (0,0);\ (0,1).$$

Calcoliamo le derivate seconde e scriviamo la matrice hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 2y + 1 \\ 2x - 2y + 1 & -2x \end{pmatrix}.$$

Ora valutiamo la matrice Hessiana in ciascuno dei punti stazionari e applichiamo il

criterio studiato:

$$Hf\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\text{ definita pos.; }\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\text{ punto di min. rel.;}$$

$$Hf(-1,0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\text{ indefinita; }(-1,0)\text{ punto di sella;}$$

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\text{ indefinita; }(0,0)\text{ punto di sella;}$$

$$Hf(0,1)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\text{ indefinita; }(0,1)\text{ punto di sella.}$$

Esempio 3.16. Determinare tutti i punti critici della seguente funzione, e studiarne la natura, determinando gli eventuali punti di massimo relativo, minimo relativo, o sella. (Nel caso si trovi qualche caso dubbio, stabilirne la natura con i metodi studiati).

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2-2y^2+\frac{1}{3}x^3.$$

Calcoliamo il gradiente e cerchiamo i punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x = xy^2+x^2 = x(y^2+x)=0\\ f_y = x^2y-4y = y(x^2-4)=0\end{cases}$$

$$y\left(x^2-4\right)=0\Rightarrow y=0\text{ o }x=\pm 2;$$

$$y=0\Rightarrow x=0; x=2\Rightarrow y^2+2=0\text{ impossibile;}$$

$$x=-2\Rightarrow y^2-2=0, y=\pm\sqrt{2}.$$

Punti critici:

$$(0,0);\left(-2,\sqrt{2}\right);\left(-2,-\sqrt{2}\right).$$

Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} y^2+2x & 2xy \\ 2xy & x^2-4 \end{bmatrix}.$$

$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$; perciò $(0,0)$ è un caso dubbio.

Per studiarlo consideriamo la seguente restrizione di f:

$$f(x,0) = \frac{1}{3}x^3 \text{ che ha un punto di flesso in } x = 0,$$

quindi $(0,0)$ è punto di sella per $f(x,y)$.

Si rifletta sul criterio usato: se $(0,0)$ fosse un punto di massimo oppure di minimo per la funzione $f(x,y)$, lo sarebbe anche per la funzione di una variabile che si ottiene restringendo f a qualunque retta o curva; l'esistenza di una restrizione lungo cui il punto è di flesso implica quindi che non sia né di massimo né di minimo per la funzione di due variabili. Alla stessa conclusione giungeremmo se trovassimo due diverse restrizioni tali che lungo l'una la funzione ha un punto di massimo e lungo l'altra ha un punto di minimo.

$$Hf\left(-2, \pm\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} -2 & \mp 4\sqrt{2} \\ \mp 4\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ matrice indefinita.}$$

$$\text{Perciò } \left(-2, \pm\sqrt{2}\right) \text{ sono punti di sella.}$$

Esempio 3.17. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo o sella).

$$f(x,y) = (x-1)^2\left(x^2-y^2\right)$$

Calcoliamo il gradiente e cerchiamo i punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x = 2(x-1)(x^2-y^2) + 2x(x-1)^2 = (x-1)(4x^2-2y^2-2x) = 0 \\ f_y = -2y(x-1)^2 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione:

$$-2y(x-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ o } x = 1;$$

$$y = 0 \Rightarrow (x-1)(4x^2-2x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 0, x = \frac{1}{2},$$

perciò abbiamo i punti $(1,0), (0,0), (\frac{1}{2},0)$;

$x = 1 \Rightarrow$ anche l'altra equazione è soddisfatta.

Perciò $(1, y_0)$ è un'intera retta di punti stazionari.

In definitiva, i punti stazionari sono:

$$(0,0); \left(\frac{1}{2},0\right); \text{ e la retta } x = 1.$$

(Il punto $(1,0)$ è già compreso nella retta).

Matrice hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2y^2 - 12x + 2 & -4y(x-1) \\ -4y(x-1) & -2(x-1)^2 \end{pmatrix}.$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ indefinita; } (0,0) \text{ punto di sella.}$$

$$Hf\left(\frac{1}{2},0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ definita neg.; } \left(\frac{1}{2},0\right) \text{ punto di max. rel.}$$

$$Hf(1,y_0) = \begin{pmatrix} 2(1-y_0^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ semidef. } (1,y_0) \text{ casi dubbi.}$$

Abbiamo quindi un'intera retta di casi dubbi.

Osservando che $f(1,y_0) = 0$, vediamo che possiamo studiare la natura dei punti stazionari $(1,y_0)$ studiando il segno di f.

$$f(x,y) = (x-1)^2(x-y)(x+y)$$

Con i metodi visti nel §3.2 possiamo concludere che:

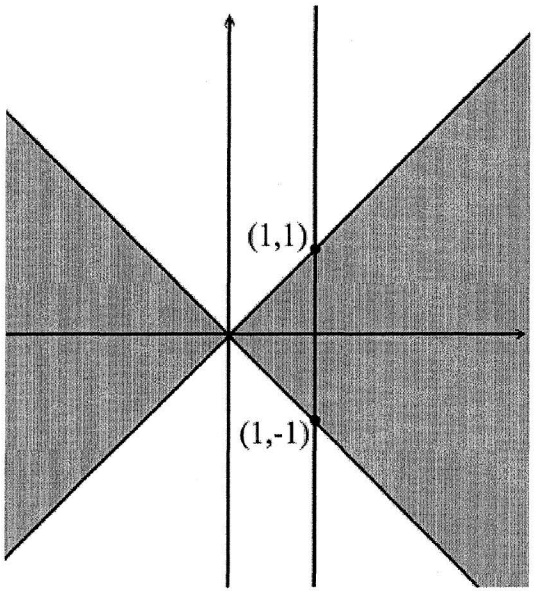


Fig. 3.47. Zona grigia: $f(x,y) > 0$; zona bianca: $f(x,y) < 0$

Osserviamo ora il comportamento di f nell'intorno dei punti della retta $x = 1$. Se $y_0 > 1$ o $y_0 < -1$, f è negativa in un intorno di $(1, y_0)$, quindi $(1, y_0)$ è punto di massimo relativo (perché $f(1, y_0) = 0$);

se $-1 < y_0 < 1$, f è positiva in un intorno di $(1, y_0)$, quindi $(1, y_0)$ è punto di minimo relativo;

invece in ogni intorno dei due punti $(1, \pm 1)$ f cambia segno, quindi $(1, \pm 1)$ sono punti di sella.

Esercizi

3.176.★

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{3} - x^2 - 4xy.$$

b. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(1,1)$.

3.177.★

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{3} + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2.$$

(Suggerimento. Uno dei punti critici presenta un "caso dubbio": per studiarlo, ragionate opportunamente sul *segno* della funzione in un intorno di quel punto).

b. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(1,0)$.

c. Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y)$ nel punto $(1,1)$ rispetto al versore $\underline{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

3.178.★

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x,y) = e^x(x-1)(y-1) + (y-1)^2.$$

b. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(1,2)$.

3.179.★

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura (è sufficiente considerare $0 \leq x < 2\pi$):

$$f(x,y) = \frac{y^2}{4} - (y+1)\cos x.$$

b. Calcolare la derivata direzionale $D_{\underline{v}}f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ con $\underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

3.180.★

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x,y) = (x\log x)(y-2) - \frac{y^2e}{4}.$$

b. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(e,1)$.

3.181.

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{2} - x^2 + xy - 2x - y^2.$$

b. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(1,0)$.

c. Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y)$ nel punto $(0,1)$ secondo il versore $\underline{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3.182.

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{3} + x^2y - 3xy + y^2.$$

b. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ nel punto $(0,1)$.

3.183.

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x,y) = x^2y + x^2 + y^2 - 6y.$$

b. Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x,y)$ (del punto precedente) nel punto $(1,2)$.

c. Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y)$ nel punto $(1,2)$ rispetto al versore $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.184. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^x\left(2x^2 - xy + y^2\right).$$

a. Si determinino tutti i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$, e se ne stabilisca la natura, giustificando le proprie conclusioni.

b. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1)$.

3.185. Si consideri la funzione di due variabili:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3y$$

a. Determinare i punti critici di f e stabilirne la natura.

b. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

3.186.

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 - \frac{x}{8} + y^2.$$

b. Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ nel punto $(2, -1)$.

c. Calcolare la derivata direzionale di $f(x, y)$ nel punto $(1, -1)$ rispetto al versore $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.187.

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x, y) = xy^3 - 3x^2 - 12xy.$$

b. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x, y)$ nel punto $(1, 1)$.

3.188.

a. Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione, e se ne studi la natura:

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - y^2 - 4xy.$$

b. Calcolare la derivata direzionale di $f(x, y)$ nel punto $(1, 1)$ rispetto al versore $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

c. Calcolare il piano tangente al grafico di $z = f(x, y)$ nel punto $(1, 0)$.

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari delle seguenti funzioni, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo o sella).

3.189.★ $f(x, y) = x^3y - xy^2 - 5xy$

3.190. $f(x,y) = xy^2 + \frac{4}{3}y^3 + 3y^2 + \frac{1}{2}x^2 - 1$

3.191.★ $f(x,y) = e^{-x^2}\left(2xy - y^2\right)$

3.192.★ $f(x,y) = x^2y(x - y + 1)$

3.193. $f(x,y) = e^{-y}\left(2y^2 + x^2 + 4x\right)$

3.194. $f(x,y) = x^2y + 4xy - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + y^2$

3.195.★ $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^3 - xy^2 + \frac{1}{2}y^2$

3.196. $f(x,y) = 2e^{-x^2+y}(1 - y) + e^y$

3.197.★ $f(x,y) = (x-1)^4 + y^4 - 4xy^2 + 8x$

3.198. $f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

3.199.★ $f(x,y) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(4 - y^2\right) + y^2$

3.200.★ $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2y$

3.201. $f(x,y) = 8(x-1)^2 + y^4 - 4xy^2$

3.202.★ $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{5}y^5$

3.203.★

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + (x+1)(3-2y) + (x+1)^2(y-2) - 2y^2$$

3.204. $f(x,y) = xy^2 + \frac{4}{3}y^3 + 3y^2 + \frac{1}{2}x^2 - 1$

3.205.★ $f(x,y) = x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2 - 4xy + 2y^2$

3.206.★ $f(x,y) = x^3y + y^4 - 3x^2y$

3.207. $f(x,y) = x^2y + y^3 - 4xy$

3.208.★ $f(x,y) = (x-1)^2(y-2) - y^2$

3.209. $f(x,y) = e^x(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}y^2 - y$

3.210.★ $f(x,y) = (x^2+y^2)(1-y)$

Applicazioni geometriche

I prossimi problemi di ottimizzazione possono essere formalizzati sia come problemi di ottimizzazione vincolata (che affronteremo nel § 3.8) sia come problemi di ottimizzazione libera, usando il vincolo per esprimere una variabile in funzione delle altre e quindi ottenendo un problema di ottimizzazione libera, in una variabile di meno. Qui è richiesto di seguire quest'ultima strada; opportuni suggerimenti guideranno lo studente nell'impostazione.

3.211.★ Si vuole minimizzare la quantità di cartone con cui è costruita una scatola, priva di coperchio, che deve avere volume di 1000cm^3. Quindi, fissato il volume di un parallelepipedo, si vuole minimizzare l'area della somma di 5 facce su 6. Trovare le dimensioni degli spigoli.

Suggerimento di impostazione. Se scegliamo il riferimento in modo che 3 facce della scatola coincidano con i piani coordinati, e (x,y,z) è il vertice opposto a quello che si trova nell'origine, il volume della scatola è

$$xyz = 1000\text{cm}^3, \text{ da cui } z = \frac{1000}{xy}.$$

Esprimere ora in funzione di x,y,z l'area da minimizzare e sostituire l'espressione di z trovata qui sopra per ottenere una funzione di 2 sole variabili (x,y) di cui cercare gli estremi liberi.

3.212.★ Determinare qual è la sfera di raggio massimo, centrata nell'origine, che sta sotto il piano $3x + 2y + z = 1$.

Suggerimento di impostazione. La sfera che risolve il problema sarà *tangente* al piano, quindi la distanza dell'origine dal piano è uguale al raggio della sfera; perciò si sta cercando il punto del piano a distanza *minima* dall'origine. Naturalmente questo si può trovare con i metodi della geometria, ma cerchiamolo minimizzando la distanza dall'origine del punto (x, y, z) sul piano. Anzi, come spesso si fa nei problemi in cui si vuole minimizzare una distanza, conviene minimizzare il *quadrato* della distanza dall'origine, $x^2 + y^2 + z^2$, funzione più facile da derivare (e d'altro canto la distanza è minima quando il suo quadrato è minimo). Sostituendo alla z la sua espressione ricavata dall'equazione del piano, si ha una funzione di 2 variabili (x, y) di cui cercare il minimo libero.

3.213.★ Determinare il punto sulla superficie

$$z = \frac{1}{x + y^2} \quad \text{per } x > 0, y > 0$$

che ha distanza minima dall'origine.

Suggerimento: leggere prima il suggerimento di impostazione dell'esercizio precedente.

Soluzioni § 3.6

3.176. *a.*

$$\begin{cases} f_x = \frac{y^3}{3} - 2x - 4y = 0 \\ f_y = xy^2 - 4x = x(y^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = \pm 2 \end{cases}$$

$$x = 0 \Rightarrow y\left(\frac{y^2}{3} - 4\right) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ o } y = \pm 2\sqrt{3};$$

$$y = \pm 2 \Rightarrow x = \pm\left(\frac{4}{3} - 4\right) = \mp\frac{8}{3}.$$

Punti critici: $(0,0)$; $\left(0, 2\sqrt{3}\right)$; $\left(0, -2\sqrt{3}\right)$; $\left(-\frac{8}{3}, 2\right)$; $\left(\frac{8}{3}, -2\right)$.

Matrice hessiana: $$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & y^2 - 4 \\ y^2 - 4 & 2xy \end{bmatrix}.$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Det} = -16 < 0\text{: } (0,0) \text{ punto di sella.}$$

$$Hf\left(0, \pm 2\sqrt{3}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Det} = -64 < 0\text{: } \left(0, \pm 2\sqrt{3}\right) \text{ punti di sella.}$$

$$Hf\left(\mp\frac{8}{3}, \pm 2\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{32}{3} \end{bmatrix}. \text{ Det} = \frac{64}{3} > 0;\ f_{xx} = -2 < 0:$$

$$\left(\mp\frac{8}{3}, \pm 2\right) \text{ punti di massimo relativo.}$$

b. $f(1,1) = \frac{1}{3} - 5 = -\frac{14}{3}$; $f_x(1,1) = \frac{1}{3} - 6 = -\frac{17}{3}$; $f_y(1,1) = -3$.

Piano tangente:

$$z = -\frac{17}{3}(x-1) - 3(y-1) - \frac{14}{3} = -\frac{17}{3}x - 3y + 4.$$

3.177. *a.*

$$\begin{cases} f_x = x^2y + xy = xy(x+1) = 0 \\ f_y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 + y = 0. \end{cases}$$

$$xy(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = 0 \text{ o } x = -1;$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0;\ y = 0 \Rightarrow x^2\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = -\frac{3}{2};$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}.$$

Punti critici: $(0,0),\ \left(-\frac{3}{2}, 0\right),\ \left(-1, -\frac{1}{6}\right).$

Matrice hessiana: $$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy + y & x^2 + x \\ x^2 + x & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \text{Det}Hf = 0 \text{ caso dubbio;}$$

$$Hf\left(-\frac{3}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix};\ \text{Det}Hf = -\frac{9}{16} < 0 \text{ punto di sella;}$$

$$Hf\left(-1, -\frac{1}{6}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \text{Det}Hf = \frac{1}{6} > 0;\ f_{xx} = \frac{1}{6} > 0 \text{ punto di minimo.}$$

Studiamo ora la natura dell'origine (caso dubbio). $f(0,0) = 0$ perciò è utile studiare il segno di f in un intorno di $(0,0)$.

$$f(x,y) = y\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right).$$

$$\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) \geq 0 \text{ per } y \geq -x^2 - \frac{2}{3}x^3.$$

In un intorno dell'origine questa disuguaglianza è verificata in prima approssimazione quando è verificata $y \geq -x^2$. Lo studio del segno del prodotto $y\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)$ mostra

allora che in ogni intorno dell'origine f cambia di segno. Quindi $(0,0)$ è di sella.

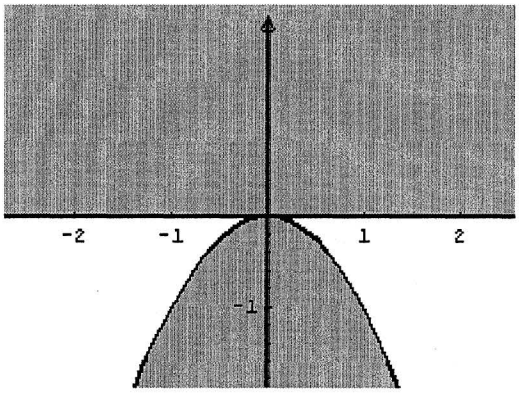


Fig. 3.48. In grigio le regioni in cui $f(x,y) > 0$; in bianco le regioni in cui $f(x,y) < 0$.

b. $$f_x(1,0) = 0;\ f_y(1,0) = \frac{5}{6};\ f(1,0) = 0.$$

Piano tangente: $$z = \frac{5}{6}y.$$

c. $$f_x(1,1) = 2;\ f_y(1,1) = \frac{11}{6}$$

$$D_{\underline{v}} f(1,1) = 2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{11}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{3}.$$

3.178.

a. $$\begin{cases} f_x = e^x x(y-1) = 0 \\ f_y = e^x(x-1) + 2(y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = 1.$$

$$x = 0 \Rightarrow -1 + 2(y-1) = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2};$$

$$y = 1 \Rightarrow e^x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Punti critici: $$\left(0, \frac{3}{2}\right);\ (1,1).$$

Matrice hessiana: $$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} e^x(x+1)(y-1) & e^x x \\ e^x x & 2 \end{bmatrix}.$$

$Hf\left(0,\frac{3}{2}\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$. Det >0; Tr >0, quindi $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ è punto di minimo.

$$Hf(1,1)=\begin{bmatrix}0 & e\\ e & 2\end{bmatrix}.\ \text{Det}<0,\ \text{quindi } (1,1)\ \text{è punto di sella.}$$

b. $$f(1,2)=1;\ f_x(1,2)=e;\ f_y(1,2)=2.$$

Il piano tangente ha equazione:

$$z=1+e(x-1)+2(y-2)$$

ossia

$$z=ex+2y-3-e.$$

3.179.

a. $$\begin{cases} f_x=(y+1)\sin x=0 \\ f_y=\frac{y}{2}-\cos x=0. \end{cases} \Rightarrow y=-1 \text{ o } x=0 \text{ o } x=\pi$$

$$y=-1\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2}{3}\pi,\ x=\frac{4}{3}\pi.$$

$$x=0\Rightarrow y=2;\ x=\pi\Rightarrow y=-2.$$

Punti critici: $$(0,2),\ (\pi,-2),\ \left(\frac{2}{3}\pi,-1\right),\ \left(\frac{4}{3}\pi,-1\right).$$

$$f_{xx}=(y+1)\cos x;\ f_{xy}=\sin x;\ f_{yy}=\frac{1}{2}.$$

$$Hf(x,y)=\begin{bmatrix}(y+1)\cos x & \sin x\\ \sin x & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

$Hf(0,2)=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$; Det >0, Tr >0: $(0,2)$ punto di minimo.

$Hf(\pi,-2)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$; Det >0, Tr >0: $(\pi,-2)$ punto di minimo.

$Hf\left(\frac{2}{3}\pi,-1\right)=\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$; Det <0: $\left(\frac{2}{3}\pi,-1\right)$ punto di sella.

$$Hf\left(\frac{4}{3}\pi,-1\right)=\begin{bmatrix}0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix};\ \text{Det}<0:\ \left(\frac{4}{3}\pi,-1\right)\ \text{punto di sella.}$$

b.
$$\nabla f\left(\frac{\pi}{4},0\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$D_{\underline{v}}f\left(\frac{\pi}{4},0\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=-\sqrt{\frac{1}{10}}.$$

3.180.

a.
$$\begin{cases} f_x=(\log x+1)(y-2)=0\\ f_y=x\log x-\frac{1}{2}ye=0\end{cases}$$

$$(\log x+1)(y-2)=0\Rightarrow y=2\ \text{o}\ x=\frac{1}{e}$$

$$y=2\Rightarrow x\log x-e=0\Rightarrow x=e$$

$$x=\frac{1}{e}\Rightarrow -\frac{1}{e}-\frac{1}{2}ye=0\Rightarrow y=-\frac{2}{e^2}.$$

Punti critici:
$$(e,2);\ \left(\frac{1}{e},-\frac{2}{e^2}\right).$$

$$Hf(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{y-2}{x} & \log x+1\\ \log x+1 & -\frac{1}{2}e\end{bmatrix}.$$

$$Hf(e,2)=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -\frac{1}{2}e\end{bmatrix};\ \text{Det}H=-4<0\Rightarrow(e,2)\ \text{punto di sella}$$

$$Hf\left(\frac{1}{e},-\frac{2}{e^2}\right)=\begin{bmatrix}-\frac{2}{e}-2e & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}e\end{bmatrix};\ \text{Det}H=1+e^2>0,\ \text{Tr}H<0,$$

$\left(\frac{1}{e},-\frac{2}{e^2}\right)$ punto di massimo

b. $$f(e,1) = -\frac{5}{4}e,\ f_x(e,1) = -2,\ f_y(e,1) = \frac{1}{2}e$$

$$z = -\frac{5}{4}e - 2(x-e) + \frac{1}{2}e(y-1)$$

$$z = -2x + \frac{1}{2}ey + \frac{1}{4}e.$$

3.181. *a.* $\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$punto di massimo; $(2,2)$ punto di sella; $(-4,2)$ punto di sella.
b. $z = -4x + \frac{3}{2}y + 1.$
c. $D_{\underline{v}}f(0,1) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$

3.182. *a.* $(0,0)$ punto di sella; $\left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2},0\right)$ punto di sella; $\left(\frac{-3-3\sqrt{5}}{2},0\right)$ punto di sella; $\left(1,\frac{5}{6}\right)$ punto di minimo; $\left(-3,-\frac{9}{2}\right)$ punto di minimo.
b. $z = -3x + 2y - 1.$

3.183. *a.* $(0,3)$ punto di minimo; $\left(\pm 2\sqrt{2},-1\right)$ punti di sella
b. $z = 6x - y - 9$
c. $-\frac{7}{\sqrt{2}}$

3.184. *a.* $(0,0)$ punto di minimo; $(-2,-1)$ punto di sella
b. $z = 5ex + ey - 4e$

3.185. *a.* $(0,0)$ punto di minimo; $\pm\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{1/4}, -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}\right)$ punti di sella
b. $z = 5x + 3y - 5.$

3.186. *a.* $\left(1,\pm\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$ punti di sella; $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},0\right)$ punto di minimo; $\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}},0\right)$ punto di sella
b. $z = \frac{17}{12} + \frac{23}{8}(x-2) + 2(y+1)$
c. $-\frac{1}{8\sqrt{2}}.$

3.187.
a. $\left(-\frac{8}{3},2\right)$, $\left(\frac{8}{3},-2\right)$ punti di massimo; $(0,0)$ punto di sella; $\left(0,\pm 2\sqrt{3}\right)$ punti di sella.
b. $z = -17x - 9y + 12$

3.188. *a.* $(0,0)$ punto di sella; $(-8,16)$ punto di massimo
b. $-3\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c. $z = x - 4y - \frac{2}{3}$

3.189.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2y - y^2 - 5y = y(3x^2 - y - 5) = 0 \\ f_y = x^3 - 2xy - 5x = x(x^2 - 2y - 5) = 0. \end{cases}$$

I punti stazionari sono: $(\pm 1, -2); \left(\pm\sqrt{5}, 0\right); (0,0); (0,-5)$.

Matrice hessiana: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 - 2y - 5 \\ 3x^2 - 2y - 5 & -2x \end{pmatrix}$.

$Hf(1,-2) = \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ def. neg.; $(1,-2)$ punto di max. rel.

$Hf(-1,-2) = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ def. pos.; $(-1,-2)$ punto di min. rel.

$Hf\left(\pm\sqrt{5},0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 10 & \mp 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$ indef. $\left(\pm\sqrt{5},0\right)$ punti di sella

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ indef. $(0,0)$ punto di sella

$Hf(0,-5) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ indef. $(0,-5)$ punto di sella

3.190.
$(0,0)$ punto di minimo relativo; $(-1,-1)$ punto di sella; $(-9,3)$ punto di sella.

3.191.

$$\begin{cases} f_x = e^{-x^2}(-2x(2xy - y^2) + 2y) = 2ye^{-x^2}(-2x^2 + xy + 1) = 0 \\ f_y = e^{-x^2}(2x - 2y) = 2e^{-x^2}(x - y) = 0. \end{cases}$$

I punti stazionari sono: $(0,0)$; $(1,1)$; $(-1,-1)$.

Matrice hessiana:

$$Hf(x,y) = e^{-x^2}\begin{pmatrix} 2y(-6x + 4x^3 + y - 2x^2y) & (2 - 4x^2 + 4xy) \\ (2 - 4x^2 + 4xy) & -2 \end{pmatrix}.$$

$$Hf\,(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ indef.; } (0,0) \text{ punto di sella}$$

$$Hf(1,1) = e^{-1}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ def. neg. } (1,1) \text{ punto di max. rel.}$$

$$Hf(-1,-1) = e^{-1}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ def. neg. } (-1,-1) \text{ punto di max. rel}$$

3.192. $\begin{cases} f_x = 3x^2y - 2xy^2 + 2xy = xy(3x - 2y + 2) = 0 \\ f_y = x^3 - 2x^2y + x^2 = x^2(x - 2y + 1) = 0. \end{cases}$

I punti stazionari sono: $(-1,0)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; e la retta $(0, y_0)$.

Matrice hessiana: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y(1+3x-y) & x(2+3x-4y) \\ x(2+3x-4y) & -2x^2 \end{pmatrix}$.

$$Hf\,(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ indef.; } (-1,0) \text{ punto di sella}$$

$$Hf\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ def. neg. } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ punto di max. rel.}$$

$$Hf(0,y_0) = \begin{pmatrix} 2y_0(1-y_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ semidef. } (0,y_0) \text{ casi dubbi.}$$

Studiamo i punti della retta $x = 0$ mediante il segno, poiché $f(0,y_0) = 0$.

Lo studio del segno ci dice che:

i punti $(0,y_0)$ per $y_0 > 1$ e per $y_0 < 0$ sono punti di massimo relativo (perché in quei punti f è nulla e in un intorno è negativa);

per $0 < y_0 < 1$ sono punti di minimo relativo (perché in quei punti f è nulla e in un intorno è positiva);

i punti $(0,0)$ e $(0,1)$ sono di sella (perché in quei punti f è nulla e in ogni intorno cambia di segno).

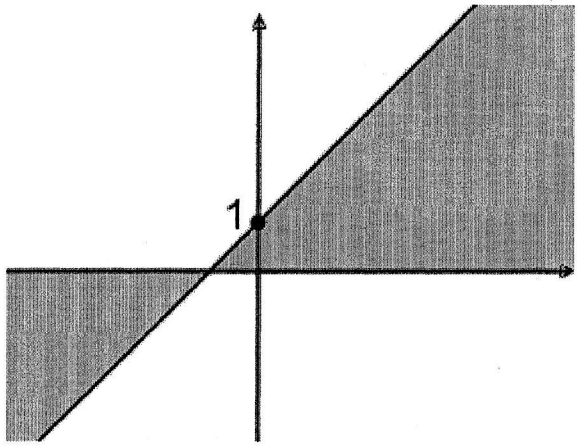


Fig. 3.49. In grigio le regioni in cui $f(x,y) > 0$; in bianco le regioni in cui $f(x,y) < 0$.

3.193. $\left(-2, 1+\sqrt{3}\right)$ punto di sella; $\left(-2, 1-\sqrt{3}\right)$ punto di min. rel.

3.194. $(0,0)$ punto di sella; $(-2,2)$ punto di min. rel.; $(-8,-16)$ punto di sella.

3.195. $\begin{cases} f_x(x,y) = xy^3 - y^2 = y^2(xy-1) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ o } y = \frac{1}{x} \\ f_y(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - 2xy + y = y\left(\frac{3}{2}x^2y - 2x + 1\right) = 0 \end{cases}$

$y = 0$ retta di punti stazionari;

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}\left(\frac{3}{2}x - 2x + 1\right) = 0 \Rightarrow x = 2, y = \frac{1}{2},$$

quindi $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ è stazionario.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 & 3xy^2 - 2y \\ 3xy^2 - 2y & 3x^2y - 2x + 1 \end{pmatrix}$$

$$Hf\left(2, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \text{ definita positiva.}$$

$\left(2, \frac{1}{2}\right)$ è punto di minimo.

Nei punti $y = 0$ si ha:

$$Hf(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x+1 \end{pmatrix} \text{ caso dubbio.}$$

Studiamo col metodo del segno. $f(x_0, 0) = 0$.

$$f(x,y) = y^2\left(\frac{1}{2}x^2y - x + \frac{1}{2}\right) \geq 0 \text{ se:}$$

$$y \geq \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

Grafico di $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

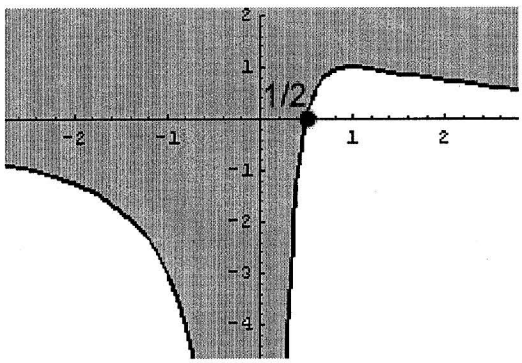


Fig. 3.50. In grigio le regioni in cui $f(x,y) > 0$; in bianco le regioni in cui $f(x,y) < 0$.

Quindi:
per $x_0 < \frac{1}{2}$ in un intorno di $(x_0, 0)$ è $f(x,y) \geq 0$; $(x_0, 0)$ è punto di minimo;
per $x_0 > \frac{1}{2}$ in un intorno di $(x_0, 0)$ è $f(x,y) \leq 0$; $(x_0, 0)$ è punto di massimo;
in ogni intorno di $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ f cambia di segno, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ è punto di sella.

3.196. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ punto di massimo; $\left(\pm\sqrt{\log 2}, 1\right)$ punti di sella.

3.197.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4(x-1)^3 - 4y^2 + 8 = 0 \\ f_y(x,y) = 4y^3 - 8xy = 4y(y^2 - 2x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y(y^2 - 2x) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ o } y^2 = 2x. \\ 4\left[(x-1)^3 - y^2 + 2\right] = 0 \end{cases}$$

Se $y = 0$ la seconda equazione dà

$$(x-1)^3 + 2 = 0; x = 1 - \sqrt[3]{2}.$$

Se $y^2 = 2x$,

$$(x-1)^3 - 2x + 2 = 0; \qquad (x-1)^3 - 2(x-1) = 0;$$

$$(x-1)\left[(x-1)^2 - 2\right] = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ o } x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

$x = 1 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$;
$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y^2 = 2\left(1 + \sqrt{2}\right); y = \pm\sqrt{2\left(1 + \sqrt{2}\right)}$
$x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow y^2 = 2\left(1 - \sqrt{2}\right) < 0$, impossibile.
Quindi i punti critici sono:

$$\left(1 - \sqrt[3]{2}, 0\right); \left(1, \pm\sqrt{2}\right); \left(1 + \sqrt{2}, \pm\sqrt{2\left(1 + \sqrt{2}\right)}\right).$$

Hessiana: $$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12(x-1)^2 & -8y \\ -8y & 12y^2 - 8x \end{pmatrix}.$$

$$Hf\left(1 - \sqrt[3]{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 8\left(\sqrt[3]{2} - 1\right) \end{pmatrix}$$ definita positiva; punto di minimo.

$$Hf\left(1, \pm\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \mp\sqrt{2} \\ \mp\sqrt{2} & 16 \end{pmatrix}$$ indefinita; punti di sella.

$$Hf\left(1 + \sqrt{2}, \pm\sqrt{2\left(1 + \sqrt{2}\right)}\right) = \begin{pmatrix} 24 & \mp 4\sqrt{1 + \sqrt{2}} \\ \mp 4\sqrt{1 + \sqrt{2}} & 16\left(1 + \sqrt{2}\right) \end{pmatrix}$$

definita positiva; punti di minimo.

3.198. $(0,0)$ punto di massimo rel.; $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ punto di sella; $\left(-5, \frac{25}{2}\right)$ punto di sella.

3.199.
$$\begin{cases} f_x = (x+1)(4 - y^2) \\ f_y = -2y\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + 2y = 2y\left(1 - \frac{x^2}{2} - x\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pm 2 \\ 1 - \frac{x^2}{2} - x = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0; x = -1 \pm \sqrt{3}.$$

I punti critici sono: $(-1, 0); \left(-1 \pm \sqrt{3}, 2\right); \left(-1 \pm \sqrt{3}, -2\right)$.

Hessiana: $$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 4 - y^2 & -2y(x+1) \\ -2y(x+1) & 2\left(1 - \frac{x^2}{2} - x\right) \end{bmatrix}.$$

$$Hf(-1,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$

$(-1, 0)$ punto di minimo relativo.

$$Hf\left(-1 \pm \sqrt{3}, 2\right) = \begin{bmatrix} 0 & -4\left(\pm\sqrt{3}\right) \\ -4\left(\pm\sqrt{3}\right) & \dots \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$\left(-1 \pm \sqrt{3}, 2\right)$ punto di sella.

$$Hf\left(-1 \pm \sqrt{3}, -2\right) = \begin{bmatrix} 0 & 4\left(\pm\sqrt{3}\right) \\ 4\left(\pm\sqrt{3}\right) & \dots \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$\left(-1 \pm \sqrt{3}, -2\right)$ punto di sella.

3.200. $$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x^3 - 4xy = 4x(x^2 - y) = 0 \\ f_y(x,y) = 4y^3 - 2x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x(x^2 - y) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = x^2. \\ 4y^3 - 2x^2 = 0 \end{cases}$$

Se $x = 0$ la seconda equazione dà $y = 0$.
Se $y = x^2$,

$$4x^6 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x^4 = \frac{1}{2}, x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quindi i punti critici sono:

$$(0,0);\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Hessiana: $$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2-4y & -4x\\ -4x & 12y^2\end{pmatrix}.$$

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\text{ caso dubbio.}$$

Però: $$f(x,x)=2x^4-2x^3$$

ha un punto di flesso in $x=0$, quindi $x=0$ è punto di sella.

$$Hf\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\begin{pmatrix}\frac{8}{\sqrt{2}} & \mp\frac{4}{\sqrt[4]{2}}\\ \mp\frac{4}{\sqrt[4]{2}} & 6\end{pmatrix}$$

Det $=\frac{48}{\sqrt{2}}-\frac{16}{\sqrt{2}}>0$. Definita positiva. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di minimo relativo.

3.201. $(1,0)$ punto di sella; $(2,\pm2)$ punti di minimo.

3.202.
$$\begin{cases}f_x=xy^2-9x=x(y^2-9)=0\\ f_y=x^2y+y^4=y(x^2+y^3)=0\end{cases}$$

$$x\left(y^2-9\right)=0\Rightarrow x=0\text{ o }y=\pm3;$$

$$x=0\Rightarrow y=0;y=3\Rightarrow x^2+27=0\text{ impossibile;}$$

$$y=-3\Rightarrow x^2-27=0,x=\pm3\sqrt{3}.$$

Punti critici: $$(0,0);\left(3\sqrt{3},-3\right);\left(-3\sqrt{3},-3\right).$$

Hessiana: $$Hf(x,y)=\begin{bmatrix}y^2-9 & 2xy\\ 2xy & x^2+4y^3\end{bmatrix}.$$

$$Hf(0,0)=\begin{bmatrix}-9 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\text{ perciò }(0,0)\text{ è un caso dubbio.}$$

Per studiarlo considero:

$$f(0,y)=\frac{1}{5}y^5 \text{ che ha un punto di flesso in } x=0,$$

quindi $(0,0)$ è punto di sella.

$Hf\left(\pm 3\sqrt{3},-3\right)=\begin{bmatrix} 0 & \mp 18\sqrt{3} \\ \mp 18\sqrt{3} & -81 \end{bmatrix}$; perciò $\left(\pm 3\sqrt{3},-3\right)$ sono punti di sella.

3.203.

$$\begin{cases} f_x=(x+1)^2+3-2y+2(x+1)(y-2)=x(x-2+2y) \\ f_y=-2(x+1)+(x+1)^2-4y \end{cases}$$

$$x(x-2+2y)=0 \Rightarrow x=0 \text{ o } x=2-2y;$$

$$x=0 \Rightarrow -1-4y=0, y=-\frac{1}{4};$$

$$x=2-2y \Rightarrow -2(3-2y)+(3-2y)^2-4y=0 \Rightarrow 4y^2-12y+3=0 \Rightarrow$$

$$y=\frac{3\pm\sqrt{6}}{2}, x=-1\mp\sqrt{6}.$$

I punti critici sono:

$$\left(0,-\frac{1}{4}\right);\left(-1-\sqrt{6},\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right);\left(-1+\sqrt{6},\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right).$$

Hessiana: $Hf(x,y)=\begin{bmatrix} 2x-2+2y & 2x \\ 2x & -4 \end{bmatrix}$.

$Hf\left(0,-\frac{1}{4}\right)=\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ definita neg.; $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ punto di massimo relativo.

$$Hf\left(-1-\sqrt{6},\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)=\begin{bmatrix} -1-\sqrt{6} & -2\left(1+\sqrt{6}\right) \\ -2\left(1+\sqrt{6}\right) & -4 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$\left(-1-\sqrt{6},\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right) \text{ punto di sella.}$$

$$Hf\left(-1+\sqrt{6}, \frac{3-\sqrt{6}}{2}\right) = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{6} & 2\left(-1+\sqrt{6}\right) \\ 2\left(-1+\sqrt{6}\right) & -4 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$\left(-1+\sqrt{6}, \frac{3-\sqrt{6}}{2}\right) \text{ punto di sella.}$$

$$\begin{cases} f_x = y^2 + x \\ f_y = 2xy + 4y^2 + 6y = 2y(x + 2y + 3) \end{cases}$$

3.204.
$(0,0)$ punto di minimo relativo; $(-1,-1)$ punto di sella; $(-9,3)$ punto di sella.

3.205.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2y - xy^2 - 4y = y(3x^2 - xy - 4) \\ f_y = x^3 - x^2y - 4x + 4y = x^2(x-y) - 4(x-y) = (x^2-4)(x-y) \end{cases}$$

$$(x^2-4)(x-y) = 0 \Rightarrow y = x \text{ o } x^2 - 4 = 0, \text{ cioè } x = \pm 2;$$

$$y = x \Rightarrow x(2x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = \pm\sqrt{2};$$

$$x = \pm 2 \Rightarrow 2y(4 \mp y) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ o } y = \pm 4;$$

I punti critici sono: $(0,0); \pm\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right); \pm(2,0); \pm(2,4)$.

Hessiana: $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy - y^2 & 3x^2 - 2xy - 4 \\ 3x^2 - 2xy - 4 & -x^2 + 4 \end{bmatrix}$.

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \text{ indefinita, } (0,0) \text{ punto di sella.}$$

$$Hf\left(\pm\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)\right) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ definita pos., } \pm\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \text{ punti di minimo.}$$

$$Hf(\pm(2,0)) = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita, } \pm(2,0) \text{ punti di sella.}$$

$$Hf(\pm(2,4)) = \begin{bmatrix} 32 & -8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita, } \pm(2,4) \text{ punti di sella.}$$

3.206.
$$\begin{cases} f_x = 3x^2y - 6xy = 3xy(x-2) \\ f_y = x^3 + 4y^3 - 3x^2 \end{cases}$$

$$3xy(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = x \text{ o } x = 2;$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0;$$

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 3;$$

$$x = 2 \Rightarrow 4y^3 - 4 = 0 \Rightarrow y = 1.$$

I punti critici sono: $(0,0); (3,0); (2,1)$.

Hessiana:
$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy - 6y & 3x^2 - 6x \\ 3x^2 - 6x & 12y^2 \end{bmatrix}.$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ caso dubbio.}$$

Consideriamo la restrizione

$$f(x,x) = 2x^4 - 3x^3 \sim -3x^3 \text{ per } x \to 0.$$

Per questa restrizione il punto $x = 0$ non è né di massimo né di minimo (flesso a tangente orizzontale), dunque per la funzione di due variabili l'origine è punto di sella.

$$Hf(3,0) = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita; } (3,0) \text{ è punto di sella.}$$

$$Hf(2,1) = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \text{ definita positiva; } (2,1) \text{ è punto di minimo relativo.}$$

3.207. $(0,0)$ punto di sella; $(4,0)$ è punto di sella;
$\left(2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ punto di minimo rel.; $\left(2, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ punto di massimo rel.

3.208. $\begin{cases} f_x = 2(x-1)(y-2) = 0 \\ f_y = (x-1)^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ o } y = 2$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0; y = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \Rightarrow x = 3 \text{ o } x = -1.$$

Punti stazionari: $(1,0), (3,2), (-1,2)$.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2(y-2) & 2(x-1) \\ 2(x-1) & -2 \end{bmatrix}.$$

$$Hf(1,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (1,0) \text{ punto di massimo}$$

$$Hf(3,2) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (3,2) \text{ punto di sella}$$

$$Hf(-1,2) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (-1,2) \text{ punto di sella.}$$

3.209. $(0,2)$ punto di minimo relativo; $(1,1)$ punto di sella.

3.210. $\begin{cases} f_x = 2x(1-y) = 0 \\ f_y = 2y(1-y) - (x^2+y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = 1$

$$x = 0 \Rightarrow 2y - 3y^2 = 0, y = 0 \text{ o } y = \frac{2}{3}$$

$$y = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 0, \text{mai.}$$

Punti stazionari: $(0,0); \left(0, \frac{2}{3}\right)$.

Matrice hessiana: $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2(1-y) & -2x \\ -2x & 2-6y \end{bmatrix}$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ definita positiva; } (0,0) \text{ punto di minimo.}$$

$$Hf\left(0, \frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ indefinita, } \left(0, \frac{2}{3}\right) \text{ è punto di sella.}$$

3.211. L'area della somma di 5 facce escluso il coperchio è:

$$A = xy + 2xz + 2zy = xy + 2(x+y)\frac{1000}{xy} = xy + \frac{2000}{x} + \frac{2000}{y}.$$

Cerchiamo gli estremi liberi di questa funzione in $x > 0, y > 0$.

$$\begin{cases} y - \frac{2000}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2000}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow y - 2000 \cdot \frac{y^4}{2000^2} = 0$$

$$\text{(poiché } y \neq 0) \quad 1 = \frac{y^3}{2000}, \quad y = 10\sqrt[3]{2} \simeq 12.6\text{cm};$$

$$x = \frac{2000}{y^2} = \frac{2000}{100 \cdot 2^{2/3}} = 10\sqrt[3]{2} \simeq 12.6\text{cm};$$

L'unico punto stazionario è dunque $\left(10\sqrt[3]{2}, 10\sqrt[3]{2}\right)$, e per il significato fisico del problema è evidente che sarà punto di minimo. Accertiamocene comunque rigorosamente, calcolando l'Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{4000}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4000}{y^3} \end{bmatrix}; \quad Hf\left(10\sqrt[3]{2}, 10\sqrt[3]{2}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

matrice definita positiva, quindi $\left(10\sqrt[3]{2}, 10\sqrt[3]{2}\right)$ è punto di minimo relativo.

La scatola deve quindi avere dimensioni:

$$x = y = 10\sqrt[3]{2} \simeq 12.6\text{cm};$$

$$z = \frac{1000}{xy} = \frac{1000}{\left(10\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{10}{2^{2/3}} \simeq 6.3\text{cm}.$$

In altre parole, lo spigolo in altezza dev'essere metà degli spigoli di base, uguali tra loro.

3.212. $f(x,y) = x^2 + y^2 + (1 - 3x - 2y)^2$;

$$\begin{cases} 2x - 6(1 - 3x - 2y) = 0 \\ 2y - 4(1 - 3x - 2y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 6y = 3 \\ 6x + 5y = 2 \end{cases} \quad x = \frac{3}{14}, y = \frac{1}{7}.$$

Unico punto stazionario: $\left(\frac{3}{14}, \frac{1}{7}\right)$.

Per il significato geometrico del problema, sarà il punto di minimo, comunque verifichiamolo con l'Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \text{ matrice (costante) definita positiva,}$$

quindi $\left(\frac{3}{14}, \frac{1}{7}\right)$ è effettivamente di minimo. La distanza cercata è

$$f\left(\frac{3}{14}, \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{3}{14}\right)^2 + \left(\frac{2}{14}\right)^2 + \left(1 - 3 \cdot \frac{3}{14} - 2 \cdot \frac{2}{14}\right)^2 = \frac{3^2 + 2^2 + 1^2}{14^2} = \frac{1}{14}.$$

Ora il raggio della sfera cercata è la radice di questa quantità, quindi

$$R = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

3.213. Minimizziamo la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{(x + y^2)^2}.$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{2}{(x+y^2)^2} = 0 \\ 2y - \frac{4y}{(x+y^2)^2} = 0. \end{cases}$$

La 2^a equaz. dà $y = 0$ oppure $(x + y^2)^2 = 2$.
Dalla 1^a equaz., $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{x^2}; x^3 = 1, x = 1$;
$(x + y^2)^2 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + y^2\right)^2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$.

Punti stazionari: $(1,0); \left(\frac{1}{2}; \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}\right)$.

Matrice hessiana:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 + \frac{4}{(x+y^2)^2} & \frac{8y}{(x+y^2)^2} \\ \frac{8y}{(x+y^2)^2} & 2 + \frac{12y^2-4x}{(x+y^2)^3} \end{bmatrix};$$

$$Hf(1,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ indefinita; } (1,0) \text{ punto di sella.}$$

$$Hf\left(\frac{1}{2}; \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 4\sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} \\ 4\sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} & 8 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Det}Hf\left(\frac{1}{2}; \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}\right) = 40 - 24\sqrt{2} > 0.$$

Matrice definita positiva, $\left(\frac{1}{2}; \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}\right)$ è punto di minimo. Il punto della superficie è individuato anche dalla 3^a componente $z = \frac{1}{x+y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, perciò è

$$\left(\frac{1}{2}; \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

3.7. Funzioni definite implicitamente

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 3, §8.

Esempio 3.18. Sia

$$f(x,y) = xe^y - ye^x - 1.$$

Si dimostri che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x), g \in C^1(I)$ in un intorno di $x = 1$. Si calcoli poi $g'(1)$.

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. L'equazione

$$0 = f(1, y_0) = e^{y_0} - y_0 - 1$$

suggerisce $y_0 = 0$. Calcoliamo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y - e^x; \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1 - e.$$

Perciò per il teorema di Dini è definita una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno I di $x = 0$; si ha $g(1) = 0$ e

$$g'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)}.$$

Calcoliamo $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y - ye^x; \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1.$$

Perciò $$g'(1) = -\frac{1}{1-e} = \frac{1}{e-1}.$$

Esempio 3.19. Si consideri l'equazione:

$$x^3 - x\sqrt{y} + x + y = 0$$

Si dimostri che, in un intorno del punto $(-1,1)$, questa definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$.

Calcolare quindi $g'(-1)$ e $g''(-1)$, e scrivere lo sviluppo di Taylor al second'ordine per g, in un intorno di $x = -1$.

Sia: $$f(x,y) = x^3 - x\sqrt{y} + x + y$$

$$f(-1,1) = -1+1-1+1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{2\sqrt{y}} + 1; \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = \frac{3}{2} \neq 0$$

perciò per il Teorema di Dini, in un intorno del punto $(-1,1)$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$.

Il fatto che questo esercizio richieda il calcolo non solo di g' ma anche di g'' suggerisce un procedimento leggermente diverso da quello dell'esercizio precedente, che anziché applicare direttamente la formula per la derivata della funzione implicita ne ripercorre la dimostrazione: derivando rispetto ad x l'equazione $f(x, g(x)) = 0$ si ha

$$3x^2 - \sqrt{g(x)} - \frac{x}{2\sqrt{g(x)}}g'(x) + 1 + g'(x) = 0$$

$$3 - 1 + \frac{g'(-1)}{2} + 1 + g'(-1) = 0$$

da cui ricaviamo $$g'(-1) = -2.$$

Derivando ancora rispetto ad x:

$$6x - \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} - \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} - \frac{x}{2}\left(\frac{g''(x)\sqrt{g(x)} - \frac{g'(x)^2}{2\sqrt{g(x)}}}{g(x)}\right) + g''(x) = 0$$

$$-6 + 1 + 1 + \frac{1}{2}(g''(-1) - 2) + g''(-1) = 0$$

$$g''(-1) = \frac{10}{3}.$$

Possiamo ora scrivere la formula di Taylor:

$$g(x) = g(-1) + g'(-1)(x+1) + \frac{1}{2}g''(-1)(x+1)^2 + o\big((x+1)^2\big)$$

$$g(x) = 1 - 2(x+1) + \frac{5}{3}(x+1)^2 + o\big((x+1)^2\big)$$

Esercizi

3.214.★ Si consideri l'equazione:

$$x^3 + xy^2 - 2y^3 = 0$$

Si dimostri che, in un intorno del punto $(1,1)$, questa definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$.

Calcolare quindi $g'(1)$ e $g''(1)$, e scrivere lo sviluppo di Taylor al second'ordine per g, in un intorno di $x = 1$.

3.215.★ Si consideri l'equazione:

$$\sqrt[3]{x^2 - y} - 2x + y = 0$$

Si dimostri che, in un intorno del punto $(2,3)$, questa definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$.

Calcolare quindi $g'(2)$ e scrivere lo sviluppo di Taylor al prim'ordine per g, in un intorno di $x = -2$.

3.216.★ Sia

$$f(x,y) = y\cos x + 2(x-1)\cos\Big(\frac{\pi}{3}y\Big).$$

Si dimostri che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h(y), h \in C^1(I)$ in un intorno di $y = 1$.

Si calcoli poi $h'(1)$.

3.217.★ Sia

$$f(x,y) = xe^{-2y^2} - 2ye^{-x}.$$

Si dimostri che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x), g \in C^1(I)$ in un intorno di $x_0 = 2$.

Si calcoli poi $g'(2)$.

3.218.★ Sia

$$f(x,y) = x^3 - 2xy + y^4(x-1).$$

Si dimostri che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x), g \in C^1(I)$ in un intorno di $x_0 = 1$.
Si calcoli poi $g'(1)$.

3.219.★ Sia

$$f(x,y) = e^{xy} - e^{-2y}\cos x - 1.$$

Si dimostri che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x), g \in C^1(I)$ in un intorno di $x_0 = \pi/2$.
Si calcoli poi $g'(\pi/2)$.

3.220.★ Sia

$$f(x,y) = \arctan(xy) - e^{-2y(x-1)}.$$

Si dimostri che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x), g \in C^1(I)$ in un intorno di $x_0 = 1$.
Si calcoli poi $g'(1)$.

3.221.★ Sia

$$f(x,y) = x\log y + xy^2\log x - x^2.$$

Si dimostri che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x), g \in C^1(I)$ in un intorno di $x_0 = 1$.
Si calcoli poi $g'(1)$.

3.222.★ Sia

$$f(x,y) = 2y(x-1)^2 + 3x + \frac{1}{16}(x-2)(y-1)^5.$$

Si dimostri che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x), g \in C^1(I)$ in un intorno di $x_0 = 2$.
Si calcoli poi $g'(2)$.

3.223.★ Sia

$$f(x,y) = e^{-xy} - (x+1) + y^3(x-1).$$

Si dimostri che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x), g \in C^1(I)$ in un intorno di $x_0 = 1$.

Si calcoli poi $g'(1)$.

3.224.★ Sia

$$f(x,y) = 2e^{-x}y + (x+1)y^2 - 3e^{2x}.$$

Si dimostri che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente *due* funzioni $y = g_1(x), y = g_2(x), g_1, g_2 \in C^1(I)$ in un intorno di $x_0 = 0$.

Si scelga una delle due funzioni g_i e se ne calcoli la derivata prima in $x = 0$.

Soluzioni § 3.7

3.214. Sia $$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2y^3.$$

$$f_y(x,y) = 2xy - 6y^2$$

$$f(1,1) = 0; f_y(1,1) = -4.$$

Perciò per il teorema di Dini, risulta definita, in un intorno di $x = 1$, una funzione $y = g(x)$ tale che $f(x, g(x)) = 0$.

Risulta: $$g(1) = 1$$

e derivando l'equazione

$$x^3 + xg(x)^2 - 2g^3(x) = 0$$

$$3x^2 + g(x)^2 + 2xg(x)g'(x) - 6g(x)^2g'(x) = 0 \qquad (*)$$

da cui: $$3 + 1 + 2g'(1) - 6g'(1) = 0;\ g'(1) = 1$$

e derivando ancora rispetto ad x la (*):

$$6x + 2g(x)g'(x) + 2g(x)g'(x) + 2xg'(x)^2 +$$

$$+ 2xg(x)g''(x) - 12g(x)g'(x)^2 - 6g(x)^2g''(x) = 0$$

$$6 + 2 + 2 + 2 + 2y''(1) - 12 - 6y''(1) = 0$$

da cui $$g''(1) = 0.$$

Perciò $$g(x) = (x-1) + o\big((x-1)^2\big), \text{ per } x \to 1.$$

3.215. $$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 - y} - 2x + y$$

$$f(2,3) = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{3(x^2-y)^{2/3}} + 1; \frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = \frac{2}{3} \neq 0$$

perciò per il Teorema di Dini, in un intorno del punto $(2,3)$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{3(x^2-y)^{2/3}} - 2;\ \frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = -\frac{2}{3};$$

$$g'(2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2,3)}{\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)} = -\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1.$$

$$g(x) = g(2) + g'(2)(x-2) + o(x-2)$$

$$g(x) = 3 + (x-2) + o(x-2)$$

3.216. $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. L'equazione $0 = f(x_0,1) = \cos x_0 + x_0 - 1$ suggerisce $x_0 = 0$. Calcoliamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\sin x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}y\right);\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1.$$

Perciò per il teorema di Dini è definita una e una sola funzione $x = h(y)$ in un intorno di $y = 1$; si ha $h(1) = 0$ e

$$h'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)}.$$

Calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos x - 2\frac{\pi}{3}(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{3}y\right);\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Perciò
$$h'(1) = -\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}{1} = -\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right).$$

3.217. $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. L'equazione $0 = f(2,y_0) = 2e^{-2y_0^2} - 2y_0e^{-2}$ suggerisce $y_0 = 1$. Calcoliamo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4xye^{-2y^2} - 2e^{-x};\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -8e^{-2} - 2e^{-2} = -10e^{-2}.$$

Perciò per il teorema di Dini è definita una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x = 2$; si ha $g(2) = 0$ e

$$g'(2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)}.$$

Calcoliamo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-2y^2} + 2ye^{-x}; \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = e^{-2} + 2e^{-2} = 3e^{-2}.$

Perciò $$g'(2) = -\frac{3e^{-2}}{-10e^{-2}} = \frac{3}{10}.$$

3.218. $$f(1,y) = 1 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(1, \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y^3(x-1); \frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{1}{2}\right) = -2 \neq 0.$$

Poiché $f\left(1, \frac{1}{2}\right) = 0, f$ è C^1 in un intorno di $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{1}{2}\right) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, e risulta $g(1) = \frac{1}{2}$. Calcoliamo ora:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y + y^4; \frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{16};$$

$$g'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{1}{2}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{1}{2}\right)} = -\frac{2 + \frac{1}{16}}{-2} = 1 + \frac{1}{32} = \frac{33}{32}.$$

3.219. $$f(\pi/2, y) = e^{\pi y/2} - 1 = 0 \Rightarrow y = 0.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + 2e^{-2y}\cos x; \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Poiché $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0, f$ è C^1 in un intorno di $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, e risulta $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Calcoliamo ora:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + e^{-2y}\sin x;\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 1;$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)} = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}.$$

3.220. $$f(1, y) = \arctan y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}.$$

$$f\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1 + (xy)^2} + 2(x-1)e^{-2y(x-1)};\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1 + \pi^2/16} \neq 0.$$

Poiché $f\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = 0$, f è C^1 in un intorno di $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$, l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, e risulta $g(1) = \frac{\pi}{4}$. Calcoliamo ora:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1 + (xy)^2} + 2ye^{-2y(x-1)};\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{4}}{1 + \pi^2/16} + \frac{\pi}{2};$$

$$g'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\left(1 + \pi^2/16\right) = -\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi^3}{32}.$$

3.221. $$f(1, y) = \log y - 1 = 0 \Rightarrow y = e.$$

$$f(1, e) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} + 2xy\log x;\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, e) = \frac{1}{e} \neq 0.$$

Poiché $f(1, e) = 0$, f è C^1 in un intorno di $(1, e)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, e) \neq 0$, l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $(1, e)$, e risulta $g(1) = \frac{1}{e}$. Calcoliamo ora:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \log y + y^2 \log x + y^2 - 2x; \frac{\partial f}{\partial x}(1,e) = e^2 - 1;$$

$$g'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,e)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,e)} = \frac{1-e^2}{\frac{1}{e}} = e - e^3.$$

3.222. $f(2,y) = 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = -3.$

$$f(2,-3) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x-1)^2 + \frac{5}{16}(x-2)(y-1)^4; \frac{\partial f}{\partial y}(2,-3) = 2 \neq 0.$$

Poiché $f(2,-3) = 0, f$ è C^1 in un intorno di $(2,-3)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-3) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $(2,-3)$, e risulta $g(2) = -3$. Calcoliamo ora:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y(x-1) + 3 + \frac{1}{16}(y-1)^5; \frac{\partial f}{\partial x}(2,-3) = -12 + 3 - 64 = -73;$$

$$g'(2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2,-3)}{\frac{\partial f}{\partial y}(2,-3)} = \frac{73}{2}.$$

3.223. $f(1,y) = e^{-y} - 2 = 0 \Rightarrow y = -\log 2.$

$$f(1,-\log 2) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -xe^{-xy} + 3y^2(x-1); \frac{\partial f}{\partial y}(1,-\log 2) = -2 \neq 0.$$

Poiché $f(1,-\log 2) = 0, f$ è C^1 in un intorno di $(1,-\log 2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-\log 2) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $(1,-\log 2)$, e risulta $g(1) = -\log 2$. Calcoliamo ora:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -ye^{-xy} - 1 + y^3; \frac{\partial f}{\partial x}(1,-\log 2) = 2\log 2 - 1 - (\log 2)^3;$$

$$g'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,-\log 2)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,-\log 2)} = \frac{2\log 2 - 1 - (\log 2)^3}{2} = \log 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\log 2)^3.$$

3.224. $f(0,y) = 2y + y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y = 1, y = -3.$

$$f(0,1) = f(0,-3) = 0.$$

Scegliamo $g_1(x)$ tale che $g_1(0) = 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{-x} + 2y(x+1); \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 4; \frac{\partial f}{\partial y}(0,-3) = -4.$$

Poiché $f(0,1) = 0, f$ è C^1 in un intorno di $(0,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g_1(x)$ in un intorno di $(0,1)$, e risulta $g_1(0) = 1$. Analogamente:

Poiché $f(0,-3) = 0, f$ è C^1 in un intorno di $(0,-3)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,-3) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g_2(x)$ in un intorno di $(0,-3)$, e risulta $g_2(0) = -3$.

Scegliamo ora g_1 e calcoliamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2e^{-x}y + y^2 - 6e^{2x}; \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -7;$$

$$g_1'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)} = -\frac{-7}{4} = \frac{7}{4}.$$

Analogamente:

Scegliamo ora g_2 e calcoliamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,-3) = 9;$$

$$g_2'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,-3)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,-3)} = -\frac{9}{-4} = \frac{9}{4}.$$

3.8. Massimi e minimi vincolati. Moltiplicatore di Lagrange

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 4, §6.1.

Esempio 3.20. Determinare i punti di massimo e minimo assoluti per la funzione

$$f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}$$

soggetta al vincolo

$$g(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0.$$

Si richiede di determinare i "candidati" punti di massimo o minimo vincolato usando il metodo del moltiplicatore di Lagrange, e quindi stabilire l'effettiva natura dei punti trovati, giustificando le proprie affermazioni.

Cominciamo ad osservare che il vincolo non ha punti critici in quanto

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2(y-1))$$

si annulla solo in $(0,1)$, punto che non soddisfa l'equazione di vincolo. (Questa verifica è necessaria per poter poi applicare il metodo del moltiplicatore di Lagrange).

Scriviamo la Lagrangiana:

$$L(x,y,\lambda) = xe^{-(x^2+y^2)} - \lambda\left[x^2 + (y-1)^2 - 1\right]$$

e impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

che dà:

$$\begin{cases} e^{-(x^2+y^2)}[-2x^2+1] = 2\lambda x \\ e^{-(x^2+y^2)}[-2xy] = 2\lambda(y-1) \\ x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Dividendo membro a membro le prime due equazioni otteniamo

$$\frac{2x^2-1}{2xy} = \frac{x}{y-1}; \quad y = -2x^2+1$$

che sostituita nella terza (equazione di vincolo) dà

$$4x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{17}-1}{8}; x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}}; y = 1 - \frac{\sqrt{17}-1}{4} = \frac{5-\sqrt{17}}{4}.$$

Quindi i punti stazionari vincolati sono

$$\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}}, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right).$$

Ora ragioniamo così. Il vincolo è una circonferenza, insieme chiuso e limitato; f è continua, quindi per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluto sul vincolo; d'altro canto la funzione f è, rispettivamente, positiva e negativa nei due punti stazionari, perciò

$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}}, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$ è punto di massimo assoluto vincolato;

$\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}}, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$ è punto di minimo assoluto vincolato.

Esercizi

3.225.★ Determinare tutti i punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 1$. Giustificare le proprie conclusioni.

3.226.★ Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

soggetta al vincolo $(x-1)^2 + 4y^2 = 4$. Giustificare le proprie conclusioni.

3.227. Determinare tutti i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^3 - y^3$$

soggetta al vincolo $x^4 + y^4 = 1$. Giustificare le proprie conclusioni.

3.228.★ Determinare i punti di massimo e minimo assoluti per la funzione

$$f(x,y) = xe^{-y}$$

soggetta al vincolo

$$g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0.$$

3.229.★ Determinare i punti di massimo e minimo assoluti per la funzione

$$f(x,y) = xy^3$$

soggetta al vincolo

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0.$$

3.230.★ Determinare i punti di massimo e minimo assoluti per la funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2\sqrt{2}xy$$

soggetta al vincolo

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

3.231.★ Determinare i punti di massimo e minimo assoluti per la funzione

$$f(x,y) = y^3 + 4x^2y - 4y$$

soggetta al vincolo

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

3.232.★ Determinare i punti di massimo e minimo assoluti per la funzione

$$f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$$

soggetta al vincolo

$$g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

Nota bene: anche se in questo caso il vincolo non descrive un insieme chiuso e limitato, potete "dare per buono" che massimo e minimo assoluto esistano.

3.233.★ Determinare i punti di massimo e minimo assoluti per la funzione

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^3}{3}$$

soggetta al vincolo

$$g(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 = 0.$$

Applicazioni geometriche

3.234.★ Si vuole progettare la forma (cilindrica) di una lattina da bibite in modo da minimizzare l'area della superficie totale (quindi minimizzare il metallo usato), realizzando un volume V_0 prefissato. Determinare in che proporzioni devono essere scelti il raggio R e l'altezza h del cilindro.

Si imposti il problema come problema di massimo vincolato, scrivendo le funzioni $f(R,h), g(R,h)$ che assegnano, rispettivamente, l'area della superficie totale e il volume del cilindro, e minimizzando $f(R,h)$ sotto la condizione $g(R,h) = V_0$.

3.235.★ Si vuole calcolare il massimo volume di una scatola a forma di parallelepipedo contenuta dentro l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Per semplicità, assumere fin dall'inizio che il parallelepipedo abbia le facce parallele ai piani coordinati. Data la simmetria del problema, possiamo limitarci a considerare quel che succede nel primo ottante $x > 0, y > 0, z > 0$. La porzione della scatola che cerchiamo contenuta in questo ottante sarà un parallelepipedo con 3 facce sui piani coordinati; detto (x,y,z) il vertice opposto a quello che si trova nell'origine, il volume di questo parallelepipedo è semplicemente xyz, che va massimizzata sotto il vincolo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(Infatti, se la scatola non tocca la superficie dell'ellissoide, certamente non stiamo usando al meglio lo spazio disponibile). Si noti che si tratta di un problema di

ottimizzazione vincolata per una funzione di 3 variabili. Il volume della scatola contenuta nell'ellissoide intero è 8 volte il volume della scatola che sta nel 1° ottante.

3.236.★ Si vuole calcolare il massimo volume di una scatola a forma di parallelepipedo contenuta dentro un cono di raggio R e altezza h.

Rappresentiamo il cono come:

$$\mathrm{C}=\left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

Per semplicità, assumere fin dall'inizio che il parallelepipedo di volume massimo abbia la base inferiore nella base del cono e i vertici della base superiore appoggiati sulla superficie del cono. Data la simmetria del problema, possiamo limitarci a considerare quel che succede nel primo ottante $x > 0, y > 0, z > 0$. La porzione della scatola che cerchiamo contenuta in questo ottante sarà un parallelepipedo con 3 facce sui piani coordinati; detto (x, y, z) il vertice opposto a quello che si trova nell'origine, il volume di questo parallelepipedo è semplicemente xyz, che va massimizzata sotto il vincolo

$$z = h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Si noti che si tratta di un problema di ottimizzazione vincolata per una funzione di 3 variabili. Il volume della scatola contenuta nel cono intero è 4 volte il volume della scatola che sta nel 1° ottante.

3.237. Si svolga nuovamente l'esercizio 3.211 del §3.6, utilizzando ora il metodo del moltiplicatore di Lagrange (in sostanza, si chiede ora di non usare l'equazione di vincolo per esprimere una variabile in funzione delle altre, anche se questo è possibile).

3.238. Si svolga nuovamente l'esercizio 3.0 del §3.6, utilizzando ora il metodo del moltiplicatore di Lagrange (in sostanza, si chiede ora di non usare l'equazione di vincolo per esprimere una variabile in funzione delle altre, anche se questo è possibile).

3.239. Si svolga nuovamente l'esercizio 3.0 del §3.6, utilizzando ora il metodo del moltiplicatore di Lagrange (in sostanza, si chiede ora di non usare l'equazione di vincolo per esprimere una variabile in funzione delle altre, anche se questo è possibile).

Soluzioni § 3.8

3.225. Si verifica che il vincolo non ha punti critici:
$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) = 0$ solo nell'origine, che non sta sul vincolo.
Introduciamo la lagrangiana:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x = 2x(1-\lambda) = 0 \\ L_y = -2y - 2\lambda y = -2y(1+\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

La 1^a equazione dà $x = 0$ o $\lambda = 1$.
$x = 0 \Rightarrow$ (Equaz. 3) $y = \pm 1 \Rightarrow$ (Eq.2) $\lambda = -1$, quindi:
$(x, y, \lambda) = (0, \pm 1, -1)$.
$\lambda = 1 \Rightarrow$ (Equaz.2) $y = 0 \Rightarrow$ (Equaz.3) $x = \pm 1$, quindi: $(x, y, \lambda) = (\pm 1, 0, 1)$.
I candidati punti di massimo e minimo vincolato sono quindi:
$(0, \pm 1)$; $(\pm 1, 0)$.
Notiamo che $f(0, \pm 1) = -1, f(\pm 1, 0) = 1$.
La funzione f è continua, il vincolo è un insieme chiuso e limitato (circonferenza), per il Teorema di Weierstrass deve esistere almeno un punto di massimo e uno di minimo. Quindi il minimo è -1 e il massimo è 1, entrambi i punti $(0, \pm 1)$ sono di minimo ed entrambi i punti $(\pm 1, 0)$ sono di massimo.

3.226. Si verifica che il vincolo non ha punti critici:
$\nabla g(x,y) = (2(x-1), 8y) = 0$ solo in $(1,0)$, che non sta sul vincolo.

$$L(x,y,\lambda) = e^{-x^2-y^2} - \lambda\left[(x-1)^2 + 4y^2 - 4\right]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -2xe^{-x^2-y^2} - 2\lambda(x-1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2} - 8\lambda y = 0 \\ (x-1)^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

Punti stazionari per L:

$$(-1,0), (3,0), \left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right).$$

$f(-1,0) = e^{-1}$; $f(3,0) = e^{-9}$; $f\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = e^{-2/3}$

Perciò, poiché f, essendo continua sul vincolo (che è un insieme chiuso e limitato) deve avere massimo e minimo vincolati, si può concludere che:

$$(3,0) \text{ punto di minimo assoluto; } \left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \text{ punti di massimo assoluto.}$$

3.227. Si verifica che il vincolo non ha punti critici:
$\nabla g(x,y) = (4x^3, 4y^3) = 0$ solo in $(0,0)$, che non sta sul vincolo.
I punti stazionari della lagrangiana sono:
$(0,\pm 1); (\pm 1, 0); \pm\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.
Esaminando il valore di f in questi punti si conclude che:
$(0,1), (-1,0)$ sono punti di minimo assoluto (min. $= -1$);
$(0,-1), (1,0)$ sono punti di massimo assoluto (max. $= 1$).

3.228. $\nabla g(x,y) = \left(2x, \frac{y}{2}\right) = \underline{0}$ solo nell'origine, che non soddisfa il vincolo.

$$L(x,y,\lambda) = xe^{-y} - \lambda\left[x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right].$$

Risolviamo il sistema:
$$\begin{cases} e^{-y} = 2\lambda x \\ -xe^{-y} = \lambda\frac{y}{2} \\ x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0. \end{cases}$$

Dividendo membro a membro le prime due equazioni otteniamo

$$\frac{y}{4x} = -x; \quad y = -4x^2$$

che sostituita nel vincolo dà

$$4x^4 + x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{17}-1}{8}; x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}}; y = \frac{1-\sqrt{17}}{2}.$$

Quindi i punti stazionari vincolati sono

$$\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right).$$

Ora ragioniamo così. Il vincolo è un'ellisse, insieme chiuso e limitato; f è continua, quindi per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluto sul vincolo; d'altro canto la funzione f è, rispettivamente, positiva e negativa nei due punti stazionari, perciò

$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$ è punto di massimo assoluto vincolato;
$\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$ è punto di minimo assoluto vincolato;

3.229.

$$L(x, y, \lambda) = xy^3 - \lambda\left[x^2 + 4y^2 - 1\right].$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y^3 = 2\lambda x \\ 3xy^2 = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Dividendo membro a membro le prime due equazioni, nell'ipotesi $\lambda \neq 0$, otteniamo

$$\frac{y}{3x} = \frac{x}{4y}; \quad 4y^2 = 3x^2; \; y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

che sostituita nel vincolo dà

$$4x^2 - 1 = 0; \; x = \pm\frac{1}{2}.$$

Quindi sono punti stazionari vincolati i seguenti:

$$\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right); \pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Se poi $\lambda = 0$, la prima equazione dà $y = 0$, allora la seconda è soddisfatta, e la terza dà $x = \pm 1$. Quindi abbiamo anche i punti

$$(\pm 1, 0)$$

(che sono punti stazionari liberi, che si trovano sul vincolo).

Ora ragioniamo così. Il vincolo è un'ellisse, insieme chiuso e limitato; f è continua, quindi per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluto sul vincolo; d'altro canto la funzione f vale:

$$\frac{3\sqrt{3}}{128} \text{ in } \pm\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$-\frac{3\sqrt{3}}{128} \text{ in } \pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$0 \text{ in } (\pm 1, 0) \quad (\text{per } \lambda = 0)$$

quindi i primi due punti sono di massimo assoluto, i secondi due di minimo assoluto.

3.230. Il vincolo non ha punti critici.

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2\sqrt{2}xy - \lambda\left[x^2 + y^2 - 4\right].$$

Risolviamo il sistema:
$$\begin{cases} 2x + 2\sqrt{2}y - 2\lambda x = 0 \\ 2\sqrt{2}x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} \\ \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}y - \lambda^2 \frac{y}{\sqrt{2}} = 0 \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

$$-\frac{y}{\sqrt{2}}\left(-\lambda - 2 + \lambda^2\right) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ o } \lambda = -1, \lambda = 2.$$

$y = 0 \Rightarrow$ (dalla 1^a equaz.) $x = 0$, che però non soddisfa l'equaz. del vincolo;

$$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{y}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}, x = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}, x = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Quindi sono punti stazionari vincolati i seguenti:

$$\pm\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right); \pm\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Ora ragioniamo così. Il vincolo è una circonferenza, insieme chiuso e limitato; f è continua, quindi per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluto sul vincolo; d'altro canto la funzione f vale:

$$-4 \text{ in } \pm\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad 8 \text{ in } \pm\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

quindi i primi due punti sono di minimo assoluto, i secondi due di massimo assoluto.

3.231. $L(x,y,\lambda) = f(x,y) = y^3 + 4x^2y - 4y - \lambda\left[x^2+y^2-1\right]$.

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} 8xy - \lambda 2x = 0 \\ 3y^2 + 4x^2 - 4 - \lambda 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

$$8xy - \lambda 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } \lambda = 4y.$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \pm 1, -1 \mp 2\lambda = 0, \lambda = \mp\frac{1}{2}.$$

$$\lambda = 4y \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 5y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1, y = 0.$$

Quindi sono punti stazionari vincolati i seguenti:

$$(0, \pm 1); (\pm 1, 0).$$

Ora ragioniamo così. Il vincolo è una circonferenza, insieme chiuso e limitato; f è continua, quindi per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluto sul vincolo; d'altro canto la funzione f vale:

$$f(0, \pm 1) = \mp 3; \qquad f(\pm 1, 0) = 0$$

quindi $(0,1)$ è punto di minimo assoluto, $(0,-1)$ di massimo assoluto.

3.232. Il vincolo non ha punti critici.

$$L(x,y,\lambda) = xe^{-x^2-y^2} - \lambda\left[x^2 - y^2 - 1\right].$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} e^{-x^2-y^2}(-2x^2+1) = \lambda 2x \\ e^{-x^2-y^2}(-2xy) = -\lambda 2y \\ x^2 - y^2 = 1. \end{cases}$$

La 2^a equaz. dà: $y = 0$ o $\lambda = xe^{-x^2-y^2}$.

Se $y = 0, x = \pm 1$;

se $\lambda = xe^{-x^2-y^2}$, la 1^a equaz. dà $-2x^2 + 1 = 2x^2, x = \pm\frac{1}{2}$, e la 3^a equaz. dà $y^2 = -\frac{3}{4}$, impossibile.

Quindi i punti stazionari vincolati sono $(\pm 1, 0)$. Poiché

$$f(\pm 1, 0) = \pm e^{-1},$$

sapendo che massimo e minimo esistono possiamo concludere che $(1,0)$ è punto di massimo assoluto, e $(-1,0)$ di minimo assoluto.

3.233. $\nabla g(x,y) = (x+y, x+2y) = \underline{0}$ solo nell'origine, che non soddisfa il vincolo, quindi il vincolo non ha punti critici.

$$L(x,y,\lambda) = \frac{(x+y)^3}{3} - \lambda\left(\frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2\right).$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} L_x = (x+y)^2 - \lambda(x+y) = 0 \\ L_y = (x+y)^2 - \lambda(x+2y) = 0 \\ \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione dà:

$$x + y = 0 \text{ oppure } x + y = \lambda.$$

$x + y = 0$, cioè $y = -x$, sostituita nella terza dà

$$\frac{x^2}{2} - x^2 + x^2 - 2 = 0, x^2 = 4, x = \pm 2$$

e quindi i due punti $(2,-2), (-2,2)$.

Invece $x + y = \lambda$ dà, nella 2^a e 3^a equazione, il sistema:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - (x+y)(x+2y) = 0 \\ \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Escludendo $(x+y) = 0$ (già discussa) la prima dà

$$x + y - x - 2y = 0, \text{ cioè } y = 0$$

che sostituita nella 3^a dà ancora $x = \pm 2$, quindi troviamo $(2,0), (-2,0)$.

Quindi sono punti stazionari vincolati i seguenti:

$$(2,-2), (-2,2), (2,0), (-2,0).$$

Ora ragioniamo così. Il vincolo è una ellisse, insieme chiuso e limitato; f è continua, quindi per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluto sul vincolo; d'altro canto la funzione f vale:

$$f(2,-2) = f(-2,2) = 0;$$

$$f(2,0) = \frac{8}{3}; f(-2,0) = -\frac{8}{3}.$$

quindi $(-2,0)$ è punto di minimo assoluto, $(2,0)$ di massimo assoluto.

3.234. Superficie totale:

$$f(R,h) = 2\text{Area base} + \text{Area sup. laterale} = 2\cdot \pi R^2 + (2\pi R)h;$$

Volume: $$g(R,h) = \pi R^2 h.$$

Il problema dunque è:

$$\begin{cases} \min(2\pi R^2 + 2\pi Rh) \\ \text{sub} \\ \pi R^2 h = V_0. \end{cases}$$

Per il significato del problema saranno $R > 0, h > 0$, in particolare il vincolo non ha punti critici. Lagrangiana:

$$L = 2\pi R^2 + 2\pi Rh - \lambda\big(\pi R^2 h - V_0\big).$$

Punti critici della lagrangiana:

$$\begin{cases} 4\pi R + 2\pi h - 2\lambda\pi Rh = 0 \\ 2\pi R - \lambda\pi R^2 = 0 \\ \pi R^2 h = V_0 \end{cases}$$

Dalla 2^a equazione, $$\lambda = \frac{2}{R},$$

che nella prima dà $$4\pi R + 2\pi h - 4\pi h = 0;$$

$$h = 2R.$$

Questa è l'informazione che ci interessa: occorre che la lattina abbia l'altezza uguale al diametro. In tal caso, l'area della superficie laterale è:

$$f(R,2R) = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2.$$

3.235. Il problema è:

$$\begin{cases} \min xyz \\ \text{sub} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Per il significato del problema saranno $x > 0, y > 0,\ z > 0,$ in particolare il vincolo non ha punti critici.

Lagrangiana: $$L = xyz - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

Punti critici della lagrangiana:

$$\begin{cases} yz - \lambda \frac{2x}{a^2} = 0 \\ xz - \lambda \frac{2y}{b^2} = 0 \\ xy - \lambda \frac{2z}{c^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due

$$\begin{cases} yz = \lambda \frac{2x}{a^2} \\ xz = \lambda \frac{2y}{b^2} \end{cases}$$

dividendo membro a membro si ha:

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}.$$

Analogamente dalla prima e terza equazione otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

e queste relazioni inserite nell'equazione di vincolo ci danno

$$\frac{3x^2}{a^2} = 1; x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

e quindi

$$y = \frac{b}{\sqrt{3}}; z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Il volume della scatola contenuta nell'ellissoide intero è 8 volte il volume di questa scatola, cioè

$$V = 8\frac{abc}{3\sqrt{3}}.$$

A titolo di confronto, $V_{\text{ellissoide}} = \frac{4}{3}\pi abc$ (come calcoleremo in seguito usando il calcolo integrale), perciò

$$\frac{V_{\text{scatola}}}{V_{\text{ellissoide}}} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}},$$

che è poco più di $1/5$.

3.236. Il problema è:

$$\begin{cases} \min xyz \\ \text{sub} \\ z = h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Per il significato del problema saranno $x > 0, y > 0$, $z > 0$, in particolare il vincolo non ha punti critici.

Lagrangiana: $$L = xyz - \lambda\left(z - h + \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Punti critici della lagrangiana:

$$\begin{cases} yz - \lambda\frac{h}{R}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ xz - \lambda\frac{h}{R}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ xy - \lambda = 0 \\ z - h + \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Dalla 3^a si ha $\lambda = xy$, che sostituita nelle prime due dà

$$\begin{cases} yz = \frac{h}{R}\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ xz = \frac{h}{R}\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad (*)$$

semplificando per y la prima, per x la seconda, e dividendo membro a membro si ha:

$$1 = \frac{x^2}{y^2}, \text{ quindi } y = x,$$

che sostituita nella (*) e nell'equazione di vincolo danno:

$$\begin{cases} z = \frac{h}{R}\frac{x^2}{x\sqrt{2}} = \frac{h}{R}\frac{x}{\sqrt{2}} \\ z = h - \frac{h}{R}x\sqrt{2} \end{cases}$$

e quindi $$\frac{h}{R}\frac{x}{\sqrt{2}} = h - \frac{h}{R}x\sqrt{2}$$

che risolta dà $$x = \frac{\sqrt{2}}{3}R; y = \frac{\sqrt{2}}{3}R; z = \frac{h}{3}.$$

Il volume della scatola contenuta nel cono intero è 4 volte il volume di questa scatola, cioè

$$V = 4\frac{2}{9}R^2 \cdot \frac{h}{3} = \frac{8}{27}R^2h.$$

A titolo di confronto, $V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, perciò

$$\frac{V_{\text{scatola}}}{V_{\text{cono}}} = \frac{\frac{8}{27}}{\frac{1}{3}\pi} = \frac{8}{9\pi} \simeq 0.28.$$

3.237. Il problema è:

$$\begin{cases} \min[xy + 2(x+y)z] \\ \text{sub} \\ xyz = 1000. \end{cases}$$

$$L(x, y, z, \lambda) = xy + 2(x+y)z - \lambda(xyz = 1000)$$

$$\begin{cases} y + 2z - \lambda yz = 0 \\ x + 2z - \lambda xz = 0 \\ 2(x+y) - \lambda xy = 0 \\ xyz = 1000 \end{cases}$$

Ricavando $$\lambda = \frac{2(x+y)}{xy}$$

dalla 3^a equaz. e sostituendo nelle altre troviamo il sistema in (x, y, z) (teniamo presente che $x, y, z \neq 0$ perché $xyz = 1000$):

$$\begin{cases} y + 2z = \frac{2z(x+y)}{x} \\ x + 2z = \frac{2z(x+y)}{y} \\ xyz = 1000 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \\ 4z^3 = 1000 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \frac{10}{\sqrt[3]{4}} \\ x = 10\sqrt[3]{2} \\ y = 10\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

L'unico punto stazionario della lagrangiana è $\left(10\sqrt[3]{2}, 10\sqrt[3]{2}, \frac{10}{\sqrt[3]{4}}\right)$, e per il significato geometrico del problema sarà il punto di minimo vincolato che cerchiamo.

3.238. Il problema è:

$$\begin{cases} \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ \text{sub} \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$$

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(3x + 2y + z - 1)$$

$$\begin{cases} 2x - 3\lambda = 0 \\ 2y - 2\lambda = 0 \\ 2z - \lambda = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Ricavando $\lambda = 2z$

dalla 3^a equaz. e sostituendo nelle altre troviamo il sistema in (x,y,z):

$$\begin{cases} 2x - 6z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \\ 9z + 4z + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \\ 9z + 4z + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{1}{14} \\ x = \frac{3}{14} \\ y = \frac{1}{7} \end{cases}$$

L'unico punto stazionario della lagrangiana è $\left(\frac{3}{14}, \frac{1}{7}, \frac{1}{14}\right)$, e per il significato geometrico del problema sarà il punto di minimo vincolato che cerchiamo. Il massimo raggio della sfera che sta sotto il piano è

$$R = \sqrt{\frac{3^2 + 2^2 + 1^2}{14^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

3.239. Il problema è:

$$\begin{cases} \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ \text{sub} \\ z = \frac{1}{x+y^2}. \end{cases}$$

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\left(z - \frac{1}{x + y^2}\right)$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{\lambda}{(x+y^2)^2} = 0 \\ 2y - \frac{2\lambda y}{(x+y^2)^2} = 0 \\ 2z - \lambda = 0 \\ z = \frac{1}{x+y^2} \end{cases}$$

Ricavando $\lambda = 2z$

dalla 3^a equaz. e sostituendo nelle altre troviamo il sistema in (x,y,z):

$$\begin{cases} 2x = \frac{2z}{(x+y^2)^2} \\ 2y = \frac{4yz}{(x+y^2)^2} \\ z = \frac{1}{x+y^2} \end{cases}$$

che tenendo conto della 3ª dà $\begin{cases} x = \frac{1}{(x+y^2)^3} \\ y = \frac{2y}{(x+y^2)^3}. \end{cases}$

La 2ª equaz. dà $y = 0$ o $(x+y^2)^3 = 2$. Dalla 1ª,

$$y = 0 \Rightarrow x^4 = 1, x = 1, z = 1, \text{ cioè il punto } (1,0,1);$$

$$(x+y^2)^3 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \sqrt{\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}}, z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

cioè il punto $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Essendo l'unico punto stazionario per la lagrangiana, per il significato geometrico del problema sarà il punto di minimo che cerchiamo.

3.9. Applicazioni fisiche ed esercizi vari

Esempio 3.21. Determinazione del potenziale Newtoniano
Mostreremo ora un'applicazione significativa del teorema di derivazione delle funzioni composte per funzioni reali di più variabili.

Consideriamo l'*equazione di Laplace*, in $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u(\underline{x}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\underline{x}) = 0.$$

Si tratta di un'equazione alle derivate parziali molto importante, che è soddisfatta, ad esempio, in $\mathbb{R}^3$ (o in $\mathbb{R}^2$ se le simmetrie del problema riducono la dimensione):

- dal potenziale elettrostatico nei punti dello spazio privi di carica elettrica;
- dal potenziale gravitazionale nei punti dello spazio privi di materia;
- dalla temperatura di un corpo in equilibrio termico, nei punti in cui non sono presenti pozzi o sorgenti di calore;

in $\mathbb{R}^2$:

- dall'altezza, rispetto al piano orizzontale, di una membrana elastica su cui non agiscono forze esterne, in equilibrio;

...e sono possibili diverse altre interpretazioni.

Ci proponiamo ora di determinare le *soluzioni radiali* di quest'equazione, cioè le funzioni radiali che risolvono l'equazione in tutto lo spazio (tranne al più nell'origine). Ad esempio, ci aspettiamo che siano radiali il potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme posta nell'origine, o il potenziale gravitazionale generato da una massa puntiforme posta nell'origine. Questi potenziali sono importanti non solo perché corrispondono ad una situazione fisica semplice ma significativa, ma soprattutto perché a partire da questi si possono ricostruire i potenziali relativi a distribuzioni di carica (o di materia) più generali.

Poiché ipotizziamo a priori che u sia radiale, scriviamo

$$u(\underline{x}) = f(|\underline{x}|)$$

con

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

e applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte: ponendo $\rho = |\underline{x}|$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\underline{x}) = f'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = f'(\rho)\frac{x_i}{\rho};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f'(\rho)\frac{x_i}{\rho}\right] = f''(\rho)\left(\frac{x_i}{\rho}\right)^2 + f'(\rho)\cdot\frac{\rho - \frac{x_i^2}{\rho}}{\rho^2} =$$

$$= f''(\rho)\frac{x_i^2}{\rho^2} + f'(\rho)\cdot\frac{\rho^2 - x_i^2}{\rho^3}.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} f''(\rho)\frac{x_i^2}{\rho^2} + f'(\rho)\cdot\frac{\rho^2 - x_i^2}{\rho^3} =$$

$$= \frac{f''(\rho)}{\rho^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{f'(\rho)}{\rho^3}\sum_{i=1}^{n}(\rho^2 - x_i^2) = \frac{f''(\rho)}{\rho^2}\rho^2 + \frac{f'(\rho)}{\rho^3}(n-1)\rho^2 =$$

$$= f''(\rho) + \frac{(n-1)}{\rho}f'(\rho).$$

Cercare le soluzioni radiali di $\Delta u(\underline{x}) = 0$ è quindi ricondotto a risolvere l'*equazione differenziale ordinaria*:

$$f''(\rho) + \frac{(n-1)}{\rho}f'(\rho) = 0 \text{ in } (0, +\infty). \qquad (*)$$

(Ci interessa che la funzione soddisfi l'equazione *fuori dall'origine*; questo è il caso fisicamente interessante del potenziale generato da una carica puntiforme nell'origine, ad esempio). Si noti come l'ipotesi che la funzione u sia radiale abbia permesso di ridurre il problema a un problema unidimensionale: abbiamo trasformato un'equazione differenziale a derivate parziali in un'equazione differenziale ordinaria.

L'equazione è del second'ordine ma si abbassa di grado ponendo:

$$v = f'.$$

$$v'(\rho) + \frac{(n-1)}{\rho}v(\rho) = 0 \text{ in } (0, +\infty).$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili. A parte la soluzione banale $v = 0$, si trova:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{n-1}{\rho}; \quad \log|v| = (1-n)\log\rho + c_1; \qquad v = c_2\rho^{1-n}.$$

Ora per trovare f eseguiamo un'integrazione: poiché $f' = v$,

$$f(\rho) = \int v(\rho)d\rho = c_2\int \rho^{1-n}d\rho = \begin{cases} \text{se } n = 2 & c_2\log\rho + c_3 \\ \text{se } n > 2 & \frac{c_2}{\rho^{n-2}} + c_3. \end{cases}$$

In definitiva, troviamo che le soluzioni radiali dell'equazione di Laplace in tutto $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ sono:

$$u(\underline{x}) = \frac{c_2}{|x|^{n-2}} + c_3 \text{ se } n \geq 3;$$

$$u(\underline{x}) = c_2\log|\underline{x}| + c_3 \text{ se } n = 2.$$

Queste funzioni sono dette, rispettivamente, *potenziale Newtoniano* e *potenziale logaritmico*.

Si noti che non esistono invece soluzioni radiali dell'equazione di Laplace *in tutto lo spazio*, a parte le costanti.

Scriviamo esplicitamente il potenziale Newtoniano nel piano e nello spazio:

$$u(x,y,z) = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{nello spazio tridimensionale;}$$

$$u(x,y) = c\log(x^2+y^2) \quad \text{nel piano.}$$

Problemi sul potenziale elettrostatico

Nel seguito, per fissare le idee, ci concentreremo sull'interpretazione di u come potenziale elettrostatico. Il gradiente del potenziale elettrostatico è il campo elettrostatico, cioè la forza esercitata su una carica puntiforme e unitaria (in particolare: carica *positiva*), posta nel punto. Scegliendo $c = 1$, ossia (nel caso piano)

$$u(x,y) = \log(x^2+y^2),$$

si ha

$$\nabla u(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right),$$

campo che ha direzione radiale *uscente* dall'origine, ossia descrive una forza

repulsiva. Questo dunque è il campo generato da una carica puntiforme unitaria (in particolare *positiva*) posta nell'origine, i quanto due cariche di segno uguale si respingono. Il potenziale generato da una carica puntiforme -1 (negativa) posta nell'origine è allora

$$u(x,y) = -\log\bigl(x^2+y^2\bigr),$$

e dà luogo ad un campo attrattivo.

I prossimi esercizi utilizzano questi fatti. Al di là dell'interpretazione fisica interessante, sono esercizi di riepilogo su vari aspetti del calcolo differenziale per funzioni di più variabili che abbiamo incontrato nel capitolo.

3.240.★ Potenziale elettrostatico generato da due cariche di ugual segno nel piano. Tenendo conto della discussione dell'Esempio precedente, e del fatto che il potenziale del campo generato da un numero finito di cariche unitarie puntiformi è semplicemente la somma dei potenziali generati dalle singole cariche:

a. Si scriva il potenziale $U(x,y)$, nel piano, generato da due cariche puntiformi unitarie (positive) poste nei punti $(1,0), (-1,0)$.

b. Si calcoli il campo elettrostatico (gradiente di u); ci sono punti del piano in cui il campo si annulla? Ci sono punti di massimo o minimo relativo del potenziale? Dare un'intepretazione fisica di quanto trovato.

c. Si vuole studiare la linea di livello $U(x,y) = 0$. Si trovino punti non critici in cui questa curva interseca l'asse x, e si dimostri che nell'intorno di questi punti definisce implicitamente un arco di curva regolare.

d. Provare che le linee equipotenziali si possono rappresentare in forma cartesiana come

$$\bigl(x^2+y^2+1\bigr)^2 - 4x^2 = c \qquad \text{per } c \in \mathbb{R}.$$

3.241.★ Potenziale elettrostatico generato da due cariche di segno opposto nel piano.

a. Si scriva il potenziale $U(x,y)$, nel piano, generato da due cariche puntiforme unitarie, la prima positiva posta in $(1,0)$ e la seconda negativa posta in $(-1,0)$.

b. Si calcoli il campo elettrostatico (gradiente di u); ci sono punti del piano in cui il campo si annulla? Ci sono punti di massimo o minimo relativo del potenziale? Dare un'intepretazione fisica di quanto trovato.

c. Si scriva (semplificando opportunamente l'espressione) l'equazione della linea di livello $U(x,y) = c$. Riconoscere di che tipo di linee si tratta, e provare a fare un grafico delle linee di livello.

3.242.★ Potenziale elettrostatico generato da tre cariche di ugual segno nel piano.

a. Si scriva il potenziale $U(x,y)$, nel piano, generato da tre cariche puntiformi unitarie e positive poste nei punti $(1,0),(-1,0),\left(0,\sqrt{3}\right)$ (cioè sui vertici di un triangolo equilatero).

b. Determinare tutti i punti del piano in cui il campo elettrostatico è nullo.

Suggerimento: il significato fisico del problema e le simmetrie consentono di supporre a priori che i punti in cui U è stazionario stanno sulla retta $x=0$.

3.243.★ Potenziale elettrostatico generato da due cariche di ugual segno nello spazio.

a. Si scriva il potenziale $U(x,y,z)$, nello spazio, generato da due cariche puntiformi unitarie e positive poste nei punti $(1,0,0),(-1,0,0)$.

b. Si verifichi che nell'origine il campo è nullo.

c. Si dimostri che l'origine è un punto di sella per il potenziale U, studiando opportune restrizioni.

3.244.★ Equazione del trasporto. Si consideri l'equazione del trasporto lineare in $\mathbb{R}^{n+1}$, ossia:

$$\underline{c}\cdot\nabla_{\underline{x}}u+\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

dove la funzione incognita è $u(\underline{x},t)$ con $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $\nabla_{\underline{x}}u$ indica il gradiente di u rispetto alle sole variabili $\underline{x}$, e $\underline{c}$ è un vettore costante assegnato.

a. Si verifichi che per ogni $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ differenziabile, la funzione

$$u(\underline{x},t)=f(\underline{x}-\underline{c}t)$$

risolve l'equazione.

b. Si risolva quindi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases}\underline{c}\cdot\nabla_{\underline{x}}u+\frac{\partial u}{\partial t}=0\\ u(\underline{x},0)=e^{-|\underline{x}|^2}.\end{cases}$$

Soluzioni § 3.9

3.240.

a. $$U(x,y) = \log\left[(x+1)^2 + y^2\right] + \log\left[(x-1)^2 + y^2\right]$$

b.

$$\nabla U(x,y) = \left(\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}, \frac{2y}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x-1)^2+y^2} \right).$$

$$\begin{cases} \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2} = 0 \\ 2y\left[\frac{1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{1}{(x-1)^2+y^2}\right] = 0 \end{cases}$$

Dalla 2^a equaz. si ha $y = 0$, quindi dalla prima

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 0, x = 0.$$

L'unico punto in cui il campo si annulla è l'origine.

Studiamo questo unico punto stazionario di U.

$$HU(0,0) = 2\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

L'origine è un punto di sella. L'interpretazione fisica è la seguente: se mettiamo una carica positiva nell'origine, su di essa non agisce alcuna forza, per cui la carica è in equilibrio (e questo succede solo in questo punto); tuttavia, tale equilibrio è instabile, in quanto in ogni intorno di quel punto ci sono linee lungo cui il campo allontana dal punto di equilibrio.

c. $\begin{cases} U(x,y) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ dà $\log\left[(x+1)^2\right] + \log\left[(x-1)^2\right] = 0$

$$2\log|x^2-1| = 0, x^2 - 1 = \pm 1, x^2 = 2, x^2 = 0.$$

$(0,0)$ è punto critico per U, quindi scegliamo

$\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$, punti non critici di U che stanno sulla curva.

$$\nabla U\left(\pm\sqrt{2}, 0\right) = \left(\pm 4\sqrt{2}, 0\right).$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\left(\pm 4\sqrt{2}, 0\right) \neq 0, \text{ perciò}$$

in un intorno di ognuno dei due punti $\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$ l'equazione $U(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $x = g(y)$, C^1.

d. $$U(x,y) = \log\left[(x+1)^2 + y^2\right] + \log\left[(x-1)^2 + y^2\right] = c$$

$$\log\left\{\left[(x+1)^2 + y^2\right]\left[(x-1)^2 + y^2\right]\right\} = c$$

$$\left[(x+1)^2 + y^2\right]\left[(x-1)^2 + y^2\right] = e^c \equiv k$$

$$\left[x^2 + y^2 + 1 + 2x\right]\left[x^2 + y^2 + 1 - 2x\right] = k$$

$$\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2 - 4x^2 = k.$$

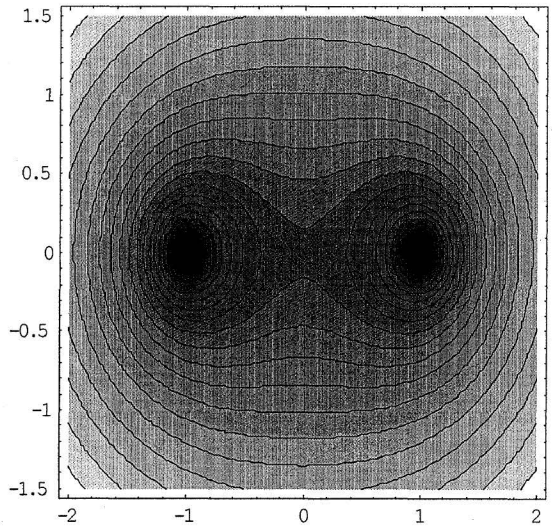


Fig.3.51. Alcune linee di livello di $U(x,y)$

3.241.

a. $$U(x,y) = -\log\left[(x+1)^2 + y^2\right] + \log\left[(x-1)^2 + y^2\right]$$

b.

$$\nabla U(x,y) = \left(-\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}, -\frac{2y}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x-1)^2+y^2} \right).$$

$$\begin{cases} -\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2} = 0 \\ 2y\left[-\frac{1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{1}{(x-1)^2+y^2} \right] = 0 \end{cases}$$

Dalla 2ª equaz. si ha

$$\frac{8xy}{\left[(x-1)^2+y^2\right]\left[(x+1)^2+y^2\right]} = 0$$

che dà $x = 0$ o $y = 0$, quindi dalla prima

$$x = 0 \Rightarrow -\frac{2}{1+y^2} - \frac{2}{1+y^2} = 0, \text{ impossibile;}$$

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 0, \text{ impossibile.}$$

Non ci sono punti del piano in cui il campo è nullo. Quindi non ci sono punti di massimo o minimo del potenziale.

c. $$-\log\left[(x+1)^2+y^2\right] + \log\left[(x-1)^2+y^2\right] = c$$

$$\log\left[\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}\right] = c$$

$$\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2} = k$$

con $k = e^c > 0$. Si ha:

$$(x-1)^2+y^2 = k\left[(x+1)^2+y^2\right]$$

$$\left(x^2+y^2\right)(1-k) - 2x(1+k) + (1-k) = 0.$$

Per $k \neq 1$ si tratta di circonferenze

$$\left(x^2+y^2\right) - 2x\left(\frac{1+k}{1-k}\right) + 1 = 0$$

ponendo $\alpha = \frac{1+k}{1-k}$ si ha:

$$(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2-1,$$

circonferenza reale purché sia $\frac{1+k}{1-k}>1$, il che è vero per ogni $k>0$. Le linee di livello sono quindi circonferenze avente centro sull'asse x.

Se invece $k=1$ si ha la retta $x=0$.

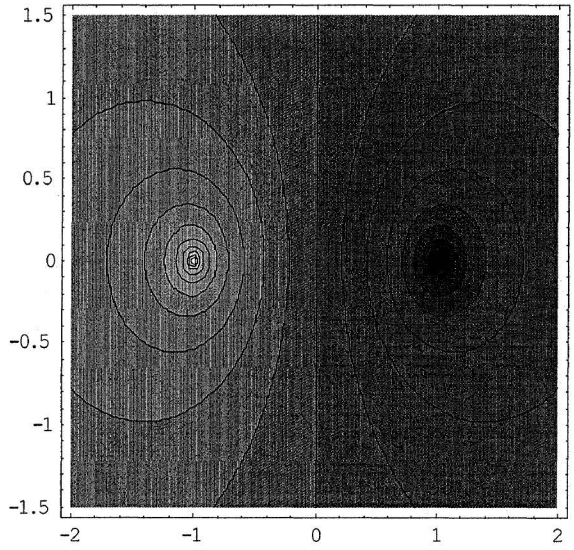


Fig.3.52. Alcune linee di livello di $U(x,y)$

3.242. *a.*

$$U(x,y)=\log\left[(x+1)^2+y^2\right]+\log\left[(x-1)^2+y^2\right]+\log\left[x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2\right]$$

b.

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2}+\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}+\frac{2x}{x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}+\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}+\frac{2\left(y-\sqrt{3}\right)}{x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2}$$

Sostituiamo $x=0$ nelle precedenti espressioni (v. suggerimento) e abbiamo:

$$\begin{cases}\frac{2}{1+y^2}-\frac{2}{1+y^2}=0\\ \frac{2y}{1+y^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{2}{y-\sqrt{3}}=0\end{cases}$$

La prima è sempre soddisfatta e la seconda dà

$$\frac{2y}{1+y^2}+\frac{1}{y-\sqrt{3}}=0$$

$$3y^2-2\sqrt{3}y+1=0$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Quindi il punto stazionario è $\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (cioè il baricentro del triangolo equilatero che ha sui vertici le 3 cariche).

3.243.

a. $$U(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}$$

b. $$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z)=-\frac{x+1}{\left[(x+1)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}-\frac{x-1}{\left[(x-1)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0,0,0)=-1+1=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z)=-\frac{y}{\left[(x+1)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}-\frac{y}{\left[(x-1)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z)=-\frac{z}{\left[(x+1)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}-\frac{z}{\left[(x-1)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(0,0,0)=\frac{\partial U}{\partial z}(0,0,0)=0.$$

c. $$U(x,0,0)=\frac{1}{|x+1|}+\frac{1}{|x-1|}=\text{vicino all'origine}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1-x}=$$

$$=\frac{2}{1-x^2}=2\left(1+x^2+o\left(x^2\right)\right)$$

quindi $x=0$ è punto di minimo per questa restrizione di U.

$$U(0,0,z) = \frac{2}{\sqrt{1+z^2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2}z^2 + o(z^2)\right)$$

quindi $z = 0$ è punto di massimo per questa restrizione di U.

Di conseguenza $(0,0,0)$ è un punto stazionario per U, di sella.

3.244. *a.* Basta calcolare:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\underline{x},t) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f(\underline{x}-\underline{c}t)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}-\underline{c}t);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}(f(\underline{x}-\underline{c}t)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}-\underline{c}t)\cdot(-c_i);$$

$$\underline{c}\cdot\nabla_{\underline{x}}u + \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(\underline{x},t) + \frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x},t) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}-\underline{c}t) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}-\underline{c}t)\cdot(-c_i)\right] = 0.$$

b. Sia ora $$u(\underline{x},t) = f(\underline{x}-\underline{c}t)$$

con f da determinarsi, e imponiamo

$$e^{-|\underline{x}|^2} = u(\underline{x},0) = f(\underline{x}).$$

Quindi $f(\underline{x}) = e^{-|\underline{x}|^2}$ e la soluzione del problerma è

$$u(\underline{x},t) = e^{-|\underline{x}-\underline{c}t|^2}.$$

Cap. 4. Calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 4, §1, 2, 3, 5.

Linguaggio delle funzioni di più variabili a valori vettoriali

4.1. Per ciascuno dei seguenti oggetti matematici, dire che cosa rappresenta:

1. $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad t \in [a, b];$

2. $\begin{cases} x = f(t, u) \\ y = g(t, u) \\ z = h(t, u) \end{cases} \quad t \in [a, b], u \in [c, d];$

3. $\underline{F}(x, y, z) = \underline{i}F_1(x, y, z) + \underline{j}F_2(x, y, z) + \underline{k}F_3(x, y, z),$

4. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

5. $\underline{F}(x, y) = (2x + y, x - y)$

6. $\rho = f(\vartheta), \vartheta \in [a, b].$

7. $u = f(x, y, z)$

Scegliere la risposta esatta tra le seguenti:

a. una funzione reale di più variabili;
b. una retta nello spazio;
c. una curva nello spazio;
d. una superficie;
e. una curva piana;
f. un campo vettoriale nello spazio
g. un campo vettoriale piano

4.1. Superfici regolari parametrizzate

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 4, §3.

Altri esercizi sulle superfici si trovano nel cap.6, §6.2 (area e integrale di superficie). Anche se non calcoliamo aree e integrali di superfici, in questa sezione utilizziamo già il termine "elemento d'area" per indicare l'espressione

$$dS = |\underline{r}_t \times \underline{r}_u| dt du,$$

una scrittura comoda e sintetica che mette in evidenza la regolarità o meno della superficie. (Dove $|\underline{r}_t \times \underline{r}_u|$ si annulla abbiamo punti singolari).

4.1.A. Superfici in forma parametrica

Esempio 4.1. Si consideri la superficie di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t\cos u \\ y = t\sin u \\ z = tu \end{cases} \quad \text{per } t \in [1,2],\ u \in [0, 4\pi].$$

a. Scrivere la matrice jacobiana della superficie.

b. Calcolare il versore normale e l'elemento d'area sulla superficie, semplificando l'espressione ottenuta. Verificare se la superficie è regolare, indicando in caso contrario i punti singolari della superficie.

Matrice jacobiana: $J = \begin{bmatrix} \cos u & \sin u & u \\ -t\sin u & t\cos u & t \end{bmatrix}$

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_t = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos u & \sin u & u \\ -t\sin u & t\cos u & t \end{vmatrix} = \underline{i}(t\sin u - ut\cos u) - \underline{j}(t\cos u + ut\sin u) + \underline{k}t$$

$$|\underline{r}_u \times \underline{r}_t| = \sqrt{(t\sin u - ut\cos u)^2 + (t\cos u + ut\sin u)^2 + t^2} =$$

$$= \sqrt{t^2 + u^2t^2 + t^2} = t\sqrt{2 + u^2}$$

$$|\underline{r}_u \times \underline{r}_t| = 0 \text{ per } t = 0,$$

ma poiché $t \in [1,2]$ non ci sono punti singolari: la superficie è regolare.

Versore normale:

$$\underline{n} = \frac{\underline{i}(\sin u - u\cos u) - \underline{j}(\cos u + u\sin u) + \underline{k}}{\sqrt{2+u^2}}.$$

Elemento d'area: $dS = t\sqrt{2+u^2}\, dt\, du.$

Esercizi

4.2.★ Si consideri la superficie di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t\cos\vartheta \\ y = t\sin\vartheta \\ z = \vartheta \end{cases} \quad \text{per } t \in [0,2],\ \vartheta \in [0, 4\pi].$$

a. Scrivere la matrice jacobiana della superficie e verificare se la superficie è regolare, indicando in caso contrario i punti singolari della superficie.

b. Calcolare il versore normale e l'elemento d'area sulla superficie.

c. Si considerino ora le due famiglie di linee coordinate sulla superficie, ovvero quelle che si ottengono per t costante e ϑ variabile, o viceversa. Riconoscere di che tipo di curve si tratta.

4.3. Scrivere la matrice jacobiana e calcolare l'elemento d'area per l'ellissoide:

$$\begin{cases} x = \sin\varphi\cos\vartheta \\ y = 2\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = 3\cos\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0,\pi], \vartheta \in [0, 2\pi].$$

4.4. Si consideri la superficie di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = e^{-u}\cos t \\ y = e^{-u}\sin t \\ z = \cos t \end{cases} \quad \text{per } t \in [0, 2\pi], u \in [0,1].$$

a. Scrivere la matrice jacobiana della superficie.

b. Calcolare il versore normale e l'elemento d'area sulla superficie, semplificando l'espressione ottenuta. Verificare se la superficie è regolare, indicando in caso contrario i punti singolari della superficie.

4.5. Si consideri la superficie di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = (3+\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = (3+\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z = \sin\varphi \end{cases} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \vartheta \le 2\pi.$$

a. Calcolare il versore normale della superficie.
b. Calcolare l'elemento d'area della superficie.

4.1.B. Superfici in forma cartesiana

Esempio 4.2. Si consideri la superficie grafico della funzione

$$f(x,y) = \log(1+x^2+y^2).$$

Scrivere la matrice jacobiana della superficie, il suo versore normale e il suo elemento d'area.

Superfici cartesiane

Come di consueto, il grafico di una funzione $f(x,y)$ si può vedere come superficie in forma parametrica ponendo, formalmente,

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y). \end{cases}$$

Con queste notazioni la matrice jacobiana diventa

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix};$$

il versore normale (verso l'alto) è:

$$\underline{n} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}$$

e l'elemento d'area è $dS = \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy.$

Nel nostro caso abbiamo quindi:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2x}{1+x^2+y^2} \\ 0 & 1 & \frac{2y}{1+x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{n} = \frac{\left(-\frac{2x}{1+x^2+y^2}, -\frac{2y}{1+x^2+y^2}, 1\right)}{\sqrt{1+4\frac{x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}}}$$

$$dS = \sqrt{1+4\frac{x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}}\, dx\, dy$$

4.6. Scrivere la matrice jacobiana, il versore normale e l'elemento d'area per la superficie grafico della funzione

$$f(x,y) = e^{xy}.$$

4.7. Si consideri la superficie grafico della funzione

$$f(x,y) = x\sin(xy).$$

Scrivere la matrice jacobiana della superficie, il suo versore normale e il suo elemento d'area.

4.8.★ Si consideri la superficie grafico della funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Scrivere la matrice jacobiana della superficie, il suo versore normale e il suo elemento d'area, determinando i punti singolari.

4.1.C. Superfici di rotazione

Esempio 4.3. Sia γ l'ellisse di centro $(3,0)$ e semiassi $2, 1$, rispettivamente, in un piano xy.

a. Scrivere le equazioni parametriche della curva γ.

b. Scrivere le equazioni parametriche della superficie Σ che si ottiene facendo ruotare la curva γ attorno all'asse y.

c. Calcolare l'elemento d'area su Σ (*semplificando* al meglio l'espressione ottenuta), e verificarne la regolarità.

Superfici di rotazione

Sappiamo che, data nel piano xy una curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \end{cases} \quad t \in I$$

la superficie che si ottiene facendo ruotare questa curva attorno all'asse y ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a(t)\cos\vartheta \\ y = b(t) \\ z = a(t)\sin\vartheta \end{cases} \quad t \in I, \vartheta \in [0, 2\pi], \qquad (*)$$

l'elemento d'area è

$$dS = |a(t)|\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}\,dt\,d\vartheta,$$

e il versore normale è:

$$\underline{n} = \frac{1}{|a(t)|\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a'(t)\cos\vartheta & b'(t) & a'(t)\sin\vartheta \\ -a(t)\sin\vartheta & 0 & a(t)\cos\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(b'(t)\cos\vartheta, -a'(t), b'(t)\sin\vartheta)}{\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}}.$$

Le formule $(*)$ vanno opportunamente adattate caso per caso, teendo conto dei nomi delle variabili nel piano in cui è assegnata la curva, e dell'asse attorno a cui la curva ruota. Ricordare che, se $\vartheta \in [0, 2\pi]$, la curva da far ruotare deve stare da una parte sola dell'asse di rotazione. Ad esempio, volendo scrivere le equazioni della sfera come superficie di rotazione, è una *semicirconferenza* e non una circonferenza che occorre far ruotare di un angolo 2π attorno a un asse.

a. $$\begin{cases} x = 3 + 2\cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

b. $a(\varphi) = 3 + 2\cos\varphi; b(\varphi) = \sin\varphi;$

$$\Sigma : \begin{cases} x = (3 + 2\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = \sin\varphi \\ z = (3 + 2\cos\varphi)\sin\vartheta \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi],\ \vartheta \in [0, 2\pi].$$

c. $a'(\varphi) = -2\sin\varphi; b'(\varphi) = \cos\varphi$

$$dS = |a(\varphi)|\sqrt{a'(\varphi)^2 + b'(\varphi)^2}\, d\vartheta\, d\varphi = (3 + 2\cos\varphi)\sqrt{\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= (3 + 2\cos\varphi)\sqrt{1 + 3\sin^2\varphi}\, d\vartheta\, d\varphi.$$

La superficie è regolare perché

$$(3 + 2\cos\varphi)\sqrt{1 + 3\sin^2\varphi} \neq 0,$$

in quanto il radicando è sempre ≥ 1, e $(3 + 2\cos\varphi) \geq 3 - 2 = 1$.

4.9. Scrivere le equazioni parametriche delle seguenti superfici elementari, vedendole come superfici di rotazione attorno all'asse z dell'opportuna curva posta nel semipiano $xz, x \geq 0$:

a. la sfera di centro l'origine e raggio R, a partire da una semicirconferenza di raggio R;

b. il cilindro di raggio R e altezza h, a partire da un segmento verticale di lunghezza h a distanza R dall'asse z;

c. il cono di raggio R e altezza h, a partire da un opportuno segmento obliquo uscente dall'origine;

d. il toro di raggi R, r, a partire da una circonferenza di raggio r il cui centro ha distanza R dall'origine $(R > r)$.

4.10.★ Scrivere le equazioni parametriche della superficie che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la curva, posta nel piano xz, di equazioni:

$$\begin{cases} x = t(t + 1) \\ z = t^3 \end{cases} \qquad t \in [1, 2].$$

Calcolarne poi l'elemento d'area, verificando se la superficie è regolare.

4.11. Si consideri la curva piana di equazioni

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad t \in [-1, 1].$$

a. Dire se l'arco di curva è continuo, chiuso, regolare, specificando in caso contrario i punti non regolari; scrivere il versore tangente, ove definito.

b. Sia Σ la superficie che si ottiene facendo ruotare l'arco di curva di cui al punto *a* attorno all'asse y. Scrivere le equazioni parametriche di Σ, il suo elemento d'area, e individuare i punti singolari.

4.12. Scrivere le equazioni parametriche della superficie che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse y la curva grafico della funzione:

$$y = e^{-x},\ x \in [0, 2].$$

Calcolarne poi la matrice jacobiana, il versore normale e l'elemento d'area, determinando gli eventuali punti singolari.

4.13. Scrivere le equazioni parametriche della superficie Σ che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z l'arco di curva descritta nel piano xz dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = 3 - t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Scrivere quindi la matrice jacobiana della superficie, verificare se la superfcicie è regolare (indicando altrimenti i punti singolari della superficie) e scrivere l'elemento d'area.

4.14.★ Si consideri la superficie (detta *pseudosfera*) generata dalla rotazione attorno all'asse x della *trattrice*[1], di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a(t - \tanh t) \\ y = \frac{a}{\cosh t} \end{cases} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

dove a è un parametro positivo. Si scrivano le equazioni parametriche, si verifichi se la superficie è regolare, determinando gli eventuali punti singolari, e si scriva l'elemento d'area.

[1] v. cap.2, Es. 2.16.

Soluzioni §4.1

4.1. 1: *c*; 2: *d*; 3: *f*; 4: *b*; 5: *g*; 6: *e*; 7: *a*.

4.2.

a.
$$J = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -t\sin\vartheta & t\cos\vartheta & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{Det}(1,2) = t;\ \mathrm{Det}(1,3) = \cos\vartheta;\ \mathrm{Det}(2,3) = \sin\vartheta.$$

Poiché $\cos\vartheta$ e $\sin\vartheta$ non sia annullano contemporaneamente, la superficie è regolare.

b.
$$dS = \sqrt{t^2+1}\, dt\, d\vartheta.$$

$$\underline{n} = \frac{\underline{i}\sin\vartheta - \underline{j}\cos\vartheta + \underline{k}t}{\sqrt{t^2+1}}$$

c. Per $\vartheta = \text{cost.}$, si tratta di rette (poste in piani paralleli al piano xy, e intersecanti l'asse z); per $t = \text{cost.}$, si tratta di eliche cilindriche di raggio t e passo 1.

4.3.
$$J = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & 2\cos\varphi\sin\vartheta & -3\sin\varphi \\ -\sin\varphi\sin\vartheta & 2\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{Det}(1,2) = 2\sin\varphi\cos\varphi;\ \mathrm{Det}(1,3) = -3\sin^2\varphi\sin\vartheta;\ \mathrm{Det}(2,3) = 6\sin^2\varphi\cos\vartheta.$$

$$dS = |\sin\varphi|\sqrt{4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + 36\sin^2\varphi\cos^2\vartheta}\, d\varphi\, d\vartheta.$$

4.4.
$$J = \begin{bmatrix} -e^{-u}\sin t & e^{-u}\cos t & -\sin t \\ -e^{-u}\cos t & -e^{-u}\sin t & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_t = \underline{i}\left(-e^{-u}\sin^2 t\right) - \underline{j}(-e^{-u}\sin t\cos t) + \underline{k}e^{-2u}$$

$$|\underline{r}_u \times \underline{r}_t| = \sqrt{e^{-2u}\sin^4 t + e^{-2u}\sin^2 t\cos^2 t + e^{-4u}} =$$

$$= \sqrt{e^{-2u}(\sin^2 t + e^{-2u})} = e^{-u}\sqrt{\sin^2 t + e^{-2u}}$$

$$|\underline{r}_u \times \underline{r}_t| \neq 0 \text{ sempre,}$$

quindi la superficie è regolare.

$$\underline{n} = \frac{-\underline{i}\sin^2 t + \underline{j}\sin t\cos t + \underline{k}e^{-u}}{\sqrt{\sin^2 t + e^{-2u}}}$$

$$dS = e^{-u}\sqrt{\sin^2 t + e^{-2u}}\, dt\, du.$$

4.5.

a. $$\underline{r}_\varphi \times \underline{r}_\vartheta = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi \\ -(3+\cos\varphi)\sin\vartheta & (3+\cos\varphi)\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\underline{i}(3+\cos\varphi)\cos\varphi\cos\vartheta - \underline{j}(3+\cos\varphi)\cos\varphi\sin\vartheta - \underline{k}(3+\cos\varphi)\sin\varphi.$$

$$|\underline{r}_\varphi \times \underline{r}_\vartheta| = 3 + \cos\varphi$$

$$\underline{n} = -\underline{i}\cos\varphi\cos\vartheta - \underline{j}\cos\varphi\sin\vartheta - \underline{k}\sin\varphi$$

b. $$dS = (3+\cos\varphi)\, d\varphi\, d\vartheta$$

4.6. $$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ye^{xy} \\ 0 & 1 & xe^{xy} \end{bmatrix}$$

$$\underline{n} = \frac{(-ye^{xy}, -xe^{xy}, 1)}{\sqrt{1 + e^{2xy}(x^2+y^2)}}$$

$$dS = \sqrt{1 + e^{2xy}(x^2+y^2)}dx\, dy$$

4.7. $$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin(xy) + xy\cos(xy) \\ 0 & 1 & x^2\cos(xy) \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \big(\sin(xy) + xy\cos(xy), x^2\cos(xy)\big)$$

$$dS = \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}\, dx\, dy =$$

$$= \sqrt{1 + \sin^2(xy) + 2xy\sin(xy)\cos(xy) + x^2(x^2+y^2)\cos^2(xy)}\, dx\, dy.$$

$$\underline{n} = \frac{(-(\sin(xy) + xy\cos(xy)), -x^2\cos(xy), 1)}{\sqrt{1 + \sin^2(xy) + 2xy\sin(xy)\cos(xy) + x^2(x^2+y^2)\cos^2(xy)}}$$

4.8.

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 & 1 & \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix};$$

$$\underline{n} = \frac{\left(\frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, 1\right)}{\sqrt{1+\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^3}}};$$

$$dS = \sqrt{1+\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^3}}\,dxdy;$$

La superficie è regolare tranne in $(0,0)$.

4.9.

a.

$$\gamma : \begin{cases} x = R\sin\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0,\pi]$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0,\pi], \vartheta \in [0,2\pi].$$

b.

$$\gamma : \begin{cases} x = R \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0,h]$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = R\cos\vartheta \\ y = R\sin\vartheta \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0,h], \vartheta \in [0,2\pi].$$

c.

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ z = \frac{h}{R}t \end{cases} \quad t \in [0,R]$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = t\cos\vartheta \\ y = t\sin\vartheta \\ z = \frac{h}{R}t \end{cases} \quad t \in [0,R], \vartheta \in [0,2\pi].$$

d.
$$\gamma : \begin{cases} x = R + r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi]$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, 2\pi].$$

4.10.
$$\begin{cases} x = t(t+1)\cos\vartheta \\ y = t(t+1)\sin\vartheta \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [1, 2], \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$a(t) = t^2 + t; b(t) = t^3$$

$$a'(t) = 2t + 1; b'(t) = 3t^2$$

$$dS = t(t+1)\sqrt{(2t+1)^2 + 9t^4}\,dt\,d\vartheta$$

Poiché per $t \in [1, 2]$ è $a(t)\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} \neq 0$, la superficie è regolare.

4.11.

a. E' continuo; non è chiuso; è regolare, tranne che per $t = 0$: il punto $(0, 0)$ è singolare; versore tangente:

$$\underline{T} = \frac{(2, 3t)}{\sqrt{4 + 9t^2}}\mathrm{sgn}(t).$$

b.
$$\begin{cases} x = t^2\cos\vartheta \\ y = t^3 \\ z = t^2\sin\vartheta \end{cases} \quad t \in [-1, 1], \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$a(t) = t^2; b(t) = t^3; dS = |a(t)|\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}\,dt\,d\vartheta =$$

$$= |t|^3\sqrt{4 + 9t^2}\,dt\,d\vartheta.$$

Si annulla per $t = 0$. Il punto $\underline{r}(0) = (0, 0, 0)$ è l'unico punto singolare della superficie.

4.12.

$$\begin{cases} x = t\cos\vartheta \\ y = e^{-t} \\ z = t\sin\vartheta \end{cases} \quad t \in [0,2], \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$J = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -e^{-t} & \sin\vartheta \\ -t\sin\vartheta & 0 & t\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Superficie singolare per $t = 0$, cioè: $(0, 0, 1)$ è punto singolare.

$$\underline{n} = \frac{(te^{-t}\cos\vartheta, t, te^{-t}\sin\vartheta)}{\sqrt{t^2(e^{-2t}+1)}} = \frac{(e^{-t}\cos\vartheta, 1, e^{-t}\sin\vartheta)}{\sqrt{e^{-2t}+1}}$$

$$dS = t\sqrt{(e^{-2t}+1)}dtd\vartheta.$$

4.13.

$$\begin{cases} x = (3-t^2)\cos\vartheta \\ y = (3-t^2)\sin\vartheta \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0,1], \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$J = \begin{bmatrix} -2t\cos\vartheta & -2t\sin\vartheta & 3t^2 \\ -(3-t^2)\sin\vartheta & (3-t^2)\cos\vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

$$a(t) = 3 - t^2; b(t) = t^3$$

$$a'(t) = -2t; b'(t) = 3t^2$$

$$dS = (3-t^2)\sqrt{4t^2+9t^4}dtd\vartheta = (3-t^2)t\sqrt{4+9t^2}dtd\vartheta$$

singolare per $t = 0$, cioè:

$$\begin{cases} x = 3\cos\vartheta \\ y = 3\sin\vartheta \\ z = 0 \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

che è è una circonferenza di punti singolari.

4.14. Equazioni parametriche della superficie di rotazione:

$$\begin{cases} x = a(t - \tanh t) \\ y = \frac{a}{\cosh t}\cos\vartheta \\ z = \frac{a}{\cosh t}\sin\vartheta \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, \vartheta \in [0, 2\pi].$$

$$a(t) = \frac{a}{\cosh t}; \quad b(t) = a(t - \tanh t); \quad a'(t) = a\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}; \quad b'(t) = a\tanh^2 t;$$

$$dS = \frac{a^2}{\cosh t}\sqrt{\frac{\sinh^2 t}{\cosh^4 t} + (\tanh^2 t)^2}\,dt d\vartheta = \frac{a^2}{\cosh t}\frac{|\sinh t|}{\cosh^2 t}\sqrt{1 + \sinh^2 t}\,dt d\vartheta =$$

$$= a^2\frac{|\sinh t|}{\cosh^2 t}dt d\vartheta$$

La superficie è regolare tranne che per $t = 0$, che corrisponde alla circonferenza di punti singolari:

$$\underline{r}(\vartheta) = (0, a\cos\vartheta, a\sin\vartheta) \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

4.2. Trasformazioni regolari di coordinate

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 4, §5.

Notazione. Coerentemente alle convenzioni fin qui seguite, per indicare la matrice Jacobiana di una trasformazione $\underline{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si userà la notazione

$$\underline{D}\,\underline{T}$$

(anziché la notazione $\boldsymbol{DT}$ usata nel libro di testo [BPS2]), che ha il vantaggio di poter essere utilizzata nella scrittura a mano.

4.2.A. Trasformazioni di coordinate e di operatori differenziali

Esempi svolti

Esempio 4.4. Si consideri la seguente trasformazione di coordinate nel piano:

$$(u, v) = \underline{T}(x, y) = \big(x^2 - y^2, 3 - xy\big).$$

a. Scrivere la matrice Jacobiana di $\underline{T}$, stabilire se la trasformazione è regolare in tutto il piano e individuare gli eventuali punti singolari.

b. Se $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una generica funzione differenziabile, scrivere (in termini di f_u, f_v) le derivate parziali ∂_x, ∂_x della funzione composta $f(\underline{T}(x, y))$.

a. Matrice Jacobiana:

$$\underline{D}\,\underline{T} = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ -y & -x \end{bmatrix}.$$

$$\det \underline{D}\,\underline{T} = -2\big(x^2 + y^2\big) \neq 0 \text{ per } (x, y) \neq (0, 0).$$

La trasformazione è regolare fuori dall'origine.

b.

$$\partial_x[f(\underline{T}(x, y))] = f_u\big(x^2 - y^2, 3 - xy\big)2x - f_v\big(x^2 - y^2, 3 - xy\big)y;$$

$$\partial_y[f(\underline{T}(x, y))] = -f_u\big(x^2 - y^2, 3 - xy\big)2y - f_v\big(x^2 - y^2, 3 - xy\big)x.$$

Esercizi

4.15.★ Si consideri la funzione $\underline{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definita:

$$\underline{T}(x, y) = \left(x^3 + 2xy, y^2 - x\right).$$

a. Scrivere la matrice jacobiana di $\underline{T}$ e verificare che $\underline{T}$ è una trasformazione di coordinate regolare nel quadrante $\{x > 0, y > 0\}$.

b. Sia ora $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione C^1. Posto $(u, v) = \underline{T}(x, y)$ definiamo

$$g(x, y) = f(\underline{T}(x, y)).$$

Sfruttando il teorema di differenziazione della funzione composta, scrivere come funzioni di x e y le derivate

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y),$$

mediante le derivate di f.

4.16.★ Si consideri la trasformazione di coordinate in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = x + y. \end{cases}$$

a. Detta f una funzione $C^2(\mathbb{R}^2)$, si calcolino $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ esprimendole mediante derivate rispetto a u, v.

b. Sfruttando il calcolo precedente, si calcoli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

4.17.★ Si consideri la trasformazione di coordinate in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 3x - y. \end{cases}$$

a. Detta f una funzione $C^2(\mathbb{R}^2)$, si calcolino $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ esprimendole mediante derivate rispetto a u, v.

b. Sfruttando il calcolo precedente, si calcoli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

4.18. Si consideri la trasformazione di coordinate nel piano $(x, y) = \underline{T}(u, v)$:

$$\begin{cases} x = ue^v \\ y = ve^{-u} \end{cases}$$

a. Scrivere la matrice jacobiana $\underline{D}\,\underline{T}$ della trasformazione;

b. Sia γ l'insieme dei punti del piano (u, v) in cui la trasformazione non è regolare: determinare γ e disegnarlo.

c. Scrivere l'elemento d'area $dxdy$ in funzione delle variabili u, v.

4.19. Si consideri la trasformazione di coordinate nello spazio:

$$\begin{cases} x = (2 + \rho\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = (2 + \rho\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

a. Scrivere la matrice jacobiana della trasformazione.

b. Provare che nella regione

$$\Omega = \{(\rho, \varphi, \vartheta) : 0 < \rho < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$$

la trasformazione è regolare.

c. Scrivere l'elemento d'area $dx\,dy\,dz$ in funzione delle variabili ρ, φ, ϑ.

4.20.★ Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

nella funzione incognita $f(x, y)$. Riscrivere l'equazione rispetto alle nuove variabili

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

(*In altre parole: si chiede di calcolare come si trasforma l'operatore differenziale in base alla trasformazione di variabili indicata, applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte*).

4.21.★ Si consideri la trasformazione di coordinate in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \\ z' = z + 3 + 2x - y \end{cases}$$

Si scrivano rispetto alle variabili (x', y', z') gli operatori differenziali:

$$\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Cosa si osserva?

4.2.B. Applicazioni alle equazioni a derivate parziali

Il metodo delle caratteristiche

Un'applicazione elementare ma interessante delle trasformazioni di variabili applicate agli operatori differenziali è il *metodo delle caratteristiche per le equazioni del second'ordine iperboliche a coefficienti costanti*, che è già stato usato implicitamente negli Esercizi 4.16 e 4.17. Si tratta di quanto segue. Sul testo[2] si è illustrato il metodo di D'Alembert, con cui si determina l'integrale generale dell'equazione della corda vibrante:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Più in generale, la stessa idea permette di risolvere l'equazione

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0$$

con a, b, c costanti e $b^2 - 4ac > 0$, $a \neq 0$. (Il fatto che i coefficienti soddisfino la condizione $b^2 - 4ac > 0$ si esprime dicendo che l'equazione è *iperbolica*; un'equazione di questo tipo descrive fenomeni di tipo vibratorio).

Il metodo consiste in questo. Si scrive l'equazione di secondo grado

$$a\lambda^2 - b\lambda + c = 0$$

(attenzione al cambio di segno di b, rispetto all'equazione differenziale di partenza) e la si risolve; siano λ_1, λ_2 le sue soluzioni (reali e distinte, per l'ipotesi $b^2 - 4ac > 0$). Allora il cambio di variabile

$$\alpha = y - \lambda_1 x; \beta = y - \lambda_2 x$$

[2] v. [BPS2], cap.4, §5.2, Esempio 5.3.

trasforma l'equazione differenziale in

$$u_{\alpha\beta} = 0$$

che ha integrale generale

$$u(\alpha, \beta) = f(\alpha) + g(\beta)$$

con f, g generiche funzioni $C^2(\mathbb{R})$. Ne segue che l'integrale generale dell'equazione di partenza è

$$u(x, y) = f(y - \lambda_1 x) + g(y - \lambda_2 x).$$

Il prossimo esercizio chiede di dimostrare i vari passi del metodo appena esposto.

4.22.★ Si consideri la trasformazione di variabili in $\mathbb{R}^2$ data da:

$$\begin{cases} \alpha = y - \lambda_1 x \\ \beta = y - \lambda_2 x \end{cases}$$

dove λ_1, λ_2 sono le soluzioni dell'equazione

$$a\lambda^2 - b\lambda + c = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4ac > 0$.

a. Riscrivere l'equazione differenziale

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0$$

rispetto alle variabili α, β, semplificando l'equazione trovata.

b. Usando la stessa idea illustrata nel caso dell'equazione della corda vibrante[3], scrivere l'integrale generale dell'equazione, prima rispetto alle variabili α, β e quindi rispetto alle variabili x, y.

4.23.★ Usando il metodo appena illustrato,

a. scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$u_{xx} - 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0;$$

b. determinare, tra le soluzioni dell'equazione precedente, quella che soddisfa le seguenti condizioni aggiuntive:

[3] v. nota precedente.

$$\begin{cases} u(x,0) = e^{-x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \end{cases}$$

(Il procedimento da seguire non è ovvio: dopo averci almeno provato, studiare con cura la soluzione fornita).

Il Laplaciano in coordinate polari, cilindriche o sferiche

L'importanza dell'equazione di Laplace in $\mathbb{R}^n$,

$$\Delta f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\underline{x}) = 0$$

è già stata commentata in precedenza (v. cap.3, §3.9). Quando si vuole risolvere quest'equazione in particolari regioni del piano o dello spazio aventi certe simmetrie (ad es. un cerchio nel piano o una sfera nello spazio / simmetria radiale; un cilindro nello spazio / simmetria assiale, ecc.) è utile riscrivere prima l'equazione differenziale in opportune *coordinate*. Vedremo ora come si riscrive l'equazione in coordinate polari, cilindriche e sferiche.

Esempio 4.5. Laplaciano in coordinate polari, nel piano

Vogliamo scrivere in coordinate polari l'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^2$:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Eseguendo la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \vartheta = \arctan\frac{y}{x} \end{cases} \tag{1}$$

si ha, indicando con ρ_x, ϑ_x le derivate rispetto a x di ρ e ϑ, rispettivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \rho_x \frac{\partial}{\partial \rho} + \vartheta_x \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial \rho} + \vartheta_x \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) = \rho_{xx}\frac{\partial}{\partial \rho} + \vartheta_{xx}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \rho_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \vartheta_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) =$$

$$= \rho_{xx}\frac{\partial}{\partial \rho} + \vartheta_{xx}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \rho_x\left[\rho_x \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \vartheta_x \frac{\partial^2}{\partial \vartheta \partial \rho}\right] + \vartheta_x\left[\rho_x \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \vartheta} + \vartheta_x \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right] =$$

$$= \rho_{xx}\frac{\partial}{\partial\rho} + \vartheta_{xx}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + (\rho_x)^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + 2\rho_x\vartheta_x\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\rho} + (\vartheta_x)^2\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}.$$

Analogamente si trova (basta cambiare il nome della variabile x in y!)

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \rho_{yy}\frac{\partial}{\partial\rho} + \vartheta_{yy}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + (\rho_y)^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + 2\rho_y\vartheta_y\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\rho} + (\vartheta_y)^2\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}$$

e quindi per il Laplaciano vale l'identità:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = (\rho_{xx} + \rho_{yy})\frac{\partial}{\partial\rho} + (\vartheta_{xx} + \vartheta_{yy})\frac{\partial}{\partial\vartheta} +$$

$$+ \left[(\rho_x)^2 + (\rho_y)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + 2(\rho_x\vartheta_x + \rho_y\vartheta_y)\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\rho} + \left[(\vartheta_x)^2 + (\vartheta_y)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}. \quad (2)$$

Ora si chiede allo studente un po' di iniziativa per conlcudere il calcolo: si svolga il prossimo esercizio:

4.24.★ Calcolare esplicitamente, in base alle (1), tutte le derivate $\rho_{xx}, \rho_{yy}, \ldots$ che compaiono come coefficienti nella (2), verificando così che si ottiene la seguente espressione per il laplaciano in coordinate polari:

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}.$$

Esempio 4.6. Laplaciano in coordinate cilindriche, nello spazio

Poiché le coordinate cilindriche nello spazio[4]

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases}$$

coincidono nel piano xy con le coordinate polari, è immediato il fatto che l'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^3$,

[4] Come spesso facciamo, nel passaggio di coordinate cilindriche continuiamo a chiamare z la variabile z originaria, anziché introdurre fittiziamente un nuovo nome scrivendo ad es. $z = t$.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

si riscriva in coordinate cilindriche così:

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Esempio 4.7. Laplaciano in coordinate sferiche, nello spazio

Più impegnativo è invece calcolare come si trasforma l'operatore di Laplace in coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \quad \rho \in [0, +\infty), \varphi \in [0, \pi], \vartheta \in [0, 2\pi)$$

Le trasformazioni inverse sono:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vartheta = \arctan\frac{y}{x} \\ \varphi = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases} \tag{3}$$

Si ha, indicando con ρ_x, ϑ_x le derivate rispetto a x di ρ e ϑ, rispettivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \rho_x \frac{\partial}{\partial \rho} + \vartheta_x \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \varphi_x \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_x \frac{\partial}{\partial \rho} + \vartheta_x \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \varphi_x \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \rho_{xx}\frac{\partial}{\partial \rho} + \vartheta_{xx}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \varphi_{xx}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \rho_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \vartheta_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) + \varphi_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \rho_{xx}\frac{\partial}{\partial \rho} + \vartheta_{xx}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \varphi_{xx}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \rho_x\left[\rho_x \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \vartheta_x \frac{\partial^2}{\partial \vartheta \partial \rho} + \varphi_x \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \rho}\right] +$$

$$\vartheta_x\left[\rho_x \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \vartheta} + \vartheta_x \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \varphi_x \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \vartheta}\right] + \varphi_x\left[\rho_x \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \varphi} + \vartheta_x \frac{\partial^2}{\partial \vartheta \partial \varphi} + \varphi_x \frac{\partial^2}{\partial^2 \varphi}\right] =$$

$$= \rho_{xx}\frac{\partial}{\partial\rho} + \vartheta_{xx}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \varphi_{xx}\frac{\partial}{\partial\varphi} + (\rho_x)^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + (\vartheta_x)^2\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + (\varphi_x)^2\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi}$$

$$+ 2\rho_x\vartheta_x\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\rho} + 2\rho_x\varphi_x\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\rho} + 2\vartheta_x\varphi_x\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\varphi}$$

Analogamente si trovano le espressioni di $\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (basta cambiare il nome della variabile x in y o z). Di conseguenza avremo:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \tag{4}$$

$$= (\rho_{xx}+\rho_{yy}+\rho_{zz})\frac{\partial}{\partial\rho} + (\vartheta_{xx}+\vartheta_{yy}+\vartheta_{zz})\frac{\partial}{\partial\vartheta} + (\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz})\frac{\partial}{\partial\varphi} +$$

$$+ \left[(\rho_x)^2+(\rho_y)^2+(\rho_z)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \left[(\vartheta_x)^2+(\vartheta_y)^2+(\vartheta_z)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} +$$

$$+ \left[(\varphi_x)^2+(\varphi_y)^2+(\varphi_z)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi} +$$

$$+ 2(\rho_x\vartheta_x+\rho_y\vartheta_y+\rho_z\vartheta_z)\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\rho} + 2(\rho_x\varphi_x+\rho_y\varphi_y+\rho_z\varphi_z)\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\rho} +$$

$$+ 2(\vartheta_x\varphi_x+\vartheta_y\varphi_y+\vartheta_z\varphi_z)\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\varphi}.$$

Di nuovo, chiediamo ora allo studente di svolgere da sé il seguito dei calcoli, come esercizio:

4.25.★ Calcolare, in base alle (3), tutte le derivate di ρ, ϑ, φ rispetto ad x, y, z che sono coinvolte nella (4), e verificare così che si ottiene la seguente espressione per il laplaciano in coordinate sferiche:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \left(\frac{\cos\varphi}{\rho^2\sin\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Soluzioni §4.2.

4.15.

a. $$\underline{D}\,\underline{T} = \begin{bmatrix} 3x^2 + 2y & -1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

$\underline{D}\,\underline{T}$ ha per elementi funzioni continue; inoltre, $\mathrm{Det}\underline{D}\ \underline{T} = 6x^2y + 4y^2 + 2x$, che è certamente positivo per $x > 0, y > 0$, pertanto non si annulla mai; dunque $\underline{T}$ è regolare nel 1° quadrante.

b. $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{T}(x,y))\frac{\partial T_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{T}(x,y))\frac{\partial T_2}{\partial x}(x,y) =$$

$$= (3x^2 + 2y)\frac{\partial f}{\partial x}(x^3 + 2xy, y^2 - x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x^3 + 2xy, y^2 - x).$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2x\frac{\partial f}{\partial x}(x^3 + 2xy, y^2 - x) + 2y\frac{\partial f}{\partial y}(x^3 + 2xy, y^2 - x)$$

4.16.

a. $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

b. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$$

$$= 4\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 3\left(2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}.$$

4.17.

a.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + 3\frac{\partial f}{\partial v}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 6\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 9\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

b.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 6\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 9\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) +$$

$$- 3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = 16\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}.$$

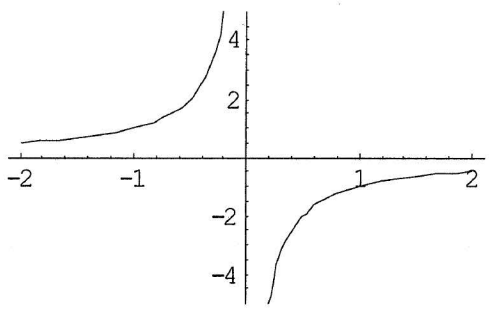
4.18.

a.
$$\underline{D}\,\underline{T} = \begin{bmatrix} e^v & -ve^{-u} \\ ue^v & e^{-u} \end{bmatrix}$$

b. $\mathrm{Det}\underline{D}\,\underline{T} = e^{v-u}(1+uv) = 0$ per $uv = -1$.

$$\gamma = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : uv = -1\right\}.$$

E' un'iperbole equilatera:



c. $$dxdy = e^{v-u}|1+uv|\,du\,dv$$

4.19.

a. $$\underline{D}\,\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi \\ -(2+\rho\cos\varphi)\sin\vartheta & (2+\rho\cos\varphi)\cos\vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

b.

$$\mathrm{Det}\underline{D}\,\underline{T} = \sin\varphi[-\rho\sin\varphi(2+\cos\varphi)] - \rho\cos\varphi[\cos\varphi(2+\cos\varphi)] = -\rho(2+\rho\cos\varphi).$$

Per $0 < \rho < 1$ è $2+\rho\cos\varphi \geq 2-1 = 1$, quindi $\rho(2+\rho\cos\varphi) \neq 0$, e la trasformazione è regolare.

c. $$dx\,dy\,dz = \rho(2+\rho\cos\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\vartheta.$$

4.20. Calcoliamo:

$$\frac{\partial}{\partial z} = u_x\frac{\partial}{\partial u} + v_x\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = u_y\frac{\partial}{\partial u} + v_y\frac{\partial}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v};$$

$$\partial^2_{xy} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2};$$

l'equazione quindi diventa:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\right)-2\left(-\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\right]f = 0$$

cioè $$4\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

4.21. Calcoliamo:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} + 2\frac{\partial}{\partial z'}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial z'}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x'} + 2\frac{\partial}{\partial z'}\right) + y\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial x'} + (y+2)\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial x'} + y'\frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial z'}\right) - x\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial y'} - (x+1)\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial y'} - x'\frac{\partial}{\partial z'}$$

Si osserva che i due operatori differenziali hanno la stessa espressione rispetto alle nuove coordinate e rispetto alle vecchie. Si dice che sono *invarianti* rispetto a quella particolare trasformazione di coordinate.

4.22. *a.*

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\lambda_1\frac{\partial}{\partial \alpha} - \lambda_2\frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(-\lambda_1\frac{\partial}{\partial \alpha} - \lambda_2\frac{\partial}{\partial \beta}\right)\left(-\lambda_1\frac{\partial}{\partial \alpha} - \lambda_2\frac{\partial}{\partial \beta}\right) =$$

$$= \lambda_1^2\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + \lambda_2^2\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \left(-\lambda_1\frac{\partial}{\partial \alpha} - \lambda_2\frac{\partial}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}\right) = -\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - (\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - \lambda_2\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$$

Quindi l'equazione differenziale diventa:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = a\left(\lambda_1^2\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + \lambda_2^2\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right)u +$$

$$+ b\left(-\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - (\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - \lambda_2\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right)u + c\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right)u =$$

$$= (a\lambda_1^2 - b\lambda_1 + c)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + (2\lambda_1\lambda_2 a - (\lambda_1 + \lambda_2)b + 2c)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + (a\lambda_2^2 - b\lambda_2 + c)\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} =$$

poiché λ_1, λ_2 sono soluzioni dell'equazione $a\lambda^2 - b\lambda + c = 0$,

$$= (2\lambda_1\lambda_2 a - (\lambda_1 + \lambda_2)b + 2c)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = (\text{costante}) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

Dunque l'equazione di partenza è equivalente a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

Poiché

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = 0,$$

deduciamo che $\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)$ è indipendente da α, cioè è una generica funzione di β,

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = f_1(\beta);$$

integrando questa rispetto a β troviamo poi

$$u(\alpha, \beta) = \int f_1(\beta) d\beta + f_2(\alpha)$$

(la "costante di integrazione" è una quantità indipendente da β, cioè dipendente solo da α)

$$= f_3(\beta) + f_2(\alpha),$$

con f_2, f_3 arbitrarie funzioni di classe C^2.

Tornando alle variabili x, y otteniamo l'integrale generale:

$$u(x, y) = f_3(y - \lambda_2 x) + f_2(y - \lambda_1 x),$$

che è il risultato enunciato in precedenza.

4.23. *a.* Consideriamo l'equazione

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0, \lambda = 1, \lambda = -5.$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è allora

$$u(x, y) = f(y - x) + g(y + 5x)$$

con $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, arbitrarie.

b. Imponiamo ora le condizioni dette:

$$u(x,0) = f(-x) + g(5x) = e^{-x^2} \qquad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f'(y-x) + g'(y+5x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f'(-x) + g'(5x) = 0. \qquad (**)$$

Per risolvere il sistema delle due equazioni $(*)$, $(**)$, deriviamo anche la prima:

$$-f'(-x) + 5g'(5x) = -2xe^{-x^2}.$$

Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} -f'(-x) + 5g'(5x) = -2xe^{-x^2} \\ f'(-x) + g'(5x) = 0 \end{cases}$$

che dà $$g'(5x) = -\frac{1}{3}xe^{-x^2}; \quad f'(-x) = \frac{1}{3}xe^{-x^2}$$

quindi $$g'(x) = -\frac{1}{15}xe^{-x^2/25}; \quad f'(x) = -\frac{1}{3}xe^{-x^2}$$

e integrando

$$g(x) = \int -\frac{1}{15}xe^{-x^2/25}dx = \frac{1}{15}\cdot\frac{25}{2}e^{-x^2/25} + c = \frac{5}{6}e^{-x^2/25} + c;$$

$$f(x) = \int -\frac{1}{3}xe^{-x^2}dx = \frac{1}{6}e^{-x^2} + c$$

perciò $$u(x,y) = f(y-x) + g(y+5x) = \frac{1}{6}e^{-(y-x)^2} + \frac{5}{6}e^{-(y+5x)^2/25} + c.$$

Infine, controlliamo il valore di c perché valga la condizione

$$u(x,0) = f(-x) + g(5x) = e^{-x^2}$$

(quest'ultima condizione è stata derivata, perdendo una informazione). Si ha:

$$u(x,0) = \frac{1}{6}e^{-x^2} + \frac{5}{6}e^{-x^2} + c = e^{-x^2} + c,$$

perciò $c = 0$, e la soluzione cercata è

$$u(x,y) = \frac{1}{6}e^{-(y-x)^2} + \frac{5}{6}e^{-(y+5x)^2/25}.$$

Abbiamo risolto un *problema di Cauchy* per l'equazione a derivate parziali di partenza.

4.24. In base alle (1) si ha:

$$\rho_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{\rho}; \rho_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\right) = \frac{\rho - \frac{x^2}{\rho}}{\rho^2} = \frac{\rho^2 - x^2}{\rho^3};$$

$$\rho_y = \frac{y}{\rho}; \rho_{yy} = \frac{\rho^2 - x^2}{\rho^3};$$

perciò

$$(\rho_{xx} + \rho_{yy}) = \frac{\rho^2 - x^2}{\rho^3} + \frac{\rho^2 - x^2}{\rho^3} = \frac{2\rho^2 - (x^2+y^2)}{\rho^3} = \frac{\rho^2}{\rho^3} = \frac{1}{\rho} \tag{5}$$

$$\left[(\rho_x)^2 + (\rho_y)^2\right] = \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{\rho^2} = 1. \tag{6}$$

$$\vartheta_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{\rho^2};$$

$$\vartheta_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{\rho^4};$$

$$\vartheta_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{\rho^2};$$

$$\vartheta_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{\rho^4};$$

perciò

$$(\vartheta_{xx} + \vartheta_{yy}) = \frac{2xy}{\rho^4} - \frac{2xy}{\rho^4} = 0; \tag{7}$$

$$[(\vartheta_x)^2 + (\vartheta_y)^2] = \left(-\frac{y}{\rho^2}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho^2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^2}; \tag{8}$$

$$(\rho_x\vartheta_x + \rho_y\vartheta_y) = \frac{x}{\rho}\cdot\left(-\frac{y}{\rho^2}\right) + \frac{y}{\rho}\cdot\left(\frac{x}{\rho^2}\right) = 0. \tag{9}$$

Sostituendo le (5), (6), (7), (8), (9) nella (2) si ottiene:

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \tag{10}$$

che è quanto cercavamo: l'espressione del Laplaciano in coordinate polari.

Si noti che se, in particolare, calcoliamo il laplaciano di una funzione radiale, cioè del tipo $u(\rho,\vartheta) = f(\rho)$, otteniamo:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}f'(\rho) + f''(\rho),$$

che coincide con la formula $(*)$ trovata nel Cap.3, §3.9, esempio 3.21 nel caso $n = 2$. Tuttavia l'importanza della (10) è quella di permetterci di esprimere il Laplaciano di una funzione qualsiasi (non necessariamente radiale) in coordinate polari. Questo è utile per risolvere l'equazione di Laplace in domini a simmetria radiale, ad es. il cerchio.[5]

4.25. In base alle (3), che qui conviene riscrivere,

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \vartheta = \arctan\frac{y}{x} \\ \varphi = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases}$$

si ha:

$$\rho_x = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\rho};$$

$$\rho_{xx} = \left(\frac{x}{\rho}\right)_x = \frac{\rho - \frac{x^2}{\rho}}{\rho^2} = \frac{\rho^2-x^2}{\rho^3};$$

Analogamente:

$$\rho_y = \frac{y}{\rho};\ \rho_{yy} = \frac{\rho^2-y^2}{\rho^3};\ \rho_z = \frac{z}{\rho};\ \rho_{zz} = \frac{\rho^2-z^2}{\rho^3}$$

perciò

[5] Sul testo [BPS2], cap.7, pp.399 sgg., è descritto in dettaglio l'utilizzo del laplaciano in polari per risolvere l'equazione di Laplace sul cerchio.

$$(\rho_{xx}+\rho_{yy}+\rho_{zz})=\frac{\rho^2-x^2}{\rho^3}+\frac{\rho^2-y^2}{\rho^3}+\frac{\rho^2-z^2}{\rho^3}=\frac{2\rho^2}{\rho^3}=\frac{2}{\rho};$$

$$(\rho_x)^2+(\rho_y)^2+(\rho_z)^2=\left(\frac{x}{\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{\rho}\right)^2+\left(\frac{z}{\rho}\right)^2=1.$$

In secondo luogo, da $\vartheta=\arctan\dfrac{y}{x}$

calcoliamo:

$$\vartheta_x=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2};\ \vartheta_{xx}=\partial_x\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\vartheta_y=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2};\ \vartheta_{yy}=\partial_y\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\vartheta_z=0;\vartheta_{zz}=0;$$

perciò

$$(\vartheta_{xx}+\vartheta_{yy}+\vartheta_{zz})=0;$$

$$(\vartheta_x)^2+(\vartheta_y)^2+(\vartheta_z)^2=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi};$$

$$(\rho_x\vartheta_x+\rho_y\vartheta_y+\rho_z\vartheta_z)=\frac{x}{\rho}\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)+\frac{y}{\rho}\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\frac{z}{\rho}\cdot 0=0$$

Infine, poiché $\varphi=\arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

calcoliamo

$$\varphi_x=\frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\varphi_y = \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\varphi_z = \frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}\right) = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\varphi_{xx} = \partial_x\left(\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \frac{z(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2} - xz\left(2x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)} =$$

$$= z\frac{(x^2+y^2+z^2)y^2 - 2x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = z\frac{(x^2+y^2)(y^2-2x^2)+z^2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\varphi_{yy} = z\frac{(x^2+y^2)(x^2-2y^2)+z^2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\varphi_{zz} = \partial_z\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)}\right) = \frac{2z\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)^2};$$

Con somme e semplificazioni otteniamo da queste:

$$\left[(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2 + (\varphi_z)^2\right] = \frac{1}{\rho^2}$$

$$(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\cos\varphi}{\rho^2\sin\varphi}$$

Calcoliamo anche

$$(\rho_x\varphi_x + \rho_y\varphi_y + \rho_z\varphi_z) = \frac{x}{\rho}\frac{xz}{\rho^2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\rho}\frac{yz}{\rho^2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{z}{\rho}\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\rho^2}\right) =$$

$$= \frac{z}{\rho^3\sqrt{x^2+y^2}}\left(x^2+y^2-\left(x^2+y^2\right)\right) = 0$$

$$(\vartheta_x\varphi_x + \vartheta_y\varphi_y + \vartheta_z\varphi_z) = \frac{-y}{x^2+y^2} \cdot \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} +$$

$$+ \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} + 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)} \right) = 0$$

In definitiva, sostituendo nella $(*)$ le varie espressioni calcolate nei riquadri otteniamo

$$\Delta = \left(\frac{2}{\rho}\right)\frac{\partial}{\partial\rho} + (0)\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \left(\frac{\cos\varphi}{\rho^2\sin\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} + (1)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \left[\frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\right]\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} +$$

$$+ \left[\frac{1}{\rho^2}\right]\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi} + 2(0)\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\rho} + 2(0)\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\rho} + 2(0)\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\varphi} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \left(\frac{\cos\varphi}{\rho^2\sin\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Il risultato finale è quindi:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \left(\frac{\cos\varphi}{\rho^2\sin\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{11}$$

Come nel caso delle coordinate polari nel piano, se in particolare calcoliamo il laplaciano di una funzione radiale, cioè del tipo $u(\rho,\varphi,\vartheta) = f(\rho)$, otteniamo:

$$\Delta u = \frac{2}{\rho}f'(\rho) + f''(\rho),$$

che coincide con la formula $(*)$ del Cap.3, §3.9, Esempio 3.21 nel caso $n = 3$. La (11) è tuttavia molto più generale.

Cap. 5. Calcolo integrale per funzioni di più variabili

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 5, §1, 2, 3.

Il calcolo degli integrali doppi e tripli in ultima analisi si riconduce, utilizzando opportunamente le tecniche degli integrali di più variabili, al calcolo di integrali in una variabile. Perciò per affrontare l'argomento di questo capitolo è assolutamente fondamentale che lo studente abbia completa padronanza dei metodi di calcolo degli integrali in una variabile (definiti e indefiniti) studiati in analisi 1: un buon ripasso di [BPS1] cap. 6 e di [B1] cap. 6 può essere opportuno per lo studente, prima di proseguire con questo capitolo. Nel seguito spiegheremo dettagliatamente le nuove idee che intervengono nel calcolo degli integrali doppi e tripli, ma non ci dilungheremo nella spiegazione dei passaggi che coinvolgono il calcolo di integrali in una variabile, che sono un prerequisito.

5.1. Integrali doppi

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 5, §1.

5.1.A. Rappresentazione analitica di insiemi del piano

Una delle prime difficoltà che lo studente incontra nell'impostare il calcolo di un integrale doppio consiste nel rappresentare analiticamente il dominio di integrazione come insieme *semplice* (per la definizione di insieme semplice, v. [BPS2], cap. 5, §1.2). I prossimi esempi mostrano le idee, le avvertenze e le insidie più comuni che si presentano in questa operazione, in sé elementare ma delicata in quanto, se errata, pregiudica ovviamente l'intero calcolo.

Esempio 5.1.

a. Scrivere come dominio y-semplice e come dominio x-semplice il triangolo T di vertici $(0,0), (0,1), (1,1)$.

b. Scrivere come dominio y-semplice (o unione di domini di questo tipo) il triangolo di vertici $(-1,0), (0,2), (3,0)$.

a. Disegniamo il triangolo ed osserviamo (v. fig. 5.1) che il lato obliquo sta sulla retta $y = x$. Per descrivere il triangolo mediante unione di segmenti verticali (insieme y-semplice), la variabile x deve percorrere l'intervallo $[0,1]$; per ciascun fissato valore di $x \in [0,1]$, la retta verticale di ascissa x interseca il triangolo lungo l'intervallo $y \in [0,x]$. Quindi la rappresentazione di T come dominio y-

semplice è:

$$T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

Un errore comune è, dopo aver notato correttamente che $x \in [0, 1]$, affermare che anche $y \in [0, 1]$, anziché chiedersi dove varia la coordinata y *per ogni* x *fissato*. Così facendo troviamo l'insieme

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

che non è il triangolo T, ma un quadrato, *contenente* T.

Per rappresentare lo stesso triangolo come insieme x-semplice dobbiamo invece descriverlo mediante segmenti orizzontali. Facciamo quindi variare $y \in [0, 1]$ (v. fig. 5.2). Per ogni y fissato, la retta orizzontale di ordinata y interseca ora il triangolo nel segmento $[y, 1]$. Quindi:

$$T = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}.$$

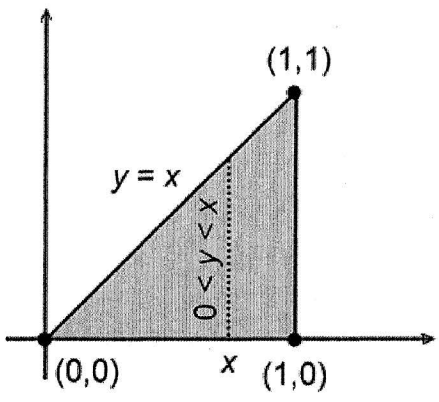


Fig. 5.1.

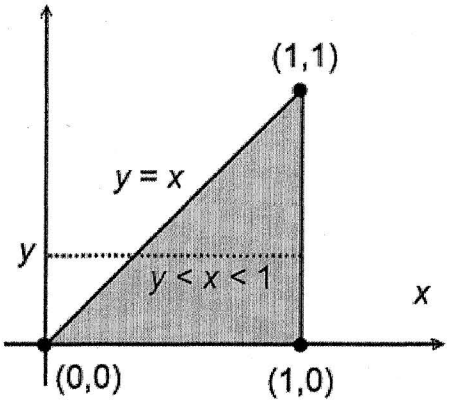


Fig.5.2.

b. Disegniamo il triangolo (v. fig. 5.3) ed osserviamo che i due lati obliqui stanno sulle rette $y = 2x + 2$ e $y = 2 - \frac{2}{3}x$. Il triangolo è compreso tra le rette verticali $x = -1, x = 3$, quindi $x \in [-1, 3]$. La situazione è simile a quella dell'esempio *a*, ma ora mentre x percorre l'intervallo $[-1, 3]$, la retta di ascissa x taglia il triangolo in un segmento che ha come primo estremo 0 e come secondo estremo un punto di uno dei due lati obliqui, a seconda che $x \in [-1, 0]$ o $x \in [0, 3]$. Perciò conviene rappresentare T come unione di due insiemi y-semplici, così:

$$T = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2x + 2\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x\right\}.$$

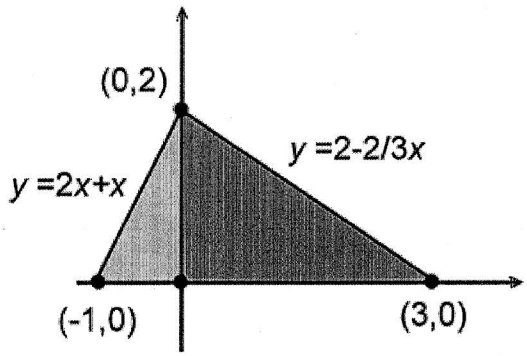


Fig. 5.3.

Esempio 5.2.

a. Scrivere come dominio y-semplice e come dominio x-semplice il semicerchio C di centro l'origine, raggio R, contenuto nel semipiano $y \geq 0$.

b. Scrivere come dominio y-semplice (o unione di più domini di questo tipo) il parallelogramma P di vertici $(0,0), (1,2), (4,0), (5,2)$.

a. La semicirconferenza in questione è definita da $x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$. Si può perciò esprimere come grafico di funzione, ricavando

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \text{ per } x \in [-R, R].$$

Il semicerchio C è quindi l'unione di segmenti verticali con $x \in [-R, R]$; per ogni x fissata, la retta verticale corrispondente taglierà il semicerchio nel segmento $\left[0, \sqrt{R^2 - x^2}\right]$, pertanto (v. fig. 5.4)

$$C = \left\{(x,y) : -R \leq x \leq R, 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\right\}.$$

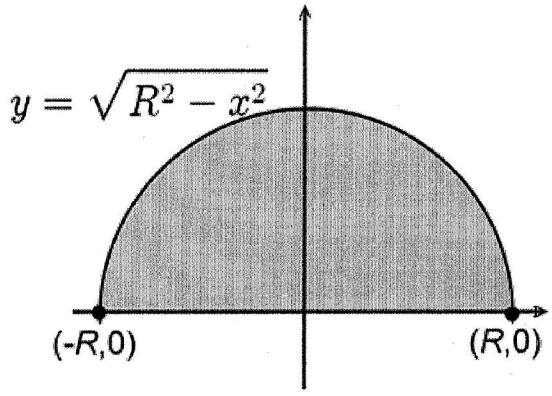


Fig.5.4.

Questa è la rappresentazione di C come insieme y-semplice. Se vogliamo rappresentarlo come insieme x-semplice dobbiamo vederlo come unione di segmenti orizzontali con $y \in [0, R]$. Ogni retta orizzontale di y fissata taglia il semicerchio lungo un segmento che si ottiene esplicitando l'equazione $x^2 + y^2 = R^2$ rispetto ad x:

$$x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$$

(prendendo come asse delle ascisse l'asse y, la semicirconferenza non è un grafico di funzione ma l'unione di due grafici distinti). Perciò

$$C = \left\{(x, y) : 0 \leq y \leq R, -\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}\right\}.$$

In questo caso la geometria dell'insieme suggerisce di utilizzare la rappresentazione come insieme y-semplice piuttosto che x-semplice, anche se entrambe sono possibili.

b. Facciamo la figura e osserviamo (v. fig. 5.5) che i lati obliqui stanno sulle rette $y = 2x$ e $y = 2x - 8$. Il parallelogramma è compreso tra le rette verticali $x = 0$ e $x = 5$, quindi $x \in [0, 5]$. E' naturale vedere il parallelogramma come unione di 3 domini y-semplici, che si ottengono facendo variare x successivamente in $[0, 1], [1, 4], [4, 5]$. Infatti così facendo si ha:

$$P = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\} \cup \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\} \cup$$

$$\cup \{(x, y) : 4 \leq x \leq 5, 0 \leq x \leq 2x - 8\}.$$

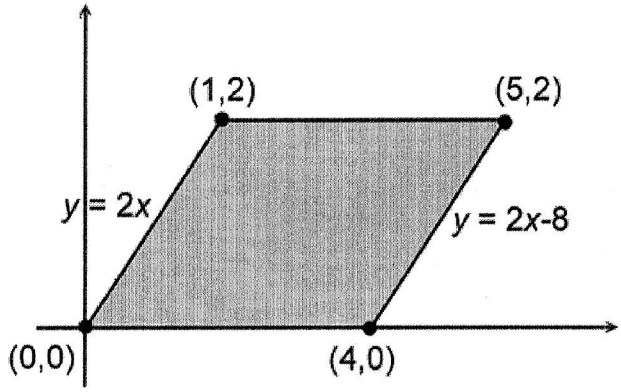


Fig.5.5.

In sostanza si è rappresentato il parallelogramma come unione di due triangoli e un rettangolo.

Esempio 5.3. Dato l'insieme y-semplice

$$E = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x^2\}$$

rappresentarlo come insieme x-semplice (o unione di insiemi x-semplici).

Disegniamo E (v. fig. 5.6). La figura suggerisce che per rappresentare l'insieme come unione di segmenti orizzontali conviene vederlo come unione di due insiemi, ottenuti per $y \in [-2, 0]$ e per $y \in [0, 4]$.

Per $y \in [-2, 0]$, risolvendo le disequazioni $0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x^2$ rispetto ad x si ha $-y \leq x \leq 2$; invece per $y \in [0, 4]$ le stesse disequazioni risolte danno $\sqrt{y} \leq x \leq 2$. Pertanto

$$E = \{(x, y) : -2 \leq y \leq 0, -y \leq x \leq 2\} \cup \{(x, y) : 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2\}.$$

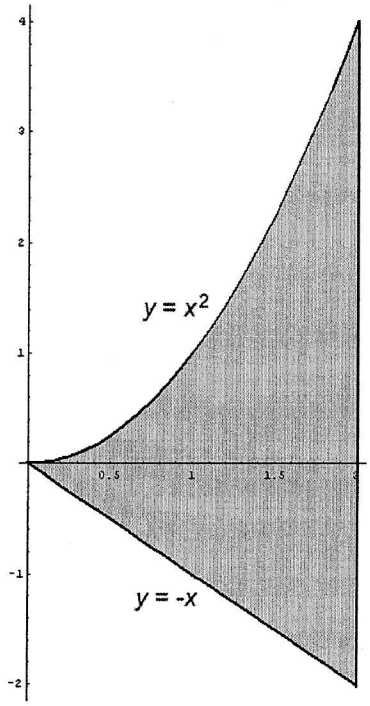


Fig.5.6.

Esercizi

5.1. Rappresentare come insiemi x-semplici o y-semplici o unione di più insiemi di questo tipo (nel modo che sembra più semplice) i seguenti insiemi del piano (x, y):

a. Il triangolo T di vertici $(1, 1), (0, 2), (1, 4)$.

b. Il rombo R di vertici $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ con $a, b > 0$.

c. Il quarto di cerchio C racchiuso nel 2° quadrante dalla circonferenza di centro l'origine e raggio R.

d. Il quadrilatero Q di vertici $(0, 0), (2, -1), (2, 2), (6, 3)$.

5.2.

a. Dato l'insieme y-semplice

$$E = \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^3\right\},$$

rappresentarlo come insieme x-semplice (o unione di insiemi x-semplici).

b. Dato l'insieme x-semplice

$$E = \left\{(x,y) : 0 \le y \le 1, 2y - 2 \le x \le \sqrt{1-y^2}\right\},$$

rappresentarlo come insieme y-semplice (o unione di insiemi y-semplici).

5.1.B. Tecniche di base e calcolo di integrali doppi come integrali iterati

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 5, §1.4.

Esempi svolti

Esempio 5.4. Calcolare l'integrale doppio:

$$\int\int_{[-1,1]\times[-2,2]} \left(x|y| + \frac{1}{2}x^2|y| + xe^{xy}\right) dxdy$$

Per linearità, l'integrale doppio è uguale a

$$\int\int_{[-1,1]\times[-2,2]} x|y|dxdy + \int\int_{[-1,1]\times[-2,2]} \frac{1}{2}x^2|y|dxdy +$$

$$+ \int\int_{[-1,1]\times[-2,2]} xe^{x|y|}dxdy \equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

Esaminiamo separatamente i 3 integrali.

$$I_1 = 0 \text{ per simmetria,}$$

in quanto la funzione integranda è dispari rispetto ad x, e l'insieme di integrazione è un rettangolo in cui $x \in [-1,1]$.

Notiamo ora che I_2 è l'integrale, su un rettangolo, di una funzione a variabili separate, perciò è uguale al prodotto di due integrali in una variabile:

$$I_2 = \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^2dx\right)\left(\int_{-2}^{2} |y|dy\right) = \left(2\int_{0}^{1} \frac{1}{2}x^2dx\right)\left(2\int_{0}^{2} ydy\right) =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \left[y^2\right]_0^2 = \frac{1}{3}\cdot 4 = \frac{4}{3}.$$

(Abbiamo appena usato le proprietà degli integrali in una variabile di funzioni pari o dispari su un intervallo simmetrico).

Infine I_3 va calcolato come un effettivo integrale iterato:

$$I_3 = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{2} xe^{x|y|}dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(2\int_{0}^{2} xe^{xy}dy\right)dx = \int_{-1}^{1} 2[e^{xy}]_0^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} 2\left(e^{2x}-1\right)dx = 2\left[\frac{e^{2x}}{2} - x\right]_{-1}^{1} = e^2 - e^{-2} - 4.$$

Complessivamente l'integrale vale

$$\frac{4}{3} + e^2 - e^{-2} - 4 = e^2 - e^{-2} - \frac{8}{3}.$$

Esempio 5.5. Calcolare l'integrale doppio:

$$\int\int_T \frac{y}{1+x}dxdy$$

dove T è il triangolo di vertici $(-1,0),(2,0),(0,2)$.

Questo integrale è esteso a un dominio semplice (che però non è un rettangolo). Osservando la figura (v. fig. 5.7) e le equazioni delle rette vediamo che il triangolo T si può rappresentare come:

$$\{(x,y) : -1 \le x \le 0, 0 \le y \le 2+2x\} \cup \{(x,y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2-x\}$$

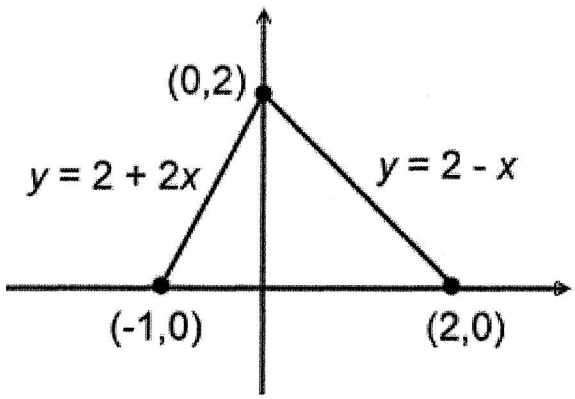


Fig.5.7.

Pertanto l'integrale doppio si scrive come somma di due integrali iterati, al modo seguente:

$$\iint_T \frac{y}{1+x}dxdy = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+x}\left(\int_0^{2x+2} ydy\right)dx + \int_0^2 \frac{1}{1+x}\left(\int_0^{2-x} ydy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+x}\frac{(2x+2)^2}{2}dx + \int_0^2 \frac{1}{1+x}\cdot\frac{(2-x)^2}{2}dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+x}\frac{4(x+1)^2}{2}dx + \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{x^2-4x+4}{1+x}\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} 2(x+1)dx + \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x-5+\frac{9}{1+x}\right)dx =$$

$$= \left[(x+1)^2\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 5x + 9\log(1+x)\right]_0^2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(2 - 10 + 9\log 3) = -3 + \frac{9}{2}\log 3.$$

Esempio 5.6. Calcolare le coordinate del centroide di una lamina piana omogenea Ω a forma di semiellisse:

$$\Omega = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0\right\}.$$

Per simmetria, $x_C = 0$. Calcoliamo perciò:

$$y_C = \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega y dxdy.$$

L'area dell'ellisse è nota (si può calcolare con un integrale in una variabile), perciò sarà:

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\pi ab.$$

Il semiellisse si può rappresentare come

$$\Omega = \left\{(x,y) : -a \le x \le a, 0 \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\},$$

perciò

$$y_C = \frac{1}{|\Omega|}\int\int_\Omega y dx dy = \frac{2}{\pi ab}\int_{-a}^{a}\left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y dy\right) dx =$$

$$= \frac{4}{\pi ab}\int_0^a \frac{1}{2}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{2b}{\pi a}\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = \frac{2b}{\pi a}\cdot\frac{2}{3}a = \frac{4}{3\pi}b.$$

Quindi il centroide ha coordinate $\left(0, \frac{4}{3\pi}b\right)$.

Esercizi

Ulteriori esercizi si trovano assortiti nel §5.1.D.

5.3.★ Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_T |x| dx dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(-1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$.

5.4.★ Calcolare la coordinata $\overline{y}$ del centroide di una lamina piana omogenea D a forma di quadrilatero di vertici:

$$(-1,0);\ (0,0);\ (2,1);\ (0,1).$$

Suggerimento: fare un disegno e prestare attenzione alla rappresentazione analitica del dominio D; l'area si può calcolare elementarmente, senza integrali.

5.5.★ Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_T \cos y \, dx dy$$

dove T è il triangolo di vertici $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $(\pi, 0)$.

5.6.★ Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_T xy\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0), (1,0), \left(1, \sqrt{3}\right)$.

5.7.★ Si consideri la lamina piana omogenea Ω di massa M avente la forma del trapezio di vertici

$$(2a,0); (a,a); (-a,a); (-2a,0)$$

per $a > 0$ fissato (si consiglia di fare una figura). Si calcoli il suo momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare al piano xy e passante per l'origine.

5.8.★ Sia T il triangolo di vertici $\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(2, \frac{1}{2}\right), (2,1)$. Dopo averne scritto la rappresentazione analitica come dominio x-semplice e y-semplice, si calcoli il seguente integrale doppio, iterando nell'ordine più conveniente:

$$\int\int_T \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3}dxdy.$$

Calcolare i seguenti integrali, presetando attenzione alle eventuali simmetrie:

5.9.★ $$\int\int_{[-\pi,\pi]\times[0,\pi]} \sin x \sin y dxdy$$

5.10.★ $$\int\int_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \sin x \sin y dxdy$$

5.11.★ $$\int\int_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \sin x \cos y dxdy$$

5.12.★ $$\int\int_{[-\pi,\pi]\times[0,\pi]} |\sin x| \sin y dxdy$$

5.1.C. Calcolo di integrali doppi con cambi di variabili

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 5, §1.5.

Esempio 5.7. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D \frac{x^2 y}{x^2+y^2} dx dy$$

dove $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

Il dominio D è un semicerchio centrato nell'origine; la funzione integranda è omogenea (di grado 1). E' naturale passare in coordinate polari (ρ, ϑ); il dominio si trasforma in

$$D = \{(\rho,\vartheta) : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$$

e ricordando la formula per il cambio di variabili polari:

$$dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\vartheta$$

si ha:

$$\int\int_D \frac{x^2 y}{x^2+y^2} dx dy = \int_0^2 \rho d\rho \int_0^\pi \frac{\rho^3 \cos^2\vartheta \sin\vartheta}{\rho^2} d\vartheta =$$

$$= \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_0^\pi \cos^2\vartheta \sin\vartheta d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 \left[-\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^\pi = \frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{9}.$$

Notiamo che, in coordinate polari, il dominio semicircolare è diventato un "rettangolo", l'integranda, omogenea di grado 1, è diventata una funzione a variabili separate, del tipo $\rho g(\vartheta)$, e in conclusione l'integrale doppio si è semplciemente trasformato nel prodotto di due integrali unidimensionali.

Esempio 5.8.

a. Si dimostri il seguente risultato, dovuto ad Archimede[1]:

"L'area racchiusa dal primo giro di una spirale "di Archimede" è pari a un terzo dell'area del cerchio circoscritto".

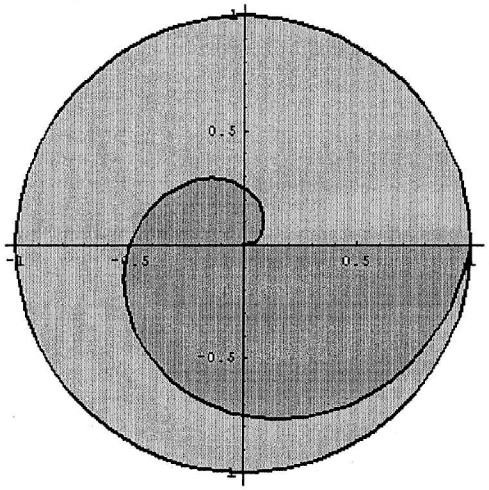


Fig. 5.8. L'area in grigio più scuro è un terzo dell'area del cerchio

In altre parole, considerato l'arco di spirale di Archimede descritto in forma polare da

$$\rho = \frac{R\vartheta}{2\pi} \text{ per } \vartheta \in [0, 2\pi],$$

si calcoli l'area della regione piana limitata da quest'arco di curva e dal segmento $[0, R]$ sull'asse x, e lo si raffronti con l'area del cerchio di raggio R e centro l'origine.

b. Supponendo poi che questa regione piana sia una lamina omogenea di massa m, se ne calcoli il momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare al piano xy e passante per l'origine.

a. La lamina piana può essere descritta in coordinate polari al modo seguente:

$$\Omega = \left\{ (\rho, \vartheta) : \vartheta \in [0, 2\pi], \rho \leq \frac{R\vartheta}{2\pi} \right\}$$

Calcoliamo anzitutto l'area:

[1] Archimede di Siracusa, libro "Sulle spirali", circa 200 a.C.

$$|\Omega| = \int\int_{\Omega} dxdy =$$

passando in coordinate polari

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{R\vartheta}{2\pi}} \rho d\rho \right) d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{R\vartheta}{2\pi} \right)^2 d\vartheta =$$

$$= \frac{R^2}{8\pi^2} \cdot \left[\frac{\vartheta^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{8\pi^2} \cdot \frac{8\pi^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2,$$

cioè esattamente $\frac{1}{3}$ dell'area del cerchio di raggio R, cioè del cerchio circoscritto.

b. Calcoliamo ora il momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare al piano e passante per l'origine. Essendo la lamina omogenea si ha:

$$I = \frac{m}{|\Omega|} \int\int_{\Omega} (x^2 + y^2) dxdy =$$

passando ancora in coordinate polari

$$= \frac{3m}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{R\vartheta}{2\pi}} \rho^2 \cdot \rho d\rho \right) d\vartheta = \frac{3m}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left(\frac{R\vartheta}{2\pi} \right)^4 d\vartheta =$$

$$= \frac{3m}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{R^4}{16\pi^4} \left[\frac{\vartheta^5}{5} \right]_0^{2\pi} = \frac{3m}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{R^4}{16\pi^4} \cdot \frac{32\pi^5}{5} = \frac{3mR^2}{10}.$$

Esercizi

5.13.★ Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_D \frac{|xy|}{x^2 + y^2} dxdy$$

dove D è il cerchio di centro l'origine e raggio R.

5.14.★ Calcolare il baricentro di una lamina piana rappresentata dal quarto di cerchio

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R, x \geq 0, y \geq 0\}$$

avente densità $f(x, y) = a + b\sqrt{x^2 + y^2}$.

5.15.★ Calcolare il centroide del settore di corona circolare definito in coordinate polari da $\Omega = \{(\rho, \vartheta) : r \leq \rho \leq 2r; 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\}$, con $r > 0$, *semplificando le espressioni trovate*. (Il risultato finale dev'essere espresso in funzione dell'unico parametro r).

5.16.★ Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_{4x^2+y^2 \leq 1} |x| y^2 dx dy$$

con un opportuno cambio di coordinate.

5.17.★ Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D |y - x| dx dy$$

dove D è il cerchio di centro l'origine e raggio 1.

5.18.★ Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D y^2 e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

dove D è il semicerchio di centro l'origine, raggio 1, contenuto nel semipiano $y \geq 0$.

5.19.★ Calcolare l'area e la coordinata $\overline{x}$ del centroide di una lamina piana omogenea D rappresentata in coordinate polari da:

$$D = \{(\rho, \vartheta) : \rho \leq \vartheta, \vartheta \in [0, \pi]\}.$$

Si raccomanda di fare un disegno.

5.20.★ Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_S \left(\frac{x+y}{1+x^2+y^2}\right) dxdy$$

dove S è il settore circolare $\{(x,y) : x^2+y^2 < 1, 0 < y < x\}$.

5.21.★ Calcolare il momento d'inerzia di una lamina piana D a forma semicircolare di raggio R e centro l'origine, e densità $f(x,y) = \frac{m}{R^2}\left(2 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)$, rispetto a un asse passante per l'origine e perpendicolare al piano del cerchio.

5.22.★ Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4$$

sul cerchio C di centro l'origine e raggio R.

$$\int\int_C (x^4+y^4) dxdy.$$

(Suggerimento: conviene scrivere $x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2$).

5.1.D. Applicazioni geometrico-fisiche degli integrali doppi ed esercizi vari

Momenti d'inerzia di lamine piane omogenee

Nei prossimi esercizi la parte più istruttiva e delicata è l'*impostazione* del calcolo: si presti attenzione alla formulazione del problema, si faccia una figura, si scelga opportunamente il sistema di riferimento (quando non è esplicitamente indicato) e si esprima opportunamente, nei problemi sul momento d'inerzia, la funzione "distanza del punto dall'asse di rotazione".

5.23.★ Momento d'inerzia del cerchio. Calcolare il momento d'inerzia di una lamina piana omogenea Ω di massa m a forma di cerchio di raggio R, rispetto a un asse:

a. passante per il centro e perpendicolare al suo piano;
b. passante per il centro e contenuto nel suo piano;
c. passante per un punto della circonferenza e perpendicolare al suo piano.

5.24.★ Momento d'inerzia dell'ellisse. Calcolare il momento d'inerzia di una lamina piana omogenea Ω di massa m a forma di ellisse di semiassi a, b, rispetto a un asse:

a. passante per il centro e perpendicolare al suo piano;
b. coincidente con uno dei suoi assi di simmetria.

5.25.★ Momento d'inerzia del rettangolo. Calcolare il momento d'inerzia di una lamina piana omogenea Ω di massa m a forma di rettangolo di dimensioni a, b, rispetto a un asse:

a. passante per il centro e perpendicolare al suo piano;
b. passante per il centro e parallelo a uno dei suoi lati.

5.26.★ Momento d'inerzia del rombo. Calcolare il momento d'inerzia di una lamina piana omogenea Ω di massa m a forma di rombo di diagonali a, b, rispetto a un asse:

a. passante per il centro e perpendicolare al suo piano;
b. coincidente con una sua diagonale.

(*Suggerimento: usare anche considerazioni di simmetria, nell'impostazione del calcolo*).

Chiudiamo questo gruppo di esercizi con un esempio svolto in dettaglio, in quanto è significativo e richiede un'impostazione non banale.

Esempio 5.9. Momento d'inerzia del poligono regolare di n lati. Calcolare il momento d'inerzia di una lamina piana omogenea Ω di massa m a forma di poligono regolare di n lati, rispetto a un asse passante per il centro e perpendicolare al suo piano. Esprimere il risultato in funzione di m, il numero n di lati e il raggio R del cerchio circoscritto.

Disegniamo il poligono di n lati ed uniamo ogni vertice al centro del cerchio circoscritto, fissato nell'origine del riferimento (v. fig. 5.9). Così facendo il poligono risulta suddiviso in n triangoli isosceli uguali, di lato obliquo R e angolo al vertice $2\pi/n$. Data la simmetria centrale, l'integrale che definisce il momento d'inerzia è n volte quello esteso a uno solo di questi triangoli, e diviso per l'area del poligono che è n volte quello del triangolo dà lo stesso momento d'inerzia del triangolo. In simboli:

$$I_{\text{poligono}} = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdy = \frac{m}{n|T|}\cdot n\int\int_{T}(x^2+y^2)\,dxdy =$$

$$= \frac{m}{|T|}\int\int_T (x^2+y^2)dxdy = I_{\text{triangolo } T}.$$

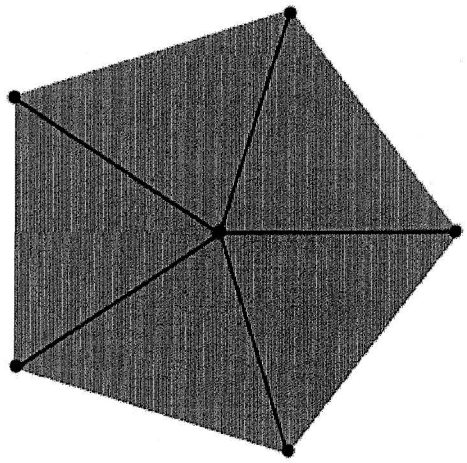


Fig.5.9.

E' sufficiente quindi calcolare il momento d'inerzia di uno di questi triangoli T. Scriviamo la rappresentazione analitica di T. Possiamo scegliere gli assi in modo che sia (v. fig. 5.10):

$$T = \left\{(x,y) : 0 \le x \le R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right); -x\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \le y \le x\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}.$$

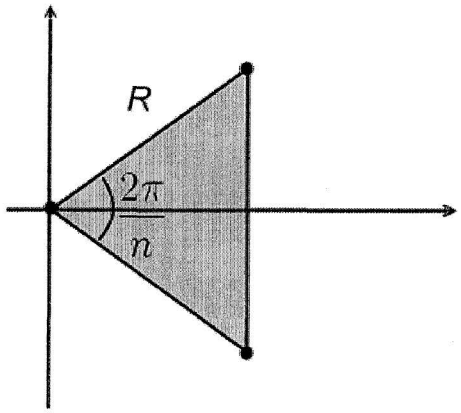


Fig.5.10.

$$|T| = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = R^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

e

$$I_n = \frac{m}{|T|}\int\int_T (x^2+y^2)\,dxdy =$$

$$= \frac{m}{|T|}\int_0^{R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \left(\int_{-x\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}^{x\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} (x^2+y^2)\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{2m}{|T|}\int_0^{R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{x\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} dx =$$

$$= \frac{2m}{|T|}\int_0^{R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \left[x^3\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{x^3\tan^3\left(\frac{\pi}{n}\right)}{3}\right] dx =$$

$$= \frac{2m}{R^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{\tan^3\left(\frac{\pi}{n}\right)}{3}\right) \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}mR^2 \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \frac{1}{3}\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}mR^2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right),$$

formula che si può riscrivere in vari modi, come ad eesempio:

$$I_n = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{6}mR^2\left(2 + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right).$$

Notiamo che I_n è una successione crescente, il cui minimo valore è perciò quello assunto per $n = 3$ (triangolo equilatero), mentre per $n \to +\infty$, $I \to \frac{1}{2}mR^2$, il momento d'inerzia del cerchio circoscritto.

Usando una delle due formule equivalenti scritte qui sopra si può dare qualche esempio numerico.

Per $n = 3$ (triangolo equilatero),

$$I = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}mR^2.$$

Per $n = 4$ (quadrato),

$$I = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}mR^2.$$

Ricordando che la relazione tra lato L del quadrato e R è $2R = L\sqrt{2}$ si ha $R^2 = L^2/2$ e

$$I = \frac{1}{6}mL^2,$$

che coincide col risultato trovato in generale per un rettangolo di lati a, b (v. Esercizio 5.25)

$$I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) = \text{(per il quadrato)} = \frac{1}{6}mL^2.$$

Qualche altro esempio numerico:

$$I_6 = \frac{5}{12}mR^2;$$

$$I_8 = \frac{1}{6}mR^2\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$I_{12} = \frac{1}{6}mR^2\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Volumi di solidi

5.27.★ Ellissoide. Calcolare il volume dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Impostazione: il volume è il doppio di quello del semiellissoide compreso nel semispazio $z \geq 0$, quindi ricavando per la superficie del semiellissoide superiore l'equazione

$$z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

si ottiene $$V = 2\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy$$

(il volume del sottografico di una funzione di due variabili è l'integrale doppio della funzione). Si calcoli tale integrale.

5.28.★ Paraboloide. Si consideri il segmento di paraboloide di rotazione di altezza h e che ha per base un cerchio di raggio R:

$$P = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right)\right\}.$$

Si calcoli il volume di P, in particolare riottenendo il seguente risultato dovuto ad Archimede[2]:

"Il volume di un segmento di paraboloide di rotazione è $\frac{3}{2}$ del volume del cono avente la stessa base e altezza".

5.29.★ Un iperbolide di rotazione è la superficie quadrica descritta in forma canonica da:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Vogliamo calcolare il volume racchiuso da questa superficie e due piani paralleli $z = 0, z = h$. Per dare dei parametri dimensionali al solido, consideriamo la funzione:

$$z = h\frac{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

che descrive una superficie dello stesso tipo, con il significato dei parametri h, r, R illustrato dalla fig. 5.11.

[2] Archimede di Siracusa, libro "Sui conoidi e gli sferoidi", ca. 200 a.C.

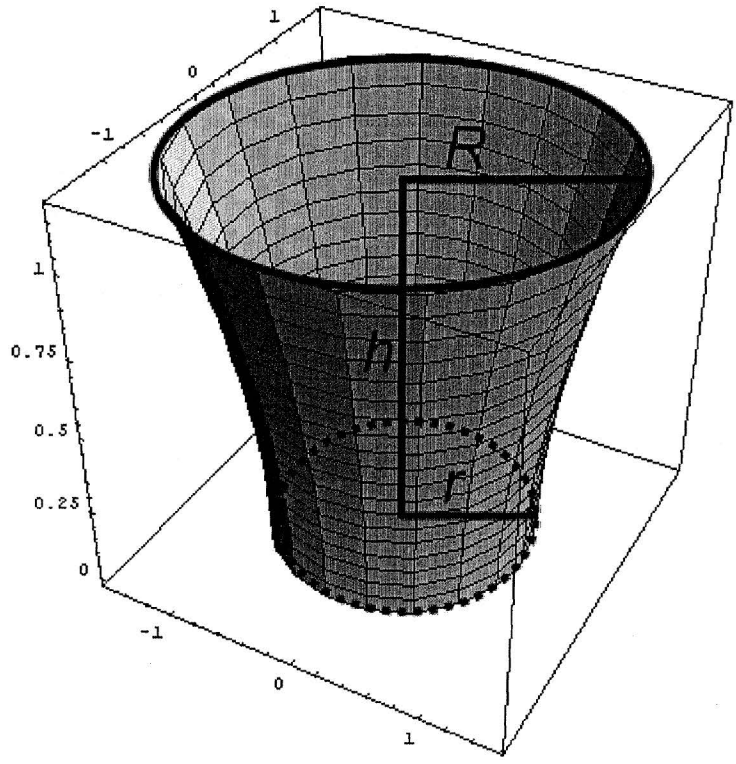


Fig.5.11.

Il volume del solido che ci interessa è la differenza tra il volume del cilindro di raggio R e altezza h e il volume del sottografico di questa funzione sulla corona circolare $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$. Si ha quindi:

$$V = \pi h R^2 - \int\int_{r^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2} h \frac{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{\sqrt{R^2-r^2}} dxdy.$$

Calcolare tale volume, verificando che si ha[3]:

$$V = \frac{2}{3} V_{\text{cilindro inscritto}} + \frac{1}{3} V_{\text{cilindro circoscritto}}.$$

[3] Anche questo risultato, formulato in modo diverso, si trova nel libro già citato di Archimede, "Sui conoidi e gli sferoidi".

Esercizi vari

5.30.★ Calcolare l'integrale doppio:

$$\int\int_T |x|e^y dxdy$$

dove T è il triangolo di vertici $(-1,0),(0,1),(1,0)$.

5.31.★ Nel piano xy si consideri la lamina materiale omogenea Ω avente la forma del settore circolare espresso in coordinate polari da: $\rho \leq R; 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$. Calcolare le coordinate del baricentro della lamina.

5.32.★ Si consideri, in un piano xy, la lamina piana omogenea Ω di massa M descritta in coordinate polari da (v. fig. 5.12):

$$\Omega = \{(\rho,\vartheta) : \rho \leq \vartheta, 0 < \vartheta \leq 2\pi\}.$$

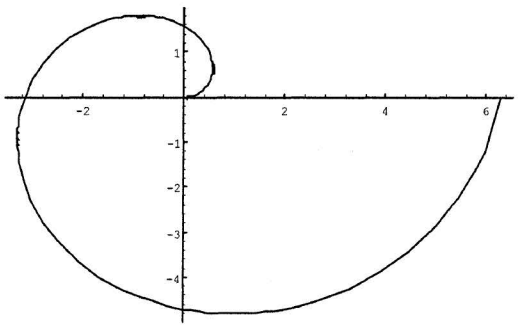


Fig.5.12.

Dopo aver calcolato l'area di Ω, calcolarne il momento d'inerzia rispetto all'asse z (cioè rispetto a una retta passante per l'origine e ortogonale al piano in cui vive la figura).

5.33. Calcolare la coordinata $\overline{y}$ del centroide del triangolo che nel piano xy ha vertici $(0,0)$, $(3,0)$, $(1,2)$.

(Fare un disegno e prestare attenzione alla corretta rappresentazione del dominio mediante disuguaglianze).

5.34. Sia T il triangolo, nel piano xy, di vertici $(-1,0)$, $(0,2)$, $(3,0)$. Calcolare:

$$\int\int_T x^2 y \, dx \, dy.$$

5.35. Calcolare il seguente integrale doppio.

$$\int\int_T \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

dove T è il settore di corona circolare di raggi $r_1 = 1, r_2 = 2$, compreso nel semipiano $y \geq 0$. (*Si consiglia di fare un disegno...*)

5.36. Calcolare l'integrale doppio (generalizzato)

$$\int\int_D \log\sqrt{x^2+y^2} dx \, dy$$

dove D è il cerchio di raggio 2 centrato nell'origine.

5.37. Calcolare il seguente integrale doppio.

$$\int\int_T \frac{xy}{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

dove T è il settore di corona circolare di raggi $r_1 = 1, r_2 = 2$, compreso nel primo quadrante. (*Si consiglia di fare un disegno...*)

5.38. Calcolare il seguente integrale doppio.

$$\int\int_T \frac{xy}{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,3)$.

5.39. Calcolare il seguente integrale doppio.

$$\int\int_T y\sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,3)$.

5.40. Calcolare il seguente integrale doppio.

$$\int\int_T \frac{ye^x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

dove T è il semicerchio di centro l'origine e raggio 1, compreso nel semipiano $y \geq 0$.

5.41. Calcolare il seguente integrale doppio.

$$\int\int_T \frac{y}{1+x^2}\,dx\,dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (0,1)$.

5.42. Calcolare il seguente integrale doppio.

$$\int\int_R x^2 \sin(xy)\,dx\,dy$$

dove T è il rettangolo $[0,1] \times [0,\pi]$.

5.43. Si consideri una lamina piana omogenea di massa M, rappresentata nel piano xy dal triangolo di vertici $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ (a, b costanti positive). Calcolarne il momento d'inerzia rispetto all'asse z.

5.44.★ Sia T il triangolo, nel piano xy, di vertici $(-1,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$. Calcolare:

$$\int\int_T 2|x|y\,dx\,dy.$$

5.45. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D y \log\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

dove $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 2, y \geq 0\}$. (Si consiglia di disegnare l'insieme).

5.46. Nel piano xy si consideri la lamina materiale D omogenea di massa M, avente la forma del triangolo isoscele di vertici $(-a,0), (a,0), (0,h)$ (con $a, h > 0$). Calcolare il momento d'inerzia della lamina rispetto a un asse perpendicolare al piano xy e passante per l'origine.

5.47. Sia D una lamina piana omogenea di massa m a forma di parallelogrammo di vertici $(3,1),(-1,1),(-3,-1),(1,-1)$ (fare una figura). Calcolare il suo momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare al piano xy (in cui giace la lamina), e passante per l'origine.

5.48. Sia D la porzione di corona circolare di raggi r, R, compresa nel primo quadrante (disegnarla).

a. Calcolare le coordinate del centroide di D (supponendo si tratti di una lamina materiale omogenea)

b. Calcolare l'integrale doppio:

$$\int\int_D xe^y dx\, dy.$$

5.49.★ Si consideri un disco materiale Ω di raggio R e centro l'origine, composto da due metà (i due semicerchi contenuti rispettivamente nei semipiani $x \leq 0, x \geq 0$) tali che: ognuna delle due metà è omogenea, ma la metà di sinistra $(x \leq 0)$ ha massa totale M_1, la metà di destra ha massa totale M_2. (Quindi il disco nel suo complesso *non è omogeneo*). Calcolare le coordinate del baricentro di Ω. Esprimere il risultato in funzione dei parametri R, M_1, M_2.

5.50.★ Si consideri la lamina materiale Ω a forma di triangolo equilatero di lato L (vertici $(L/2,0),(-L/2,0),\left(0, L\sqrt{3}/2\right)$), composto da due metà (i due triangoli contenuti rispettivamente nei semipiani $x \leq 0, x \geq 0$) tali che: ognuna delle due metà è omogenea, ma la metà di sinistra $(x \leq 0)$ ha massa totale M_1, la metà di destra ha massa totale M_2. (Quindi il triangolo nel suo complesso *non è omogeneo*). Calcolare la coordinata $\overline{x}$ del baricentro di Ω. Esprimere il risultato in funzione dei parametri L, M_1, M_2.

5.51.★ Sia T il triangolo di vertici $(0,0),(1,0),(1,2)$, nel piano xy. Calcolare l'integrale doppio:

$$\int\int_T x^2 e^{xy} dx\, dy.$$

Soluzioni §5.1

5.1. *a.* $$T = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 2 - x \le y \le 2x + 2\}$$

b. $$R = \left\{(x,y) : -a \le x \le 0, -b - \frac{b}{a}x \le y \le b + \frac{b}{a}x\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y) : 0 \le x \le a, -b + \frac{b}{a}x \le y \le b - \frac{b}{a}x\right\}$$

c. $$C = \left\{(x,y) : -R \le x \le 0, 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$$

d. $$Q = \left\{(x,y) : 0 \le x \le 2, -\frac{x}{2} \le x \le x\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y) : 2 \le x \le 6, x - 3 \le x \le \frac{x}{4} + \frac{3}{2}\right\}.$$

5.2. *a.* $$E = \left\{(x,y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le \sqrt[3]{1-y}\right\}$$

b. $$E = \left\{(x,y) : -2 \le x \le 0, 0 \le y \le 1 + \frac{x}{2}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\right\}.$$

5.3. $$\int_{-1}^{0} -x\,dx \int_{0}^{x+1} dy + \int_{0}^{2} x\,dx \int_{0}^{1-x/2} dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} -x(x+1)\,dx + \int_{0}^{2} x\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_{0}^{2} =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 - \frac{4}{3} = \frac{5}{6}.$$

5.4.

$$D = \{(x,y) : -1 \le x \le 0, 0 \le y \le x+1\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y) : 0 \le x \le 2, \frac{x}{2} \le y \le 1\right\}$$

$$|D| = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

$$\overline{y} = \frac{1}{|D|}\int\int_D y dx dy = \frac{2}{3}\left\{\int_{-1}^{0} dx \int_0^{x+1} y dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 y dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^2}{2} dx + \int_0^2 \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left[\frac{(x+1)^3}{6}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24}\right]_0^2\right\} = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}.$$

5.5.

$$\int\int_T \cos y \, dx dy =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left(\int_0^{2x+\frac{\pi}{2}} \cos y \, dy\right) dx + \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}} \cos y \, dy\right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) dx + \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \cos(2x) dx + \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + \left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

5.6. $$I = \int_0^1 x\left(\int_0^{\sqrt{3}x} y\sqrt{x^2+y^2}dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 x\left[\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{\sqrt{3}x} dx = \int_0^1 x\frac{(4x^2)^{3/2}-x^3}{3}dx = \frac{7}{3}\int_0^1 x^4dx = \frac{7}{15}.$$

5.7. $$|\Omega| = \frac{(4a+2a)a}{2} = 3a^2.$$

$$I = \frac{M}{|\Omega|}\int\int_\Omega (x^2+y^2)dxdy.$$

Per simmetria, $$I = \frac{M}{3a^2}2\int\int_{\Omega'}(x^2+y^2)dxdy$$

dove Ω' è il trapezio di vertici $(2a,0)$; (a,a); $(0,a)$; $(0,0)$, perciò

$$= \frac{2M}{3a^2}\left(\int_0^a\left(\int_0^a (x^2+y^2)dy\right)dx + \int_a^{2a}\left(\int_0^{2a-x}(x^2+y^2)dy\right)dx\right) =$$

$$= \frac{2M}{3a^2}\left(\int_0^a\left(ax^2+\frac{a^3}{3}\right)dx + \int_a^{2a}\left(x^2(2a-x)+\frac{(2a-x)^3}{3}\right)dx\right) =$$

$$= \frac{2M}{3a^2}\left(\left(\frac{a^4}{3}+\frac{a^4}{3}\right)+\int_a^{2a}\left(2ax^2-x^3+\frac{8a^3-12a^2x+6ax^2-x^3}{3}\right)dx\right) =$$

$$= \frac{2M}{3a^2}\left(\frac{a^4}{3}+\frac{a^4}{3}+\left[\frac{2}{3}ax^3-\frac{x^4}{4}+\frac{8}{3}a^3x-2a^2x^2+\frac{2}{3}ax^3-\frac{x^4}{12}\right]_a^{2a}\right) =$$

$$= \frac{2M}{3a^2}a^4\left(\frac{2}{3}+\left[\frac{16}{3}-4+\frac{16}{3}-8+\frac{16}{3}-\frac{4}{3}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{8}{3}-2+\frac{2}{3}-\frac{1}{12}\right)\right]\right) =$$

$$= \frac{2Ma^2}{3}\left(\frac{20}{12}\right) = \frac{10}{9}Ma^2.$$

5.8.

$$T = \left\{(x,y) : 1 \le x \le 2, 1 \le y \le \frac{x}{2}\right\} = \left\{(x,y) : \frac{1}{2} \le y \le 1, 2y \le x \le 2\right\}.$$

$$\int\int_T \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3} dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{2y}^2 e^{\frac{x}{y}} dx\right) \frac{dy}{y^3} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\left[ye^{\frac{x}{y}}\right]_{2y}^2\right) \frac{dy}{y^3} =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(e^{\frac{2}{y}} - e^2\right) \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{y}} + \frac{e^2}{y}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2}e^2 + e^2 + \frac{1}{2}e^4 - 2e^2 =$$

$$= -\frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4.$$

Da notare che impostando l'integrale iterato in ordine inverso si trovava un'integranda dalla primitiva più complicata.

5.9. $\int\int_{[-\pi,\pi]\times[0,\pi]} \sin x \sin y \, dx dy = 0$ per simmetria:

la funzione è dispari rispetto ad x e $x \in [-\pi, \pi]$.

5.10. $$\int\int_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \sin x \sin y \, dx dy = \left(\int_0^\pi \sin x dx\right)\left(\int_0^\pi \sin y dy\right) =$$

$$= \left([-\cos x]_0^\pi\right)^2 = 2^2 = 4.$$

5.11. Per simmetria: $$\int_0^\pi \cos y dy = 0,$$

e quindi l'integrale è nullo.

5.12. $$\int\int_{[-\pi,\pi]\times[0,\pi]} |\sin x| \sin y \, dx dy =$$

$$= \left(2\int_0^\pi \sin x dx\right)\left(\int_0^\pi \sin y dy\right) = 2\left([\cos x]_0^\pi\right)^2 = 2 \cdot 2^2 = 8.$$

5.13. Per simmetria, sarà

$$I = \int\int_D \frac{|xy|}{x^2+y^2} dx dy = 4\int\int_{D^+} \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy$$

dove $$D^+ = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0\right\}.$$

Passando il coordinate polari si ha:

$$I = 4\int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta}{\rho^2} \right) \rho d\rho = \left(\int_0^R \rho d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} 2\sin 2\vartheta d\vartheta \right) =$$

$$= \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R [-\cos 2\vartheta]_0^{\pi/2} = \frac{R^2}{2} \cdot 2 = R^2.$$

5.14. Occorre anzitutto calcolare la massa totale:

$$M = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\sqrt{R}} (a + b\rho)\rho d\rho = \frac{\pi}{2}\left(b\frac{R^{3/2}}{3} + a\frac{R}{2} \right).$$

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\int\int_D x f(x,y)dxdy = \frac{1}{M}\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta d\vartheta \int_0^{\sqrt{R}} (a + b\rho)\rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{2}{\pi\left(b\frac{R^{3/2}}{3} + a\frac{R}{2} \right)} \cdot 1 \cdot \left(b\frac{R^2}{4} + a\frac{R^{3/2}}{3} \right) = \frac{2\left(b\frac{R}{4} + a\frac{\sqrt{R}}{3} \right)}{\pi\left(b\frac{\sqrt{R}}{3} + \frac{a}{2} \right)}.$$

Per simmetria, $\overline{y} = \overline{x}$.

5.15. $$\overline{x} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega x\, dxdy = \frac{1}{\frac{\pi}{8}\left((2r)^2 - r^2\right)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta d\vartheta \int_r^{2r} \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{8}{3\pi r^2}\left[\frac{\rho^3}{3} \right]_r^{2r} [\sin\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{3\pi r^2} \cdot \frac{7r^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{56}{9\pi\sqrt{2}} r.$$

$$\overline{y} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega y\, dxdy = \frac{8}{3\pi r^2} \cdot \frac{7r^3}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta d\vartheta = \frac{56}{9\pi} r[-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{56}{9\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) r.$$

5.16. Il dominio di integrazione è un'ellisse, può essere utile il cambiamento di coordinate polare ellittico:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \quad dxdy = \frac{1}{2}\rho d\rho d\vartheta$$

che trasforma l'ellisse nel dominio

$$\{(\rho,\vartheta) : 0 \le \rho \le 1; 0 \le \vartheta \le 2\pi\}.$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho |\cos\vartheta| \rho^2 \sin^2\vartheta \, d\vartheta \right) \rho \, d\rho = \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \rho^4 \, d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} |\cos\vartheta| \sin^2\vartheta \, d\vartheta \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 \right) \left(4 \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin^2\vartheta \, d\vartheta \right) = \frac{1}{10} \cdot 4 \left[\frac{\sin^3\vartheta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{15}.$$

5.17. Per simmetria,

$$\int\int_D |y - x| \, dx dy = 2 \int\int_{D^+} (y - x) \, dx dy$$

dove $D^+ = \{(\rho, \vartheta) : \rho \in [0,1], \vartheta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi]\}$, quindi l'integrale cercato è pari a:

$$2 \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\rho \sin\vartheta - \rho \cos\vartheta) \, d\vartheta \right) \rho \, d\rho = 2 \left(\int_0^1 \rho^2 \, d\rho \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin\vartheta - \cos\vartheta) \, d\vartheta \right) =$$

$$= 2 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \cdot [-\cos\vartheta - \sin\vartheta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{8}{3\sqrt{2}}.$$

5.18. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right)$.

5.19.

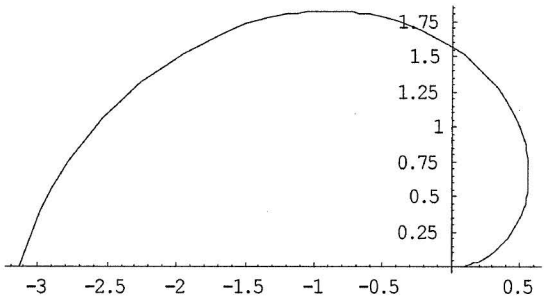


Fig.5.13.

$$|D| = \int\int_D dx dy = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{\vartheta} \rho \, d\rho = \int_0^{\pi} \frac{\vartheta^2}{2} d\vartheta = \left[\frac{\vartheta^3}{6} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6}.$$

$$\overline{x} = \frac{1}{|D|}\int\int_D x dx dy = \frac{6}{\pi^3}\int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{\vartheta} (\rho\cos\vartheta)\rho d\rho =$$

$$= \frac{6}{\pi^3}\int_0^{\pi} \cos\vartheta \frac{\vartheta^3}{3} d\vartheta = \frac{2}{\pi^3}\left\{ [\vartheta^3 \sin\vartheta]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 3\vartheta^2 \sin\vartheta d\vartheta \right\} =$$

$$= -\frac{6}{\pi^3}\left\{ [-\vartheta^2\cos\vartheta]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\vartheta\cos\vartheta d\vartheta \right\} = -\frac{6}{\pi^3}\left\{ \pi^2 + 2\left[[\vartheta\sin\vartheta]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \right] \right\} =$$

$$= -\frac{6}{\pi^3}\{\pi^2 - 2[-\cos\vartheta]_0^{\pi}\} = \frac{6}{\pi^3}\{4 - \pi^2\}.$$

5.20.

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho\cos\vartheta + \rho\sin\vartheta}{1+\rho^2} d\vartheta \right) \rho d\rho =$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2} d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\vartheta + \sin\vartheta) d\vartheta \right) =$$

$$= \left(\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+\rho^2} \right) d\rho \right) [\sin\vartheta - \cos\vartheta]_0^{\pi/4} = (1 - \arctan 1) \cdot 1 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

5.21.

$$I = \int\int_D (x^2 + y^2) f(x,y) dx dy =$$

$$= \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^R \rho^3 \frac{m}{R^2} \left(2 - \frac{\rho}{R} \right) d\rho = \frac{m}{R^2}\pi \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^5}{5R} \right) = \frac{3\pi}{10} m R^2.$$

5.22.

$$\int\int_{x^2+y^2 \le R} (x^4 + y^4) dx dy = \int\int_{x^2+y^2 \le R} \left((x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 \right) dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \rho(\rho^4 - 2\rho^4 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta) d\rho = \int_0^R \rho^5 d\rho \left(2\pi - 2\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta d\vartheta \right) =$$

$$= \frac{R^6}{6}\left(2\pi - 2\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta d\vartheta\right) = \frac{R^6}{6}\left(2\pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\vartheta d\vartheta\right) =$$

$$= \frac{\pi R^6}{3} - \frac{R^6}{12}\int_0^{4\pi} \frac{\sin^2 t}{2} dt = \frac{\pi R^6}{3} - \frac{R^6}{12}\cdot\frac{2\pi}{2} = \frac{\pi R^6}{4}.$$

5.23. *a.* Rappresentiamo Ω come cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano (x, y), e calcoliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse z.

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega (x^2 + y^2) dxdy =$$

in coordinate polari

$$= \frac{m}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \rho^2 \rho d\rho\right) d\vartheta = \frac{m}{\pi R^2}\cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = \frac{2m}{R^2}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}mR^2.$$

b. Rappresentiamo Ω come cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano (x, y), e calcoliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse y.

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega x^2 dxdy = \quad \text{in coordinate polari}$$

$$= \frac{m}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \rho^2 \cos^2\vartheta \rho d\rho\right) d\vartheta = \frac{m}{\pi R^2}\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta d\vartheta\right)\left(\int_0^R \rho^3 d\rho\right) =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2}\cdot\pi\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{1}{4}mR^2.$$

(Ricordare che l'integrale definito di $\cos^2\vartheta$ su un intervallo del tipo $\left[0, k\frac{\pi}{2}\right]$ è uguale a $\frac{k\pi}{4}$).

c. Rappresentiamo Ω come cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano (x, y), e calcoliamo il momento d'inerzia rispetto alla retta parallela all'asse z ma passante per $(R, 0)$.

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega \left((x - R)^2 + y^2\right) dxdy = \quad \text{in coordinate polari}$$

$$= \frac{m}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \left[(\rho\cos\vartheta - R)^2 + \rho^2\sin^2\vartheta\right]\rho d\rho\right) d\vartheta =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \left[\rho R^2 - 2\rho^2 R\cos\vartheta + \rho^3\right]d\rho\right)d\vartheta =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2}\left\{2\pi\int_0^R \rho R^2 d\rho - \left(\int_0^R 2\rho^2 R d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\vartheta d\vartheta\right) + 2\pi\int_0^R \rho^3 d\rho\right\} =$$

$$= \frac{2m}{R^2}\left\{\left[\frac{\rho^2}{2}R^2\right]_0^R + 0 + \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R\right\} = \frac{2m}{R^2}\left\{\frac{R^4}{2} + \frac{R^4}{4}\right\} = \frac{2m}{R^2}\cdot\frac{3}{4}R^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

5.24. Rappresentiamo la lamina Ω come ellisse con il centro nell'origine e assi sugli assi coordinati:

$$\Omega = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}.$$

E' noto che l'area dell'ellisse è $|\Omega| = \pi ab$.

a. In questo caso l'asse di rotazione è l'asse z, e:

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega (x^2 + y^2)dxdy.$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo il cambio di variabili polare ellittico:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\vartheta \\ y = b\rho\sin\vartheta \end{cases} \quad dxdy = ab\rho d\rho d\vartheta$$

$$I = \frac{m}{\pi ab}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (a^2\rho^2\cos^2\vartheta + b^2\rho^2\sin^2\vartheta)ab\rho d\rho\right)d\vartheta =$$

$$= \frac{m}{\pi}\left(\int_0^1\left(a^2\rho^3\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta d\vartheta + b^2\rho^3\int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta d\vartheta\right)\right)d\rho =$$

$$= \frac{m}{\pi}\left(\int_0^1 (a^2\rho^3\pi + b^2\rho^3\pi)\right)d\rho = m(a^2+b^2)\int_0^1\rho^3 d\rho = \frac{m(a^2+b^2)}{4}.$$

Altro procedimento (se non viene in mente di usare le coordinate polari ellittiche). Per simmetria,

$$I = \frac{m}{\pi ab}\cdot 4\int_0^a\left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}(x^2+y^2)dy\right)dx =$$

$$= \frac{4m}{\pi ab}\int_0^a \left(x^2 b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \frac{b^3}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}\right)dx$$

sostituzione $x = a\text{sin}t$; $dx = a\text{cos}tdt$; $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$= \frac{4m}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2 b\text{sin}^2 t\text{cos}t + \frac{b^3}{3}\text{cos}^3 t\right) a\text{cos}t dt = \frac{4m}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2\text{sin}^2 t\text{cos}^2 t + \frac{b^2}{3}\text{cos}^4 t\right) dt =$$

$$= \frac{4m}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2}{4}\text{sin}^2(2t) + \frac{b^2}{3}\frac{(1+\text{cos}(2t))^2}{4}\right) dt =$$

$$= \frac{m}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2\text{sin}^2(2t) + \frac{b^2}{3}\left(1+\text{cos}^2(2t)+2\text{cos}(2t)\right)\right) dt =$$

$$= \frac{m}{\pi}\left[a^2\frac{\pi}{4} + \frac{b^2}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+0\right)\right] = \frac{m(a^2+b^2)}{4}.$$

a. In questo caso l'asse di rotazione è uno degli assi coordinati, ad es. l'asse y, e:

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega x^2 dxdy =$$

usando ancora le coordinate polari ellittiche

$$I = \frac{m}{\pi ab}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \left(a^2\rho^2\text{cos}^2\vartheta\right) ab\rho d\rho\right) d\vartheta = \frac{m}{\pi}\left(\int_0^1 \left(a^2\rho^3\int_0^{2\pi}\text{cos}^2\vartheta d\vartheta\right)\right) d\rho =$$

$$= \frac{m}{\pi}\left(\int_0^1 a^2\rho^3\pi\right) d\rho = ma^2\int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{ma^2}{4}.$$

Il momento d'inerzia è pari a $\frac{1}{4}ma^2$ dove a è il semiasse *diverso* da quello attorno a cui ruota la lamina.

5.25. Rappresentiamo la lamina Ω come:

$$\Omega = \left\{(x,y) : -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}\right\};\ |\Omega| = ab.$$

a. In questo caso l'asse di rotazione è l'asse z, quindi

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega \left(x^2+y^2\right) dxdy = \frac{m}{ab}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\int_{-b/2}^{b/2}\left(x^2+y^2\right) dy\right) dx =$$

per le simmetrie

$$= \frac{4m}{ab}\int_0^{a/2}\left(\int_0^{b/2}(x^2+y^2)dy\right)dx = \frac{4m}{ab}\int_0^{a/2}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{b/2}dx =$$

$$= \frac{4m}{ab}\int_0^{a/2}\left(x^2\frac{b}{2}+\frac{b^3}{24}\right)dx = \frac{4m}{ab}\left[\frac{x^3b}{6}+\frac{xb^3}{24}\right]_0^{a/2} =$$

$$= \frac{4m}{ab}\left(\frac{a^3b}{48}+\frac{ab^3}{48}\right) = \frac{1}{12}m(a^2+b^2).$$

b. In questo caso l'asse di rotazione è (ad esempio) l'asse y, quindi

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega x^2dxdy = \qquad \text{per le simmetrie}$$

$$= \frac{4m}{ab}\int_0^{a/2}\left(\int_0^{b/2}x^2dy\right)dx = \frac{4m}{ab}\int_0^{a/2}\left(\frac{x^2b}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{2m}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{a/2} = \frac{2m}{a}\left(\frac{a^3}{24}\right) = \frac{1}{12}ma^2,$$

dove a è la dimensione del lato *diverso* da quello a cui è parallelo l'asse di rotazione.

5.26. Se scegliamo gli assi coordinati sulle diagonali, la lamina Ω si rappresenta come

$$\Omega = \left\{(x,y) : -a \le x \le 0, -b-\frac{b}{a}x \le y \le b+\frac{b}{a}x\right\} \cup$$

$$\cup\left\{(x,y) : 0 \le x \le a, -b+\frac{b}{a}x \le y \le b-\frac{b}{a}x\right\}; |\Omega| = \frac{1}{2}ab.$$

a. Per simmetria, il momento d'inerzia

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega (x^2+y^2)dxdy$$

è uguale a quello di uno dei 4 triangoli uguali in cui il rombo è suddiviso dalle diagonali (perché l'area di Ω è 4 volte quella di un triangolo e l'integrale su Ω è 4 volte quello su un triangolo); scegliendo ad es. quello nel primo quadrante,

$$T = \left\{(x,y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le b - \frac{b}{a}x\right\}$$

si ha
$$I = \frac{m}{\frac{1}{2}ab}\int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} (x^2+y^2)dy\right)dx =$$

$$= \frac{2m}{ab}\int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{b-\frac{b}{a}x} dx = \frac{2m}{ab}\int_0^a \left[x^2\left(b-\frac{b}{a}x\right) + \frac{\left(b-\frac{b}{a}x\right)^3}{3}\right]dx =$$

$$= \frac{2m}{ab}\int_0^a \left[x^2 b - \frac{b}{a}x^3 + \frac{b^3}{3}\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\right]dx = \frac{2m}{ab}\left[\frac{x^3 b}{3} - \frac{b}{4a}x^4 - \frac{ab^3}{12}\left(1-\frac{x}{a}\right)^4\right]_0^a =$$

$$= \frac{2m}{ab}\left(\frac{a^3 b}{3} - \frac{b}{4a}a^4 + \frac{ab^3}{12}\right) = 2m\left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right) = \frac{1}{6}m(a^2+b^2).$$

b. Ora l'asse di rotazione è l'asse y (ad esempio) e si ha (usando come prima le simmetrie):

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega x^2 dxdy = \frac{m}{|T|}\int\int_T x^2 dxdy =$$

$$= I = \frac{m}{\frac{1}{2}ab}\int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} x^2 dy\right)dx = \frac{2m}{ab}\int_0^a x^2\left(b-\frac{b}{a}x\right)dx =$$

$$= \frac{2m}{a}\int_0^a \left(x^2 - \frac{x^3}{a}\right)dx = \frac{2m}{a}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a}\right]_0^a = \frac{2m}{a}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{4}\right) = \frac{1}{6}ma^2,$$

dove a è la diagonale *diversa* da quella attorno a cui ruota il rombo.

5.27. Si ha, usando le coordinate polari ellittiche già considerate in altri esempi,

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\vartheta \\ y = b\rho\sin\vartheta \end{cases} \quad dxdy = ab\rho d\rho d\vartheta$$

$$V = 2\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy =$$

$$= 2c \cdot 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho ab d\rho = 4\pi abc\left[-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc,$$

formula che generalizza in modo naturale quella del volume della sfera, $\frac{4}{3}\pi R^3$.

5.28. $$V = \int\int_{x^2+y^2\le R^2} h\left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right)dxdy =$$

in coordinate polari

$$= 2\pi h \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)\rho d\rho = 2\pi h\left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{\rho^4}{4R^2}\right]_0^R = 2\pi h R^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\pi R^2 h.$$

Il volume del cono di ugual base e altezza è:

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h, \quad \text{perciò } V_{\text{paraboloide}} = \frac{3}{2}V_{\text{cono}},$$

come dimostrato da Archimede.

5.29. In coordinate polari,

$$V = \pi h R^2 - \frac{2\pi h}{\sqrt{R^2-r^2}}\int_r^R \sqrt{\rho^2-r^2}\rho d\rho =$$

$$= \pi h R^2 - \frac{2\pi h}{\sqrt{R^2-r^2}}\left[\frac{1}{3}(\rho^2-r^2)^{3/2}\right]_r^R =$$

$$= \pi h R^2 - \frac{2\pi h}{\sqrt{R^2-r^2}}\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{3/2} =$$

$$= \pi h\left[R^2 - \frac{2}{3}(R^2-r^2)\right] = \pi h\left[\frac{2}{3}r^2 + \frac{1}{3}R^2\right]$$

quindi il volume del segmento di iperbolide di rotazione si può anche esprimere come:

$$V = \frac{2}{3}V_{\text{cilindro inscritto}} + \frac{1}{3}V_{\text{cilindro circoscritto.}}$$

5.30. Per simmetria, detto T' il triangolo di vertici $(0,0),(0,1),(1,0)$, risulta

$$\int\int_T |x|e^y dxdy = 2\int\int_{T'} xe^y dxdy = 2\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xe^y dy =$$

$$= 2\int_0^1 x[e^y]_0^{1-x}dx = 2\int_0^1 \left(xe^{1-x} - x\right)dx =$$

$$= 2\left(\left[-xe^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x}dx - \frac{1}{2}\right) = -2 + 2\left[-e^{1-x}\right]_0^1 - 1 =$$

$$= -2 - 2 + 2e - 1 = -5 + 2e.$$

5.31.

$$\overline{x} = \frac{1}{|\Omega|}\int\int_\Omega x\,dxdy =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}R^2\frac{\pi}{4}}\int_0^{\pi/4}\cos\vartheta d\vartheta\int_0^R \rho^2\,d\rho = \frac{8}{\pi R^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R.$$

$$\overline{y} = \frac{1}{|\Omega|}\int\int_\Omega y\,dxdy =$$

$$= \frac{8}{\pi R^2}\cdot\int_0^{\pi/4}\sin\vartheta d\vartheta\int_0^R \rho^2\,d\rho =$$

$$= \frac{8}{\pi R^2}\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{8}{3\pi}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)R.$$

5.32. Calcoliamo l'area:

$$|\Omega| = \int\int_\Omega dx\,dy = \text{(in polari)}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^\vartheta \rho\,d\rho = \int_0^{2\pi}\frac{\vartheta^2}{2}d\vartheta = \left[\frac{\vartheta^3}{6}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3.$$

Calcoliamo ora il momento d'inerzia:

$$I = \frac{M}{|\Omega|}\int\int_\Omega \left(x^2 + y^2\right)dx\,dy = \text{(in polari)}$$

$$= \frac{M}{|\Omega|}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\vartheta} \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{M}{|\Omega|}\int_0^{2\pi} \frac{\vartheta^4}{4} d\vartheta = \frac{M}{|\Omega|}\left[\frac{\vartheta^5}{20}\right]_0^{2\pi} = = M \cdot \frac{3}{4\pi^3} \cdot \frac{8}{5}\pi^5 = \frac{6}{5}\pi^2 M.$$

5.33. $\frac{2}{3}$

5.34. $\frac{28}{15}$

5.35. $\frac{2}{3}$

5.36. $2\pi(2\log 2 - 1)$

5.37. $\frac{3}{4}$

5.38. $4(\log 25 - \log 16) = 8\log\frac{5}{4}$

5.39. $\frac{61}{3}$

5.40. $e + \frac{1}{e} - 2$

5.41. $\frac{1-\log 2}{2}$

5.42. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}$

5.43. $\frac{M}{6}(a^2 + b^2)$

5.44.

$$\int\int_T 2|x|y\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} -2x\left(\int_0^{2+2x} y\,dy\right)dx + \int_0^2 2x\left(\int_0^{2-x} y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} -2x\,\frac{1}{2}(2+2x)^2\,dx + \int_0^2 2x\,\frac{1}{2}(2-x)^2\,dx =$$

$$= -4\int_{-1}^{0}\left(x^3 + 2x^2 + x\right)dx + \int_0^2\left(x^3 - 4x^2 + 4x\right)dx =$$

$$= -4\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_{0}^{2} =$$

$$= 4\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(4 - \frac{32}{3} + 8\right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}.$$

5.45. $$\int\int_D y\log\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\left(\int_1^2 \rho\sin\vartheta\,\log\rho\rho\,d\rho\right)d\vartheta =$$

$$= \left(\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\right)\left(\int_1^2 \rho^2\log\rho\,d\rho\right).$$

$$\int_1^2 \rho^2\log\rho\,d\rho =$$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\log\rho\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\rho^3}{3}\cdot\frac{1}{\rho}\,d\rho = \frac{8}{3}\log 2 - \frac{1}{3}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3}\log 2 - \frac{7}{9}.$$

$$\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta = [-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 2.$$

$$\int\int_D y\log\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = 2\left(\frac{8}{3}\log 2 - \frac{7}{9}\right).$$

5.46.

$$I = \frac{M}{|D|}\int\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{M}{ah}\cdot 2\int_0^a\left(\int_0^{h-\frac{h}{a}x}(x^2+y^2)dy\right)dx =$$

$$= \frac{2M}{ah}\int_0^a\left(x^2\left(h - \frac{h}{a}x\right) + \frac{1}{3}\left(h - \frac{h}{a}x\right)^3\right)dx =$$

$$= \frac{2M}{a}\int_0^a\left(x^2 - \frac{x^3}{a} + \frac{h^2}{3}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^3\right)dx =$$

$$= \frac{2M}{a}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a} - \frac{ah^2}{12}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^4\right]_0^a = \frac{2M}{a}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{4} + \frac{ah^2}{12}\right) = \frac{M}{6}(a^2+h^2)$$

5.47. $$I = \frac{m}{|D|}\int\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

indicando con D_1 la metà di D con $x \geq 0$

$$= \frac{m}{|D|}2\int\int_{D_1} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{2m}{8}\left\{\int_0^1\left(\int_{-1}^1 (x^2+y^2)dy\right)dx + \int_1^3\left(\int_{x-2}^1 (x^2+y^2)dy\right)dx\right\} =$$

$$= \frac{m}{4}\left\{\int_0^1 2x^2dx + 2\int_0^1 y^2dy + \int_1^3\left[x^2(3-x)+\frac{1}{3}\left(1-(2-x)^3\right)\right]dx\right\} =$$

$$= \frac{m}{4}\left\{\frac{4}{3} + \left[x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}x + \frac{(2-x)^4}{12}\right]_1^3\right\} =$$

$$= \frac{m}{4}\left\{\frac{4}{3} + 26 - 20 + \frac{2}{3}\right\} = \frac{m}{4}\cdot 8 = 2m.$$

5.48. *a.* $|D| = \frac{\pi}{4}(R^2-r^2)$;

$$\overline{x} = \frac{1}{|D|}\int\int_D x\,dxdy = \frac{4}{\pi(R^2-r^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_r^R \rho\cos\vartheta\,\rho\,d\rho\right)d\vartheta =$$

$$= \frac{4}{\pi(R^2-r^2)}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta d\vartheta\right)\left(\int_r^R \rho^2 d\rho\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi(R^2-r^2)}\cdot 1\cdot\left(\frac{R^3-r^2}{3}\right) = \frac{4}{3\pi}\frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}.$$

Per simmetria, $\overline{y} = \overline{x}$.

b.
$$\int\int_D xe^y dx\,dy = \int_r^R \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos\vartheta e^{\rho\sin\vartheta} d\vartheta \right) \rho\, d\rho =$$

$$= \int_r^R \left[e^{\rho\sin\vartheta} \right]_0^{\pi/2} \rho\, d\rho = \int_r^R (e^\rho - 1)\rho\, d\rho = \left[e^\rho(\rho - 1) - \frac{\rho^2}{2} \right]_r^R =$$

$$= e^R(R-1) - \frac{R^2}{2} - e^r(r-1) + \frac{r^2}{2}.$$

5.49.

$$\overline{x} = \frac{1}{M_1+M_2} \left(\frac{M_1}{\frac{1}{2}\pi R^2} \int\int_{\Omega, x>0} x\, dxdy + \frac{M_2}{\frac{1}{2}\pi R^2} \int\int_{\Omega, x<0} x\, dxdy \right) =$$

$$= \frac{2}{(M_1+M_2)\pi R^2} \left(M_1 \int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta + M_2 \int_0^R \rho^2 d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta \right) =$$

$$= \frac{2}{(M_1+M_2)\pi R^2} \left(M_1 \frac{R^3}{3} \cdot 2 + M_2 \frac{R^3}{3} \cdot (-2) \right) = \frac{4}{3\pi} R \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right).$$

$\overline{y} = 0$ per simmetria.

5.50.
$$\overline{x} = \frac{1}{M_1+M_2} \left(\frac{M_1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2}\sqrt{3}} \int_{-\frac{L}{2}}^0 x\, dx \int_0^{\frac{L}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}x} dy + \right.$$

$$\left. + \frac{M_2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2}\sqrt{3}} \int_0^{\frac{L}{2}} x\, dx \int_0^{\frac{L}{2}\sqrt{3}-\sqrt{3}x} dy \right) =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}(M_1+M_2)L^2} \left(M_1 \int_{-\frac{L}{2}}^0 x \left(\frac{L}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}x \right) dx + M_2 \int_0^{\frac{L}{2}} x \left(\frac{L}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3}x \right) dx \right) =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}(M_1+M_2)L^2} \left(\sqrt{3}M_1 \left[\frac{L}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^0 + \sqrt{3}M_2 \left[\frac{L}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} \right) =$$

$$= \frac{8}{(M_1+M_2)L^2}\left(M_1\left[-\frac{L^3}{16}+\frac{L^3}{24}\right]+M_2\left[\frac{L^3}{16}-\frac{L^3}{24}\right]\right) =$$

$$= \frac{L}{M_1+M_2}\left(M_1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+M_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{L}{6}\left(\frac{M_2-M_1}{M_2+M_1}\right).$$

5.51. $$\int\int_T x^2 e^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} x^2 e^{xy}\,dy =$$

$$= \int_0^1 x[e^{xy}]_0^{2x}\,dx = \int_0^1 x\left(e^{2x^2}-1\right)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}e^{2x^2}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}(e^2-1)-\frac{1}{2} = \frac{e^2-3}{4}.$$

5.2. Integrali tripli

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 5, §3.

5.2.A. Rappresentazione analitica di insiemi dello spazio

Come abbiamo fatto per gli integrali doppi, anche per introdurre il calcolo degli integrali tripli è utile premettere qualche osservazione ed esempio sul modo in cui tipicamente si rappresentano certi insiemi dello spazio tridimensionale. In particolare, il metodo di riduzione porta spesso a calcolare un integrale triplo in uno dei due modi detti "per fili" e "per strati", che corrispondono a due diversi modi di rappresentare insiemi tridimensionali.

Un insieme Ω di $\mathbb{R}^3$ è definito "per strati" se è del tipo:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a, b], (x, y) \in \Omega_z\}$$

dove per ogni $z \in [a, b]$, Ω_z è un dominio semplice del piano. Geometricamente l'insieme è descritto a questo modo: prima si fissano due quote a, b tali che l'intero insieme Ω sia contenuto nella strisca compresa tra i due piani orizzontali $z = a, z = b$; poi, per ogni piano orizzontale compreso in questa striscia, si considera l'intersezione con Ω: questa sarà un dominio Ω_z piano; il solido Ω si può vedere così ricostruito dai suoi "strati" Ω_z, al variare della quota $z \in [a, b]$.

Un insieme Ω di $\mathbb{R}^3$ è definito "per fili" se è del tipo:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$$

dove D è un dominio semplice del piano e $g, h : D \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue. Geometricamente l'insieme è descritto a questo modo: prima si disegna l'ombra D che il solido Ω proietta sul piano (x, y); poi da ciascun punto $(x, y) \in \Omega$ si innalza una retta verticale e se ne considera l'intersezione con Ω; questo "filo" è un intervallo i cui estremi variano (con continuità) al variare del punto (x, y), perciò questo intervallo si può esprimere nella forma $[g(x, y), h(x, y)]$.

Esempio 5.10. Sia Ω la semisfera di centro l'origine e raggio R compresa nel semispazio $z \geq 0$.
Si può descrivere Ω *per fili* col seguente procedimento.

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ (questa è l'ombra proiettata dalla semisfera sul piano);

per $(x, y) \in D, z \in \left[0, \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\right]$; quindi

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\right\}.$$

Lo stesso insieme Ω come si sarebbe descritto *per strati*?
Ω è compreso tra i piani $z = 0, z = R$, quindi $z \in [0, R]$;
per ciascun $z \in [0, R]$ si ha $x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2$, quindi

$$\Omega = \{(x, y, z) : z \in [0, R], x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}.$$

In questo caso l'insieme Ω_z è $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}$.

Esempio 5.11. Rappresentiamo il cono Ω di raggio R, altezza h, asse sull'asse z, base nel piano (x, y) e vertice nel semispazio $z > 0$.

Per fili: l'ombra proiettata dal cono sul piano (x, y) è $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$;

per ogni $(x, y) \in D$, la retta verticale taglia il cono in un segmento $[0, h(x, y)]$ dove, come mostra un disegno bidimensionale (v. fig. 5.14),

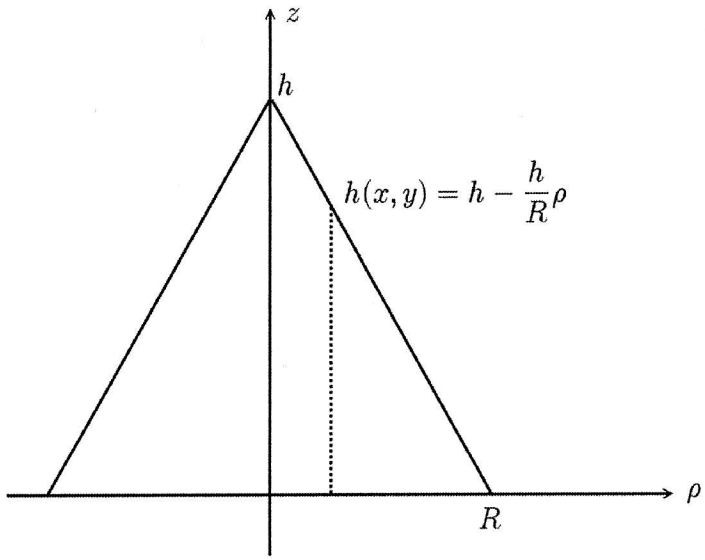


Fig. 514.

$h(x, y) = h - \frac{h}{R}\rho$ con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Perciò

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

Per strati: il cono è compreso nella striscia $z \in [0, h]$. Ogni piano orizzontale di questa quota taglia il cono in un cerchio

$$\Omega_z = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r_z^2\}$$

dove, come mostra una figura bidimensionale,

$$r_z : R = (h - z) : h,$$

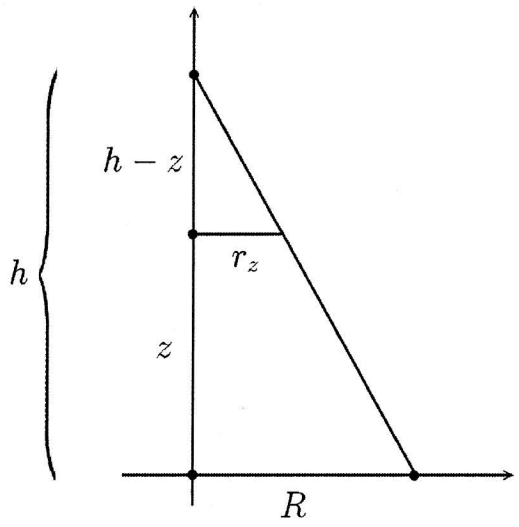


Fig. 515.

e quindi $$r_z = \frac{R}{h}(h - z).$$

Perciò $$\Omega = \left\{(x, y, z) : z \in [0, h], x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h^2}(h - z)^2\right\}.$$

Esempio 5.12. Vogliamo rappresentare il tetraedro Ω di vertici $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

Un disegno mostra (v. fig. 5.16) che il tetraedro è tutto contenuto nel primo ottante, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Precisamente, è l'insieme dei punti del primo ottante che stanno sotto il piano passante per i 3 punti $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ (v. fig. 5.16). Per prima cosa scriviamo quindi l'equazione del piano per questi 3 punti. Con i metodi sdandard della geometria analitica dello spazio[4], si trova:

$$x + y + z = 1.$$

[4] Ad esempio si può usare la formula seguente, che assegna l'equazione del piano per 3 punti A, B, C, dove nel nostro caso $A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1)$:

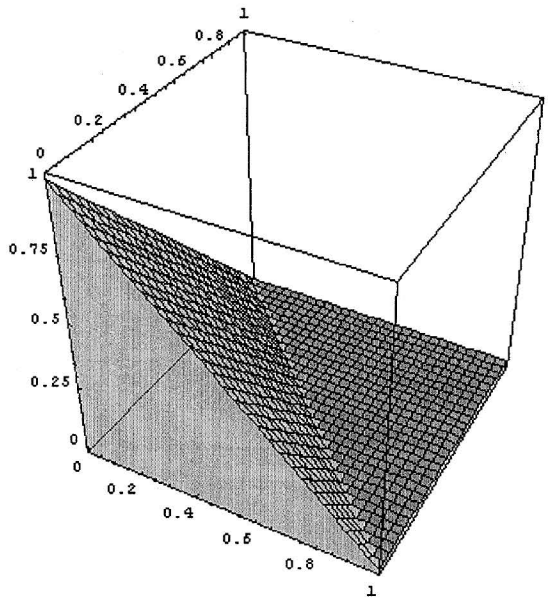


Fig. 5.16.

Possiamo allora rappresentare Ω *per fili* come segue. L'ombra del tetraedro sul piano (x, y) è il triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (0,1)$, perciò

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\};$$

per ogni $(x, y) \in D$, la retta verticale taglia il tetraedro lungo il segmento $0 \leq z \leq 1 - x - y$ (cioè quello che sta sotto il piano di cui abbiamo scritto l'equazione). Perciò

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\},$$

che in realtà può vedersi anche come rappresentazione *per strati*, perpendicolari però all'asse x (invece che come al solito all'asse z):

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0, \quad \text{che dà}$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 1 + y + z = 0.$$

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, (y, z) \in \Omega_x\},$$

con $$\Omega_x = \{(y, z) : 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Negli esempi precedenti abbiamo rappresentato ogni insieme sia per fili che per strati per fare esercizio su entrambi i metodi; nella pratica, in ciascun esempio di calcolo di un integrale triplo è sufficiente rappresentare l'insieme in uno solo di questi due modi. Osserviamo anche che questi due modi di rappresentare un insieme non esauriscono le possibilità. Oltre al caso elementare del parallelepipedo, insieme definito da tre condizioni indipendenti $x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [e, f]$, incontreremo insiemi definiti globalmente da una o più disuguaglianze che coinvolgono simultaneamente tutte le variabili, come la sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

In questi ultimi casi sarà utile, solitamente, un cambio di variabile che faccia assumere all'insieme una rappresentazione analitica molto semplice. Ad esempio, in coordinate sferiche una sfera diventa... un parallelepipedo, essendo definito dalle 3 condizioni

$$\rho \leq R, \vartheta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi].$$

Esercizi

Rappresentare "per fili" o "per strati" (come sembra più semplice) i seguenti insiemi dello spazio:

5.52. Un cilindro di raggio R, altezza h, asse sull'asse z, base inferiore sul piano (x, y). (In questo caso le due rappresentazioni coincidono).

5.53. Un cono di raggio R, altezza h, asse sull'asse z, vertice nell'origine e base nel semispazio $z > 0$.

5.54. L'ellissoide (pieno)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

5.55. La piramide a base quadrata con vertice nell'origine, altezza h, asse sull'asse z, base di lato L posta nel semispazio $z > 0$.

5.2.B. Tecniche di base per integrali tripli. Integrazione "per fili" o "per strati". Cambi di variabile.

Esempi svolti

Esempio 5.13. Calcolare il momento d'inerzia del parallelepipedo pieno omogeneo di massa m e spigoli a, b, c, descritto da

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right], x \in \left[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right]\right\}$$

rispetto all'asse z.

Il momento d'inerzia rispetto all'asse z è dato da:

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int\int_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdydz$$

dove $|\Omega| = abc$, e poiché il dominio è un parallelepipedo, l'integrale si calcola semplicemente come integrale iterato

$$I = \frac{m}{abc}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\int_{-b/2}^{b/2}\left(\int_{-c/2}^{c/2}(x^2+y^2)\,dz\right)dy\right)dx =$$

$$= \frac{m}{abc}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\int_{-b/2}^{b/2}c(x^2+y^2)\,dy\right)dx =$$

tenendo conto delle simmetrie

$$= \frac{m}{ab}2\int_0^{a/2}\left(2\int_0^{b/2}(x^2+y^2)\,dy\right)dx = \frac{4m}{ab}\int_0^{a/2}\left(\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{b/2}\right)dx =$$

$$= \frac{4m}{ab}\int_0^{a/2}\left(\frac{bx^2}{2}+\frac{b^3}{24}\right)dx = \frac{4m}{ab}\left[\frac{bx^3}{6}+\frac{b^3x}{24}\right]_0^{a/2} =$$

$$= \frac{4m}{ab}\left[\frac{ba^3}{48}+\frac{b^3a}{48}\right] = \frac{1}{12}m(a^2+b^2).$$

Si noti che la formula coinvolge le due dimensioni del parallelepipedo *diverse* da quella corrispondente alla direzione dell'asse di rotazione (in questo caso semiasse c, asse z).

Esempio 5.14. Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_C x^2(2-z)dxdydz$$

dove $$C = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 2, x^2+y^2 \le z\}.$$

In questo caso il dominio C è descritto "per strati", e l'integrale si imposta come integrale iterato al modo seguente:

$$I = \int_0^2 (2-z)\left(\int\int_{x^2+y^2<z} x^2 dxdy\right)dz.$$

Quindi l'integrale esterno è fatto in una variabile (in questo caso la z), tra estremi fissi, mentre l'integrale interno è un integrale doppio, esteso a un dominio Ω_z del piano (x,y), che varia al variare di z. In questo caso il dominio Ω_z è semplicemente un cerchio, e questo suggerisce di calcolare l'integrale doppio interno mediante le variabili polari (mentre la variabile z dell'integrale esterno non viene toccata). Si ha quindi:

$$\mathrm{I} = \int_0^2 (2-z)\left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{z}} \rho^2 \cos^2\vartheta \rho d\rho\right)dz =$$

$$= \int_0^2 (2-z)\left(\int_0^{\sqrt{z}} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta d\vartheta\right)dz =$$

$$= \int_0^2 (2-z)\left(\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{z}} \cdot \pi\right)dz =$$

$$= \pi\int_0^2 (2-z)\frac{z^2}{4}dz = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2z^3}{3} - \frac{z^4}{4}\right]_0^2 = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{16}{3}-4\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Esempio 5.15. Sia C un cono solido di altezza 3, raggio di base 1, avente il vertice nell'origine e l'altezza lungo il semiasse $z \ge 0$.

a. Scrivere la rappresentazione analitica di C "per fili".
b. Supponendo che il cono sia un solido pieno di densità variabile

$$\delta(x,y,z) = az + b$$

per certe costanti positive a, b, calcolare la massa totale di C.

a. Con i metodi visti in esempi precedenti si deduce la rappresentazione:

$$C = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, 3\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 3\right\}.$$

b.

$$M = \iiint_C (az+b)dxdydz =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_{3\sqrt{x^2+y^2}}^{3} (az+b)dz \right) dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\left[\frac{a}{2}z^2 + bz \right]_{3\sqrt{x^2+y^2}}^{3} \right) dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left[\frac{9a}{2}(1-x^2-y^2) + 3b\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) \right] dxdy =$$

in coordinate polari:

$$= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{9a}{2}(1-\rho^2) + 3b(1-\rho) \right] \rho d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{9a\rho}{2} - \frac{9a\rho^3}{2} + 3b\rho - 3b\rho^2 \right) d\rho =$$

$$= 2\pi \left(\frac{9}{4}a - \frac{9}{8}a + \frac{3}{2}b - b \right) = \pi \left(\frac{9}{4}a + b \right).$$

Esempio 5.16. Calcolare il momento d'inerzia di una sfera S piena omogenea di massa M e raggio R, rispetto a un asse diametrale.

Rappresentiamo S come la sfera di centro l'origine e raggio R e calcoliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse z:

$$I = \frac{M}{|S|}\int\int\int_S (x^2+y^2)\,dxdydz$$

In coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

si ha:

$$I = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{R}(\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta)\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi\right)d\vartheta =$$

$$= \frac{3M}{4\pi R^3}\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^{R}\rho^4\,d\rho =$$

$$= \frac{3M}{4\pi R^3}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^5}{5}\int_0^{\pi}\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\,d\varphi = \frac{3}{2}M\cdot\frac{R^2}{5}\cdot\left[-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{3}{2}M\cdot\frac{R^2}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{5}MR^2.$$

Esercizi

5.56.★ Calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int_C ze^{-(x^2+y^2)}\,dxdydz$$

dove C è il cono $\{(x,y,z) : 0 \le z \le h, x^2+y^2 \le (Rz/h)^2\}$.

5.57.★ Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_B e^{-z}\,dxdydz$$

dove B è la sfera centrata nell'origine e di raggio R.

5.58.★ Calcolare la massa totale del cono

$$C = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right) \right\}$$

avente densità $d(x,y,z) = \alpha(z+h)$

dove α è una costante positiva avente dimensioni massa/(lunghezza)^4.

5.59.★ Calcolare il volume e il momento d'inerzia, rispetto all'asse z, del solido di massa m rappresentato analiticamente da:

$$C = \left\{ (x,y,z) : z \in [0,h], \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{(h-z)^3}{h^2} \right\}$$

con $h > 0$ costante fissata.

5.60.★ Calcolare il volume e il centroide del solido omogeneo rappresentato da:

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h e^{-\sqrt{x^2+y^2}/R} \right\}$$

con R, h costanti positive fissate. Esprimere i risultati finali in funzione dei soli parametri R, h.

5.61.★ Calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int_{x^2+y^2+z^2<R^2} \frac{|y|e^{-z}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz.$$

5.62.★ Sia C il cono (pieno) descritto da:

$$C = \left\{ (x,y,z) : 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq (h-z)^2 \right\}$$

con $h > 0$ fissato. Supponiamo che la densità di C sia:

$$f(x,y,z) = 1 + x^2 + y^2.$$

Dopo aver disegnato C, calcolare la massa totale di C.

5.63.★ Sia D la semisfera piena di centro l'origine e raggio R, posta nel semispazio $z \geq 0$. Calcolare

$$\int\int\int_D z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

5.64. Sia C il cono di altezza h e raggio R, avente vertice nell'origine e asse sul semiasse $z \geq 0$, e sia Ω la porzione di tale cono contenuta nel primo ottante $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$. In altre parole,

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : 0 \leq z \leq h, 0 \leq x^2+y^2 \leq R^2\frac{z^2}{h^2}, x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

a. Rappresentare Ω in coordinate cilindriche (si presti attenzione agli intervalli in cui variano i parametri).

b. Calcolare la seguente media integrale:

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\int\int_\Omega xy^2z\,dx\,dy\,dz.$$

5.65.★ Sia Ω la porzione sfera di centro l'origine e raggio R, contenuta nel primo ottante $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$. In altre parole,

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}.$$

a. Rappresentare Ω in coordinate sferiche (si presti attenzione agli intervalli in cui variano i parametri; si consiglia di disegnare Ω).

b. Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_\Omega xyz^2\,dx\,dy\,dz.$$

5.66.★ Sia Ω il tetraedro di vertici $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$. Calcolare

$$\int\int\int_\Omega xz dx dy dz.$$

5.67.★ Sia Ω la corona sferica di centro l'origine e raggi r, R $(r < R)$. Calcolare

$$\int\int\int_\Omega (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

5.68.★ Calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int_{x^2+y^2+z^2<R^2} |xz|y^2 dxdydz$$

5.69.★ Sia C il cono (solido) descritto da:

$$C = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq (h - z)^2\}$$

con $h > 0$ fissato. Supponiamo che la densità di C sia:

$$f(x, y, z) = 2h - z.$$

Calcolare la massa totale di C.

5.70.★ Sia Ω il tetraedro situato nel primo ottante ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) e che sta stotto il piano $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1$. Calcolare

$$\int\int\int_{\Omega} e^x dxdydz.$$

5.2.C. Applicazioni geometrico-fisiche degli integrali tripli

Volumi, centroidi e momenti d'inerzia di solidi omogenei

5.71. Cilindro, momento d'inerzia (1). Calcolare il momento d'inerzia di un cilindro pieno omogeneo di massa M, raggio R e altezza h, rispetto al suo asse.

5.72.★ Cilindro, momento d'inerzia (2). Calcolare il momento d'inerzia del cilindro pieno omogeneo di massa M, altezza h e raggio R, rispetto a un asse *perpendicolare* all'asse del cilindro e passante per il suo centro. *Suggerimento*: scegliere il riferimento in modo che l'origine sia il centro del cilindro e l'asse del cilindro sia l'asse z. Qual è l'asse di rotazione?

5.73.★ Cilindro, momento d'inerzia (3). Calcolare il momento d'inerzia del cilindro omogeneo di massa M, raggio R e altezza h, *rispetto a una sua generatrice*.

5.74.★ Cono, momento d'inerzia (1). Sia C il cono pieno omogeneo di raggio R, altezza h, massa m, vertice l'origine e asse coincidente con l'asse z. Calcolare il momento d'inerzia di C rispetto all'asse z.

5.75.★ Cono, momento d'inerzia (2). Sia D un cono omogeneo di massa m descritto da:

$$D = \left\{(x,y,z) : 0 \le z \le h; x^2 + y^2 \le \frac{z^2 r^2}{h^2}\right\}$$

Calcolare il momento d'inerzia di D rispetto all'asse x (attenzione! *Non* rispetto all'asse z. Suggerimento: fare una figura, utilizzare le coordinate cilindriche, prestando attenzione alla rappresentazione di D in queste coordinate).

5.76.★ Tronco di cono, volume e centroide (1). Calcolare il volume e il centroide del tronco di cono C che ha raggio della base maggiore R, raggio della base minore $R/2$, altezza $R/2$.

(Prima di impostare qualsiasi integrale, fare un disegno per capire la geometria; scegliere opportunamente il riferimento e scrivere la rappresentazione analitica di C).

5.77.★ Tronco di cono, volume e centroide (2). Calcolare le coordinate del centroide del solido S (pieno) a forma di tronco di cono:

$$S = \left\{(x,y,z) : 0 \le z \le h, x^2 + y^2 \le \left(1 - \frac{z}{3h}\right)^2 R^2\right\}$$

dove R, h sono parametri positivi. (Si raccomanda di fare una figura, osservando che S è la differenza tra un cono di raggio R e altezza $3h$ ed uno di raggio $\frac{2}{3}R$ e altezza $2h$).

5.78.★ Sfera, momento d'inerzia (2). Calcolare il momento d'inerzia di una sfera solida omogenea S di massa m e raggio R, centrata nell'origine, rispetto all'asse parallelo all'asse z e passante per il punto $(R, 0, 0)$.

(Attenzione: l'asse di rotazione *non è* l'asse z come nell'Esempio 5.16).

5.79.★ Calotta sferica, volume. Sia C la calotta sferica definita in coordinate cartesiane da

$$S = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, \frac{R}{2} \le z \le R\right\}$$

Calcolare, mediante un opportuno integrale triplo, il volume di S.

(Suggerimento: ragionando opportunamente sulla figura, scrivere la rappresentazione di S in coordinate sferiche).

5.80.★ Corona sferica, momento d'inerzia. Sia C il solido omogeneo di massa M avente la forma di una corona sferica di raggio interno r e raggio esterno R. Calcolare il momento d'inerzia di C rispetto a un asse passante per il centro.

5.81.★ Ellissoide, volume e momento d'inerzia. Calcolare il volume e il momento d'inerzia dell'ellissoide pieno omogeneo di massa M e semiassi a, b, c, descritto da

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

rispetto all'asse z.

(Suggerimento: nel calcolo degli integrali, per prima cosa eseguire il cambio di variabili: $x = ax', y = by', z = cz'$; quindi...).

5.82.★ Paraboloide, centroide. Calcolare in funzione di R, h il volume del paraboloide

$$P = \left\{(x,y,z) : 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h} z\right\}$$

e le coordinate del suo centroide (supponendo P omogeneo).

5.83.★ Iperboloide, volume e centroide. Calcolare il volume e il centroide della regione Ω delimitata dalla superficie dell'iperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e dai piani $z = 0, z = c$.

5.84.★ Toro, volume e momento d'inerzia. La superficie di un toro di raggi R, r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Perciò un toro pieno T si può rappresentare come il solido descritto da:

$$\begin{cases} x = (R + \rho\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = (R + \rho\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad (*)$$

con $\varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, 2\pi), \rho \in [0, r]$. In altre parole, rispetto alle coordinate (*), il toro solido è rappresentato semplicemente dalle condizioni:

$$\varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, 2\pi), \rho \in [0, r].$$

Sfruttando questi fatti, calcolare:

a. il volume del toro;

b. il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z (supponendo il solido omogeneo di massa M);

c. il suo momento d'inerzia rispetto all'asse x.

5.85.★ Cubo, momento d'inerzia. Calcolare il momento d'inerzia di un cubo omogeneo di massa M, spigolo l, rispetto a un asse passante per il centro del cubo e perpendicolare a due facce.

5.86.★ Piramide a base quadrata, centroide. Calcolare il volume e il centroide della piramide a base quadrata definita da:

$$P = \{(x, y, z) : |x| + |y| \leq (h - z); z \in [0, h]\}$$

con $h > 0$ assegnato. (Si consiglia di fare un disegno per capire la geometria e tenerne conto nel calcolo degli integrali).

5.87.★ Semisfera, centroide. Calcolare il centroide della semisfera omogenea

$$S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R, z \geq 0\right\}.$$

5.88. Ottavo di sfera, centroide. Calcolare le coordinate del centroide della porzione di sfera (piena) omogenea di raggio R e centro l'origine, compresa nel primo ottante (ovvero: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$). Fornire un risultato *esplicito*, dipendente dall'unico parametro R che figura nel testo dell'esercizio. (*Si suggerisce di fare una figura...*).

Baricentri e momenti d'inerzia di solidi non omogenei

5.89.★ Calcolare il momento d'inerzia, rispetto all'asse z, del cono

$$C = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{h} z\right)^2, z \in [0,h] \right\}$$

di densità $$\delta(x,y,z) = \alpha\left(\frac{2z}{h} + 1\right)$$

(dove $R, h, \alpha > 0, \alpha$ ha le dimensioni di una densità, R, h sono raggio e altezza del cono).

5.90.★ Calcolare il baricentro della semisfera solida

$$S = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < R^2, z \geq 0 \right\}$$

avente densità $\delta(x,y,z) = 1 + z/R$.

5.91.★ Si consideri il cono (pieno):

$$C = \left\{ (x,y,z) : z \in [0,h], x^2 + y^2 \leq z^2 \right\}.$$

Supponendo che si tratti di un solido di densità variabile $\delta = 2z$, calcolare:

a. la massa totale;
b. le coordinate del baricentro;
c. il momento d'inerzia rispetto all'asse z.

Fornire risultati *espliciti*, dipendente dall'unico parametro h che figura nel testo dell'esercizio. (*Si consiglia di fare una figura...*)

Un'applicazione fisica: campo gravitazionale generato da un corpo sferico

Esempio 5.17. La legge di gravitazione universale

$$\underline{F} = G m_1 m_2 \frac{\underline{r}_{12}}{|\underline{r}_{12}|^3}$$

dove $\underline{r}_{12}$ è il vettore che unisce i punti in cui si trovano le masse m_1 e m_2 rispettivamente, riguarda masse *puntiformi*. Quando si tratta di calcolare il campo gravitazionale generato ad esempio dal sole, sarebbe comodo poter fare il conti come se tutta la massa si trovasse nel centro del sole (o il suo baricentro, se non coincide col centro), in altre parole come se il sole fosse una massa puntiforme.

Ma questo è lecito per una massa distribuita su distanze enormi come è il sole? Rispondiamo mediante il calcolo integrale.

Si dimostra che *il campo gravitazionale generato in un punto dello spazio da un corpo esteso è uguale al campo generato da una massa puntiforme pari alla massa totale del corpo, e posta nel baricentro del corpo stesso.*

Qui proveremo questa proprietà in un caso particolare, sufficiente a trattare in prima approssimazione il sole e i pianeti: *che il corpo abbia forma sferica e la sua densità sia una funzione radiale.* Scegliamo un riferimento in cui il corpo è una sfera di centro l'origine e raggio R e scegliamo l'asse z passante per il punto in cui vogliamo calcolare il campo, dunque sia esso $(0,0,L)$ con $L > R$ (calcoliamo il campo solo nei punti *esterni* al corpo). Sia $\delta(x,y,z) = \delta(\rho)$ la sua densità (radiale) e M la sua massa totale. Useremo le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \quad dxdydz = \rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\vartheta.$$

Il campo generato in $(0,0,L)$ è

$$\frac{\underline{F}}{m} = G\int\int\int_{x^2+y^2+z^2<R^2} \delta(x,y,z)\frac{(x,y,z-L)}{\left[x^2+y^2+(z-L)^2\right]^{3/2}}dxdydz.$$

Per le simmetrie si vede subito che le componenti x e y del campo sono nulle. Calcoliamo quindi

$$\frac{F_z}{mG} = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left(\int_0^\pi\left(\frac{\rho\cos\varphi - L}{\left[\rho^2\sin^2\varphi+(\rho\cos\varphi-L)^2\right]^{3/2}}\right)\sin\varphi d\varphi\right)\delta(\rho)\rho^2 d\rho\right)d\vartheta =$$

$$= 2\pi\int_0^R\left(\int_0^\pi\left(\frac{\rho\cos\varphi - L}{\left[\rho^2+L^2-2\rho L\cos\varphi\right]^{3/2}}\right)\sin\varphi d\varphi\right)\delta(\rho)\rho^2 d\rho. \qquad (*)$$

Ora nell'integrale interno facciamo la sostituzione

$$\cos\varphi = t; -\sin\varphi d\varphi = dt, t \in [1,-1] \text{ e abbiamo}$$

$$\int_0^\pi\left(\frac{\rho\cos\varphi - L}{\left[\rho^2+L^2-2\rho L\cos\varphi\right]^{3/2}}\right)\sin\varphi d\varphi = \int_{-1}^1\left(\frac{\rho t - L}{\left[\rho^2+L^2-2\rho L t\right]^{3/2}}\right)dt$$

ora poniamo

$$\rho^2 + L^2 - 2\rho L t = u^2; -\rho L dt = u du; u \in (L+\rho, L-\rho)$$

$$= \int_{L-\rho}^{L+\rho} \frac{\frac{\rho^2+L^2-u^2}{2L} - L}{u^3} \cdot \frac{u}{\rho L} du = \frac{1}{2L^2\rho} \int_{L-\rho}^{L+\rho} \left(\frac{\rho^2 - L^2 - u^2}{u^2} \right) du =$$

$$= \frac{1}{2L^2\rho} \left((\rho^2 - L^2) \left[-\frac{1}{u} \right]_{L-\rho}^{L+\rho} - 2\rho \right) = \frac{1}{2L^2\rho} \left((\rho^2 - L^2) \left(\frac{2\rho}{L^2 - \rho^2} \right) - 2\rho \right) =$$

$$= -4\rho \cdot \frac{1}{2L^2\rho} = -\frac{2}{L^2}.$$

Perciò, inserendo il risultato nell'integrale doppio $(*)$,

$$\frac{F_z}{mG} = -\frac{4\pi}{L^2} \int_0^R \delta(\rho) \rho^2 d\rho.$$

D'altro canto la massa totale del corpo è:

$$M = \int\int\int_{x^2+y^2+z^2<R^2} \delta(x,y,z) dx dy dz = 4\pi \int_0^R \delta(\rho) \rho^2 d\rho,$$

da cui si riconosce che

$$\frac{F_z}{mG} = -\frac{M}{L^2}.$$

Pertanto il campo generato nel punto $(0,0,L)$ è

$$\frac{\underline{F}}{m} = -GM \frac{(0,0,1)}{L^2}$$

cioè proprio il campo prodotto da una massa puntiforme posta nell'origine.

Soluzioni §5.2

5.52. $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le h\}$.

(E' sia "per fili" che "per strati").

5.53.

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : 0 \le z \le h, x^2 + y^2 \le \frac{R^2}{h^2} z^2\right\} \text{ ("per strati")}$$

5.54.

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, -c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} \le z \le c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}\right\}$$

("per fili")

5.55. v. fig. 5.17.

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : 0 \le z \le h, |x| \le \frac{z}{h}\frac{L}{2}, |y| \le \frac{z}{h}\frac{L}{2}\right\} \text{ ("per strati").}$$

5.56. $$I = \int_0^h \left(\int\int_{x^2+y^2 \le (Rz/h)^2} z e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right) dz =$$

usando le coordinate polari nell'integrale doppio interno

$$= \int_0^h z \left(2\pi \int_0^{Rz/h} e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) dz = 2\pi \int_0^h z \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^{Rz/h} dz =$$

$$= 2\pi \int_0^h z \left(\frac{1 - e^{-(Rz/h)^2}}{2} \right) dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} + \frac{h^2}{2R^2} e^{-(Rz/h)^2} \right]_0^h =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(h^2 + \frac{h^2}{R^2} \left(e^{-R^2} - 1 \right) \right).$$

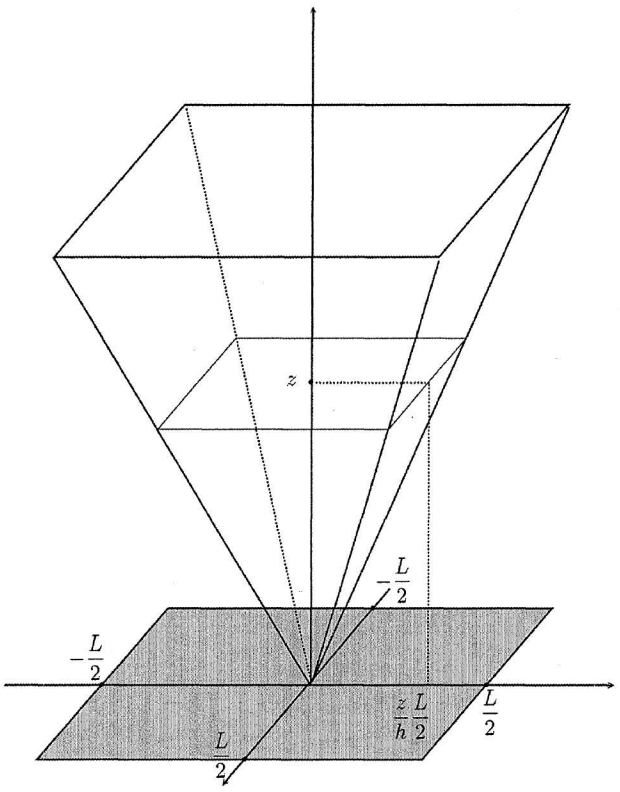


Fig. 5.17.

5.57. Passiamo in coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \quad B = \{(\rho, \varphi, \vartheta) : \rho \in [0, R], \varphi \in [0, \pi], \vartheta \in [0, 2\pi]\};$$

$$dxdydz = \rho^2\sin\varphi d\varphi d\vartheta d\rho.$$

$$\int\int\int_B e^{-z}dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \left(\int_0^\pi e^{-\rho\cos\varphi}\sin\varphi d\varphi\right)\rho^2 d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^R \left[\frac{e^{-\rho\cos\varphi}}{\rho} \right]_0^{\pi} \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^R (e^{\rho} - e^{-\rho}) \rho d\rho = 4\pi \int_0^R \rho \mathrm{Sh}\rho d\rho =$$

$$= 4\pi \left\{ [\rho \mathrm{Ch}\rho]_0^R - \int_0^R \mathrm{Ch}\rho d\rho \right\} = 4\pi \{R\mathrm{Ch}R - \mathrm{Sh}R\} = 2\pi \{R(e^{\rho} + e^{-\rho}) - e^{\rho} + e^{-\rho}\}.$$

5.58.

$$M = \int\int\int_C d(x,y,z)dxdydz = \int\int_{x^2+y^2 \le R^2} \left(\int_0^{h\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)} \alpha(z+h)dz \right) dxdy =$$

calcolando l'integrale in dz e poi passando in coordinate polari in quello in $dxdy$

$$= \alpha h^2 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho}{R}\right)^2 + \left(1 - \frac{\rho}{R}\right) \right) \rho d\rho = \frac{5}{12}\pi\alpha h^2 R^2.$$

5.59. Volume:

$$|C| = \int\int\int_C dxdydz = \int_0^h dz \int\int_{\sqrt{x^2+y^2} \le \frac{(h-z)^3}{h^2}} dxdy =$$

$$= \pi \int_0^h \frac{(h-z)^6}{h^4} dz = \frac{\pi}{h^4} \left[\frac{(z-h)^7}{7} \right]_0^h = \frac{\pi}{h^4} \cdot \frac{h^7}{7} = \frac{\pi}{7} h^3.$$

Momento d'inerzia:

$$I = \frac{m}{|C|} \int\int\int_C (x^2+y^2) dxdydz = \frac{7m}{\pi h^3} 2\pi \int_0^h dz \int_0^{\frac{(h-z)^3}{h^2}} \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{14m}{h^3} \int_0^h \frac{1}{4} \left[\frac{(h-z)^3}{h^2} \right]^4 dz = \frac{7m}{2h^{11}} \int_0^h (h-z)^{12} dz = \frac{7m}{2h^{11}} \left[\frac{(z-h)^{13}}{13} \right]_0^h =$$

$$= \frac{7m}{2h^{11}} \cdot \frac{h^{13}}{13} = \frac{7}{26} m h^2.$$

5.60.

$$|\Omega| = \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int\int_{x^2+y^2 \le R^2} \left(\int_0^{he^{-\sqrt{x^2+y^2}/R}} dz \right) dxdy =$$

calcolando l'integrale in dz e poi passando in coordinate polari

$$= 2\pi h \int_0^R \rho e^{-\rho/R} d\rho = 2\pi h R^2 \left(1 - \frac{2}{e}\right).$$

Per simmetria, $x_C = y_C = 0$;

$$z_C = \frac{1}{|\Omega|} \int\int\int_\Omega z dx dy dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi h R^2 \left(1 - \frac{2}{e}\right)} \int\int_{x^2+y^2 \le R^2} \left(\int_0^{h e^{-\sqrt{x^2+y^2}/R}} z dz \right) dx dy =$$

calcolando l'integrale in dz e poi passando in coordinate polari

$$= \frac{h}{8} \left(\frac{1 - \frac{3}{e^2}}{1 - \frac{2}{e}} \right) \simeq 0.281h.$$

5.61. In coordinate sferiche,

$$I = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \frac{\rho \sin\varphi |\sin\vartheta| e^{-\rho\cos\varphi}}{\rho \sin\varphi} \sin\varphi d\varphi \right) d\vartheta \right) \rho^2 d\rho =$$

$$= 4 \int_0^R (e^\rho - e^{-\rho}) \rho d\rho = 8 \int_0^R \rho \mathrm{Sh}\rho d\rho = 8\{R\mathrm{Ch}R - \mathrm{Sh}R\}.$$

5.62.

$$M = \int\int\int_C \left(1 + x^2 + y^2\right) dx dy dz =$$

$$= \int_0^h dz \int\int_{x^2+y^2 \le (h-z)^2} \left(1 + x^2 + y^2\right) dx dy =$$

(calcolando l'integrale interno in coordinate polari)

$$= \int_0^h \left(2\pi \int_0^{h-z} \left(\rho + \rho^3\right) d\rho \right) dz = 2\pi \int_0^h \left[\frac{(h-z)^2}{2} + \frac{(h-z)^4}{4} \right] dz = [z = h - t]$$

$$= \pi \int_0^h \left(t^2 + \frac{t^4}{2} \right) dt = \pi \left(\frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{10} \right).$$

5.63. $\frac{\pi R^6}{12}$

5.64. $\Omega = \left\{(\rho, \vartheta, z) : 0 \le z \le h, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le \frac{Rz}{h}\right\}.$

$$|\Omega| = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\int\int_\Omega xy^2 z\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{12}{\pi R^2 h}\int_0^h z\, dz \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin^2\vartheta d\vartheta \int_0^{Rz/h} \rho^4\, d\rho =$$

$$= \frac{12}{\pi R^2 h}\left[\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi/2} \int_0^h z \frac{1}{5}\left(\frac{Rz}{h}\right)^5 dz =$$

$$= \frac{12}{\pi R^2 h} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}\frac{R^5}{h^5}\frac{h^7}{7} = \frac{4}{35\pi} hR^3$$

5.65.

a.
$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\Omega = \left\{(\rho, \varphi, \vartheta) : 0 \le \rho \le R, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\int\int\int_\Omega xyz^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^R \rho^6 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi(1 - \cos^2\varphi)\cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$[\cos\varphi = t] = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\int\int\int_\Omega xyz^2\, dx\, dy\, dz = \left[\frac{\rho^7}{7}\right]_0^R \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2} \frac{2}{15} = \frac{1}{15 \cdot 7}R^7 = \frac{1}{105}R^7.$$

5.66. La rappresentazione analitica di Ω è stata ricavata nell'Esempio 5.12:

$$\Omega = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1-x-y\},$$

perciò $$\iiint_\Omega xz\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} xz\,dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{120}.$$

5.67. In coordinate sferiche,

$$I = \int_r^R \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} (\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \rho^2 \cos^2\varphi)\rho^2 \sin\varphi \, d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho =$$

$$= \left(\int_r^R \rho^4 d\rho \right) \left(\int_0^\pi \sin\varphi (\pi \sin^2\varphi + 2\pi \cos^2\varphi) d\varphi \right) = \frac{8}{15}\pi (R^5 - r^5).$$

5.68. $$\iiint_{x^2+y^2+z^2<R^2} |xz| y^2 \, dx\,dy\,dz = 8 \iiint_S xzy^2 \, dx\,dy\,dz$$

con $$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}.$$

In coordinate sferiche,

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

si ha

$$S = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) : \rho \in [0, R], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}, \quad dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi\, d\vartheta\, d\rho,$$

$$I = 8 \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} (\rho \sin\varphi \cos\vartheta)(\rho \cos\varphi)(\rho \sin\varphi \sin\vartheta)^2 \sin\varphi \, d\varphi \right) d\vartheta \right) \rho^2 \, d\rho =$$

$$= 8 \left(\int_0^R \rho^6 d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^4\varphi \cos\varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \right) =$$

$$= 8 \cdot \frac{R^7}{7} \cdot \left[\frac{\sin^5\varphi}{5} \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{\sin^3\vartheta}{3} \right]_0^{\pi/2} = 8 \cdot \frac{R^7}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{105} R^7.$$

5.69. $$M = \int\int\int_C (2h - z)\, dxdydz =$$

$$= \int_0^h (2h - z)\, dz \int\int_{x^2+y^2 \le (h-z)^2} dxdy =$$

poiché l'integrale interno è l'area del cerchio di raggio $(h - z)$,

$$= \int_0^h (2h - z)\, \pi (h - z)^2 dz = [h - z = t]$$

$$= \pi \int_0^h (h + t) t^2 dt = \pi \left[h \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \right]_0^h = \pi h^4 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7}{12} \pi h^4.$$

5.70. Rappresentiamo analiticamente Ω. Il piano $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1$ taglia gli assi x, y nei punti $(3, 0, 0), (0, 2, 0)$, quindi la base del tetraedro (ombra del tetraedro sul piano (x, y)) è:

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2 - \frac{2}{3} x \right\}.$$

Perciò

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2 - \frac{2}{3} x, 0 \le z \le 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2} \right\}$$

e $$\int\int\int_\Omega e^x dxdydz = \int_0^3 \left(\int_0^{2\left(1 - \frac{x}{3}\right)} \left(\int_0^{1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}} e^x dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^3 e^x \left(\int_0^{2\left(1 - \frac{x}{3}\right)} \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) dy \right) dx = \int_0^3 e^x \left(2\left(1 - \frac{x}{3}\right)^2 - \frac{1}{4} \left[2\left(1 - \frac{x}{3}\right) \right]^2 \right) dx =$$

$$= \int_0^3 e^x \left(1 - \frac{x}{3}\right)^2 dx = \left[1 - \frac{x}{3} = t; dx = -3dt \right]$$

$$= \int_0^1 e^{3 - 3t} t^2 3dt = 3e^3 \int_0^1 e^{-3t} t^2 dt =$$

(con due integrazioni per parti)

$$= \frac{2}{9} e^3 - \frac{17}{9}.$$

5.71. $\frac{1}{2}MR^2$

5.72. Possiamo rappresentare il cilindro nella forma:

$$C = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le R^2, -\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}\right\},$$

e calcolarne il momento d'inerzia rispetto all'asse y. Si ha:

$$I = \frac{M}{|C|}\int\int\int_C (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{M}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2} dz \int\int_{x^2+y^2\le R^2} (x^2+z^2)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{M}{\pi R^2 h}\left(h\int\int_{x^2+y^2\le R^2} x^2\,dx\,dy + 2\pi R^2\int_0^{h/2} z^2\,dz\right) =$$

$$= \frac{M}{\pi R^2 h}\left(h\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta\int_0^R \rho^3\,d\rho + 2\pi R^2\cdot\frac{h^3}{24}\right) =$$

$$= \frac{M}{\pi R^2 h}\left(h\pi\frac{R^4}{4} + \frac{\pi R^2 h^3}{12}\right) = M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right).$$

5.73. Rappresentiamo il cilindro come il dominio

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : z\in[0,h], x^2+y^2\le R^2\right\};$$

scegliamo come generatrice la retta verticale passante per $(R,0,0)$. Allora $\delta^2(x,y,z) = (x-R)^2+y^2$ e il momento d'inerzia è:

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int_\Omega \delta^2(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h}\int_0^h dz\int\int_{x^2+y^2\le R^2}\left[x^2+y^2+R^2-2Rx\right]dxdy =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h}\cdot h\cdot\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}(\rho^2+R^2-2R\rho\cos\vartheta)\,d\vartheta\right)\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2} \cdot \int_0^R 2\pi(\rho^2 + R^2)\rho d\rho = \frac{2m}{R^2}\left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{R^2\rho^2}{2}\right]_0^R =$$

$$= 2mR^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}mR^2.$$

5.74. Risulta:

$$C = \left\{(x, y, z) : 0 \le z \le h,\ x^2 + y^2 \le \left(\frac{R}{h}z\right)^2\right\}.$$

$$I = \frac{m}{|C|}\int\int\int_C (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{m}{\frac{1}{3}\pi h R^2}\int_0^h dz \int\int_{x^2+y^2 \le \left(\frac{R}{h}z\right)^2} (x^2 + y^2)\,dx\,dy =$$

passando in polari nell'integrale interno

$$= \frac{3m}{\pi h R^2}\int_0^h dz\, 2\pi \int_0^{\frac{R}{h}z} \rho^3 d\rho = \frac{6m}{hR^2}\int_0^h \frac{1}{4}\left(\frac{R}{h}z\right)^4 dz =$$

$$= \frac{3mR^2}{2h^5}\int_0^h z^4 dz = \frac{3mR^2}{2h^5}\frac{h^5}{5} = \frac{3}{10}mR^2.$$

5.75. $|D| = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

$$I = \frac{m}{|D|}\int\int\int_D (y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

In coordinate cilindriche:
$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = t \end{cases}$$

$$D = \left\{(\rho, \vartheta, t) : 0 \le \vartheta \le 2\pi; 0 \le t \le h; 0 \le \rho \le \frac{tr}{h}\right\}$$

$$I = \frac{3m}{\pi r^2 h}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^h\left(\int_0^{tr/h}(\rho^2\sin^2\vartheta + t^2)\rho\,d\rho\right)dt\right)d\vartheta =$$

$$= \frac{3}{5}m\left(\frac{r^2}{4} + h^2\right) = \frac{3}{20}m(r^2 + 4h^2).$$

5.76. $C = \{(x,y,z) : 0 \le z \le R/2, x^2 + y^2 \le (R-z)^2\}$.

$$|C| = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{R}{2} = \frac{1}{3}\pi R^3\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{24}\pi R^3.$$

Per simmetria il centroide ha $\overline{x} = \overline{y} = 0$; inoltre:

$$\overline{z} = \frac{1}{|C|}\int_0^{R/2} z\left(\iint_{x^2+y^2\le(R-z)^2} dxdy\right)dz = \frac{24}{7\pi R^3}\int_0^{R/2} z\pi(R-z)^2 dz =$$

$$= \frac{24}{7R^3}\int_0^{R/2}[z^3 - 2z^2R + zR^2]dz = \frac{24}{7R^3}\left[\frac{z^4}{4} - \frac{2}{3}z^3R + \frac{z^2}{2}R^2\right]_0^{R/2} =$$

$$= \frac{24}{7}R\left(\frac{1}{4\cdot 16} - \frac{2}{3\cdot 8} + \frac{1}{2\cdot 4}\right) = \frac{11}{56}R.$$

5.77. Per simmetria, $x_C = y_C = 0$.

$$z_C = \frac{1}{|S|}\iiint_S z\,dxdydz.$$

Per calcolare il volume $|S|$ osserviamo che il tronco di cono è la differenza tra un cono di raggio R e altezza $3h$ ed uno di raggio $\frac{2}{3}R$ e altezza $2h$, perciò

$$|S| = \frac{1}{3}\pi\left[3hR^2 - \frac{8}{9}R^2h\right] = \frac{19}{27}\pi hR^2.$$

Quindi

$$z_C = \frac{27}{19\pi hR^2}\int_0^h z\left(\iint_{x^2+y^2\le(1-\frac{z}{3h})^2R^2} dxdy\right)dz =$$

$$= \frac{27}{19\pi hR^2}\int_0^h z\pi\left(1 - \frac{z}{3h}\right)^2 R^2 dz =$$

$$= \frac{27}{19h}\int_0^h z\left(1+\frac{z^2}{9h^2}-\frac{2z}{3h}\right)dz = \frac{27}{19h}\int_0^h \left(z+\frac{z^3}{9h^2}-\frac{2z^2}{3h}\right)dz =$$

$$= \frac{27}{19h}\left[\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{36h^2}-\frac{2z^3}{9h}\right]_0^h = \frac{27}{19}h\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{36}-\frac{2}{9}\right) = \frac{27}{19}h\cdot\frac{11}{36} = \frac{33}{76}h.$$

5.78. $$I = \frac{m}{|S|}\int\int\int_S \left[(x-R)^2+y^2\right]dxdydz$$

In coordinate sferiche:

$$I = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^R\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\left(\left[(\rho\sin\varphi\cos\vartheta - R)^2+(\rho\sin\varphi\sin\vartheta)^2\right]d\vartheta\right)\sin\varphi d\varphi\right)\rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{3m}{2R^3}\int_0^R\left(\int_0^\pi\left[R^2+\rho^2(1-\cos^2\varphi)\right]\sin\varphi d\varphi\right)\rho^2 d\rho = \quad [\cos\varphi = t]$$

$$= \frac{3m}{2R^3}\int_0^R\left(\int_{-1}^1\left[R^2+\rho^2(1-t^2)\right]dt\right)\rho^2 d\rho = \frac{7}{5}mR^2.$$

5.79. In coordinate sferiche si ha:

$$S = \left\{(\rho,\vartheta,\varphi) : 0\le\vartheta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}, \frac{R}{2\cos\varphi}\le\rho\le R\right\}.$$

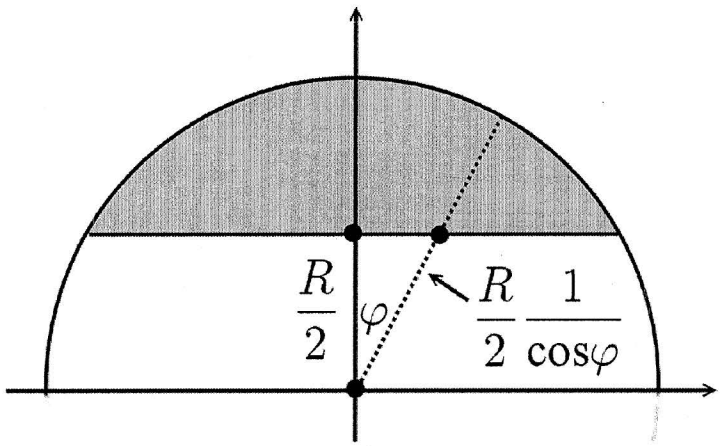


Fig. 5.18

$$|S| = \iiint_S dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_{\frac{R}{2\cos\varphi}}^{R}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi\right)d\vartheta =$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3}\left(R^3 - \frac{R^3}{8\cos^3\varphi}\right)\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$\left(\cos\varphi = t, -\sin\varphi\,d\varphi = dt, t\in\left[1,\frac{1}{2}\right]\right)$$

$$= \frac{2R^3\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-\frac{1}{8t^3}\right)dt = \frac{2R^3\pi}{3}\left[t+\frac{1}{16t^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{2R^3\pi}{3}\left(1+\frac{1}{16}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{24}\pi R^3.$$

5.80.

$$C:\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \quad r\le\rho\le R;\ 0\le\vartheta\le 2\pi; 0\le\varphi\le\pi.$$

$$|C| = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right).$$

$$I = \frac{M}{|C|}\iiint_C (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

in coordinate sferiche, $dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi$

$$= \frac{3M}{4\pi(R^3-r^3)}\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{\pi}d\varphi\int_r^R\rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho =$$

$$= \frac{3M}{4\pi(R^3-r^3)}2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_r^R\rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{3M}{2(R^3-r^3)}\frac{1}{5}\left(R^5-r^5\right)\int_0^{\pi}\sin\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{3}{10}M\frac{(R^5-r^5)}{(R^3-r^3)}\left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{3}{10}M\frac{(R^5-r^5)}{(R^3-r^3)}\cdot\frac{4}{3} =$$

$$= \frac{2}{5}M\frac{(R^5-r^5)}{(R^3-r^3)}.$$

5.81. $$V = \int\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} dxdydz$$

Col cambio di variabile $x = ax', y = by', z = cz'$,

$$dxdydz = abcdx'dy'dz',$$

$$V = abc\int\int\int_{x'^2+y'^2+z'^2\le 1} dx'dy'dz' = \frac{4}{3}\pi abc,$$

perché l'integrale triplo scritto rappresenta il volume della sfera di raggio 1.

Momento d'inerzia rispetto all'asse z:

$$I = \frac{M}{|V|}\int\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1}\left(x^2+y^2\right)dxdydz =$$

con lo stesso cambio di variabile di prima

$$= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi abc}\int\int\int_{x'^2+y'^2+z'^2\le 1}\left(a^2x'^2+b^2y'^2\right)abcdx'dy'dz' =$$

passando in coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x' = \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ y' = \rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z' = \rho\cos\varphi \end{cases} \quad \vartheta\in[0,2\pi], \varphi\in[0,\pi], \rho\in[0,R], dx'dy'dz' = \rho^2\sin\varphi d\varphi d\vartheta d\rho$$

$$= \frac{3M}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\left(a^2\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + b^2\rho\sin^2\varphi\sin^2\vartheta\right)\rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{3M}{4\pi}\left\{a^2\int_0^1\rho^4 d\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta d\vartheta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi + b^2\int_0^1\rho^4 d\rho\int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta d\vartheta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\right\} =$$

$$= \frac{3M}{4\pi}\frac{\pi}{5}\left\{\left(a^2+b^2\right)\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\right\} =$$

$$\left[\int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi = \frac{4}{3}, \text{ calcolo già fatto in altri esercizi}\right]$$

$$= \frac{3M}{4}\frac{1}{5}(a^2+b^2)\frac{4}{3} = \frac{1}{5}M(a^2+b^2).$$

5.82. $$|P| = \iiint_P dxdydz = \int_0^h dz \iint_{x^2+y^2\le\frac{R^2}{h}z} dxdy =$$

$$= \int_0^h \pi\frac{R^2}{h}zdz = \pi\frac{R^2}{h}\frac{h^2}{2} = \frac{\pi}{2}R^2h.$$

Per simmetria, $\overline{x} = \overline{y} = 0$,

$$\overline{z} = \frac{1}{|P|}\iiint_P zdxdydz = \int_0^h zdz \iint_{x^2+y^2\le\frac{R^2}{h}z} dxdy =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2 h}\int_0^h z\frac{R^2}{h}zdz = \frac{2}{h^2}\int_0^h z^2dz = \frac{2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{2}{3}h.$$

5.83. Un disegno aiuta a capire la geometria di Ω:

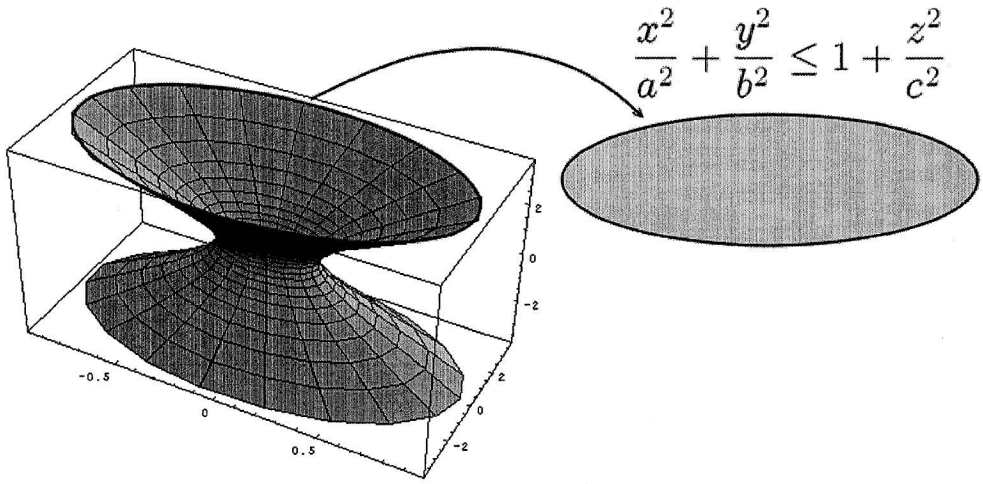


Fig. 5.19

Si può rappresentare Ω per strati al modo seguente:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : z \in [0,c], \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 + \frac{z^2}{c^2}\right\}.$$

Si noti che ogni sezione piana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 + \frac{z^2}{c^2}$ è un'ellisse di semiassi

$$a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}, b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}$$

e quindi area $$\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Si ha $$|\Omega| = \int_0^c \left(\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1+\frac{z^2}{c^2}} dxdy\right)dz =$$

(per quanto appena osservato)

$$= \int_0^c \pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz = \pi ab\left(c+\frac{c^3}{3c^2}\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Per il centroide C, per simmetria si ha $x_C = y_C = 0$, mentre

$$z_c = \frac{1}{|\Omega|}\iiint_\Omega z dxdydz = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi abc}\int_0^c z\left(\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1+\frac{z^2}{c^2}} dxdy\right)dz =$$

$$= \frac{3}{4\pi abc}\int_0^c z\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz = \frac{3}{4c}\int_0^c \left(z+\frac{z^3}{c^2}\right)dz =$$

$$= \frac{3}{4c}\left[\frac{c^2}{2}+\frac{c^4}{4c^2}\right] = \frac{3}{4c}\cdot\frac{3}{4}c^2 = \frac{9}{16}c,$$

e il centroide è $$C = \left(0,0,\frac{9}{16}c\right).$$

5.84. Il modulo del determinante jacobiano della trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} x = (R+\rho\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = (R+\rho\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

è: $$\rho(R+\rho\cos\varphi).$$

a. Perciò il volume del toro è:

$$|T| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r \rho(R + \rho\cos\varphi)\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} r^2 R \cdot 4\pi^2 = 2\pi R \cdot \pi r^2$$

(il volume è il prodotto dell'area del disco di raggio r per la "circonferenza media equatoriale" $2\pi R$).

b. Il momento d'inerzia rispetto all'asse z è:

$$I = \frac{M}{|T|} \iiint_T (x^2 + y^2)\, dx dy dz = \frac{M}{|T|} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r \rho(R+\rho\cos\varphi)(R+\rho\cos\varphi)^2\, d\rho =$$

$$= 2\pi \frac{M}{|T|} \int_0^r \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} \left(R^3 + 3R^2\rho\cos\varphi + 3R\rho^2\cos^2\varphi + \rho^3\cos^3\varphi\right) d\varphi =$$

(per simmetria gli addendi con le potenze dispari di $\cos\varphi$ hanno integrale nullo su $[0, 2\pi]$, mentre $\cos^2\varphi$ ha un integrale notevole)

$$= 2\pi \frac{M}{|T|} \int_0^r \rho\left(R^3 2\pi + 3R\rho^2\pi\right) d\rho = 2\pi^2 M \left(2R^3 \frac{r^2}{2} + 3R\frac{r^4}{4}\right) =$$

$$= \pi^2 \frac{M}{2\pi R \cdot \pi r^2} \left(2r^2 R^3 + \frac{3}{2} r^4 R\right) = M\left(R^2 + \frac{3}{4} r^2\right).$$

c.
$$I = \frac{M}{|T|} \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\, dx dy dz =$$

con lo stesso cambio di variabili di prima

$$= \frac{M}{|T|} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} \left[(R + \rho\cos\varphi)^2 \sin^2\vartheta + \rho^2 \sin^2\varphi\right](R + \rho\cos\varphi)\, d\varphi.$$

E con calcoli di routine si ottiene:

$$I = \frac{M}{2}\left(R^2 + \frac{5}{4} r^2\right).$$

5.85. Sia $Q = \left\{(x, y, z) : x, y, z \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]\right\}$ e l'asse di rotazione sia l'asse z. Allora:

$$I = \frac{M}{|Q|}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (x^2+y^2)dz =$$

$$= \frac{M}{l^3}\cdot l \cdot \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (x^2+y^2)dy =$$

$$= \frac{M}{l^2}\left(l\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2dx + l\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y^2dy\right) = \frac{M}{l^2}\cdot 2l\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2dx =$$

$$= \frac{M}{l^2}\cdot 4l\int_0^{\frac{l}{2}} x^2dx = \frac{4M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2} = \frac{4M}{l}\cdot\frac{l^3}{24} = \frac{1}{6}Ml^2.$$

5.86.
$$|P| = \int_0^h \left(\iint_{|x|+|y|\le(h-z)} dxdy\right)dz.$$

Osserviamo che l'integrale interno è l'area di un quadrato la cui semidiagonale vale $(h-z)$, perciò l'integrale interno vale $\left[(h-z)\sqrt{2}\right]^2$, e

$$|P| = \int_0^h 2(h-z)^2dz = \left[\frac{2}{3}(z-h)^3\right]_0^h = \frac{2}{3}h^3.$$

Centroide. Per simmetria, $\overline{x} = \overline{y} = 0$, mentre

$$\overline{z} = \frac{1}{|P|}\int_0^h z\left(\iint_{|x|+|y|\le(h-z)} dxdy\right)dz = \frac{3}{2h^3}\int_0^h z2(h-z)^2dz =$$

$$= \frac{3}{h^3}\int_0^h (zh^2 - 2hz^2 + z^3)dz = \frac{3}{h^3}\left[\frac{z^2h^2}{2} - \frac{2hz^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right]_0^h =$$

$$3h\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{h}{4}.$$

5.87. Per simmetria, $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Calcoliamo

$$\overline{z} = \frac{1}{|S|}\iiint_S z dxdydz =$$

in coordinate sferiche

$$= \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{3}{8}R.$$

5.88. $\left(\frac{3}{8}R, \frac{3}{8}R, \frac{3}{8}R\right)$

5.89.
$$I = \int\int\int_C (x^2+y^2)\alpha\left(\frac{2z}{h}+1\right)dxdydz =$$

$$= \int_0^h \alpha\left(\frac{2z}{h}+1\right)\left[\int\int_{x^2+y^2\le\left(\frac{R}{h}z\right)^2}(x^2+y^2)dxdy\right]dz =$$

$$= \int_0^h \alpha\left(\frac{2z}{h}+1\right)\left[2\pi\int_0^{\frac{R}{h}z}\rho^3 d\rho\right]dz =$$

$$= 2\pi\alpha\int_0^h \left(\frac{2z}{h}+1\right)\frac{1}{4}\left(\frac{R}{h}z\right)^4 dz = \frac{\pi\alpha R^4}{2h^4}\int_0^h \left(\frac{2z^5}{h}+z^4\right)dz =$$

$$= \frac{\pi\alpha R^4}{2h^4}\left[\frac{2h^6}{6h}+\frac{h^5}{5}\right] = \frac{4}{15}\pi\alpha R^4 h.$$

5.90. Per simmetria sarà $x_C = y_C = 0$.
Utilizzando le coordinate sferiche si ha:

$$z_C = \frac{\int\int\int_S z\delta(x,y,z)dxdydz}{\int\int\int_S \delta(x,y,z)dxdydz} = \frac{\int\int\int_S z\left(1+\frac{z}{R}\right)dxdydz}{\int\int\int_S \left(1+\frac{z}{R}\right)dxdydz} =$$

$$= \frac{\int_0^R \left(2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho\cos\varphi(1+\rho(\cos\varphi)/R)\sin\varphi d\varphi\right)\rho^2 d\rho}{\int_0^R \left(2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\rho(\cos\varphi)/R)\sin\varphi d\varphi\right)\rho^2 d\rho}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos\varphi(1+\rho(\cos\varphi)/R)\sin\varphi d\varphi = \left[\rho\frac{\sin^2\varphi}{2} - \frac{\rho^2}{3R}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{\rho}{2}+\frac{\rho^2}{3R};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\rho(\cos\varphi)/R)\sin\varphi d\varphi = \left[-\cos\varphi + \frac{\rho}{R}\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = 1+\frac{\rho}{2R};$$

$$z_C = \frac{\int_0^R \left(\frac{\rho}{2}+\frac{\rho^2}{3R}\right)\rho^2 d\rho}{\int_0^R \left(1+\frac{\rho}{2R}\right)\rho^2 d\rho} = \frac{\left[\frac{\rho^4}{8}+\frac{\rho^5}{15R}\right]_0^R}{\left[\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^4}{8R}\right]_0^R} =$$

$$= \frac{\frac{R^4}{8}+\frac{R^4}{15}}{\frac{R^3}{3}+\frac{R^3}{8}} = R\left(\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}}\right) = \frac{23}{55}R.$$

5.91.

a. $M = \frac{\pi}{2}h^4$

b. $C = \left(0, 0, \frac{4}{5}h\right)$

c. $I = \frac{\pi}{6}h^6$

Cap. 6. Campi vettoriali

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 6.

6.1. Lavoro di un campo vettoriale, campi conservativi e potenziali

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 6, §1.3, 1.4, 1.5.

Linguaggio, notazioni e concetti fondamentali per gli integrali di linea di seconda specie

6.1.★ Quali delle seguenti scritture possono indicare correttamente un *integrale di linea di seconda specie*? Per ciascuna scrittura, dire se è corretta o scorretta, nel secondo caso spiegando con precisione perché. Si raccomanda di rispondere a ciascuna domanda *prima* di leggere le successive.

a. $$\int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t))|\underline{r}'(t)|dt$$

b. $$\int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t)) \times \underline{r}'(t)dt$$

c. $$\int_a^b f(t)|\underline{r}'(t)|dt$$

d. $$\int_\gamma \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)dt$$

e. $$\int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)dt$$

f. $$\int_\gamma f\, ds$$

g. $\displaystyle\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}$

6.2.★ Rispondere vero o falso a ciascuna delle seguenti affermazioni.

a. Un cambiamento regolare di parametrizzazione della curva γ non cambia il valore del lavoro di $\underline{F}$ lungo γ.

b. Un cambiamento di orientazione della curva γ cambia il segno del lavoro di $\underline{F}$ lungo γ.

c. Il lavoro di un campo lungo una curva chiusa è sempre zero.

d. Un campo si dice conservativo se è irrotazionale.

e. Il lavoro di un campo conservativo lungo una curva chiusa è sempre zero.

f. Un campo $C^1(\Omega)$ si dice conservativo in un aperto Ω se ammette un potenziale in Ω.

g. Se un campo è conservativo in Ω, allora è irrotazionale in Ω.

h. Se un campo è conservativo in Ω, allora è solenoidale in Ω.

i. Se un campo è irrotazionale in Ω, allora è conservativo in Ω.

l. Se un campo (tridimensionale) è irrotazionale in una sfera $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, allora è conservativo in Ω.

m. Il lavoro di un campo vettoriale lungo una curva dipende solo dagli estremi della curva.

6.1.A. Lavoro di un campo vettoriale

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 6, §1.3.

Esempi svolti

Esempio 6.1. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = (-yz, xz, x^2)$$

lungo l'arco di elica cilindrica:

$$\gamma : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = \frac{h}{2\pi} t \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi].$$

Per definizione si ha:

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{4\pi} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)dt.$$

Calcoliamo: $$\underline{r}'(t) = \left(-R\text{sin}t, R\text{cos}t, \frac{h}{2\pi}\right);$$

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) = \left(-R\text{sin}t\frac{h}{2\pi}t, R\text{cos}t\frac{h}{2\pi}t, R^2\text{cos}^2 t\right);$$

Quindi

$$L = \int_0^{4\pi} \left(-R\text{sin}t\frac{h}{2\pi}t, R\text{cos}t\frac{h}{2\pi}t, R^2\text{cos}^2 t\right) \cdot \left(-R\text{sin}t, R\text{cos}t, \frac{h}{2\pi}\right) dt =$$

$$= \int_0^{4\pi} \left(R^2\frac{h}{2\pi}t + R^2\frac{h}{2\pi}\text{cos}^2 t\right) dt = \frac{hR^2}{2\pi}\int_0^{4\pi} (t + \text{cos}^2 t)dt =$$

$$= \frac{hR^2}{2\pi}\left(\frac{(4\pi)^2}{2} + 2\pi\right) = (4\pi + 1)hR^2.$$

Esempio 6.2. Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

$$F = (-y, 2x)$$

lungo il triangolo di vertici $A = (0,0), B = (3,0), C = (0,1)$ percorso in verso antiorario.

Si tratta qui di calcolare il lavoro di un campo piano. La curva in questo caso è una linea spezzata, descritta dandone i vertici e il verso di percorrenza, spetterà a noi scriverne la rappresentazione parametrica. Prima di fare calcoli è bene però

osservare la geometria:

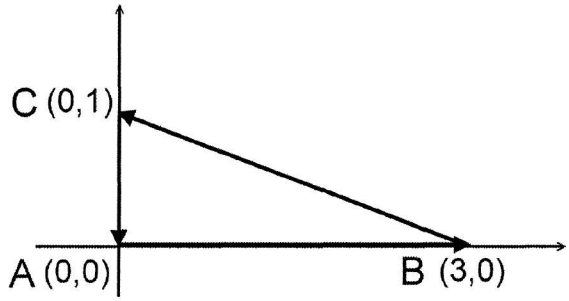


Fig.6.1.

Notiamo che il lavoro elementare

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)dt$$

si annulla ogni volta che uno dei due vettori $\underline{F}(\underline{r}(t))$, $\underline{r}'(t)$ è nullo, oppure i due vettori sono tra loro ortogonali. Nel nostro caso:

il lavoro lungo AB è nullo perché su esso $\underline{F} = (0, 2x)$ è perpendicolare ad AB;

il lavoro lungo CA è nullo perché su esso $\underline{F} = (-y, 0)$ è perpendicolare a CA;

calcoliamo perciò solo il lavoro lungo BC. Si tratta del segmento:

$$y = 1 - x/3, \text{ per } x \in [0, 3],$$

percorso da destra a sinistra; quindi il lavoro che cerchiamo è l'*opposto* di quello calcolato lungo il cammino:

$$\underline{r}(t) = (t, 1 - t/3) \text{ per } t \in [0, 3].$$

$$\underline{r}'(t) = (1, -1/3); \underline{F}(\underline{r}(t)) = (t/3 - 1, 2t)$$

$$L = -\int_0^3 \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)dt = -\int_0^3 \left(\frac{t}{3} - 1 - \frac{2}{3}t\right)dt =$$

$$= \int_0^3 \left(1 + \frac{t}{3}\right)dt = 3 + \left[\frac{t^2}{6}\right]_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Esempio 6.3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$F = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

lungo l'arco di curva γ parametrizzata in forma polare da:

$$\rho = \vartheta, \quad \vartheta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Anche in questo caso abbiamo un campo vettoriale piano. La curva è assegnata in forma polare, e la prima cosa da capire è che se vogliamo impostare correttamente il calcolo del lavoro, per scrivere il lavoro elementare

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)dt$$

è necessario scrivere esplicitamente la parametrizzazione della curva, cioè passare dalla forma polare alla forma parametrica standard,

$$\underline{r}(\vartheta) = (\vartheta\cos\vartheta, \vartheta\sin\vartheta).$$

Solo così possiamo calcolare le quantità che ci interessano, ossia:

$$\underline{r}'(\vartheta) = (\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta, \sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta);$$

$$\underline{F}(\underline{r}(\vartheta)) = (\sin\vartheta, \cos\vartheta);$$

e quindi

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \underline{F}(\underline{r}(\vartheta)) \cdot \underline{r}'(\vartheta)d\vartheta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\vartheta, \cos\vartheta) \cdot (\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta, \sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta)d\vartheta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2\sin\vartheta\cos\vartheta + \vartheta\left(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\right) \right] d\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin 2\vartheta + \vartheta\cos 2\vartheta]d\vartheta =$$

$$(2\vartheta = t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\sin t + \frac{t}{2}\cos t \right] dt.$$

Poiché $$\int t\cos t dt = t\sin t + \cos t + c,$$

$$L = \left[-\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}(t\sin t + \cos t) \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{4}[t\sin t - \cos t]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Esercizi

6.3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

lungo la semicirconferenza di centro l'origine e raggio R posta nel semipiano $y \geq 0$ e percorsa in verso antiorario.

6.4.★ Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = \frac{(x,y)}{x^2+y^2}$$

sull'arco di ellisse $$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

6.5.★ Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = (y, -x)$$

lungo l'arco di curva:

$$\underline{r}(t) = (t - \sin t, \cos t) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

6.6.★ Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = (y, -x, z)$$

lungo l'arco di curva orientato:

$$\begin{cases} x = (3+\cos(3t))\cos t \\ y = (3+\cos(3t))\sin t \\ z = \sin(3t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

6.7.★ Si calcoli il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F} = (x+y^2)\underline{i} + y^2\underline{j}$$

lungo l'arco di circonferenza γ descritto in coordinate polari da $\{(\rho,\vartheta) : \rho = R, \vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}]\}$ (γ è percorsa in senso antiorario).

6.8. Calcolare il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{v} = (-y, x)$$

lungo l'arco di spirale di Archimede descritta dall'equazione in forma polare

$$\rho = R\vartheta, \vartheta \in [0, 4\pi],$$

dove R è un parametro positivo.

6.9.★ Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale piano

$$\underline{F} = (-y, x)$$

lungo l'astroide γ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R\cos^3\vartheta \\ y = R\sin^3\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

6.10.★ Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale piano

$$\underline{F} = (-y, x^2)$$

lungo il parallelogramma γ di vertici $(0,0), (2,0), (3,1), (1,1)$ percorso in verso antiorario.

6.1.B. Campi conservativi e potenziali

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 6, §1.4, 1.5.

Esempio 6.4. Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(\log y + \frac{z}{x}, \log z + \frac{x+1}{y}, \log x + \frac{y+2}{z}\right)$$

definito in $\Omega = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

a. Si verifichi esplicitamente che esso verifica nell'aperto Ω le condizioni necessarie affinché sia conservativo.

b. Si calcoli un potenziale di $\underline{F}$ in Ω.

a. Verifichiamo che $\underline{F}$ è irrotazionale in Ω.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}; \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{1}{x} = \frac{\partial F_3}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{1}{z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

b. Poiché Ω è semplicemente connesso, questo implica che $\underline{F}$ è conservativo. Cerchiamo un potenziale.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \log y + \frac{z}{x} \Rightarrow U(x,y,z) = x\log y + z\log x + g(y,z);$$

(abbiamo calcolato la primitiva di F_1 rispetto ad x; la "costante di integrazione" è qualsiasi espressione non dipenda da x, perciò è una generica funzione $g(y,z)$);

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{y} + g_y(y,z) = \log z + \frac{x+1}{y} \Rightarrow g_y(y,z) = \log z + \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow g(y,z) = y\log z + \log y + h(z);$$

(abbiamo calcolato la primitiva di $g_y(y,z)$ rispetto ad y; la "costante di integrazione" è qualsiasi quantità non dipenda da y, cioè, trattandosi ora di funzioni di y, z, una qualsiasi funzione di $h(z)$);

$$U(x,y,z) = x\log y + z\log x + y\log z + \log y + h(z);$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \log x + \frac{y}{z} + h'(z) = \log x + \frac{y+2}{z} \Rightarrow h'(z) = \frac{2}{z}$$

$$\Rightarrow h(z) = 2\log z + c \Rightarrow$$

$$U(x,y,z) = x\log y + z\log x + y\log z + \log y + 2\log z + c.$$

Il potenziale è stato infine determinato, come sempre a meno di costante additiva.

Esercizi

6.11. Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = (e^y + ze^x, (x+1)e^y + e^z, (y+2)e^z + e^x)$$

definito in $\mathbb{R}^3$.

a. Si verifichi esplicitamente che esso verifica in $\mathbb{R}^3$ le condizioni necessarie affinché sia conservativo.

b. Si calcoli un potenziale di $\underline{F}$ in $\mathbb{R}^3$.

6.12.★

a. Sia γ l'arco di iperbole

$$y = \frac{1}{x} \text{ per } x \in [1,10]$$

e sia $\underline{F}$ il campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2}, \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{y^2}\right).$$

Dopo aver dimostrato che $\underline{F}$ è conservativo in una opportuna regione semplicemente connessa contenente γ, si calcoli il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ utilizzando un potenziale.

6.13.★ Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(\frac{zx}{x^2+y^2} + x\log z, \frac{zy}{x^2+y^2} + y\log z, \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \frac{x^2+y^2}{2z}\right).$$

a. Determinare il più grande insieme aperto Ω in cui $\underline{F}$ è ben definito e dire se Ω è semplicemente connesso.

b. Determinare un potenziale di $\underline{F}$, se esiste, e concludere se il campo è conservativo o meno in Ω.

6.14.★ Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = (e^{-y} - ze^{-x}, e^{-z} - xe^{-y}, e^{-x} - ye^{-z} + z)$$

definito in $\mathbb{R}^3$.

a. Si verifichi esplicitamente che esso verifica in $\mathbb{R}^3$ le condizioni necessarie affinché sia conservativo.

b. Si calcoli un potenziale di $\underline{F}$ in $\mathbb{R}^3$.

6.15.★ Si consideri il campo

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(\frac{2xz-y}{x^2+y^2}, \frac{2yz+x}{x^2+y^2}, \log(x^2+y^2)\right).$$

a. Verificare se il campo è irrotazionale nel suo insieme di definizione Ω.

b. Determinare, se esiste, un potenziale del campo.

c. Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo la circonferenza di equazione $\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0), t \in [0, 2\pi]$. Commentare i risultati ottenuti nei punti *a*, *b*, *c*.

d. Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo la circonferenza di equazione $\underline{r}(t) = (1, \cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$. (Non occorrono calcoli!)

e. Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo la curva di equazione $\underline{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, e^{\sin^2 t}), t \in [0, 2\pi]$. (Non occorrono calcoli!)

6.16. Calcolare un potenziale del seguente campo vettoriale conservativo:

$$\underline{F}(x,y,z) = 3y\log(1+z^2)\underline{i} + \left[\frac{2z^2y}{1+y^2} + 3x\log(1+z^2)\right]\underline{j} +$$

$$+ \left[2z\log(1+y^2) + \frac{6xyz}{1+z^2}\right]\underline{k}.$$

Quindi, calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo l'arco di curva:

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t^2 \quad t \in [0,1] \\ z = 1 + t^3 \end{cases}$$

6.17.★ Calcolare un potenziale del seguente campo vettoriale conservativo:

$$\underline{F}(x,y,z) = \frac{y}{1+z^2}\underline{i} + \left[\frac{x}{1+z^2} - \frac{2yz}{(1+y^2)^2}\right]\underline{j} +$$

$$+ \left[-\frac{2z(1+xy)}{(1+z^2)^2} + \frac{1}{1+y^2}\right]\underline{k}.$$

6.18. Calcolare, nel modo più conveniente, il lavoro del campo vettoriale conservativo

$$\underline{F} = \left(e^{-y^2} - 2xze^{-x^2}, -e^{-z^2} - 2xye^{-y^2}, e^{-x^2} + 2yze^{-z^2}\right)$$

lungo l'arco di curva orientato:

$$\underline{r}(t) = \left(t, t^2, t^3\right), t \in [0,1].$$

6.19.★ Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(-\frac{z}{(x+y^2)^2}, -\frac{2yz}{(x+y^2)^2} + \frac{1}{z}, \frac{1}{x+y^2} - \frac{y}{z^2} + 2z\right)$$

definito nel dominio $T = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

a. Verificare che $\underline{F}$ è irrotazionale in T.

b. Calcolare un potenziale di $\underline{F}$ in T.

6.20.★ Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(-\frac{yz}{x^2+y^2}, \frac{xz}{x^2+y^2} - \frac{2y}{(y^2+z^2)^2}, -\arctan\frac{x}{y} - \frac{2z}{(y^2+z^2)^2} + \frac{1}{z}\right)$$

definito nel dominio $T = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

a. Verificare che $\underline{F}$ è irrotazionale in T.

b. Calcolare un potenziale di $\underline{F}$ in T.

6.1.C. Esercizi vari su lavoro di un campo, campi conservativi e potenziali

6.21.★

a. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = \frac{(y, x)}{x^2 + y^2}$$

lungo l'arco di parabola $y = x^2, x \in [-1, 1]$.

b. Quindi, stabilire se il campo è conservativo nel suo insieme di definizione.

6.22. Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F}(x, y, z) = \left(2xe^{-y}, -x^2e^{-y} + z^3e^{yz^2}, e^{yz^2}\left(2yz^2 + 1\right) + e^{-z}\right).$$

a. Verificare che $\underline{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^3$.

b. Calcolare un potenziale di $\underline{F}$ in $\mathbb{R}^3$.

6.23.★ Si consideri il campo vettoriale, conservativo nel suo insieme di definizione:

$$\underline{F}(x, y, z) = \left(\frac{y}{1 + x^2y^2}, \frac{x}{1 + x^2y^2} + \frac{2y}{y^2 + z^2} + e^{-z}, \frac{2z}{y^2 + z^2} - e^{-z}(y + 1)\right).$$

Calcolare un potenziale di $\underline{F}$ in $\mathbb{R}^3$ privato della retta $y = z = 0$.

6.24.★ Sia γ la curva

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 2]$$

e sia $\underline{F}$ il campo vettoriale: $\underline{F} = (z, 2y, x)$.

Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ.

6.25.★ Sia γ l'arco di spirale logaritmica di equazione polare:

$$\rho = e^{\vartheta}, \ \vartheta \in [-2\pi, 2\pi]$$

e sia $\underline{F}$ il campo vettoriale piano:

$$\underline{F} = y\underline{i} - x\underline{j}.$$

Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ.

6.26. Si consideri il campo vettoriale piano:

$$\underline{F} = \left(\sqrt{1+x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) \underline{i} + \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \underline{j}.$$

a. Verificare se il campo è irrotazionale nel suo insieme di definizione.

b. Dalla risposta al punto precedente si può concludere che $\underline{F}$ è conservativo in tutto il suo insieme di definizione? Perché?

c. Stabilire se $\underline{F}$ è conservativo in tutto il suo insieme di definizione, e in caso affermativo calcolarne un potenziale (suggerimento: integrare per prima la *seconda* componente).

6.27. Sia γ l'arco di ellisse di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = 3\sin\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

e sia $\underline{F}$ il campo vettoriale piano:

$$\underline{F} = (3x^2 + y^2)\underline{i} + 2xy\underline{j}.$$

a. Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ (direttamente dalla definizione, cioè calcolando un opportuno integrale).

b. Stabilire se $\underline{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$, e in caso affermativo calcolarne un potenziale. Quindi (sempre in caso affermativo), utilizzare il potenziale per calcolare nuovamente il lavoro di cui al punto *a*.

6.28.★ Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\underline{i} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\underline{j}.$$

a. Verificare se $\underline{F}$ è irrotazionale in tutto il suo dominio di definizione $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. Stabilire se $\underline{F}$ è conservativo in tutto il suo dominio di definizione $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, calcolandone, in caso affermativo, un potenziale. (Suggerimento: integrare per prima l'equazione $U_y = F_2$).

c. Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\underline{F}$ lungo l'arco di curva:

$$\gamma : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

6.29. Si consideri il campo vettoriale piano:

$$\underline{F} = y(y-x)\underline{i} + x(x-y)\underline{j}.$$

a. Stabilire se il campo è conservativo nel piano, calcolando in caso affermativo un potenziale.

b. Calcolare il lavoro del campo lungo il perimetro del triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (0,2)$, percorso in verso antiorario.

6.30. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(xy, z, x^2\right)$$

lungo la curva γ:

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi]$$

6.31. Sia γ l'arco di curva

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2e^t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

a. Stabilire se γ è regolare e se è chiusa, giustificando la risposta. Calcolare l'elemento di lunghezza su γ.

b. Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma z^2 ds$$

c. Calcolare il lavoro lungo γ del campo vettoriale

$$\underline{F} = zx\underline{i} + zy\underline{j} + y\underline{k}.$$

6.32. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x,y,z) = 2xz\underline{i} + 4y^3z\underline{j} + \left(1 + x^2 + y^4\right)\underline{k}.$$

a. Verificare se $\underline{F}$ è irrotazionale in tutto $\mathbb{R}^2$.

b. Stabilire se $\underline{F}$ è conservativo in tutto $\mathbb{R}^2$, calcolandone, in caso affermativo, un potenziale.

c. Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\underline{F}$ lungo l'arco di curva:

$$\gamma : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

6.33. Si consideri il campo vettoriale piano:

$$\underline{F} = \frac{x\underline{i} + y\underline{j}}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

a. Verificare se il campo è irrotazionale nel suo insieme di definizione.

b. Dalla risposta al punto precedente si può concludere che $\underline{F}$ è conservativo in tutto il suo insieme di definizione? Perché?

c. Se $\underline{F}$ è conservativo in tutto il suo insieme di definizione calcolarne un potenziale.

d. Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo l'arco di curva:

$$\gamma : \begin{cases} x = 3t^2 - \sin \pi t \\ y = \cos \pi t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

6.34. Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F} = -\frac{2xz}{(x^2 + y^2)^2}\underline{i} - \frac{2yz}{(x^2 + y^2)^2}\underline{j} + \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{1 + z^2}\right)\underline{k}.$$

a. Si verifichi se il campo è irrotazionale nel suo dominio di definizione.

b. Dalla risposta al punto precedente si può dedurre se il campo è conservativo o meno nel suo dominio di definizione? Perché?

c. Stabilire se il campo è conservativo, e in caso affermativo calcolarne un potenziale.

d. Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo l'arco di curva

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Soluzioni § 6.1

6.1.

a. Scorretta. Il vettor velocità $\underline{r}'(t)$ qui compare entro modulo, mentre dovrebbe essere moltiplicato scalarmente per il campo.

b. Scorretta. Tra i due vettori compare il prodotto vettoriale, mentre dovrebbe comparire il prodotto scalare.

c. Scorretta. La formula indica un integrale di linea di *prima*, non di seconda specie.

d. Scorretta. L'integranda è espressa in modo esplicito come funzione di t, quindi sul simbolo di integrale dovrebbero comparire gli estremi $[a, b]$ tra cui varia t, e non il simbolo γ che denota la curva.

e. Corretta. Questa indica l'integrale di seconda specie in forma esplicita.

f. Scorretta. Questa indica l'integrale di *prima* specie, in forma simbolica.

g. Corretta. Questa indica l'integrale di seconda specie in forma simbolica.

6.2.

a. Falso. Se cambia l'orientazione, cambia anche il segno.

b. Vero.

c. Falso. (v. però la prossima domanda *e*).

d. Falso. (La definizione corretta è data nella domanda *f*).

e. Vero.

f. Vero.

g. Vero.

h. Falso.

i. Falso. E' vero sotto qualche ipotesi aggiuntiva, ad es. che Ω sia sempliciemente connesso.

l. Vero, per quanto osservato in *i.* (La sfera è semplicemente conessa).

m. Falso. E' vero se il campo è conservativo.

6.3. $-\frac{2}{3}R$.

6.4. $\underline{r}(t) = (\cos t, 2\sin t); \quad \underline{r}'(t) = (-\sin t, 2\cos t)$

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos t, 2\sin t) \cdot (-\sin t, 2\cos t)}{\cos^2 t + 4\sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin t \cos t}{1 + 3\sin^2 t} dt = [\sin t = u]$$

$$= \int_0^1 \frac{3u}{1 + 3u^2} du = \left[\frac{1}{2}\log(1 + 3u^2)\right]_0^1 = \log 2.$$

6.5.

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) = (\cos t, \sin t - t)$$

$$\underline{r}'(t) = (1 - \cos t, -\sin t)$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)dt = \int_0^{\pi/2} (\cos t, \sin t - t) \cdot (1 - \cos t, -\sin t)dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \big(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t + t\sin t\big)dt =$$

$$= [\sin t]_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} t\sin t dt = 1 - \frac{\pi}{2} + [-t\cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t dt =$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2} + 0 + 1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

6.6.

$$\underline{r}'(t) =$$

$$= (-3\sin(3t)\cos t - (3 + \cos(3t))\sin t, -3\sin(3t)\sin t + (3 + \cos(3t))\cos t, 3\cos(3t))$$

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) = ((3 + \cos(3t))\sin t, -(3 + \cos(3t))\cos t, \sin(3t))$$

$$L = \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big\{-(3 + \cos(3t))^2 + 3\cos(3t)\sin(3t)\big\}dt =$$

per simmetria

$$= \int_0^{2\pi} \big\{-(3 + \cos(3t))^2\big\}dt = -\int_0^{2\pi} \big\{9 + \cos^2(3t) + 6\cos(3t)\big\}dt =$$

$$= -\{9 \cdot 2\pi + \pi + 0\} = -19\pi.$$

6.7.

$$\underline{r}(\vartheta) = (R\cos\vartheta, R\sin\vartheta), \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{\pi/4} \big(R\cos\vartheta + R^2\sin^2\vartheta, R^2\sin^2\vartheta\big) \cdot (-R\sin\vartheta, R\cos\vartheta)d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(-R^2\cos\vartheta\sin\vartheta - R^3\sin^3\vartheta + R^3\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right)d\vartheta =$$

$$\int_0^{\pi/4} \left(-R^2\cos\vartheta\sin\vartheta - R^3\sin\vartheta\left(1-\cos^2\vartheta\right) + R^3\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right)d\vartheta =$$

$$\left[-R^2\frac{\sin^2\vartheta}{2} + R^3\left(\cos\vartheta - \frac{\cos^3\vartheta}{3}\right) + R^3\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi/4} = -\frac{R^2}{4} + \frac{R^3}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}R^3.$$

6.8. $\frac{64}{3}\pi^3R^2$.

6.9.
$$\underline{r}'(\vartheta) = \left(-3R\cos^2\vartheta\sin\vartheta, 3R\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right);$$

$$\underline{F}(\underline{r}(\vartheta)) = \left(-R\sin^3\vartheta, R\cos^3\vartheta\right)$$

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{r}(\vartheta))\cdot\underline{r}'(\vartheta)d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-3R\cos^2\vartheta\sin\vartheta, 3R\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right)\cdot\left(-R\sin^3\vartheta, R\cos^3\vartheta\right)d\vartheta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(3R^2\cos^2\vartheta\sin^4\vartheta + 3R^2\sin^2\vartheta\cos^4\vartheta\right)d\vartheta = 3R^2\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta d\vartheta =$$

$$= 3R^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(\sin(2\vartheta))^2 d\vartheta = \frac{3}{4}\pi R^2.$$

6.10. Indichiamo con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ rispettivamente i 4 lati del parallelogramma percorsi in verso antiorario a partire dal vertice $(0,0)$, e calcoliamo separatamente il lavoro su ciascun segmento (v. fig. 6.2).

$\gamma_1 : \underline{r}(x) = (x, 0), x \in [0, 2]$;
$\gamma_2 : \underline{r}(x) = (x, x-2), x \in [2, 3]$;
$\gamma_3 : \underline{r}(x) = (3-x, 1), x \in [0, 2]$;
$\gamma_4 : \underline{r}(x) = (1-x, 1-x), x \in [0, 1]$.

Prima di proseguire, lo studenti osservi con attenzione come sono stati rappresentati gli archi γ_3, γ_4, per far sì che la parametrizzazione traducesse correttamente il verso di percorrenza.

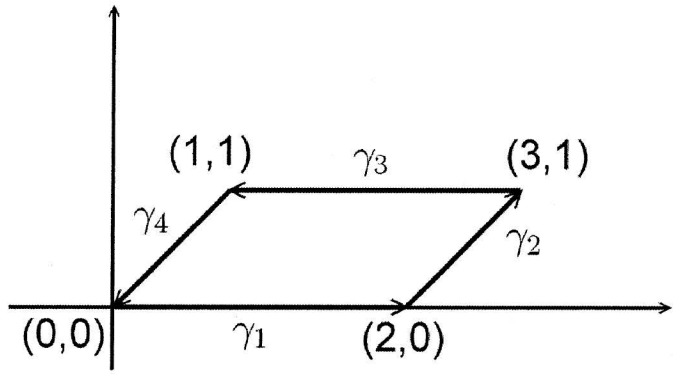


Fig.6.2.

$$\int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^2 (0, x^2) \cdot (1, 0) dx = 0;$$

$$\int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_2^3 (2 - x, x^2) \cdot (1, 1) dx = \int_2^3 (2 - x + x^2) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \frac{35}{6};$$

$$\int_{\gamma_3} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^2 (-1, (3 - x)^2) \cdot (-1, 0) dx = \int_0^2 dx = 2;$$

$$\int_{\gamma_4} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^1 (x - 1, (1 - x)^2) \cdot (-1, -1) dx =$$

$$= \int_0^1 (1 - x - (x - 1)^2) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{(x - 1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6};$$

$$\int_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0 + \frac{35}{6} + 2 + \frac{1}{6} = 8.$$

6.11. *a.* $\underline{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^y = \frac{\partial F_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = e^x = \frac{\partial F_3}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = e^z = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

b. Poiché $\underline{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso, questo implica che $\underline{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$. Potenziale:

$$U(x, y, z) = xe^y + ze^x + e^y + ye^z + 2e^z + c.$$

6.12. $\underline{F}$ è definito per $x \neq 0, y \neq 0$, quindi in ciascuno dei quattro quadranti (aperti). La curva γ è contenuta nel primo quadrante, Q, che è semplicemente connesso. Verifichiamo che $\underline{F}$ è irrotazionale in Q.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Perciò $\underline{F}$ è conservativo in Q. Cerchiamo un potenziale $U(x,y)$ di $\underline{F}$ in Q.

$$U_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2};$$

$$U(x,y) = \int \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \log\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{x} + c(y);$$

$$U_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + c'(y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{y^2};$$

$$c'(y) = -\frac{1}{y^2}; c(y) = \frac{1}{y};$$

$$U(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

La curva γ ha estremi $A(1,1), B\left(10, \frac{1}{10}\right)$. Il lavoro del campo è dunque

$$L = U(B) - U(A) = \log\left(100 + \frac{1}{100}\right) - \frac{1}{10} + 10 - \log 2.$$

6.13. *a.* $\Omega = \{(x,y,z) : z > 0, x^2+y^2 \neq 0\}$ non è semplicemente connesso.
b. Cerchiamo un potenziale U.

$$U_x = \frac{zx}{x^2+y^2} + x\log z \Rightarrow U(x,y,z) = \frac{1}{2}z\log\left(x^2+y^2\right) + \frac{1}{2}x^2\log z + g(y,z);$$

$$U_y = \frac{zy}{x^2+y^2} + g_y(y,z) = \frac{zy}{x^2+y^2} + y\log z \Rightarrow g_y(y,z) = y\log z$$

$$\Rightarrow g(y,z) = \frac{1}{2}y^2\log z + h(z);$$

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}z\log\left(x^2+y^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\log z + h(z);$$

$$U_z = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \frac{x^2+y^2}{2z} + h'(z) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \frac{x^2+y^2}{2z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = c \Rightarrow$$

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}z\log(x^2+y^2) + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\log z + c.$$

Perciò il campo è conservativo in Ω.

6.14. *a.* Verifichiamo che $\underline{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = -e^{-x} = \frac{\partial F_3}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -e^{-z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

b. Poiché $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso, questo implica che $\underline{F}$ è conservativo. Cerchiamo un potenziale.

$$U_x = e^{-y} - ze^{-x} \Rightarrow U(x,y,z) = xe^{-y} + ze^{-x} + g(y,z);$$

$$U_y = -xe^{-y} + g_y(y,z) = e^{-z} - xe^{-y} \Rightarrow g_y(y,z) = e^{-z}$$

$$\Rightarrow g(y,z) = ye^{-z} + h(z);$$

$$U(x,y,z) = xe^{-y} + ze^{-x} + ye^{-z} + h(z);$$

$$U_z = e^{-x} - ye^{-z} + h'(z) = e^{-x} - ye^{-z} + z \Rightarrow h'(z) = z \Rightarrow h(z) = \frac{z^2}{2} + c \Rightarrow$$

$$U(x,y,z) = xe^{-y} + ze^{-x} + ye^{-z} + \frac{z^2}{2} + c.$$

6.15.

a.
$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{2xz-y}{x^2+y^2} & \frac{2yz+x}{x^2+y^2} & \log(x^2+y^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\left(\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\right) - \underline{j}\left(\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\right) +$$

$$+\underline{k}\left(\frac{x^2+y^2-2x(2yz+x)}{x^2+y^2}-\frac{-(x^2+y^2)-2y(2xz-y)}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\underline{k}\left(\frac{2(x^2+y^2)-2x(2yz+x)+2y(2xz-y)}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\underline{k}\left(\frac{2(x^2+y^2)-2(x^2+y^2)-4xyz+4xyz}{x^2+y^2}\right)=0.$$

Il campo è irrotazionale in $\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2\neq 0\}$. Notiamo che Ω (lo spazio privato dell'asse z) non è semplicemente connesso, quindi l'irrotazionalità di $\underline{F}$ non implica la sua conservatività in tutto Ω. D'altro canto F sarà conservativo in qualsiasi sottoinsieme di Ω semplicemente connesso, quindi possiamo cercare un potenziale. Si tratterà di vedere, a posteriori, qual è il più grande insieme su cui tale potenziale è definito.

b.
$$U_x=\frac{2xz-y}{x^2+y^2}\Rightarrow U=\int\frac{2xz-y}{x^2+y^2}dx=$$

$$=z\log(x^2+y^2)-\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+f(y,z);$$

$$U_y=\frac{2yz}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f_y(y,z)=\frac{2yz+x}{x^2+y^2}\Rightarrow f_y(y,z)=0$$

$$\Rightarrow f(y,z)=g(z)\Rightarrow U(x,y,z)=z\log(x^2+y^2)-\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+g(z)$$

$$U_z=\log(x^2+y^2)+g'(z)=\log(x^2+y^2)\Rightarrow g'(z)=0,g(z)=c.$$

$$U(x,y,z)=z\log(x^2+y^2)-\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+c.$$

Abbiamo trovato un potenziale, tuttavia questo è definito per $y\neq 0$, quindi non in tutto Ω. Poiché questo potenziale non è prolungabile su tutto Ω, il campo *non è* conservativo.

c. $\underline{r}(t)=(\cos t,\sin t,0),t\in[0,2\pi];\underline{r}'(t)=(-\sin t,\cos t,0);$

$$\underline{F}(\underline{r}(t))=(-\sin t,\cos t,0);$$

$$L=\int_0^{2\pi}(-\sin t,\cos t,0)\cdot(-\sin t,\cos t,0)dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

d. La curva ora non gira intorno all'asse z, ma è interamente contenuta in una regione semplicemente connessa (ad esempio, il semispazio $x > \frac{1}{2}$) in cui $\underline{F}$ è irrotazionale e quindi conservativo. Poiché la curva è chiusa, allora, il lavoro è nullo.

e. Questa è una curva che gira intorno all'asse z, quindi non si può ripetere l'argomento del punto *d.* D'altro canto non è necessario fare esplicitamente il calcolo: il lavoro lungo questa curva è uguale al lavoro lungo la circonferenza considerata al punto *c*, in quanto una curva può essere deformata con continuità nell'altra senza uscire da Ω. L'irrotazionalità del campo in Ω garantisce quindi che le due curve sono equivalenti ai fini del calcolo del lavoro. Pertanto, $L = 2\pi$ (come nel punto *c*).

Le figure 6.3.a,b illustrano questa argomentazione (già riportata, in un caso piano, nel testo, v. [BPS2], cap.6, §1.5, Esempio 1.12.b). Nella prima figura sono rappresentate le due curve, entrmbe avvolgenti l'asse z; chiamiamole γ (la curva che ci interessa) e c (la cirvonferenza). La seconda figura mostra un cammino chiuso Γ che *non* avvolge l'asse z, e quindi lungo il quale il lavoro del campo è nullo (perché si può trovare un dominio semplicemente connesso contenente questo cammino e nel quale il campo è irrotazionale, e perciò conservativo). D'altro canto osservando la figura vediamo che il lavoro lungo Γ è pari al lavoro lungo γ, *meno* il lavoro lungo c (i lavori lungo i due segmenti si elidono perché opposti); l'annullarsi di questa differenza implica l'uguaglianza del lavoro lungo γ e lungo c.

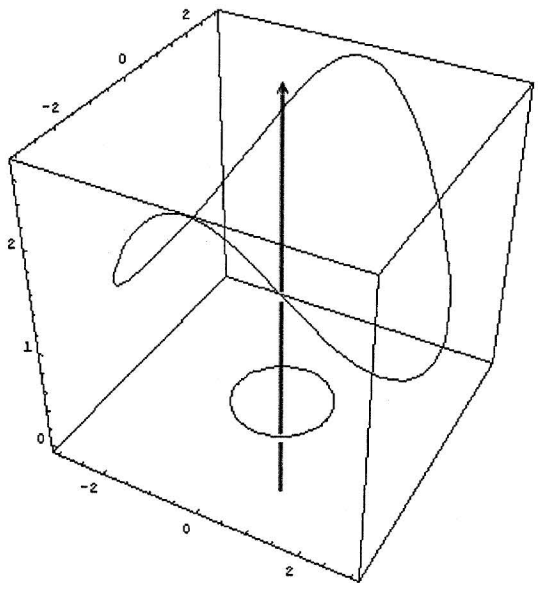


Fig. 6.3.a.

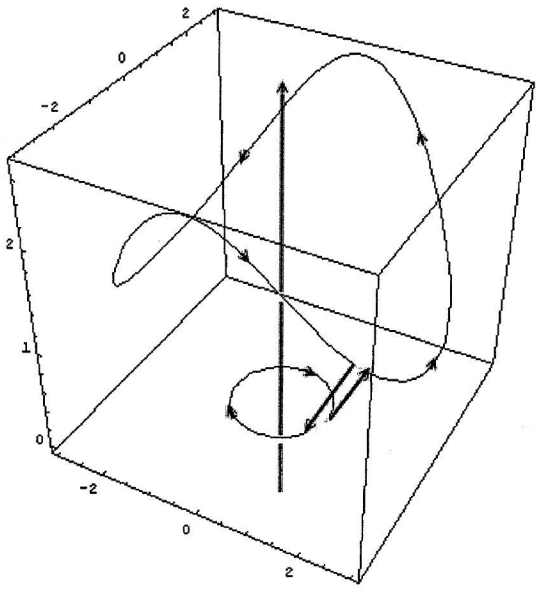


Fig. 6.4.b.

6.16. $$U(x,y,z) = 3xy\log(1+z^2) + z^2\log(1+y^2) + c.$$

$$L = U(1,2,2) - U(0,1,1) = 10\log 5 - \log 2.$$

6.17.
$$U_x(x,y,z) = \frac{y}{1+z^2}$$

$$U(x,y,z) = \frac{xy}{1+z^2} + f(y,z)$$

$$U_y(x,y,z) = \frac{x}{1+z^2} + f_y(y,z) = \frac{x}{1+z^2} - \frac{2yz}{(1+y^2)^2}$$

$$f_y(y,z) = -\frac{2yz}{(1+y^2)^2}; f(y,z) = \frac{z}{1+y^2} + g(z);$$

$$U(x,y,z) = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{z}{1+y^2} + g(z);$$

$$U_z(x,y,z) = -\frac{2xyz}{(1+z^2)^2} + \frac{1}{1+y^2} + g'(z) = -\frac{2z(1+xy)}{(1+z^2)^2} + \frac{1}{1+y^2};$$

$$g'(z) = -\frac{2z}{(1+z^2)^2}; \quad g(z) = \frac{1}{1+z^2} + c;$$

$$U(x,y,z) = \frac{xy+1}{1+z^2} + \frac{z}{1+y^2} + c.$$

6.18. Cerchiamo prima un potenziale $U(x,y,z)$ del campo $\underline{F}$:

$$U(x,y,z) = xe^{-y^2} + ze^{-x^2} - ye^{-z^2}.$$

$$L = U(\underline{r}(1)) - U(\underline{r}(0)) = U(1,1,1) - U(0,0,0) = \frac{1}{e}.$$

6.19. *a.*
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{4yz}{(x+y^2)^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -\frac{1}{(x+y^2)^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2} - \frac{1}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Quindi $\underline{F}$ è irrotazionale in T. Poiché T è semplicemente connesso, ne segue che $\underline{F}$ ammette un potenziale in T.

b. Cerchiamo $U(x,y,z)$ tale che

$$U_x(x,y,z) = -\frac{z}{(x+y^2)^2};$$

$$U(x,y,z) = \int -\frac{z}{(x+y^2)^2}dx = \frac{z}{x+y^2} + f(y,z);$$

$$U_y(x,y,z) = -\frac{2yz}{(x+y^2)^2} + f_y(y,z) = -\frac{2yz}{(x+y^2)^2} + \frac{1}{z} \Rightarrow f_y(y,z) = \frac{1}{z}$$

$$f(y,z) = \int \frac{1}{z}dy = \frac{y}{z} + g(z);$$

$$U(x,y,z) = \frac{z}{x+y^2} + \frac{y}{z} + g(z);$$

$$U_z(x,y,z) = \frac{1}{x+y^2} - \frac{y}{z^2} + g'(z) = \frac{1}{x+y^2} - \frac{y}{z^2} + 2z \Rightarrow g'(z) = 2z;$$

$$g(z) = z^2 + c;$$

$$U(x,y,z) = \frac{z}{x+y^2} + \frac{y}{z} + z^2 + c.$$

6.20. *a.*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{z(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{8yz}{(y^2+z^2)^3} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Quindi $\underline{F}$ è irrotazionale in T. Poiché T è semplicemente connesso, ne segue che $\underline{F}$ ammette un potenziale in T.

b. Cerchiamo $U(x,y,z)$ tale che

$$U_x(x,y,z) = -\frac{yz}{x^2+y^2};$$

$$U(x,y,z)=\int -\frac{yz}{x^2+y^2}dx = -z\arctan\frac{x}{y}+f(y,z);$$

$$U_y(x,y,z)=\frac{xz}{x^2+y^2}+f_y(y,z)=\frac{xz}{x^2+y^2}-\frac{2y}{(y^2+z^2)^2}\Rightarrow f_y(y,z)=-\frac{2y}{(y^2+z^2)^2}$$

$$f(y,z)=\int -\frac{2y}{(y^2+z^2)^2}dy=\frac{1}{y^2+z^2}+g(z);$$

$$U(x,y,z)=-z\arctan\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2+z^2}+g(z);$$

$$U_z(x,y,z)=-\arctan\frac{x}{y}-\frac{2z}{(y^2+z^2)^2}+g'(z)=-\arctan\frac{x}{y}-\frac{2z}{(y^2+z^2)^2}+\frac{1}{z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(z)=\frac{1}{z};\quad g(z)=\log z+c;$$

$$U(x,y,z)=-z\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{y^2+z^2}+\log z+c.$$

6.21. *a.*

$$\underline{r}(x)=(x,x^2);\underline{r}'(x)=(1,2x);$$

$$\underline{F}(\underline{r}(x))=\frac{(x^2,x)}{x^2+x^4};$$

$$L=\int_{-1}^{1}\underline{F}(\underline{r}(x))\cdot\underline{r}'(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{(x^2,x)}{x^2+x^4}\cdot(1,2x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{3x^2}{x^2(1+x^2)}dx=$$

$$=2\int_0^1\frac{3}{1+x^2}dx=6[\arctan x]_0^1=6\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi.$$

b. Verifichiamo le condizioni necessarie:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

le condizioni non sono verificate in nessun aperto del piano, il campo non può essere conservativo.

6.22. *a.* Verifichiamo l'irrotazionalità:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -2xe^{-y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = e^{yz^2}\left(3z^2 + 2yz^4\right) = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Quindi $\underline{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^3$. Poiché $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso, ne segue che $\underline{F}$ ammette un potenziale in $\mathbb{R}^3$.

b. $$U(x,y,z) = x^2e^{-y} + ze^{yz^2} - e^{-z} + c.$$

6.23. Cerchiamo $U(x,y,z)$ tale che

$$U_x(x,y,z) = \frac{y}{1+x^2y^2};$$

$$U(x,y,z) = \int \frac{y}{1+x^2y^2}dx = \arctan(xy) + f(y,z);$$

$$U_y(x,y,z) = \frac{x}{1+x^2y^2} + f_y(y,z) = \frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{2y}{y^2+z^2} + e^{-z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_y(y,z) = \frac{2y}{y^2+z^2} + e^{-z};$$

$$f(y,z) = \int \left(\frac{2y}{y^2+z^2} + e^{-z}\right)dy = \log\left(y^2+z^2\right) + ye^{-z} + g(z);$$

$$U(x,y,z) = \arctan(xy) + \log\left(y^2+z^2\right) + ye^{-z} + g(z);$$

$$U_z(x,y,z) = \frac{2z}{y^2+z^2} - ye^{-z} + g'(z) = \frac{2z}{y^2+z^2} - e^{-z}(y+1) \Rightarrow g'(z) = -e^{-z};$$

$$g(z) = e^{-z} + c;$$

$$U(x,y,z) = \arctan(xy) + \log\left(y^2+z^2\right) + ye^{-z} + e^{-z} + c.$$

6.24. $$\underline{r}(t) = \left(t, t^2, t^3\right); \quad \underline{r}'(t) = \left(1, 2t, 3t^2\right);$$

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) = \left(t^3, 2t^2, t\right);$$

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^2 \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^2 \left(t^3 + 4t^3 + 3t^3\right) dt = \int_0^2 8t^3\, dt = \left[2t^4\right]_0^2 = 32.$$

6.25. $\underline{r}(\vartheta) = \left(e^\vartheta \cos\vartheta, e^\vartheta \sin\vartheta\right)$, $\vartheta \in [-2\pi, 2\pi]$.

$$\underline{r}'(\vartheta) = e^\vartheta(\cos\vartheta - \sin\vartheta, \sin\vartheta + \cos\vartheta)$$

$$\underline{F}(\underline{r}(\vartheta)) = e^\vartheta(\sin\vartheta, -\cos\vartheta).$$

$$L = \int_{-2\pi}^{2\pi} \underline{F}(\underline{r}(\vartheta)) \cdot \underline{r}'(\vartheta)\, d\vartheta =$$

$$= \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{2\vartheta}\left(\cos\vartheta\sin\vartheta - \sin^2\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta - \cos^2\vartheta\right) d\vartheta =$$

$$= -\int_{-2\pi}^{2\pi} e^{2\vartheta}\, d\vartheta = -\frac{1}{2}\left[e^{2\vartheta}\right]_{-2\pi}^{2\pi} = -\frac{1}{2}\left(e^{4\pi} - e^{-4\pi}\right).$$

6.26. *a.* $$(F_1)_y = \frac{y + y^3}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} = (F_1)_y$$

b. Poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso e il campo è ivi irrotazionale, il campo è conservativo.

c. $$U(x, y) = x\sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

6.27. *a.* $$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = 6\int_0^\pi \left(5\cos^2\vartheta - 3\right)\sin\vartheta\, d\vartheta = -16.$$

b. $$(F_1)_y = 2y = (F_2)_x$$

Il campo è irrotazionale in tutto $\mathbb{R}^2$, perciò è conservativo. Si trova il potenziale:

$$U(x, y) = x^3 + xy^2.$$

γ ha estremi: $A = \underline{r}(0) = (2, 0)$, $B = \underline{r}(\pi) = (-2, 0)$. Il lavoro fatto è:

$$L = U(-2, 0) - U(2, 0) = -16.$$

6.28.

a. $$(F_1)_y = \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)_y = \frac{2y(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{2y(x^2+y^2) - 4y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

$$(F_2)_x = \left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)_x = -\frac{2y(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)2xy}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{-2y(x^2+y^2) + 8x^2y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = (F_1)_y$$

per ogni $(x,y) \neq (0,0)$, pertanto il campo è irrotazionale in tale insieme.

b. Poiché l'insieme in cui il campo è irrotazionale non è semplicemente connesso, non è possibile concludere immediatamente che il campo è conservativo: occorre cercare un potenziale.

$$U_y = F_2 = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$U = \int -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy = \frac{x}{x^2+y^2} + f(x);$$

$$U_x = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_x + f'(x) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + f'(x) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

scegliendo $f'(x) = 0$, cioè $f(x) = c$. Pertanto un potenziale è

$$U(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

c. Gli estremi della curva sono i punti $A(R,0)$; $B(-R,0)$, quindi il lavoro è:

$$U(B) - U(A) = U(-R,0) - U(R,0) = \frac{-R}{R^2} - \frac{R}{R^2} = -\frac{2}{R}.$$

6.29.

a. Il campo non è conservativo nel piano

b. $L = -1$.

6.30. $L = \frac{\pi}{2}R^2 - \frac{4}{3}R^3$.

6.31.

a. γ è regolare, non è chiusa. $ds = \sqrt{1+4e^{2t}}\,dt$.

b. $\frac{1}{3}\left[(1+4e^{4\pi})^{3/2} - 5^{3/2}\right]$.

c. $L = 1 - e^{2\pi}$.

6.32. *a.*

$$(F_1)_y = 0;\ (F_2)_x = 0$$

$$(F_1)_z = 2x;\ (F_3)_x = 2x;$$

$$(F_2)_z = 4y^3;\ (F_3)_y = 4y^3.$$

Perciò $\underline{F}$ è irrotazionale in tutto $\mathbb{R}^2$.

b. Poiché $\underline{F}$ è irrotazionale in tutto $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, $\underline{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$. Determiniamo un potenziale.

$$U_x(x,y,z) = 2xz;\ U(x,y,z) = \int 2xz\,dx = x^2z + f(y,z)$$

$$U_y(x,y,z) = f_y(y,z) = 4y^3z;\ f(y,z) = \int 4y^3z\,dy = y^4z + g(z)$$

$$U(x,y,z) = x^2z + y^4z + g(z);$$

$$U_z(x,y,z) = x^2 + y^4 + g'(z) = 1 + x^2 + y^4;\ g'(z) = 1;\ g(z) = z + c$$

$$U(x,y,z) = x^2z + y^4z + z + c = z\left(1 + x^2 + y^4\right) + c$$

c. La curva ha estremi $A(1,0,0), B(2,2,1)$. Il lavoro è:

$$L = U(B) - U(A) = (1+4+16) - 0 = 21.$$

6.33. *a.*

$$(F_1)_y = \left(\frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\right)_y = \frac{-3xy}{(1+x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$(F_2)_x = \left(\frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\right)_x = \frac{-3xy}{(1+x^2+y^2)^{5/2}}$$

Il campo è irrotazionale in tutto il suo dominio di definizione ($\mathbb{R}^2$).

b. Poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso e il campo è ivi irrotazionale, il campo è conservativo.

c. Sappiamo già che il campo è conservativo.

$$U_x = \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}};\ U(x,y) = \int \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + f(y);$$

$$U_y = \left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + f(y)\right)_y =$$

$$= \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} + f'(y) = \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow f'(y) = 0$$

cioè f costante. Un potenziale di $\underline{F}$ dunque è:

$$U(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

d. L'arco di curva:

$$\gamma : \begin{cases} x = 3t^2 - \sin\pi t \\ y = \cos\pi t \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

ha estremi: $A(0,1)$, $B(3,-1)$. Il lavoro è dato da:

$$L = U(B) - U(A) = U(3,-1) - U(0,1) = -\frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6.34. *a.*

$$(F_1)_y = -\frac{4xyz}{(x^2+y^2)^3};\ (F_2)_x = -\frac{4xyz}{(x^2+y^2)^3}$$

$$(F_1)_z = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2};\ (F_3)_x = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$(F_2)_z = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2};\ (F_3)_y = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Il campo è irrotazionale nel suo dominio di definizione, $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{x = y = 0\}$.

b. Poiché Ω *non è* semplicemente connesso, non si può concludere da questo solo fatto che $\underline{F}$ sia conservativo in tutto il suo dominio di definizione.

c. Cerchiamo un potenziale di $\underline{F}$.

$$U_x(x,y,z) = -\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2};$$

$$U(x,y,z) = \int -\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}dx = \frac{z}{x^2+y^2} + f(y,z).$$

$$U_y(x,y,z) = -\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2} + f_y(y,z) = -\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}$$

quindi $f_y(y,z) = 0$, ossia $f(y,z) = g(z)$, e

$$U(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2} + g(z).$$

$$U_z(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2} + g'(z) = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+z^2}$$

quindi $$g'(z) = \frac{1}{1+z^2},\ g(z) = \arctan z + c,$$

$$U(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2} + \arctan z.$$

Poiché abbiamo trovato un potenziale, possiamo (solo ora) concludere che il campo è conservativo in Ω.

d. La curva ha estremi $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$, il lavoro è

$$L = U(1,1,1) - U(0,0,0) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

6.2. Area e integrali di superficie

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 4, §3; cap. 6, §3.

Esempi svolti

Esempio 6.5. Calcolare l'integrale di superficie

$$I = \int\int_S y dS$$

dove S è la superficie $\begin{cases} x = t\cos u \\ y = 2t\sin u \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0,1], u \in [0,\pi].$

Calcoliamo anzitutto:

$$\underline{r}_t \times \underline{r}_u = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos u & 2\sin u & 1 \\ -t\sin u & 2t\cos u & 0 \end{vmatrix} = (-2t\cos u, -t\sin u, 2t).$$

$$dS = \sqrt{4t^2\cos^2 u + t^2\sin^2 u + 4t^2}\, dt du = t\sqrt{4\cos^2 u + \sin^2 u + 4}\, dt du.$$

$$\int\int_S y dS = \int_0^1 \left(\int_0^\pi 2t\sin u \cdot t\sqrt{4\cos^2 u + \sin^2 u + 4} du \right) dt =$$

$$= \left(\int_0^1 2t^2 dt \right) \left(\int_0^\pi \sin u \sqrt{5 + 3\cos^2 u}\, du \right) = \quad [\cos u = s]$$

$$= \left[\frac{2}{3} t^3 \right]_0^1 \left(\int_{-1}^1 \sqrt{5 + 3s^2}\, ds \right) = \frac{2}{3} \cdot 2 \int_0^1 \sqrt{5 + 3s^2}\, ds = \left[\sqrt{3}s = \sqrt{5}\mathrm{Sh}w \right]$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\mathrm{SettSh}\sqrt{\frac{3}{5}}} \sqrt{5}\mathrm{Ch}w \sqrt{\frac{5}{3}}\mathrm{Ch}w dw = \frac{20}{3\sqrt{3}} \left[\frac{\mathrm{Ch}w\mathrm{Sh}w + w}{2} \right]_0^{\mathrm{SettSh}\sqrt{\frac{3}{5}}} =$$

$$= \frac{10}{3\sqrt{3}}\left[\sqrt{\frac{8}{5}}\sqrt{\frac{3}{5}} + \text{SettSh}\sqrt{\frac{3}{5}}\right] = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{10}{3\sqrt{3}}\text{SettSh}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Esempio 6.6. Si scrivano le equazioni parametriche della superficie Σ che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z l'arco di curva descritto nel piano xz dall'equazione $z = (1-x)^2$ per $x \in [0,1]$ e se ne calcoli l'elemento d'area. Si calcoli quindi l'integrale di superficie

$$\int\int_\Sigma \sqrt{\frac{z}{x^2+y^2}}\, dS.$$

La curva γ di equazioni $x = t, z = (1-t)^2, t \in [0,1]$ genera per rotazione attorno all'asse z la superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = t\cos\vartheta \\ y = t\sin\vartheta \\ z = (1-t)^2 \end{cases} \qquad t \in [0,1], \vartheta \in [0, 2\pi]$$

che ha elemento d'area

$$dS = t\sqrt{1 + 4(1-t)^2}\, dt d\vartheta.$$

$$\int\int_\Sigma \sqrt{\frac{z}{x^2+y^2}}\, dS = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2}}\, t\sqrt{1+4(1-t)^2}\, dt\right) d\vartheta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 (1-t)\sqrt{1+4(1-t)^2}\, dt =$$

$$= 2\pi\left[\frac{-\left(1+4(1-t)^2\right)^{3/2}}{12}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2}-1\right).$$

Esempio 6.7. Si consideri la superficie conica Σ di equazione

$$z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \le r^2.$$

Supponendo che si tratti di una superficie materiale di densità variabile $\rho = 3z$,

calcolare le coordinate del baricentro. Fornire un risultato esplicito, dipendente dall'unico parametro r che figura nel testo dell'esercizio.

Si tratta di una superficie assegnata in forma cartesiana $z = f(x, y)$, per la quale si ha:

$$dS = \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}\, dxdy.$$

Poiché $$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

si ha $$dS = \sqrt{2} dxdy.$$

Per simmetria il baricentro avrà $x_C = y_C = 0$. Calcoliamo

$$z_C = \frac{\int\int_\Sigma z \cdot 3z dS}{\int\int_\Sigma 3z dS} = \frac{\int\int_{x^2+y^2\le r^2} 3(x^2+y^2)\sqrt{2} dxdy}{\int\int_{x^2+y^2\le r^2} 3\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2} dxdy} =$$

$$= \frac{2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho}{2\pi \int_0^r \rho^2 d\rho} = \frac{\frac{r^4}{4}}{\frac{r^3}{3}} = \frac{3}{4} r.$$

Perciò il baricentro è $$\left(0, 0, \frac{3}{4} r\right).$$

6.2.A. Applicazioni geometrico-fisiche degli integrali di superficie

6.35.★ Momento d'inerzia di una superficie sferica. Calcolare il momento d'inerzia di una superficie sferica Σ omogenea di massa M e raggio R rispetto a un asse passante per il centro.

6.36.★ Momento d'inerzia di una superficie conica. Si consideri la superficie laterale Σ di un cono di altezza h e raggio R. Supponendo si tratti di una superficie materiale omogenea di massa M, calcolarne il momento d'inerzia rispetto all'asse del cono.

6.37. Centroide di una superficie semisferica. Calcolare le coordinate del centroide della superficie semisferica omogenea di raggio R e centro l'origine, compresa nel semispazio $z \geq 0$. Fornire un risultato *esplicito*, dipendente dall'unico parametro R che figura nel testo dell'esercizio.

6.38.★ Area e momento d'inerzia di una superficie torica. Si consideri la superficie torica

$$\Sigma : \begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, 2\pi].$$

a. Calcolare l'area di Σ.

b. Calcolare il momento d'inerzia di Σ, supponendola una superficie materiale omogenea di massa M, rispetto all'asse z, oppure:

c. rispetto all'asse x.

6.39.★ Area e momento d'inerzia della superficie di un paraboloide. Si consideri la superficie Σ

$$z = x^2 + y^2 \text{ per } x^2 + y^2 \leq R^2.$$

a. Si calcoli l'area della superficie.

b. Si calcoli il momento d'inerzia della superficie rispetto all'asse z, supponendola una superficie materiale omogenea di massa M.

6.40.★ Area della superficie della pseudosfera. Si calcoli l'area della superficie della *pseudosfera*, che si ottiene facendo attorno all'asse x la curva (*trattrice*), di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R(t - \tanh t) \\ y = \frac{R}{\cosh t} \end{cases} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Esempio 6.8. Campo elettrico generato da una superficie sferica carica. Si consideri una superficie sferica Σ di raggio R e centro l'origine, su cui vi sia una distribuzione uniforme di carica elettrica, cioè una densità di carica pari a $Q/4\pi R^2$, dove Q è la carica totale. Calcoliamo l'intensità del campo elettrico nel generico punto dello spazio esterno alla superficie.

Possiamo scegliere il riferimento in modo che il punto in cui ci interessa calcolare il campo sia $(0, 0, L)$, con $L > R$. Il campo elettrico sarà assegnato dall'integrale di superficie:

$$\underline{F} = k \int\int_{\Sigma} \frac{(x, y, z-L)}{\left(x^2+y^2+(z-L)^2\right)^{3/2}} \frac{Q}{4\pi R^2} dS$$

(dove k è la costante di Coulomb). Per simmetria sarà $F_x = F_y = 0$, calcoliamo perciò

$$F_z = \frac{kQ}{4\pi R^2} \int\int_{\Sigma} \frac{z-L}{\left(x^2+y^2+(z-L)^2\right)^{3/2}} dS =$$

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]; \quad dS = R^2 \sin\varphi d\varphi d\vartheta$$

$$= \frac{kQ}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{R\cos\varphi - L}{\left(R^2\sin^2\varphi + (R\cos\varphi - L)^2\right)^{3/2}} R^2 \sin\varphi d\varphi \right) d\vartheta =$$

$$= \frac{kQ}{4\pi} 2\pi \int_0^{\pi} \frac{R\cos\varphi - L}{(R^2 + L^2 - 2LR\cos\varphi)^{3/2}} \sin\varphi d\varphi =$$

$$[\cos\varphi = t] = \frac{kQ}{2} \int_{-1}^{1} \frac{Rt - L}{(R^2 + L^2 - 2LRt)^{3/2}} dt.$$

Da qui in poi il calcolo è identico a quello fatto nel Cap.5, §5.2, Esempio 5.17 (calcolo del campo gravitazionale generato da una sfera piena). L'ultimo integrale scritto vale $-\frac{2}{L^2}$, perciò si conclude

$$F_z = -\frac{kQ}{2} \frac{2}{L^2} = -\frac{kQ}{L^2},$$

che è uguale al campo generato nello stesso punto da una carica puntiforme Q posta nel centro della sfera.

6.2.B. Esercizi vari

6.41. Calcolare l'integrale di superficie

$$I = \int\int_S (zx^2 + y^2)\,dS$$

dove S è la semisfera descritta in coordinate sferiche da

$$S = \left\{(\rho, \vartheta, \varphi) : \rho = R, \vartheta \in [0, 2\pi], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

6.42.★ Si consideri la superficie di rotazione Σ ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$ per $x \in [0, 3]$. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e aver calcolato il suo elemento d'area, si calcoli l'integrale di superficie

$$\int\int_\Sigma |x|\,dz.$$

6.43.★ Si consideri la porzione della superficie sferica definita da

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{R}{2}; z > 0\right\}$$

(Si consiglia di fare un disegno per capire la geometria e saper esprimere Σ in forma parametrica standard). Calcolare l'area e il centroide di Σ.

6.44. Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\int\int_\Sigma \frac{xyz}{(1 + z^2)(x^2 + y^2)}\,dS$$

dove Σ è la seguente porzione di superficie sferica di raggio R:

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

6.45.★ Si scrivano le equazioni parametriche della superficie Σ che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z l'arco di curva descritto nel piano xz dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ z = \frac{t^3}{3} \end{cases} \quad t \in \left[0, \sqrt{3}\right]$$

e se ne scriva l'elemento d'area. Si calcoli poi l'area di tale superficie.

6.46.★ Calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_T x^2 dS$$

dove T è la superficie torica definita da:

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

6.47.★ Sia S la semisfera superiore di centro l'origine e raggio R. Calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_S (x^2 + z) dS.$$

6.48. Sia Σ una superficie sferica materiale di raggio R, centro l'origine e densità superficiale $\rho(x, y, z) = 1 + z^2$. Calcolare il momento d'inerzia della superficie Σ rispetto all'asse z.

6.49. Calcolare le coordinate del centroide della porzione di superficie sferica omogenea di raggio R e centro l'origine, compresa nel primo ottante (ovvero: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$). Fornire un risultato *esplicito*, dipendente dall'unico parametro R che figura nel testo dell'esercizio. (*Si suggerisce di fare una figura...*).

6.50. Calcolare il momento d'inerzia della semisfera di centro l'origine e raggio R, compresa nel semispazio $z \geq 0$, rispetto all'asse x, nell'ipotesi che sia una superficie materiale omogenea di massa M.

6.51. Scrivere le equazioni parametriche della superficie Σ che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse x l'arco di curva $y = 1/x$ per $x \in [1, 2]$. Scrivere quindi la matrice jacobiana della superficie, verificare se la superfcicie è regolare (indicando altrimenti i punti singolari *della superficie*) e scrivere l'elemento d'area.

Infine, calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_{\Sigma} \frac{1}{x^4}\, dS.$$

Soluzioni § 6.2

6.35. Equazioni parametriche della sfera:

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]$$

Se non si ricorda l'elemento d'area sulla sfera (sarebbe bene ricordarlo!), il modo più veloce per ricavarlo è vedere la sfera come superficie di rotazione della curva

$$\begin{cases} x = a(\varphi) = R\sin\varphi \\ z = b(\varphi) = R\cos\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi]$$

e utilizzare la formula per l'elemento d'area delle superfici di rotazione (v. Cap.4, § 4.1.C)

$$dS = |a(\varphi)|\sqrt{a'(\varphi)^2 + b'(\varphi)^2}\,d\varphi d\vartheta,$$

formula che nel nostro caso dà $dS = R^2\sin\varphi d\varphi d\vartheta$.

Quindi:

$$I = \frac{M}{|\Sigma|}\int\int_\Sigma (x^2+y^2)dS = \frac{M}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi (R^2\sin^2\varphi)R^2\sin\varphi d\varphi\right)d\vartheta =$$

$$= \frac{M}{4\pi R^2}\cdot 2\pi R^4\int_0^\pi (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{MR^2}{2}\left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^\pi = \frac{MR^2}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}MR^2.$$

6.36. La superficie si può rappresentare come:

$$\begin{cases} x = t\cos\vartheta \\ y = t\sin\vartheta \\ z = t\frac{h}{R} \end{cases} \quad t \in [0, R], \vartheta \in [0, 2\pi].$$

$$\underline{r}_t \times \underline{r}_\vartheta = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos\vartheta & \sin\vartheta & \frac{h}{R} \\ -t\sin\vartheta & t\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} = \left(-t\frac{h}{R}\cos\vartheta, t\frac{h}{R}\sin\vartheta, t\right).$$

Elemento d'area: $$dS = t\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}\,dt\,d\vartheta$$

Area: $|\Sigma| = \pi R\sqrt{R^2+h^2}$.

Momento d'inerzia:

$$I=\frac{M}{|\Sigma|}\int\int_{\Sigma}(x^2+y^2)dS = \frac{M}{\pi R\sqrt{R^2+h^2}}\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^R t^2\cdot t\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}\,dt =$$

$$= \frac{M}{\pi R\sqrt{R^2+h^2}}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^4}{4}\cdot\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{R} = \frac{1}{2}MR^2.$$

6.37. $\left(0,0,\frac{R}{2}\right)$

6.38. *a.* $a(\varphi) = (R+r\cos\varphi); b(\varphi) = r\sin\varphi;$

$$dS = |a(\varphi)|\sqrt{a'(\varphi)^2+b'(\varphi)^2}d\varphi d\vartheta = r(R+r\cos\varphi)d\varphi d\vartheta.$$

$$|\Sigma| = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} r(R+r\cos\varphi)d\varphi\right)d\vartheta =$$

$$= 2\pi r\left(2\pi R + r\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\right) = 2\pi r\cdot 2\pi R.$$

b. $$I = \frac{M}{|\Sigma|}\int\int_{\Sigma}(x^2+y^2)dS =$$

$$= \frac{M}{2\pi r\cdot 2\pi R}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}(R+r\cos\varphi)^2 r(R+r\cos\varphi)d\varphi\right)d\vartheta =$$

$$= \frac{M}{2\pi R}\int_0^{2\pi}(R^3+3R^2r\cos\varphi+3Rr^2\cos^2\varphi+r^3\cos^3\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{M}{2\pi R}\{2\pi R^3+0+3Rr^2\cdot\pi+0\} = M\left(R^2+\frac{3}{2}r^2\right).$$

c. $$I = \frac{M}{|\Sigma|}\int\int_{\Sigma}(y^2+z^2)dS =$$

$$= \frac{M}{2\pi r \cdot 2\pi R}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\{(R+r\cos\varphi)^2\sin^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\}r(R+r\cos\varphi)d\varphi\right)d\vartheta =$$

$$= \frac{M}{4\pi^2 rR}\int_0^{2\pi}\left\{r(R+r\cos\varphi)^3\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta d\vartheta\right) + 2\pi r^3\sin^2\varphi(R+r\cos\varphi)\right\}d\varphi =$$

$$= \frac{M}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\{(R+r\cos\varphi)^3 + 2r^2\sin^2\varphi(R+r\cos\varphi)\}d\varphi =$$

$$= \frac{M}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\Big\{R^3 + 3R^2 r\cos\varphi + 3Rr^2\cos^2\varphi +$$

$$+ r^3\cos^3\varphi + 2r^2 R\sin^2\varphi + 2r^3\cos\varphi\sin^2\varphi d\varphi\Big\} =$$

$$= \frac{M}{4\pi R}(2\pi R^3 + 0 + 3Rr^2\pi + 0 + 2r^2 R\pi + 0) = M\left(\frac{1}{2}R^2 + \frac{5}{4}r^2\right).$$

6.39. *a.* $\nabla(x^2+y^2) = (2x, 2y); dS = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy;$

$$|\Sigma| = \iint_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy = 2\pi\int_0^R\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho =$$

$$= 2\pi\left[\frac{2}{3\cdot 4\cdot 2}(1+4\rho^2)^{3/2}\right]_0^R = \frac{\pi}{6}\left[(1+4R^2)^{3/2} - 1\right].$$

b.
$$I = \frac{M}{|\Sigma|}\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS =$$

$$= \frac{M}{|\Sigma|}\iint_{x^2+y^2\le R^2}(x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy =$$

$$= \frac{M}{|\Sigma|}2\pi\int_0^R\sqrt{1+4\rho^2}\rho^3 d\rho =$$

$$\left[\sqrt{1+4\rho^2}=t;\,1+4\rho^2=t^2;\,8\rho d\rho=2tdt;\,\rho^2=\frac{1}{4}\left(t^2-1\right)\right]$$

$$=\frac{M}{|\Sigma|}2\pi\int_1^{\sqrt{1+4R^2}}t\cdot\frac{1}{4}\left(t^2-1\right)\cdot\frac{1}{4}tdt=\frac{M\frac{\pi}{8}}{|\Sigma|}\int_1^{\sqrt{1+4R^2}}\left(t^4-t^2\right)dt=$$

$$=\frac{M\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{6}\left[\left(1+4R^2\right)^{3/2}-1\right]}\left[t^5-t^3\right]_1^{\sqrt{1+4R^2}}=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{M}{\left[\left(1+4R^2\right)^{3/2}-1\right]}\left[\left(1+4R^2\right)^{5/2}-\left(1+4R^2\right)^{3/2}\right].$$

6.40. La superficie ha equazioni parametriche

$$\Sigma:\begin{cases}x=R(t-\tanh t)\\ y=\frac{R}{\cosh t}\cos\vartheta\\ z=\frac{R}{\cosh t}\sin\vartheta\end{cases}\qquad\vartheta\in[0,2\pi],t\in\mathbb{R}.$$

L'elemento d'area è:

$$dS=|a(t)|\sqrt{a'(t)^2+b'(t)^2}dtd\vartheta\text{ con }a(t)=\frac{R}{\cosh t},b(t)=R(t-\tanh t)$$

cioè
$$dS=\frac{R}{\cosh t}\sqrt{\left[\left(\frac{R}{\cosh t}\right)'\right]^2+\left[R(t-\tanh t)'\right]^2}dtd\vartheta=$$

$$=\frac{R^2}{\cosh t}\sqrt{\frac{\sinh^2 t}{\cosh^4 t}+\frac{\sinh^4 t}{\cosh^4 t}}dtd\vartheta=$$

$$=\frac{R^2}{\cosh t}\frac{|\sinh t|}{\cosh^2 t}\sqrt{1+\sinh^2 t}dtd\vartheta=R^2\frac{|\sinh t|}{\cosh^2 t}dtd\vartheta$$

$$|\Sigma|=\int\int_\Sigma dS=\int_0^{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}}R^2\frac{|\sinh t|}{\cosh^2 t}dt\right)d\vartheta=2\pi R^2\cdot 2\int_0^{+\infty}\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}dt=$$

$$=4\pi R^2\left[-\frac{1}{\coth t}\right]_0^{+\infty}=4\pi R^2.$$

La pseudosfera, quindi, non ostante sia una superficie illimitata, ha un'area totale finita e pari a quella della sfera che ha il medesimo cerchio massimo (v. fig. 6.3).

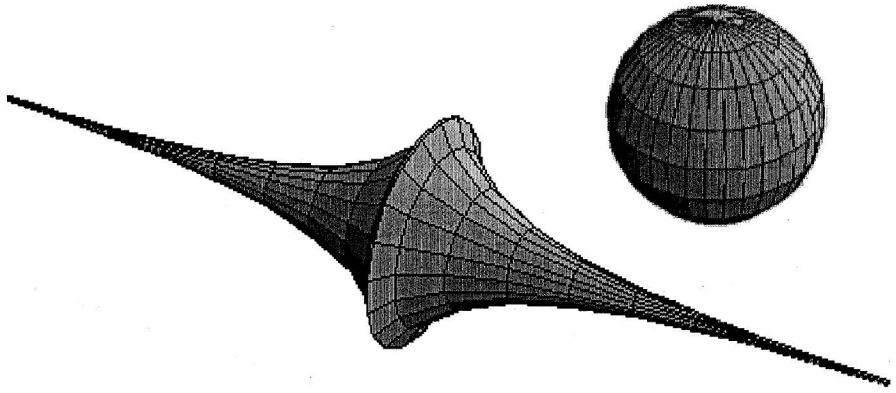


Fig. 6.5. Una pseudosfera e una sfera con lo stesso cerchio massimo hanno la stessa area.

6.41.

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(R\cos\varphi R^2 \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + R^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta \right) R^2 \sin\varphi d\varphi \right) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4} R^5 \pi + \frac{2}{3} R^4 \pi.$$

6.42. Le equazioni parametriche di Σ si ottengono dalla rotazione della curva

$$\begin{cases} x(t) = t \\ z(t) = \frac{2}{3} t^{3/2} \end{cases} \quad t \in [0, 3].$$

perciò sono:

$$\begin{cases} x = t\cos\vartheta \\ y = t\sin\vartheta \\ z = \frac{2}{3} t^{3/2} \end{cases} \quad \text{con } \vartheta \in [0, 2\pi], t \in [0, 3].$$

$$dS = |x(t)| \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt d\vartheta = t\sqrt{1+t}\, dt d\vartheta$$

$$\int\int_\Sigma |x| dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 |t\cos\vartheta| t\sqrt{1+t} dt \right) d\vartheta = \int_0^{2\pi} |\cos\vartheta| d\vartheta \cdot \int_0^3 t^2 \sqrt{1+t} dt =$$

$$\left[u = \sqrt{1+t}; u^2 = 1+t; 2udu = dt; t^2 = (u^2-1)^2 \right] =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta d\vartheta \int_1^2 (u^2-1)^2 \cdot u \cdot 2u du = 8\int_1^2 (u^6 - 2u^4 + u^2) du =$$

$$= 8\left[\frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^3}{3}\right]_1^2 = 8\left(\frac{127}{7} - \frac{62}{5} + \frac{7}{3}\right) = 8 \cdot \frac{848}{105} = \frac{6784}{105}.$$

6.43. In forma parametrica è:

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad \text{con } \vartheta \in [0, 2\pi], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$$

Inoltre $dS = R^2\sin\varphi \, d\varphi d\vartheta$, perciò

$$|\Sigma| = \int\int_\Sigma dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} R^2 \sin\varphi \, d\varphi \right) d\vartheta = 2\pi R^2 [-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Per simmetria il centroide ha $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Invece:

$$\overline{z} = \frac{1}{|\Sigma|}\int\int_\Sigma z dS = \frac{1}{2\pi R^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} R\cos\varphi R^2 \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{R}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{R}{8\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

6.44. $$I = \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{R^3\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta}{(1 + R^2\cos^2\varphi)R^2\sin^2\varphi} \right) R^2\sin\varphi d\varphi \right) d\vartheta =$$

$$= R^3 \left(\int_0^{\pi/4} \cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1 + R^2\cos^2\varphi} d\varphi \right) = \frac{R}{8}\log(1 + R^2).$$

6.45. Superficie di rotazione:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2}\cos\vartheta \\ y = \frac{t^2}{2}\sin\vartheta \\ z = \frac{t^3}{3} \end{cases} \quad t \in \left[0, \sqrt{3}\right], \vartheta \in [0, 2\pi].$$

$$dS = |x(t)|\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}dtd\vartheta = \frac{t^2}{2}\sqrt{t^2+t^4}dtd\vartheta = \frac{t^3}{2}\sqrt{1+t^2}dtd\vartheta.$$

$$|\Sigma| = \int\int_\Sigma dS = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^3}{2}\sqrt{1+t^2}dt\right)d\vartheta = \pi\int_0^{\sqrt{3}} t^3\sqrt{1+t^2}dt =$$

$$u = \sqrt{1+t^2};\, udu = tdt;\, t^2 = u^2-1;\, u\in[1,2]$$

$$= \pi\int_1^2 (u^2-1)u^2du = \pi\left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right]_1^2 = \pi\left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3}\right) = \frac{58}{15}\pi.$$

6.46. Si calcola l'elemento d'area:

$$dS = (R + r\cos\varphi)rd\varphi d\vartheta$$

Quindi $$\int\int_T x^2dS = \int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{2\pi}\left[(R+r\cos\varphi)^2\cos^2\vartheta\right](R+r\cos\varphi)rd\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi}(R+r\cos\varphi)^3rd\varphi =$$

$$= \pi r\int_0^{2\pi}\left(R^3 + 3R^2r\cos\varphi + 3Rr^2\cos^2\varphi + r^3\cos^3\varphi\right)d\varphi =$$

(usando le simmetrie e l'integrale notevole di $\cos^2\varphi$)

$$= \pi r\left\{R^3\cdot 2\pi + 0 + 3Rr^2\cdot\pi + 0\right\} =$$

$$= \pi^2\left(2rR^3 + 3r^3R\right) = \pi^2rR\left(2R^2 + 3r^2\right).$$

6.47.

$$S:\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad 0\le\vartheta\le 2\pi;\, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2};\; dS = R^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$\int\int_S (x^2+z)dS = \int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + R\cos\varphi\right)R^2\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= R^4 \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \, d\varphi + R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= R^4\pi \left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_0^{\pi/2} + R^3 \left[\frac{\sin^2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\pi R^4 + \frac{1}{2}R^3.$$

6.48.
$$I = \int\int_\Sigma \rho(x,y,z)\left(x^2+y^2\right) dS =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \left(1 + R^2\cos^2\varphi\right)\left(R^2\sin^2\varphi\right) R^2 \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \left[R^4\sin\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right) + R^6\sin\varphi\left(\cos^2\varphi - \cos^4\varphi\right) \right] d\varphi = \frac{8}{3}\pi R^4 \left(1 + \frac{R^2}{5} \right).$$

6.49. $\left(0, 0, \frac{R}{3}\right)$

6.50. $\frac{2}{3}MR^2$

6.51.
$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t}\cos\vartheta \\ z = \frac{1}{t}\sin\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi], t \in [1, 2].$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t^2}\cos\vartheta & -\frac{1}{t^2}\sin\vartheta \\ t & -\frac{1}{t}\sin\vartheta & \frac{1}{t}\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$dS = \sqrt{\frac{1}{t^6} + \frac{2}{t^2}}\, dt\, d\vartheta \quad \text{perciò } S \text{ è regolare.}$$

$$\int\int_\Sigma \frac{1}{x^4} \, dS = \frac{1}{6}\left(3^{3/2} - \left(\frac{33}{16} \right)^{3/2} \right).$$

6.3. Flusso di un campo vettoriale

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 6, §4.2.

Esempi svolti

Esempio 6.9. Si consideri la superficie di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t\cos\vartheta \\ y = t\sin\vartheta \\ z = \vartheta \end{cases} \quad \text{per } t \in [0,2],\ \vartheta \in [0,4\pi].$$

a. Calcolare l'elemento d'area e il versore normale sulla superficie, orientandolo in modo che la sua terza componente sia positiva.

b. Calcolare il flusso attraverso la superficie orientata come nel punto precedente, del campo vettoriale:

$$\underline{F} = (y, -x, z).$$

a.
$$\underline{r}_t \times \underline{r}_\vartheta = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -t\sin\vartheta & t\cos\vartheta & 1 \end{vmatrix} = (\sin\vartheta, -\cos\vartheta, t).$$

$$dS = |\underline{r}_t \times \underline{r}_\vartheta| dt\, d\vartheta = \sqrt{t^2+1}\, dt\, d\vartheta.$$

$$\underline{n} = \text{vers}(\underline{r}_t \times \underline{r}_\vartheta) = \frac{(\sin\vartheta, -\cos\vartheta, t)}{\sqrt{t^2+1}}.$$

b.
$$\underline{F}(\underline{r}(t,\vartheta)) = (t\sin\vartheta, -t\cos\vartheta, \vartheta);$$

$$\underline{n} dS = \underline{r}_t \times \underline{r}_\vartheta dt d\vartheta = (\sin\vartheta, -\cos\vartheta, t)\, dt\, d\vartheta.$$

Flusso:

$$\Phi = \int\int_\Sigma \underline{F} \cdot \underline{n}\, dS = \int_0^2 dt \int_0^{4\pi} \left(t\sin^2\vartheta + t\cos^2\vartheta + t\vartheta\right) d\vartheta =$$

$$= \int_0^2 t\, dt \int_0^{4\pi} (1+\vartheta)\, d\vartheta = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 \left[\vartheta + \frac{\vartheta^2}{2}\right]_0^{4\pi} = 2\left(4\pi + 8\pi^2\right).$$

In questo primo esempio abbiamo applicato le definizioni, calcolando il versore normale e quindi il flusso in base alle formule standard che valgono per le superfici in forma parametrica. In realtà, come vedremo in alcuni dei prossimi esempi ed esercizi, almeno quando la superficie è abbastanza semplice (sfera, cilindro, piano, parallelepipedo,...), conviene sempre chiedersi se non c'è un modo più semplice, basato su qualche considerazione geometrica, per scrivere direttamente il versore normale (e l'elemento d'area) senza passare dal calcolo di $\underline{r}_t \times \underline{r}_u$, che può essere un po' laborioso.

Esempio 6.10. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x^2 y, z, yz)$$

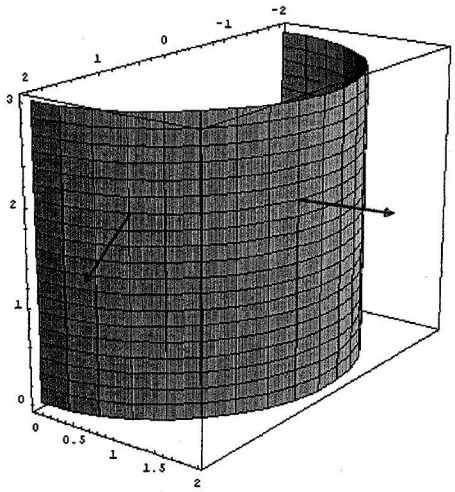
attraverso la superficie semicilindrica

$$\begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = 2\sin\vartheta \\ z = t \end{cases} \quad \vartheta \in [0, \pi], t \in [0, 3],$$

orientata nel verso dell'asse y.

Il cilindro ha l'asse z come asse; perciò (v. fig. 6.4) il suo versore normale sarà orizzontale e, nel piano xy, parallelo a $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$; in altre parole:

$$\underline{n} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0);$$



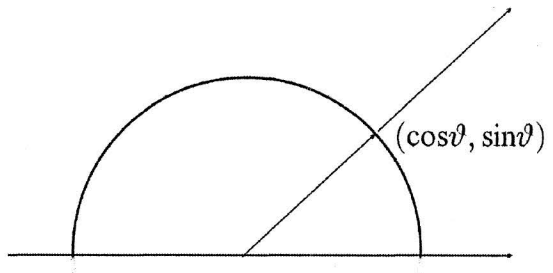


Fig. 6.4.

Quanto all'elemento d'area, sarà:

$$dS = 2d\vartheta dt$$

(un rettangolino sulla superficie ha una lato rettilineo verticale di lunghezza dt e uno orizzontale pari a un arco di circonferenza di lunghezza $2d\vartheta$).

Infine, $\underline{F}(\underline{r}(t,\vartheta)) = \left(8\cos^2\vartheta\sin\vartheta, t, 2t\sin\vartheta\right)$,

perciò:

$$\text{Flusso} = \int_0^{\pi}\left(\int_0^3 \left(8\cos^2\vartheta\sin\vartheta, t, 2t\sin\vartheta\right)\cdot(\cos\vartheta,\sin\vartheta,0)dt\right)2d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\int_0^3 \left[8\cos^3\vartheta\sin\vartheta + t\sin\vartheta\right]dt\right)2d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi}\left[24\cos^3\vartheta\sin\vartheta + \frac{9}{2}\sin\vartheta\right]2d\vartheta = \left[-48\cdot\frac{\cos^4\vartheta}{4} - 9\cos\vartheta\right]_0^{\pi} =$$

$$= (-12 + 9 + 12 + 9) = 18.$$

Esempio 6.11. Calcolare il flusso uscente dalla superficie sferica di centro l'origine e raggio R, per:

a. il campo $\underline{F} = \dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$;

b. il campo $\underline{F} = (|x|, |z|, z|y|)$.

Il versore normale uscente dalla sfera di centro l'origine e raggio R nel punto (x,y,z) è parallelo al raggio della sfera passante per (x,y,z), perciò

$$\underline{n} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}.$$

L'ultima scrittura, più sintetica, è quella comoda per il punto *a*, in quanto

$$\underline{F} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3},$$

perciò $$\Phi = \int\int_\Sigma \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} dS = \int\int_\Sigma \frac{|\underline{r}|^2}{|\underline{r}|^4} dS =$$

poiché nei punti della sfera è $|\underline{r}| = R$

$$= \frac{1}{R^2} \int\int_\Sigma dS =$$

senza bisogno di calcolare l'elemento d'area sulla sfera, basta sfruttare il fatto che l'area totale è $4\pi R^2$

$$= \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi.$$

b. In questo caso il campo $\underline{F}$ non ha una forma semplice come nel caso *a*, e questo costringe a scrivere esplicitamente il flusso come integrale di superficie. Consideriamo le equazioni parametriche della sfera:

$$\Sigma : \begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]; \quad dS = R^2 \sin\varphi d\varphi d\vartheta.$$

Dalle equazioni parametriche leggiamo che il versore normale si può esprimere come

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = (\sin\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\varphi)$$

mentre $$\underline{F}(\underline{r}(\varphi, \vartheta)) = (|R\sin\varphi\cos\vartheta|, |R\cos\varphi|, |R\sin\varphi\sin\vartheta| R\cos\varphi)$$

perciò $$\Phi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} (|R\sin\varphi\cos\vartheta|, |R\cos\varphi|, |R\sin\varphi\sin\vartheta| R\cos\varphi) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (\sin\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\varphi) R^2 \sin\varphi d\varphi \right) d\vartheta =$$

ricordando che $\sin\varphi \geq 0$

$$= R^3 \int_0^{\pi} \left(\sin^2\varphi \int_0^{2\pi} |\cos\vartheta| \cos\vartheta d\vartheta + |\cos\varphi| \sin\varphi \int_0^{2\pi} \sin\vartheta d\vartheta + \right.$$

$$+ R\sin\varphi\cos^2\varphi \int_0^{2\pi} |\sin\vartheta| d\vartheta \Big) \sin\varphi d\varphi =$$

per le simmetrie dell'integranda in $d\vartheta$

$$= R^3 \int_0^{\pi} \big(0 + 0 + 4R\sin\varphi\cos^2\varphi\big)\sin\varphi d\varphi =$$

$$= R^4 \int_0^{\pi} 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi = R^4 \int_0^{\pi} (\sin 2\varphi)^2 d\varphi = R^4 \frac{\pi}{2}.$$

Si presti attenzione ai due modi in cui si è espresso il *versore normale alla superficie sferica* in questo esempio:

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = (\sin\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\varphi).$$

Poiché la sfera è una superficie notevole che si presenta spesso, conviene ricordare queste espressioni semplici del suo versore normale, anziché fare di volta in volta dei calcoli a partire dalla matrice jacobiana.

Esempio 6.12. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, z)$$

attraverso la superficie grafico di

$$z = 1 - \big(x^2 + y^2\big) \text{ per } x^2 + y^2 \leq 1,$$

orientata con la normale verso l'alto.

Per l'elemento $\underline{n}dS$ lungo una superficie grafico di $z = f(x, y)$ vale la semplice formula:

$$\underline{n}dS = (-f_x, -f_y, 1)dxdy = (2x, 2y, 1)dxdy$$

(se la normale è orientata verso l'alto; altrimenti si cambiano i segni). Inoltre

$$\underline{F}(x, y, f(x, y)) = \big(x, y, 1 - \big(x^2 + y^2\big)\big),$$

perciò

$$\Phi = \int\int_{\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{n} dS = \int\int_{x^2+y^2\leq 1} \big(x, y, 1 - (x^2+y^2)\big) \cdot (2x, 2y, 1) dxdy =$$

$$= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} \big(2x^2 + 2y^2 + 1 - (x^2+y^2)\big) dxdy =$$

$$= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} \big(x^2 + y^2 + 1\big) dxdy = 2\pi \int_0^1 \big(1+\rho^2\big)\rho d\rho =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

Esercizi

6.52.★ Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = \frac{(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

uscente dal bordo della regione tridimensionale

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : R_1 \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R_2\right\}$$

con $0 < R_1 < R_2$.

6.53.★ Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = \big(x, z^2, y^2 z\big)$$

attraverso la seguente superficie cartesiana, orientata con la normale verso l'alto:

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \text{ per } 1 < x^2+y^2 < 4.$$

6.54.★ Si consideri il campo vettoriale tridimensionale

$$\underline{F} = \underline{r} \exp\big(-|\underline{r}|^2\big)$$

dove $\underline{r} = (x, y, z)$.

a. Calcolare $\mathrm{div}\underline{F}$ e riscrivere l'espressione trovata nel modo più semplice e compatto.

b. Calcolare il flusso del campo $\underline{F}$ uscente dalla superficie sferica di raggio R e centro l'origine.

6.55.★ Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, 2y, 3z)$$

attraverso la superficie cartesiana, orientata verso l'alto,

$$z = x^2 - y^2, \text{ per } x^2 + y^2 < R^2$$

con R costante positiva.

6.56. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x|x|, y|x|, z)$$

attraverso la superficie conica Σ grafico della funzione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq R^2$$

e orientata verso l'alto.

6.57.★ Sia Σ la superficie (totale) del cilindro di raggio R e altezza 1 che ha l'asse sull'asse z, una base sul piano xy e giace nel semispazio $z \geq 0$. Si calcoli il flusso uscente da Σ del campo vettoriale

$$\underline{F} = \frac{(x, y, z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

6.58. Calcolare il flusso del campo vettoriale tridimensionale

$$\underline{F} = (x, y, -z)$$

attraverso la superficie conica Σ descritta dal grafico della funzione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ per } x^2 + y^2 \leq R^2,$$

orientata con la normale verso l'alto.

6.59.★ Sia Σ la superficie grafico della funzione $z = x^2 + y^2$ per $x^2 + y^2 \leq 1$, orientata con la normale verso l'alto.

a. Scrivere rispetto alle coordinate cartesiane il versore normale e l'elemento d'area su Σ.

b. Calcolare il flusso attraverso Σ del campo

$$\underline{F} = (x+1)\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}.$$

6.60.★ Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F} = \underline{i} + ze^{yz}\underline{j} + ye^{yz}\underline{k}.$$

a. Stabilire se il campo è conservativo in $\mathbb{R}^3$; in caso affermativo calcolare un potenziale.

b. Calcolare il flusso di $\underline{F}$ attraverso il quadrato

$$\{z = 0, x \in [0,2], y \in [0,2]\},$$

orientato nel verso dell'asse z.

6.61. Sia Σ la superficie di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t\cos\vartheta \\ y = t\sin\vartheta \\ z = e^{-t} \end{cases} \quad t \in [0,1], \vartheta \in [0, 2\pi].$$

a. Scrivere la matrice jacobiana di Σ e verificarne la regolarità, individuando gli eventuali punti singolari.

b. Calcolare il versore normale e l'elemento d'area sulla superficie.

c. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, 0)$$

attraverso Σ, orientata verso l'alto (cioè per le z crescenti).

6.62. Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^6} = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

a. Stabilire a priori se il campo è conservativo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$; in caso affermativo calcolare un potenziale.

b. Calcolare il flusso di $\underline{F}$ uscente dalla superficie sferica di raggio R e centro $\underline{0}$.

6.63. Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\underline{i} + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\underline{j}$$

come campo vettoriale nello spazio *tridimensionale* (in altre parole, la terza componente è nulla). Calcolare il flusso di questo campo attraverso la porzione di superficie sferica di centro l'origine e raggio R, compresa nel primo ottante (cioè $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), orientata verso l'alto (cioè per le z crescenti).

6.64.★ Si consideri la curva γ di equazioni:

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \quad t \in [\pi, 2\pi] \\ z = t \end{cases}$$

e il campo vettoriale $\underline{F} = \dfrac{\underline{r}}{|\underline{r}|^4} = \dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

a. Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ, in base alla definizione.

b. Calcolare il flusso di $\underline{F}$ uscente dalla superficie sferica di raggio R e centro $\underline{0}$.

Soluzioni § 6.3

6.52. Sulla superficie della sfera è

$$\underline{n} = \pm\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}; \underline{F} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^4}$$

dove la normale uscente avrà il segno $+$ sulla superficie esterna $|\underline{r}| = R_2$, il segno $-$ sulla superficie interna $|\underline{r}| = R_1$.

Quindi
$$\Phi = \int\int_{|\underline{r}|=R_2} \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^4} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} dS - \int\int_{|\underline{r}|=R_1} \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^4} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} dS =$$

$$= \int\int_{|\underline{r}|=R_2} \frac{1}{|\underline{r}|^3} dS - \int\int_{|\underline{r}|=R_1} \frac{1}{|\underline{r}|^3} dS =$$

$$= \frac{1}{R_2^3} 4\pi R_2^2 - \frac{1}{R_1^3} 4\pi R_1^2 = 4\pi\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

6.53.
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$\underline{n}dS = (-f_x, -f_y, 1)dxdy = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)dxdy$$

$$\underline{F}(x,y,f(x,y)) = \left(x, x^2+y^2, y^2\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

$$\Phi = \int\int_{1<x^2+y^2<4} \left(x, x^2+y^2, y^2\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) dxdy =$$

$$= \int\int_{1<x^2+y^2<4} \left(-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \left(-\frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\rho} - \frac{\rho^3\sin\vartheta}{\rho} + \rho^3\sin^2\vartheta\right)\rho d\rho\right) d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta d\vartheta \int_1^2 -\rho^2 d\rho + \int_0^{2\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int_1^2 -\rho^3 d\rho + \int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_1^2 \rho^4 d\rho =$$

$$= \pi\left[-\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 + 0 + \pi\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^2 = -\frac{7}{3}\pi + \frac{31}{5}\pi = \frac{58}{15}\pi.$$

6.54. *a.* Poniamo $\rho = |\underline{r}|$. Allora

$$\partial_x(F_1) = \partial_x\big(x\exp(-\rho^2)\big) = \exp(-\rho^2)\left(1 + x\cdot\left(-2\rho\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\right) =$$

$$= \exp(-\rho^2)\left(1 - 2x\rho\cdot\frac{x}{\rho}\right) = \exp(-\rho^2)(1-2x^2).$$

Per simmetria, si avrà

$$\operatorname{div}\underline{F} = \partial_x(F_1) + \partial_y(F_2) + \partial_z(F_3) =$$

$$= \exp(-\rho^2)\big[(1-2x^2) + (1-2y^2) + (1-2z^2)\big] =$$

$$= \exp(-\rho^2)(3-2\rho^2) = \exp(-|\underline{r}|^2)(3-2|\underline{r}|^2).$$

b. Per calcolare il flusso uscente da Σ_R = superficie della sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio R, ricordiamo che il versore normale uscente è

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$

perciò $$\Phi(\underline{F}, \Sigma_R) = \int\int_{\Sigma_R} \underline{F}\cdot\underline{n}\, dS = \int\int_{\Sigma_R} \underline{r}\exp(-|\underline{r}|^2)\cdot\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\, dS =$$

$$= \int\int_{\Sigma_R} \exp(-|\underline{r}|^2)\frac{|\underline{r}|^2}{|\underline{r}|}\, dS = Re^{-R^2}\int\int_{\Sigma_R} dS = Re^{-R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3 e^{-R^2}.$$

6.55. $$\Phi = \int\int_{x^2+y^2<R^2} \underline{F}(x,y,f(x,y))\cdot(-f_x,-f_y,1)dxdy =$$

$$= \int\int_{x^2+y^2<R^2} \big\{-2x^2 + 4y^2 + 3(x^2-y^2)\big\}dxdy = \frac{\pi}{2}R^4.$$

6.56. $$z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$\underline{n}dS = (-f_x, -f_y, 1)dxdy = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)dxdy$$

$$\underline{F}(x,y,f(x,y)) = \left(x|x|, y|x|, \sqrt{x^2+y^2}\right);$$

$$\Phi(\underline{F},\Sigma) = \int\int_{\Sigma} \underline{F}\cdot\underline{n}dS =$$

$$= \int\int_{x^2+y^2\le R^2} \left(x|x|, y|x|, \sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)dxdy =$$

$$= \int\int_{x^2+y^2\le R^2} \left(-\frac{(x^2+y^2)|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \left(-\frac{\rho^3|\cos\vartheta|}{\rho} + \rho\right)\rho d\rho\right)d\vartheta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{R^4|\cos\vartheta|}{4} + \frac{R^3}{3}\right)d\vartheta =$$

$$= -\frac{R^4}{4}\cdot 4\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta d\vartheta + 2\pi\frac{R^3}{3} = -R^4 + \frac{2}{3}\pi R^3.$$

6.57. Dividiamo Σ in 3 parti: la superficie laterale Σ_{lat}, la base inferiore Σ_0 e la base superiore Σ_1.

Su Σ_1 è: $$\underline{n} = (0,0,1); dS = dxdy; \underline{F} = \frac{(x,y,1)}{\sqrt{x^2+y^2+1}};$$

$$\Phi_1 = \int\int_{x^2+y^2\le R^2} \frac{(x,y,1)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\cdot(0,0,1)dxdy =$$

$$= \int\int_{x^2+y^2\le R^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}dxdy = 2\pi\int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}d\rho =$$

$$= 2\pi\left[\sqrt{1+\rho^2}\right]_0^R = 2\pi\left(\sqrt{1+R^2}-1\right).$$

Su Σ_0 è: $\underline{n} = (0,0,-1); dS = dxdy; \underline{F} = \dfrac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}};$

$$\Phi_0 = 0 \text{ perché } \underline{F} \cdot \underline{n} = 0 \text{ su } \Sigma_0.$$

Su $$\Sigma_{\text{lat}} : \begin{cases} x = R\cos\vartheta \\ y = R\sin\vartheta \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0,1], \vartheta \in [0, 2\pi]$$

è: $$\underline{n} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0); \underline{F} = \frac{(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta, t^2)}{\sqrt{R^2+t^2}}; dS = Rd\vartheta dt$$

$$\Phi_{\text{lat}} = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta, t^2)}{\sqrt{R^2+t^2}} \cdot (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0) R d\vartheta \right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{R^2+t^2}} R d\vartheta \right) dt = 2\pi R^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{R^2+t^2}} dt =$$

$$[t = R\text{Sh}u;\ dt = R\text{Ch}u du]$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^{\text{SettSh}(1/R)} \frac{1}{R\text{Ch}u} R\text{Ch}u du = 2\pi R^2 \text{SettSh}(1/R).$$

In conclusione, il flusso totale uscente è:

$$\Phi = 2\pi\left(\sqrt{1+R^2} - 1\right) + 2\pi R^2 \text{SettSh}(1/R).$$

6.58. $$\iint_{x^2+y^2 \le R^2} \underline{F}(x,y,f(x,y)) \cdot (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1) dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le R^2} \left(x, y, -\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) dxdy = -\frac{4}{3}\pi R^3.$$

6.59. *a.* $f_x = 2x;\ f_y = 2y$

$$\underline{n} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} = \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}$$

$$dS = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy$$

b. $$\underline{F}(x, y, f(x, y)) = (x + 1)\underline{i} + y\underline{j} + (x^2 + y^2)\underline{k}$$

$$\Phi = \int\int_{\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{n} dS =$$

$$= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} (-2x, -2y, 1) \cdot (x + 1, y, x^2 + y^2) dxdy =$$

$$= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} \left(-(x^2 + y^2) - 2x\right) dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (-\rho^2 - 2\rho\cos\vartheta)\rho d\rho = 2\pi \int_0^1 (-\rho^3) d\rho = -\frac{\pi}{2}.$$

6.60. *a.* Si vede facilmente che un potenziale è $U(x, y, z) = x + e^{yz}$, perciò $\underline{F}$ è conservativo.

b. $\underline{n} = \underline{k};\ \underline{F}(x, y, 0) = \underline{i} + y\underline{k};\ \underline{F} \cdot \underline{n} = y;\ dS = dx\, dy$

$$\Phi = \int_0^2 dx \int_0^2 y\, dy = 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 4.$$

6.61. *a.* $$J = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & -e^{-t} \\ -t\sin\vartheta & t\cos\vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

Superficie regolare tranne che per $t = 0$, ossia: $(0, 0, 1)$ è punto singolare.

b. $$dS = t\sqrt{1 + e^{-2t}}\, dt\, d\vartheta.$$

$$\underline{n} = \frac{\underline{i}e^{-t}\cos\vartheta + \underline{j}e^{-t}\sin\vartheta + \underline{k}}{\sqrt{1 + e^{-2t}}}.$$

c. $$\Phi = 2\pi\left(2 - \frac{5}{e}\right)$$

6.62. *a.* E' conservativo, $U(x,y,z) = -\frac{1}{4(x^2+y^2+z^2)^2}$.

b. $\frac{4\pi}{R^3}$

6.63. $\frac{3}{16}\pi$

6.64.

a. $$\underline{r}'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$$

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) = \frac{(t\cos t, t\sin t, t)}{4t^4}$$

$$L = \int_{\pi}^{2\pi} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\, dt = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{2t}{4t^4}\, dt = \left[-\frac{1}{4t^2}\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{3}{16\pi^2}.$$

b.

$$\Phi = \int\int_{|\underline{r}|=R} \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^4} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\, dS = \int\int_{|\underline{r}|=R} \frac{1}{|\underline{r}|^3}\, dS = \frac{1}{R^3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi}{R}.$$

6.4. Teoremi di Gauss, Green, Stokes

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 6, §1.2, §2, §4.

6.4.A. Calcolo differenziale con gli operatori divergenza e rotore.

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 6, §1.2.

Notazioni. Utilizzeremo indifferentemente il simbolo

$$\nabla \cdot \underline{F} \text{ oppure } \mathrm{div}\underline{F} \text{ per la divergenza, e}$$

$$\nabla \times \underline{F} \text{ oppure } \mathrm{rot}\underline{F} \text{ per il rotore.}$$

6.65. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa. Si raccomanda di rispondere ad ogni domanda *prima* di leggere le domande successive.

a. La divergenza di un campo vettoriale è un campo vettoriale.

b. La divergenza di un campo scalare è un campo vettoriale.

c. La divergenza di un campo vettoriale è un campo scalare.

d. La divergenza di un campo vettoriale $\underline{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 è ben definita qualunque sia la dimensione n.

e. Il rotore di un campo vettoriale $\underline{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 è ben definito qualunque sia la dimensione n.

f. Se $\underline{F}$ è un campo vettoriale piano, il suo rotore appartiene allo stesso piano.

g. Se $\underline{F}$ è un campo vettoriale piano, il suo rotore è perpendicolare a quel piano.

6.66. Completare correttamente le seguenti identità:

a. $$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\underline{F} = \ldots\ldots\ldots$$

b. $$\mathrm{div}(f\,\underline{G}) = \ldots\ldots\ldots + f\,\mathrm{div}\underline{G}$$

c. $$\mathrm{rot}\,\nabla u = \ldots\ldots\ldots$$

d. $$\mathrm{div}(f\nabla g) = \ldots\ldots\ldots + \nabla f \cdot \nabla g$$

e. $$\mathrm{div}\,\nabla u = \ldots\ldots\ldots$$

f. $\operatorname{rot}(f\underline{G}) = \ldots\ldots\ldots + f\operatorname{rot}\underline{G}$

6.67.★ Calcolare $\operatorname{rot}\underline{F}$ dove

$$\underline{F} = \frac{(-y, x)}{(x^2 + y^2)^{k/2}}, \quad k = 1, 2, 3\ldots$$

Determinare se esiste un k per cui il campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$.

6.68.★

a. Calcolare $\operatorname{div}\underline{F}$ dove

$$\underline{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{k/2}}, \quad k = 1, 2, 3\ldots$$

b. Determinare se esiste un k per cui il campo è solenoidale in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$.

c. Rispondere alla stessa domanda per il campo vettoriale, in $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$,

$$\underline{F}(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^k}.$$

6.69.★

a. Calcolare $\operatorname{rot}\underline{F}$ dove

$$\underline{F}(x, y, z) = \left(x^2 + y^2, y^2 + z^2, z^2 + x^2\right).$$

b. Calcolare la circuitazione di $\operatorname{rot}\underline{F}$ lungo la circonferenza γ di centro l'origine e raggio R posta nel piano xy.

6.70.★ Dimostrare le seguenti identità differenziali, dove tutte le funzioni coinvolte si suppongono derivabili con continuità tante volte quanto è necessario perché le formule abbiano senso. Si chiede anche di precisare dominio e codominio delle funzioni coinvolte, affinché le formule abbiano senso.

a. $\nabla \cdot (f\underline{G}) = \nabla f \cdot \underline{G} + f\nabla \cdot \underline{G}.$

b. $\nabla \cdot (f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g.$

c. $\nabla \cdot (f\nabla \times \underline{G}) = \nabla f \cdot (\nabla \times \underline{G}).$

d. $\nabla \times (f\underline{G}) = \nabla f \times \underline{G} + f(\nabla \times \underline{G}).$

e. $$\nabla \times (f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g.$$

f. $$\nabla \times (\nabla \times \underline{G}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{G}) - \Delta \underline{G}$$

dove $\Delta \underline{G} = (\Delta G_1, \Delta G_2, \Delta G_3)$.

Per dimostrare le formule, oltre ad usare le definizioni, è lecito applicare (senza ridimostrarle) le 3 identità

i. $$\nabla \times (\nabla f) = 0;$$

ii. $$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{G}) = 0;$$

iii. $$\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f.$$

6.71.★ Sia $\underline{F}(x, y, z, t)$ un campo vettoriale variabile nel tempo, e supponiamo che $\underline{F} \in C^2(\Omega)$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^4$. I simboli $\nabla \cdot \underline{F}, \nabla \times \underline{F}$ continuano, in questo contesto, a denotare gli operatori differenziali divergenza e rotore fatti rispetto alle sole variabili spaziali. Dimostrare che

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \underline{F}) = \nabla \cdot \frac{\partial \underline{F}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \underline{F}) = \nabla \times \frac{\partial \underline{F}}{\partial t}$$

6.72.★ Deduzione dell'equazione delle onde elettromagnetiche dalle equazioni di Maxwell. Si considerino le equazioni di Maxwell nel vuoto e in assenza di sorgenti:

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

dove $\underline{E}, \underline{B}$ sono il campo elettrico e il campo magnetico funzioni di (x, y, z) e del tempo t, c_0 è la velocità della luce nel vuoto, l'operatore ∇ agisce sulle sole variabili spaziali (x, y, z). Applicando opportune identità differenziali, dimostrare che ogni componente di ognuno dei due campi soddisfa l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta u.$$

dove Δ è il laplaciano nelle variabili spaziali (x, y, z).

Suggerimento: utilizzare l'identità f dell'Esercizio 6.70 e la proprietà espressa nell'Esercizio 6.71. Si può supporre che tutte le componenti dei due campi siano funzioni $C^2(\mathbb{R}^4)$.

Esempio 6.13. L'operatore divergenza è invariante per rotazioni, cioè non dipende dalle particolari coordinate scelte in $\mathbb{R}^n$. (Si dice perciò che la divergenza di un campo ha un significato *intrinseco*, indipendente cioè dal sistema di riferimento).

Sia $\underline{F}(\underline{x})$ un campo vettoriale in $\mathbb{R}^n$ di classe C^1, quindi

$$\operatorname{div}\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\underline{x}).$$

Supponiamo di scegliere un diverso sistema di riferimento cartesiano in $\mathbb{R}^n$, ossia di eseguire una trasformazione di coordinate

$$\underline{x}' = M\underline{x},$$

dove M è una matrice ortogonale, ossia una rotazione[1]. Il cambiamento di variabili trasformerà il campo $\underline{F}$ in

$$\underline{F}' = M\underline{F},$$

inoltre poiché $\underline{x} = M^{-1}\underline{x}'$ avremo

$$\underline{F}'(\underline{x}') = M\underline{F}\big(M^{-1}\underline{x}'\big),$$

esplicitamente

$$F_i'(\underline{x}') = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} F_j\big(M^{-1}\underline{x}'\big).$$

[1] Ricordiamo che questo significa che M è una matrice $n \times n$ invertibile, la cui matrice inversa coincide con la trasposta. In altre parole, detta $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ si ha

$$M^{-1} = \{m'_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \quad \text{con } m'_{ij} = m_{ji}.$$

Calcoliamo ora, in base al teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{\partial F_i'}{\partial x_i'}(\underline{x}') = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i'}\left[F_j\left(M^{-1}\underline{x}'\right)\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_k}\left(M^{-1}\underline{x}'\right) \frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\left(M^{-1}\underline{x}'\right)_k\right)\right].$$

Ora: $\left(M^{-1}\underline{x}'\right)_k = \sum_{h=1}^{n} m'_{kh} x'_h$, perciò $\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\left(M^{-1}\underline{x}'\right)_k\right) = m'_{ki}$

quindi $$\frac{\partial F_i'}{\partial x_i'}(\underline{x}') = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_k}\left(M^{-1}\underline{x}'\right) m'_{ki}\right].$$

Infine,

$$\mathrm{div}\underline{F}'(\underline{x}') = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i'}{\partial x_i'}(\underline{x}') = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_k}\left(M^{-1}\underline{x}'\right) m'_{ki}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_k}\left(M^{-1}\underline{x}'\right)\right] \sum_{i=1}^{n} m'_{ki} m_{ij} =$$

(poiché $\{m'_{ki}\}$ è l'inversa di $\{m_{ij}\}$)

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_k}\left(M^{-1}\underline{x}'\right)\right] \delta_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\left(M^{-1}\underline{x}'\right) = \mathrm{div}\underline{F}(\underline{x}),$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Osserviamo che nella dimostrazione non si è mai sfruttato il fatto che la matrice M sia una matrice *di rotazione*: l'invarianza dell'operatore di divergenza sussiste in effetti per *qualsiasi trasformazione lineare* (e invertibile) di coordinate. Abbiamo enunciato il risultato per le rotazioni solo per sottolinearne il significato geometrico.

Esempio 6.14. L'operatore rotore è invariante per rotazioni, cioè non dipende dalle particolari coordinate scelte in $\mathbb{R}^3$. Poiché il calcolo è un po' pesante, limitiamoci a dimostrarlo nel caso di un campo vettoriale piano: *eseguendo una*

rotazione nel piano xy, il rotore di un campo vettoriale piano (nel piano xy) non cambia. Anche il rotore di un campo, quindi, ha un significato intrinseco.

Sia $\underline{F}(x,y)$ un campo vettoriale piano di classe C^1, quindi

$$\mathrm{rot}\underline{F}(x,y) = \underline{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right).$$

Supponiamo di eseguire una rotazione nel piano,

$$(x',y') = M(x,y)^T \text{ con } M = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}, M^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Il cambiamento di variabili trasformerà il campo $\underline{F}$ in

$$\underline{F}' = M\underline{F},$$

ossia esplicitamente

$$\begin{cases} F_1' = F_1\cos\vartheta + F_2\sin\vartheta \\ F_2' = -F_1\sin\vartheta + F_2\cos\vartheta \end{cases}$$

inoltre poiché $\underline{x} = M^{-1}\underline{x}'$, ossia esplicitamente

$$\begin{cases} x = x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta \\ y = x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta \end{cases}$$

avremo

$$F_1'(x',y') = F_1(x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta)\cos\vartheta +$$

$$+ F_2(x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta)\sin\vartheta;$$

$$F_2'(x',y') = -F_1(x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta)\sin\vartheta +$$

$$+ F_2(x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta)\cos\vartheta$$

Calcoliamo ora, in base al teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\mathrm{rot}\underline{F}'(\underline{x}') = \underline{k}\left(\frac{\partial F_2'}{\partial x'} - \frac{\partial F_1'}{\partial y'}\right);$$

si ha:

$$\frac{\partial F_2'}{\partial x'}(x', y') =$$

$$= \sin\vartheta\left[-\frac{\partial F_1}{\partial x}(x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta)\cos\vartheta - \frac{\partial F_1}{\partial y}(\dots)\sin\vartheta\right] +$$

$$+ \cos\vartheta\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}(\dots)\cos\vartheta + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\dots)\sin\vartheta\right];$$

$$\frac{\partial F_1'}{\partial y'}(x', y') =$$

$$= \cos\vartheta\left[-\frac{\partial F_1}{\partial x}(x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta)\sin\vartheta + \frac{\partial F_1}{\partial y}(\dots\vartheta)\cos\vartheta\right] +$$

$$+ \sin\vartheta\left[-\frac{\partial F_2}{\partial x}(\dots)\sin\vartheta + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\dots)\cos\vartheta\right];$$

$$\mathrm{rot}\underline{F}'(x', y') = \underline{k}\left(\frac{\partial F_2'}{\partial x'}(x', y') - \frac{\partial F_1'}{\partial y'}(x', y')\right) =$$

$$= \underline{k}\left\{\frac{\partial F_1}{\partial x}(x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta)[-\sin\vartheta\cos\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta] +\right.$$

$$+ \frac{\partial F_1}{\partial y}(\dots)[-\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta] + \frac{\partial F_2}{\partial x}(\dots)[\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta] +$$

$$\left. + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\dots)[\sin\vartheta\cos\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta]\right\} =$$

$$= \underline{k}\left\{\frac{\partial F_2}{\partial x}(x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(\dots)\right\} =$$

$$= \underline{k}\left\{\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right\} = \mathrm{rot}\underline{F}(x,y),$$

che è quanto volevamo dimostrare.

6.4.B. Formule di Gauss-Green nel piano

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 6, §2.

Esempio 6.15. Utilizzando la formula di Green, calcolare l'area della regione Ω racchiusa dall'arco di spirale di equazione polare $\rho = \vartheta, \vartheta \in [0, 2\pi]$ e il segmento dell'asse x per $0 \leq x \leq 2\pi$.

Si ha:
$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} (-ydx + xdy)$$

dove
$$\gamma_1 : \underline{r}(\vartheta) = (\vartheta\cos\vartheta, \vartheta\sin\vartheta) \quad \vartheta \in [0, 2\pi];$$

$$\underline{r}'(\vartheta) = (\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta, \sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta);$$

$$\gamma_2 : \underline{r}(t) = (2\pi - t, 0) \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$\underline{r}'(t) = (-1, 0).$$

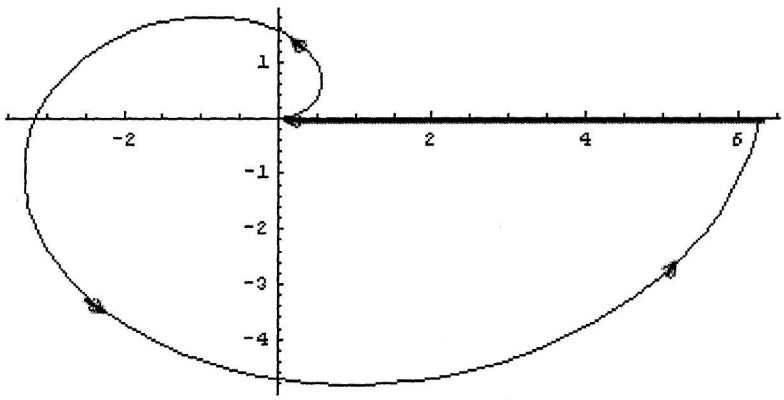


Fig. 6.6.

Perciò

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [-\vartheta\sin\vartheta(\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta) + \vartheta\cos\vartheta(\sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta)]d\vartheta +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 [-0\cdot(-1) + (1-t)\cdot 0]dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \vartheta^2 d\vartheta = \frac{4}{3}\pi^3.$$

Esercizi

Utilizzando le formule di Gauss-Green (e non altri metodi) calcolare l'area delle regioni racchiuse dalle seguenti curve piane:

6.73.★ L'ellisse $\underline{r}(\vartheta) = (a\cos\vartheta, b\sin\vartheta), \vartheta \in [0, 2\pi]$.

6.74.★ L'astroide $\underline{r}(\vartheta) = (R\cos^3\vartheta, R\sin^3\vartheta), \vartheta \in [0, 2\pi]$.

6.75.★ La chiocciola di Pascal, descritta in forma polare da $\rho = 1 + \cos\vartheta$ per $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

6.76.★ L'epicicloide $\underline{r}(\vartheta) = (\alpha\cos\vartheta - \cos(\alpha\vartheta), \alpha\sin\vartheta - \sin(\alpha\vartheta))$ per $\vartheta \in [0, 2\pi]$, dove α è un intero ≥ 2.

6.77.★ L'ipocicloide

$$\underline{r}(\vartheta) = \left(\cos\vartheta - 2\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \sin\vartheta + 2\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)$$

per $\vartheta \in [0, 4\pi]$.

6.4.C. Teoremi della divergenza e del rotore

Domande di comprensione teorica sul teorema della divergenza.

6.78.★ Il teorema della divergenza afferma la validità della seguente uguaglianza, sotto opportune ipotesi e pur di definire opportunamente tutti gli ingredienti che compaiono nell'uguaglianza stessa:

$$\int\int\int_D \nabla \cdot \underline{F}\, dxdydz = \int\int_{\partial D} \underline{F} \cdot \underline{n}_e dS. \qquad (*)$$

Riferendosi a queste notazioni, lo studente risponda alle seguenti domande:

a. L'insieme D è un dominio del piano o dello spazio? Limitato o illimitato?

b. Cosa indica il simbolo ∂D, e che proprietà deve soddisfare questo insieme?

c. Cosa indica il simbolo $\underline{n}_e$?

d. L'integranda $\nabla \cdot \underline{F}$ è una funzione a valori scalari o vettoriali?

e. La superficie che compare nell'integrale a secondo membro può avere un bordo?

f. Se si applica il teorema a un campo $\underline{F}$ solenoidale in D, cosa si ottiene?

g. Se si applica il teorema a un campo $\underline{F}$ conservativo in D, cosa si ottiene?

6.79.★ Dire se il teorema della divergenza è applicabile nelle seguenti situazioni, giustificando le proprie affermazioni (v. $(*)$ per il significato dei simboli):

a. D è un parallelepipedo e $\underline{F} = (x^2, yz, y^3)$.

b. D è una sfera centrata nell'origine e $\underline{F} = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$.

c. D è la regione limitata dalla superficie del toro

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, 2\pi).$$

e $\underline{F} = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$.

d. $D = \{(x, y, z) : z \geq x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, e $\underline{F} = \left(x^2 y, z, \frac{y}{1+x^2}\right)$.

e. D è una piramide a base esagonale, contenuta nel semispazio $z \geq 0$, e

$$\underline{F} = \left(x, \frac{y}{z+1}, \frac{z}{x^2+1}\right).$$

Domande di comprensione teorica sul teorema del rotore.

6.80.★ Il teorema del rotore afferma la validità della seguente uguaglianza, sotto opportune ipotesi e pur di definire opportunamente tutti gli ingredienti che compaiono nell'uguaglianza stessa:

$$\int\int_{\Sigma} \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n} dS = \int_{\partial^+\Sigma} \underline{F} \cdot d\underline{r}. \qquad (**)$$

Riferendosi a queste notazioni, lo studente risponda alle seguenti domande:

a. L'insieme Σ è un dominio nel piano o una superficie nello spazio?

b. Cosa indica il simbolo $\partial^+\Sigma$, e che proprietà deve soddisfare questo insieme?

c. Cosa indica il simbolo $\nabla \times \underline{F}$?

d. La superficie che compare nell'integrale a primo membro può avere un bordo? Può non avere bordo?

e. Se si applica il teorema a un campo $\underline{F}$ conservativo, cosa si ottiene?

f. Se si applica il teorema a un campo $\underline{F}$ piano, cosa si ottiene?

g. Se si applica il teorema a una superficie Σ senza bordo, cosa si ottiene?

6.81.★ Dire se il teorema del rotore è applicabile nelle seguenti situazioni, giustificando le proprie affermazioni (v. $(**)$ per il significato dei simboli):

a. Σ è la superficie laterale di una piramide a base quadrata e $\underline{F} = (x^2, yz, y^3)$.

b. Σ è la superficie della semisfera centrata nell'origine di raggio R e $\underline{F} = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$.

c. Σ è la superficie del toro

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, 2\pi).$$

e $\underline{F} = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$.

d. $\Sigma = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$, e $\underline{F} = \left(x^2y, z, \frac{y}{x^2}\right)$.

e. $\Sigma = \{(x, y, z) : z = 0, 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ e $\underline{F} = (2x, 3y, 5z^2)$.

f. $\Sigma = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, e $\underline{F} = (x^2y, z, y)$.

g. Σ è un "nastro di Moebius" (v. [BPS2], cap.6, §4.1 e §6, Esercizio 36) e $\underline{F} = (x^2y, z, y)$.

Esempi svolti

Esempio 6.16. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(x^3, y^3, z^3\right)$$

uscente dalla corona sferica $C = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Poiché la superficie attraverso cui si vuole calcolare il flusso è chiusa (cioè è il bordo di una regione C tridimensionale), si può pensare di applicare il teorema della divergenza.

Calcoliamo $\nabla \cdot \underline{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$.

$$\int\int_{\partial C} \underline{F} \cdot \underline{n}_e dS = \int\int\int_C (\nabla \cdot \underline{F})(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int\int\int_{1\le x^2+y^2+z^2\le 4} 3\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz = 4\pi \int_1^2 3\rho^2 \cdot \rho^2 d\rho =$$

$$= 12\pi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^2 = 12\pi \cdot \frac{31}{5} = \frac{372}{5}\pi.$$

Esempio 6.17. Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(y + y^2z^3, z + 2xyz^3, x + 3xy^2z^2\right)$$

e l'ellisse

$$\gamma : \begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = 3\sin\vartheta \\ z = 1 \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

a. Si calcoli rot$\underline{F}$.

b. Si calcoli la circuitazione di $\underline{F}$ lungo γ (percorsa in senso antiorario), utilizzando il teorema del rotore.

a.

$$\text{rot}\underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ (y + y^2z^3) & (z + 2xyz^3) & (x + 3xy^2z^2) \end{vmatrix} = (-1,-1,-1).$$

b. $\gamma = \partial\Sigma$ dove

$$\Sigma : \begin{cases} x = 2t\cos\vartheta \\ y = 3t\sin\vartheta \\ z = 1 \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi], t \in [0,1]; \quad \underline{n} = \underline{k}$$

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int\int_\Sigma \mathrm{rot}\underline{F}\cdot \underline{n}dS = \int\int_\Sigma (-1,-1,-1)\cdot \underline{k}dS =$$

$$= -\int\int_\Sigma dS = -|\Sigma| = -6\pi,$$

dove si è usata la formula per l'area dell'ellisse, $A = \pi ab$.

Esercizi

6.82.★ Si calcoli il rotore del campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, 0\right).$$

Quindi si calcoli il flusso di questo rotore attraverso la porzione di superficie sferica

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$$

orientata con la normale uscente dalla sfera.

6.83.★ Si consideri il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$:

$$\underline{F}(x,y,z) = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^2}$$

con $\underline{r} = (x,y,z)$.

a. Si calcoli il flusso di $\underline{F}$ uscente dalla superficie Σ della sfera di raggio R e centro l'origine.

b. Si calcoli $\nabla \cdot \underline{F}$.

c. Si calcoli l'integrale di $\nabla \cdot \underline{F}$ nella sfera S di raggio R e centro l'origine. Si confronti col risultato trovato al punto *a*; come si spiega il risultato?

6.84.★ Si consideri il campo vettoriale tridimensionale:

$$\underline{F} = \underline{i}(z-y) + \underline{j}x\left(1+z^2\right) + \underline{k}xy.$$

a. Calcolare $\mathrm{rot}\,\underline{F}$.

b. Scrivere esplicitamente l'integrale doppio che assegna il flusso di $\mathrm{rot}\,\underline{F}$ attraverso la superficie

$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) \text{ per } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1,$$

orientata con la normale "verso l'alto". (Non si chiede di calcolare l'integrale doppio, ma solo di scriverlo, esplicitamente).

c. Calcolare il flusso del punto precedente utilizzando il teorema del rotore (quindi calcolando un'opportuna circuitazione, invece che un flusso).

6.85.★ Si consideri la superficie Σ descritta da:

$$z = x^2 + y^2 \text{ per } x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0$$

e il campo vettoriale

$$\underline{F}(x, y, z) = (1, 0, y).$$

a. Calcolare il flusso di $\nabla \times \underline{F}$ attraverso Σ orientata verso l'alto.

b. Calcolare la circuitazione di $\underline{F}$ lungo $\partial^+\Sigma$. (Suggerimento: fare un disegno per capire cos'è e come si rappresenta $\partial^+\Sigma$).

(Si richiede di eseguire i due calcoli indipedentemente, anche se sappiamo a priori che per il teorema del rotore devono dare lo stesso risultato).

6.86.★ Si consideri il tetraedro Ω di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ e il campo vettoriale $\underline{F} = (x, y, z)$.

a. Calcolare

$$\int\int\int_\Omega \nabla \cdot \underline{F} dx dy dz.$$

b. Calcolare il flusso di $\underline{F}$ uscente da $\partial\Omega$.

(Si richiede di eseguire i due calcoli indipedentemente, anche se sappiamo a priori che per il teorema della divergenza devono dare lo stesso risultato).

6.87.★ Si calcoli il flusso del campo (Newtoniano)

$$\underline{F} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

uscente dalla superficie del cono di vertice l'origine, altezza h e raggio di base R. E' possibile calcolare questo flusso con il teorema della divergenza?

6.88.★ Calcolare il flusso di $\nabla \times \underline{F}$ attraverso la superficie laterale Σ del cono di vertice $(0,0,1)$ e base $z=0, x^2+y^2 \leq 1$, orientata verso l'alto, dove

$$\underline{F} = \left(x^2 y, yz^2, y^2 + x^2\right).$$

6.4.D. Applicazioni fisiche dei teoremi di Gauss e Stokes

Esempio 6.18. Deduzione del teorema di Gauss dell'elettrostatica dalla legge di Coulomb. La *legge di Coulomb* dell'elettrostatica afferma che il campo elettrico generato nel punto $\underline{r}'$ da una carica elettrica puntiforme q posta nel punto $\underline{r}$ è pari a

$$\underline{E}(\underline{r}') = kq \frac{\underline{r}' - \underline{r}}{|\underline{r}' - \underline{r}|^3}$$

dove k è la costante di Coulomb. Per un sistema di più cariche puntiformi, il campo totale è semplicemente la somma dei campi generati dalle singole cariche; per una distribuzione continua di cariche, di densità $\rho(\underline{r})$, il campo è assegnato dall'analoga formula nel continuo, cioè

$$\underline{E}(\underline{r}') = k \int\int\int_{\Omega} \rho(\underline{r}) \frac{\underline{r}' - \underline{r}}{|\underline{r}' - \underline{r}|^3} dx dy dz \quad (\underline{r} = (x,y,z))$$

dove Ω è la regione dello spazio (che supponiamo limitata) in cui la densità di carica è effettivamente non nulla.

Il *teorema di Gauss dell'elettrostatica* afferma che il flusso del campo elettrico uscente da una superficie chiusa Σ è

$$\Phi(\underline{E}, \Sigma) = 4\pi k Q_{\text{tot}}$$

dove Q_{tot} è la carica totale racchiusa dalla superficie stessa. (La superficie Σ deve avere la regolarità richiesta dal teorema della divergenza, quindi ad esempio può essere una superficie regolare a pezzi). In altre parole, se $\Sigma = \partial\Omega$ per una certa regione limitata Ω dello spazio,

$$Q_{\text{tot}} = \sum_{q_i \text{ in } \Omega} q_i$$

nel caso discreto, e

$$Q_{\text{tot}} = \int\int\int_{\Omega} \rho(\underline{r}) dx dy dz$$

nel caso continuo.

Il teorema vale sia per distribuzioni discrete che per distribuzioni continue di carica. Dimostriamolo, procedendo in vari passi. Lo studente è invitato a soffermarsi su tutti i dettagli che, come si vedrà, mostrano un'applicazione istruttiva del teorema della divergenza e di vari altri fatti di calcolo integrale vettoriale.

Passo 1. Una sola carica puntiforme, posta nell'origine; la superficie è una sfera di centro l'origine e raggio R. In questo caso

$$\underline{E} = kq \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} \text{ con } \underline{r} = (x, y, z), \underline{n}_e = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$

e

$$\Phi = \int\int_{\Sigma} \underline{E} \cdot \underline{n}_e dS =$$

(calcolo elementare già fatto nell'Esempio 6.11 del §6.3)

$$= kq \cdot \frac{R^2}{R^4} \int\int_{\Sigma} dS = 4\pi kq.$$

Passo 2. Una sola carica puntiforme, posta nell'origine; la superficie è una qualsiasi superficie chiusa che racchiude l'origine.

Sia $\Sigma = \partial\Omega$ la superficie, e consideriamo una sferetta B_R di centro l'origine e raggio R contenuta in Ω. Osserviamo che (v. fig. 6.7):

$$\int\int_{\Sigma} \underline{E} \cdot \underline{n}_e dS = \int\int_{\partial(\Omega \setminus B_R)} \underline{E} \cdot \underline{n}_e dS + \int\int_{\partial B_R} \underline{E} \cdot \underline{n}_e dS$$

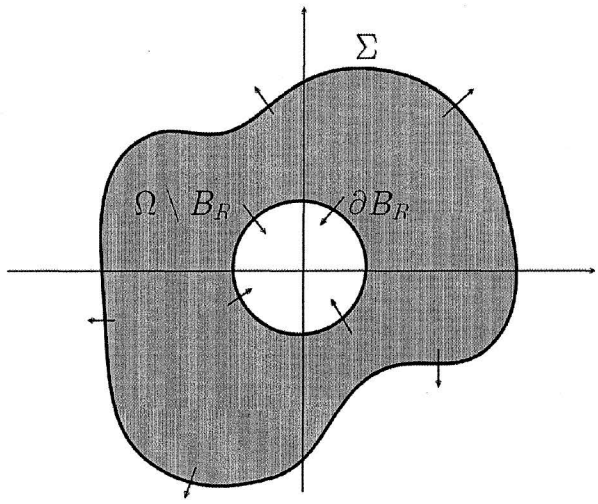


Fig. 6.7. Rappresentiamo schematicamente la situazione come se fosse nel piano. Il flusso uscente da $(\Omega \setminus B_R)$ è pari al flusso uscente da Σ meno il flusso uscente da B_R.

Ora il secondo addendo a 2° membro è quello calcolato al passo 1, pari a $4\pi kq$. Mostriamo che il primo addendo a 2° membro è zero, da cui seguirà il risultato che ci interessa in questo passo. Il campo $\underline{E}$ nella regione $(\Omega \setminus B_R)$ è regolare (perché questa regione non contiene l'origine, unico punto in cui il campo è irregolare), perciò possiamo applicare ad $(\Omega \setminus B_R)$ il teorema della divergenza, e scrivere

$$\int\int_{\partial(\Omega \setminus B_R)} \underline{E} \cdot \underline{n}_e dS = \int\int\int_{(\Omega \setminus B_R)} \nabla \cdot \underline{E} dx dy dz = 0$$

perché $\nabla \cdot \underline{E} = 0$ fuori dall'origine, come si verifica con un calcolo diretto (v. Esercizio 6.68).

Passo 3. Un sistema di più cariche puntiformi, in numero finito; la superficie è una qualsiasi superficie chiusa che le racchiude tutte.

Segue dal passo 2 per linearità: il campo generato da $q_1, q_2, ..., q_n$ è la somma dei campi generati separatamente da $q_1, q_2, ..., q_n$; quindi il flusso del campo generato da $q_1, q_2, ..., q_n$ è la somma dei flussi dei campi generati separatamente da

$q_1, q_2, \ldots, q_n$; questi flussi, per il Passo 2, valgono

$$4\pi k q_1, 4\pi k q_2, \ldots, 4\pi k q_n$$

perciò il flusso totale è

$$4\pi k q_1 + 4\pi k q_2 + \ldots + 4\pi k q_n = 4\pi k Q_{\text{tot}}.$$

Questo completa la dimostrazione del teorema di Gauss nel caso di una distribuzione discreta di cariche.

Passo 4. Distribuzione continua di cariche, di densità $\rho(x, y, z)$, non nulla in un aperto limitato Ω; calcoliamo il flusso attraverso una superficie chiusa Σ che avvolge Ω. Supponiamo inoltre che Σ sia disgiunta da Ω (cioè la superficie attraverso cui calcoliamo il flusso non tocca la regione dove $\rho \neq 0$). Nel prossimo passo vedremo come rimuovere quest'ipotesi.

Indichiamo con

$$\underline{r} = (x, y, z) \text{ il generico punto di } \Omega$$

in cui c'è una densità di carica non nulla, e con

$$\underline{r}' = (x', y', z') \text{ il generico punto della superficie } \Sigma$$

su cui vogliamo calcolare il campo, e quindi il flusso. Si ha:

$$\underline{E}(\underline{r}') = k \int\int\int_{\Omega} \rho(\underline{r}) \frac{(\underline{r}' - \underline{r})}{|\underline{r}' - \underline{r}|^3} dx dy dz.$$

Calcoliamo il flusso attraverso Σ:

$$\Phi(\underline{E}, \Sigma) = \int\int_{\Sigma} \left(k \int\int\int_{\Omega} \rho(\underline{r}) \frac{(\underline{r}' - \underline{r})}{|\underline{r}' - \underline{r}|^3} dx dy dz \right) \cdot \underline{n}_e(\underline{r}') dS(\underline{r}').$$

Si noti che il denominatore $|\underline{r}' - \underline{r}|^3$ non si annulla mai perché $\underline{r} \in \Omega, \underline{r}' \in \Sigma$ e abbiamo supposto Ω e Σ disgiunte. Quindi la funzione $\frac{(\underline{r}' - \underline{r})}{|\underline{r}' - \underline{r}|^3}$ è limitata. Scambiando tra loro l'integrale doppio e l'integrale triplo si ha:

$$\Phi(\underline{E}, \Sigma) = \int\int\int_{\Omega} \rho(\underline{r}) \left(\int\int_{\Sigma} k \frac{(\underline{r}' - \underline{r})}{|\underline{r}' - \underline{r}|^3} \cdot \underline{n}_e(\underline{r}') dS(\underline{r}') \right) dx dy dz.$$

Ora osserviamo l'integrale interno. Si tratta del flusso attraverso Σ del campo

$$\underline{E}(r') = k\frac{(\underline{r}' - \underline{r})}{|\underline{r}' - \underline{r}|^3}$$

che è il campo elettrico generato da una carica puntiforme unitaria posta nel punto $\underline{r}$. Poiché $\underline{r} \in \Omega$ e la superficie Σ circonda Ω, questo flusso è quello calcolato al passo 2:

$$\int\int_{\Sigma} k\frac{(\underline{r}' - \underline{r})}{|\underline{r}' - \underline{r}|^3} \cdot \underline{n}_e(\underline{r}')dS(\underline{r}') = 4\pi k \cdot 1,$$

che sostituito nell'integrale che assegna $\Phi(\underline{E}, \Sigma)$ dà

$$\Phi(\underline{E}, \Sigma) = 4\pi k \int\int\int_{\Omega} \rho(\underline{r})dxdydz = 4\pi k Q_{\text{tot}},$$

e il teorema è così dimostrato anche per una distribuzione continua di cariche, nell'ipotesi che Ω e Σ siano disgiunte.

Passo 5. Distribuzione continua di cariche, di densità $\rho(x, y, z)$, non nulla in un aperto limitato Ω; calcoliamo il flusso attraverso una superficie chiusa Σ e regolare che avvolge Ω *e può anche intersecare* Ω.

Ci limiteremo a dimostrare quest'ultimo punto nel caso particolare in cui Σ sia una sfera, che sarà sufficiente per le applicazioni che ci interessano. La proprietà è vera comunque più in generale.

La dimostrazione è quella già fatta al passo 4; si tratta solo di convincersi che anche in questo caso la formula

$$\Phi(\underline{E}, \Sigma) = \int\int\int_{\Omega} \rho(\underline{r}) \left(\int\int_{\Sigma} k\frac{(\underline{r}' - \underline{r})}{|\underline{r}' - \underline{r}|^3} \cdot \underline{n}_e(\underline{r}')dS(\underline{r}') \right) dxdydz$$

ha senso. Questo non è ovvio perché se il punto $\underline{r}$, che appartiene a Ω, si avvicina a $\underline{r}'$ che appartiene a Σ (e questa volta ciò è possibile perché Σ e Ω non si suppongono disgiunte), la funzione

$$\frac{(\underline{r}' - \underline{r})}{|\underline{r}' - \underline{r}|^3} \text{ è illimitata,}$$

e l'integrale scritto va quindi inteso come integrale generalizzato. Di più, se maggioriamo l'integranda nel modo più "ingenuo", scrivendo

$$\left|\frac{(\underline{r}'-\underline{r})}{|\underline{r}'-\underline{r}|^3}\cdot\underline{n}_e(\underline{r}')\right| \le \left|\frac{(\underline{r}'-\underline{r})}{|\underline{r}'-\underline{r}|^3}\right||\underline{n}_e(\underline{r}')| = \frac{1}{|\underline{r}'-\underline{r}|^2},$$

otteniamo un integrale di superficie che, scritto esplicitamente come integrale doppio, è senz'altro divergente. Ricordiamo infatti che l'integrale doppio

$$\int\int_{x^2+y^2\le r^2}\frac{dxdy}{x^2+y^2}$$

diverge, come si vede calcolandolo in coordinate polari. Proviamo che però, in realtà, vale la disuguaglianza più fine:

$$\left|\frac{(\underline{r}'-\underline{r})}{|\underline{r}'-\underline{r}|^3}\cdot\underline{n}_e(\underline{r}')\right| \le \frac{c}{|\underline{r}'-\underline{r}|}, \tag{1}$$

(per qualche costante c, e per $|\underline{r}'-\underline{r}|$ abbastanza piccolo) che mostra che in realtà l'integrale scritto è *convergente*, e la dimostrazione del passo 4 si può ripetere anche in questo caso. La (1) vale per ogni superficie abbastanza regolare; come anticipato noi la dimostriamo per una superficie sferica.

Scegliamo un riferimento cartesiano in cui $\underline{r}=0$ e l'asse z coincide con $-\underline{n}_e(\underline{0})$. In altre parole, la superficie Σ è la sfera

$$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2,$$

che vicino all'origine è grafico della funzione

$$z=R-\sqrt{R^2-(x^2+y^2)} \text{ per } x^2+y^2\le R^2,$$

e la disuguaglianza da dimostrare è

$$\left|\frac{\underline{r}'}{|\underline{r}'|^3}\cdot\underline{n}_e(\underline{r}')\right| \le \frac{1}{|\underline{r}'|} \text{ con } \underline{r}'=(x,y,z)\in\Sigma$$

o, equivalentemente:

$$|\underline{r}'\cdot\underline{n}_e(\underline{r}')| \le c|\underline{r}'|^2. \tag{2}$$

Lasciamo un po' di lavoro al lettore:

6.89.★ Con le notazioni ed ipotesi appena introdotte, si scriva esplicitamente $|\underline{r}'\cdot\underline{n}_e(\underline{r}')|$ e si dimostri che vale la (2) per $|\underline{r}'|\le R/2$.

Questo conclude la dimostrazione del teorema di Gauss dell'elettrostatica, nei vari casi di interesse. (Si osservi che i passi 3, 4, 5 non sono solo passi successivi, ma enunciati di interesse indipendente).

Osservazione 6.1. Teorema di Gauss per il campo gravitazionale. Il campo gravitazionale obbedisce ad una legge formalmente identica alla legge di Coulomb dell'elettrostatica, con l'unica differenza del *segno* della forza: mentre una carica elettrica positiva esercita su una carica elettrica unitaria (quindi anch'essa positiva) una forza *repulsiva*, una massa positiva (l'unico tipo di massa esistente!) esercita su una massa unitaria una forza *attrattiva*. Quindi per il campo gravitazionale $\underline{F}$ varrà un "teorema di Gauss" con il segno opposto: per il flusso del campo gravitazionale $\underline{F}$ uscente da una superficie Σ vale

$$\Phi(\underline{F}, \Sigma) = -4\pi G \cdot M_{\text{tot}}$$

dove G è la costante di gravitazione universale e M_{tot} è la massa totale contenuta nella regione limitata di cui Σ è il bordo. Nel caso di una distribuzione continua di materia si avrà

$$M_{\text{tot}} = \int\int\int_{\Omega} \rho(\underline{r}) dx dy dz$$

dove ora ρ è la densità di massa.

Un'ulteriore applicazione del teorema della divergenza a partire dal risultato appena trovato ci permetterà di dedurre un'equazione differenziale fondamentale della fisica matematica.

Esempio 6.19. Dal teorema di Gauss dell'elettrostatica all'equazione di Maxwell per il campo elettrico. Consideriamo una distribuzione continua di carica in un aperto limitato Ω dello spazio, di densità $\rho(\underline{r})$. Sia B_R una qualsiasi sferetta (di raggio R e centro qualsiasi) contenuta in Ω, e applichiamo a B_R il teorema di Gauss dell'elettrostatica (Passo 5 della dimostrazione fatta in precedenza):

$$\int\int_{\partial B_R} \underline{E} \cdot \underline{n}_e dS = 4\pi k Q_{\text{tot.}A} = 4\pi k \int\int\int_{B_R} \rho(\underline{r}) dx dy dz.$$

(Notiamo che la "carica totale" è in questo caso solo quella contenuta in B_R, che abbiamo scritto come integrale della densità). Trasformando il primo membro mediante il teorema della divergenza otteniamo

$$\iiint_{B_R} \nabla \cdot \underline{E}\,(\underline{r})dxdydz = 4\pi k \iiint_{B_R} \rho(\underline{r})dxdydz$$

e quindi $$\iiint_{B_R} [\nabla \cdot \underline{E}\,(\underline{r}) - 4\pi k\rho(\underline{r})]dxdydz = 0.$$

Ora ricordiamo che questo è vero per qualsiasi sfera $B_R \subseteq \Omega$. Se allora, fissato il centro P_0 della sfera, dividiamo per il volume della sfera e facciamo tendere a zero il raggio, otteniamo che è nulla la media integrale su sfere sempre più piccole e quindi, al limite, l'integranda nel punto P_0 centro della sfera. D'altro canto P_0 è arbitrario: ne segue che la funzione integranda dev'essere identicamente nulla[2] in Ω:

$$\nabla \cdot \underline{E} - 4\pi k\rho = 0 \text{ in } \Omega.$$

Abbiamo dedotto la *prima equazione di Maxwell per il campo elettrico* (in presenza di sorgenti[3]):

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi k\rho.$$

Il significato di questa deduzione è trasformare un'equazione integrale, avente un significato globale, in un'equazione differenziale, avente un significato puntuale/locale. In base all'Osservazione 6.1, per il *campo gravitazionale* dovuto ad una distribuzione continua di massa con densità ρ varrà un'equazione simile, ma col segno cambiato,

$$\nabla \cdot \underline{F} = -4\pi G\rho.$$

Osservazione 6.2. Proprietà di annullamento degli integrali tripli. Nella deduzione precedente abbiamo sfruttato il fatto che se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua (o integrabile) e sappiamo che

[2] La deduzione fatta è vera se l'integranda è continua (abbiamo applicato il teorema della media, che vale sotto questa ipotesi). Se supponiamo che sia soltanto integrabile (ma discontinua), allora si può dimostrare che l'integranda è zero in Ω, *tranne al più in un insieme di misura nulla.*

[3] Si chiama così l'equazione quando a secondo membro è presente una densità ρ non nulla (che è sorgente del campo). Nei punti dello spazio dove non c'è carica sarà soddisfatta un'equazione $\nabla \cdot \underline{E} = 0$, detta *equazione di Maxwell per il campo elettrico in assenza di sorgenti.*

$$\forall \text{sfera } B_R \subseteq \Omega \iiint_{B_R} f(x,y,z)dxdydz = 0,$$

allora necessariamente $f(x,y,z) = 0$ in ogni punto di Ω (o in ogni punto di Ω ad eccezione di un insieme di misura nulla, rispettivamente). Un errore comune nel presentare la deduzione precedente consiste nell'omettere, all'inizio dell'argomentazione, il fatto che si sta ragionando su una *generica sfera* (o più in generale, sottoinsieme aperto) $B_R \subseteq \Omega$, e limitarsi a lavorare su tutto Ω. Notiamo però che se sapessimo soltanto che

$$\iiint_{\Omega} [\nabla \cdot \underline{E}\,(\underline{r}) - 4\pi k \rho(\underline{r})]dxdydz = 0$$

non potremmo certo dedurne che l'integranda è nulla in Ω. (Si pensi alla funzione $\sin x$ che ha integrale nullo in $(0, 2\pi)$ senza essere identicamente nulla).

Esempio 6.20. Equazione di Poisson per il potenziale Newtoniano. L'equazione di Maxwell per il campo elettrico in presenza di sorgenti può essere trasformata in un'equazione scalare sul potenziale, sfruttando il fatto che *il campo elettrico è conservativo*. Questo fatto, che abbiamo finora verificato solo nel caso del campo generato da una carica puntiforme, rimane vero anche per una distribuzione continua di carica. Infatti se

$$\underline{E}(\underline{r}') = k \iiint_{\Omega} \rho(\underline{r}) \frac{\underline{r}' - \underline{r}}{|\underline{r}' - \underline{r}|^3} dxdydz \quad (\underline{r} = (x,y,z)),$$

notando che

$$\frac{\underline{r}' - \underline{r}}{|\underline{r}' - \underline{r}|^3} = \nabla_{\underline{r}'} \left(-\frac{1}{|\underline{r}' - \underline{r}|} \right)$$

e scambiando l'integrazione rispetto a $\underline{r}$ con la derivazione rispetto a $\underline{r}'$ si può scrivere

$$\underline{E}(\underline{r}') = \nabla_{\underline{r}'} \left(-k \iiint_{\Omega} \rho(\underline{r}) \frac{1}{|\underline{r}' - \underline{r}|} dxdydz \right)$$

e dunque

$$u(\underline{r}') = -k \iiint_{\Omega} \rho(\underline{r}) \frac{1}{|\underline{r}' - \underline{r}|} dxdydz$$

è un potenziale di $\underline{E}$ in tutto lo spazio (in particolare, in tutto Ω). Ponendo quindi $\underline{E} = \nabla u$, l'equazione di Maxwell

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi k\rho$$

si riscrive $$\nabla \cdot (\nabla u) = 4\pi k\rho$$

cioè $$\Delta u = 4\pi k\rho,$$

che è l'*equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico.*

Al solito, per il potenziale gravitazionale vale l'equazione di Poisson simile, ma con un segno diverso,

$$\Delta u = -4\pi G\rho.$$

Unificando le due teorie entro un unico quadro, l'equazione a derivate parziali

$$\Delta u = f$$

viene detta *equazione di Poisson per il potenziale newtoniano.* Il termine noto f ha il significato di termine di *sorgente.*

Esempio 6.21. Dalla legge di Neumann dell'elettromagnetismo all'equazione di Maxwell per $\nabla \times \boldsymbol{E}$. La legge di Neumann afferma che un campo magnetico $\underline{B}(t, x, y, z)$ variabile nel tempo in una regione Ω dello spazio genera un campo elettrico $\underline{E}$ concatenato ad esso, secondo la legge:

$$-\frac{d}{dt}\Phi(\underline{B}(t, \cdot\,), \Sigma) = \int_{\partial^+\Sigma} \underline{E} \cdot d\underline{r}$$

per ogni superficie Σ regolare e orientata.

Applicando il teorema di Stokes e il tipo di argomentazione che abbiamo visto nell'Esempio 6.19, mostriamo come si ricava da questa relazione l'equazione di Maxwell:

$$-\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \nabla \times \underline{E}.$$

Fissiamo $P_0 \in \Omega$, un versore $\underline{n}$, e sia $\Sigma = B(P_0, R, \underline{n})$ il cerchio di centro P_0 e raggio R posto in un piano avente versore normale $\underline{n}$. Applichiamo in questa situazione la legge di Neumann e riscriviamo la circuitazione di $\underline{E}$ mediante il teorema di Stokes:

$$-\frac{d}{dt}\Phi(\underline{B}(t, \cdot\,), \Sigma) = \int_{\partial^+\Sigma} \underline{E} \cdot d\underline{r} = \int\int_{\Sigma} \nabla \times \underline{E} \cdot \underline{n} dS.$$

Il primo membro, esplicitamente, è

$$-\frac{d}{dt}\Phi(\underline{B}(t,\cdot),\Sigma) = -\frac{d}{dt}\int\int_{\Sigma}\underline{B}(t,x,y,z)\cdot\underline{n}dS = \int\int_{\Sigma}-\frac{\partial\underline{B}}{\partial t}(t,x,y,z)\cdot\underline{n}dS$$

dove abbiamo portato la derivata rispetto al tempo sotto il segno di integrale. L'identità trovata si può riscrivere così:

$$\int\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial\underline{B}}{\partial t}+\nabla\times\underline{E}\right)\cdot\underline{n}dS = 0$$

e quindi anche così:

$$\frac{1}{|\Sigma|}\int\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial\underline{B}}{\partial t}+\nabla\times\underline{E}\right)\cdot\underline{n}dS = 0$$

dove $|\Sigma|$ è l'area del cerchio Σ. Per R tendente a zero, per il teorema della media per gli integrali doppi si ottiene

$$\left(\frac{\partial\underline{B}}{\partial t}+\nabla\times\underline{E}\right)\cdot\underline{n} = 0 \text{ in } P_0.$$

D'altro canto questo vale per ogni versore $\underline{n}$; scegliendo successivamente $\underline{n} = \underline{i},\underline{j},\underline{k}$ si ottiene che è zero che ciascuna delle tre componenti, e quindi il vettore stesso:

$$\frac{\partial\underline{B}}{\partial t}+\nabla\times\underline{E} = 0 \text{ in } P_0.$$

Infine, poiché questo è vero per ogni punto $P_0\in\Omega$, si ha che vale l'equazione differenziale

$$\frac{\partial\underline{B}}{\partial t}+\nabla\times\underline{E} = 0 \text{ in } \Omega \text{ e per ogni } t.$$

6.90.★ Dalla legge di Ampère generalizzata alla legge di Maxwell per $\nabla\times\underline{B}$. La legge di Ampère generalizzata afferma che un campo elettrico variabile $\underline{E}(t,x,y,z)$ o una corrente elettrica I inducono un campo magnetico $\underline{B}$ concatenato, secondo la legge:

$$\int_{\partial^+\Sigma}\underline{B}\cdot d\underline{r} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\Phi(\underline{E}(t,\cdot),\Sigma)$$

per ogni superficie Σ regolare e orientata contenuta nella regione Ω in cui i vari campi sono definiti. Qui ε_0e μ_0 sono delle costanti; la corrente I attraverso Σ può a sua volta vedersi come il flusso del vettore $\underline{j}$ densità di corrente:

$$I = \Phi(\underline{j}, \Sigma).$$

Con queste ipotesi e notazioni si deduca l'equazione di Maxwell per $\nabla \times \underline{B}$:

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \text{ in } \Omega$$

(*Suggerimento*: utilizzare il teorema di Stokes imitando la tecnica usata nell'Esempio precedente).

6.91.★ Diffusione del calore. Studiamo la diffusione del calore in un corpo tridimensionale Ω in cui non ci sono sorgenti o pozzi di calore. In altre parole, il calore già presente si sta diffondendo (ad esempio, il corpo è immerso in un ambiente più freddo e si sta raffreddando). Scriviamo un'equazione di bilancio per il calore al modo seguente. Per ogni sferetta $B_R(P_0) \subseteq \Omega$ possiamo ragionare così: il flusso di calore uscente è

$$\int\int_{\partial B_R(P_0)} \underline{j} \cdot \underline{n}_e dS$$

dove $\underline{j}$ è la *densità di flusso termico*[4]; questo flusso (non essendoci pozzi o sorgenti di calore interni) deve uguagliare la velocità istantanea di diminuzione del calore nella sferetta, cioè la quantità

$$-\frac{d}{dt}\int\int\int_{B_R(P_0)} c(\rho u)(t,x,y,z)dxdydz$$

dove c è il calore specifico del corpo, che supponiamo costante, $u(t,x,y,z)$ è la temperatura e $\rho(x,y,z)$ la densità del corpo (che supponiamo variabile da punto a punto ma costante nel tempo). Infine, tra temperatura e flusso termico vale la relazione (legge di Fourier della conduzione del calore):

$$\underline{j} = -k\nabla u$$

dove $k > 0$ è la costante di diffusività.

Con queste ipotesi e notazioni, dedurre l'*equazione di diffusione* soddisfatta dalla temperatura:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\Delta u \text{ in } \Omega \text{ per ogni } t$$

Il coefficiente $D = \frac{k}{c\rho}$ è detto coefficiente di diffusione.

[4] Quindi in questo esercizio il simbolo $\underline{j}$ non indica come al solito il versore $(0,1,0)$.

(*Suggerimento*: utilizzare il teorema di Gauss e imitare il procedimento seguito nell'Esempio 6.19).

6.92.★ Equazione di continuità. Sia $\underline{v}(t,x,y,z)$ la velocità di un fluido e $\rho(t,x,y,z)$ la sua densità (che quindi a priori supponiamo variabile nel tempo), sia Ω la regione dello spazio in cui questi campi sono definitii. Scriviamo un'equazione integrale di bilancio che esprima la conservazione della massa.

Fissato un punto $P_0 \in \Omega$ e una sfera B_R di centro P_0 e raggio R qualsiasi, la massa totale contenuta all'istante t in questa sferetta sarà

$$\int\int\int_{B_R} \rho(t,x,y,z)dxdydz, \text{ e la quantità } -\frac{d}{dt}\int\int\int_{B_R} \rho(t,x,y,z)dxdydz$$

è quindi la velocità istantanea di diminuzione della massa contenuta nella sferetta. Per la conservazione della massa, tale quantità è pari al flusso uscente di $\rho\underline{v}$ dalla sferetta, cioè

$$\int\int_{\partial B_R} \rho\underline{v}\cdot\underline{n}_e dS.$$

a. Con queste ipotesi e notazioni, dedurre l'*equazione di continuità*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{v}) = 0 \text{ in } \Omega.$$

b. Se il fluido è incomprimibile, vale l'ulteriore relazione

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho\cdot\underline{v} = 0.$$

Dedurne che il campo $\underline{v}$ in tal caso è solenoidale.

6.4.E. Applicazioni matematiche del teorema di Gauss

Esempio 6.22. Identità di Green. Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^3$ a cui è applicabile il teorema della divergenza (ad esempio, con frontiera regolare a pezzi), e siano $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$, $f\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}), g\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$. Applicando il teorema della divergenza al campo $\underline{F} = f\nabla g$ si ha:

$$\int\int\int_\Omega \nabla\cdot(f\nabla g)dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} f\nabla g\cdot n_e dS.$$

D'altro canto,

$$\nabla \cdot (f\nabla g) = f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g,$$

perciò

$$\int\int\int_\Omega f\Delta g dxdydz + \int\int\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot n_e dS.$$

Nell'ultimo integrale scritto, la funzione $\nabla g \cdot n_e$ è uguale (per la formula del gradiente) alla derivata direzionale di g nella direzione del versore normale uscente. Questa derivata direzionale porta il nome di *derivata normale*, e si indica col simbolo

$$\frac{\partial g}{\partial n_e}.$$

In definitiva abbiamo ottenuto la *prima identità di Green*:

$$\int\int\int_\Omega f\Delta g dxdydz + \int\int\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial n_e} dS \qquad (3)$$

valida per ogni coppia di funzioni:

$$f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

Quest'identità ha varie conseguenze interessanti; i prossimi esercizi ne metteranno in luce qualcuna.

6.93.★ *a.* Applicando la (3) provare che se Ω è un aperto limitato connesso con frontiera regolare e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è soluzione del *problema di Dirichlet omogeneo*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

allora u è identicamente nulla in Ω.

b. Dedurre da questo il fatto che il *problema di Dirichlet non omogeneo*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in C(\Omega), g \in C(\partial\Omega)$ assegnati ha al più una soluzione. (Teorema di unicità per il problema di Dirichlet).

6.94.★ *a.* Applicando la (3) provare che se Ω è come nell'esercizio precedente e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ è soluzione del *problema di Neumann omogeneo*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

allora u è costante in Ω.

b. Dedurre da questo il fatto che il *problema di Neumann non omogeneo*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in C(\Omega), g \in C(\partial\Omega)$ assegnati ha al più una soluzione, *a meno di costanti additive*.

6.95.★ Applicando la (3) provare che se Ω è come negli esercizi precedenti ed esiste una soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ del *problema di Neumann non omogeneo*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in C(\Omega), g \in C(\partial\Omega)$, allora necessariamente i dati f, g devono soddisfare la condizione di compatibilità:

$$\int\int\int_{\Omega} f dx dy dz = \int\int_{\partial\Omega} g dS.$$

In particolare, il problema di Neumann per l'equazione di Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

può avere soluzione solo se

$$\int\int_{\partial\Omega} g dS = 0.$$

6.96.★ Applicando la (3) provare che se Ω è come negli esercizi precedenti e $f, g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, si ha

$$\int\int\int_\Omega [f\Delta g - g\Delta f]dxdydz = \int\int_{\partial\Omega}\left[f\frac{\partial g}{\partial n_e} - g\frac{\partial f}{\partial n_e}\right]dS,$$

detta *seconda identità di Green.*

6.97.★ Applicando opportunamente il teorema della divergenza, dimostrare che se Ω è come negli esercizi precedenti e $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$, si ha (indicando ora le variabili di $\mathbb{R}^3$ con x_1, x_2, x_3):

$$\int\int\int_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_i}dx_1dx_2dx_3 = \int\int_{\partial\Omega} fgn_i dS - \int\int\int_\Omega g\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_1dx_2dx_3$$

per $i = 1, 2, 3$, dove n_1, n_2, n_3 sono le componenti del versore $\underline{n}_e$. (Formula di integrazione per parti in 3 variabili).

In particolare, se almeno una delle due funzioni f, g è nulla su $\partial\Omega$ si ha

$$\int\int\int_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_i}dx_1dx_2dx_3 = -\int\int\int_\Omega g\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_1dx_2dx_3.$$

6.4.F. Dimostrazione del teorema di Stokes e conseguenze

Nel libro di testo (v. [BPS2], cap. 6, §2) è stata fornita la dimostrazione delle formule di Gauss-Green nel piano: si tratta di una semplice applicazione del teorema fondamentale del calcolo integrale. Daremo qui una dimostrazione del teorema del rotore (non riportata in [BPS2]), illustrando i vari passi logici e lasciando alcuni dettagli come esercizio per il lettore. Come si vedrà, la dimostrazione si suddivide in due casi che in ultima analisi si riconducono uno alle formule di Gauss-Green nel piano, l'altro, di nuovo, ad un'applicazione del teorema fondamentale del calcolo integrale. Anche il teorema del rotore, quindi, come già il teorema della divergenza, non è che una conseguenza un po' elaborata, nel contesto del calcolo integrale vettoriale, del teorema fondamentale del calcolo integrale studiato in analisi 1. Presentiamo questa dimostrazione perché ci sembra un esercizio molto istruttivo, che coinvolge simultaneamente tanti concetti di calcolo differenziale e integrale in più variabili incontrati in precedenza.

Come conseguenza del teorema di Stokes, infine, presenteremo una dimostrazione del criterio sufficiente di conservatività di un campo, enunciata nel testo.

Riportiamo anzitutto l'enunciato del:

Teorema del rotore (o di Stokes). *Sia Σ una superficie regolare (o regolare a pezzi) orientabile, orientata con il versore normale $\underline{n}$, dotata di bordo $\partial^+\Sigma$ orientato positivamente. Supponiamo inoltre che $\partial^+\Sigma$ sia una curva regolare, o l'unione di più curve regolari. Se $\underline{F}$ è un campo vettoriale regolare definito in un intorno di Σ, allora vale la formula:*

$$\int\int_{\Sigma} \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n} dS = \int_{\partial^+\Sigma} \underline{F} \cdot d\underline{r}.$$

Lo studente è invitato a soffermarsi su ogni dettaglio nella prossima argomentazione.

Passo 1. E' sufficiente dimostrare la tesi nell'ipotesi che la superficie Σ sia un grafico di funzione $z = f(x, y)$ (oppure $y = f(x, z)$, oppure $x = f(y, z)$) per $(x, y) \in A$ con A aperto del piano la cui frontiera è regolare o unione di più curve regolari.

Infatti: ogni superficie regolare o regolare a pezzi Σ può vedersi come unione di un numero finito di superfici $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ ciascuna rappresentabile come grafico di funzione, nel senso detto. Inoltre, se Σ è orientabile e orientata, questo orientamento induce un orientamento su ciascuna Σ_j, e di conseguenza sui loro bordi, tale che su ogni arco di curva che è bordo comune di due diverse porzioni

Σ_i e Σ_j l'orientamento indotto è opposto (v. fig. 6.8).

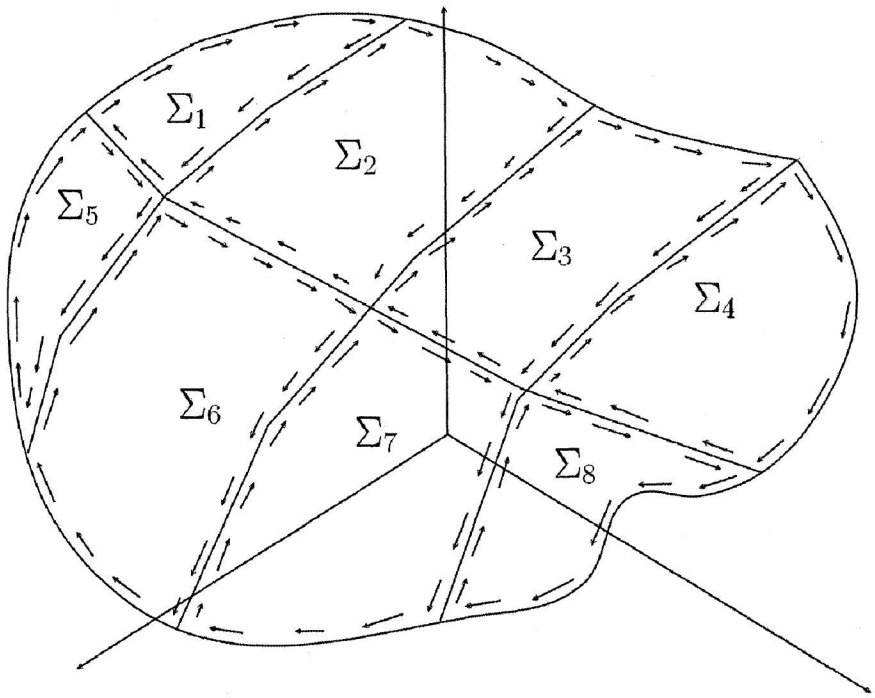


Fig. 6.8.

Applichiamo allora il teorema del rotore a ciascuna delle superfici Σ_j e sommiamo le relazioni così trovate:

$$\sum_{i=1}^{n} \int\int_{\Sigma_i} \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n} dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial^+ \Sigma_i} \underline{F} \cdot d\underline{r}. \tag{4}$$

Il prossimo esercizio completa questo passo.

6.98.★ Dimostrare che dalla (4) segue la tesi del teorema.

Passo 2. Supporremo quindi d'ora in poi che Σ sia un grafico di funzione. Per linearità, è sufficiente inoltre dimostrare il teorema per un campo avente una sola componente, come

$$\underline{F}(x, y, z) = F(x, y, z)\underline{i}.$$

Infatti, dimostrato il teorema in questo caso, in modo analogo segue per un campo

$$\underline{F}(x,y,z) = F(x,y,z)\underline{i} \quad \text{o} \quad \underline{F}(x,y,z) = F(x,y,z)\underline{k},$$

e quindi sommando membro a membro le 3 identità trovate si ha il teorema per un campo generico. (Perché? Lo studente scriva in dettaglio cosa succede).

Dunque proveremo il teorema per $\underline{F}(x,y,z) = F(x,y,z)\underline{i}$ e per una superficie grafico di funzione. Notiamo che, trattando un campo che ha solo la prima componente, abbiamo spezzato la simmetria esistente tra le 3 variabili, perciò non è lecito ora supporre a priori che la superficie sia, ad esempio, proprio del tipo $z = f(x,y)$; dobbiamo considerare separatamente i 3 casi

$$z = f(x,y), y = f(x,z), x = f(y,z).$$

Per meglio dire: poiché il campo $\underline{F}$ ha solo la *prima* componente, il ruolo di y e z è ancora simmetrico, quindi i casi

$$z = f(x,y), y = f(x,z)$$

sono effettivamente analoghi. Dobbiamo comunque considerare *due* casi distinti:

a. La superficie è del tipo $z = f(x,y)$ con $(x,y) \in A, \partial A$ curva regolare;

b. la superficie è del tipo $x = f(y,z)$ con $(x,y) \in A, \partial A$ curva regolare. E' quanto faremo nei prossimi due "passi".

Passo 3. Proviamo il teorema del rotore per

$$\underline{F}(x,y,z) = F(x,y,z)\underline{i}$$

e

$$\Sigma : z = f(x,y) \text{ con } (x,y) \in A,$$

∂A curva regolare.

Calcoliamo (lo studente verifichi i calcoli):

$$\nabla \times \underline{F} = (0, \partial_z F, -\partial_y F);$$

$$\underline{n}dS = (-f_x, -f_y, 1)dxdy;$$

$$\int\int_{\Sigma} \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n} dS =$$

$$= \int\int_{A} [-f_y(x,y)\partial_z F(x,y,f(x,y)) - \partial_y F(x,y,f(x,y))] dxdy.$$

Osserviamo ora che, per il teorema di derivazione della funzione composta, l'integranda dell'ultimo integrale doppio è:

$$-f_y(x,y)\partial_z F(x,y,f(x,y)) - \partial_y F(x,y,f(x,y)) = -\frac{\partial}{\partial y}[F(x,y,f(x,y))].$$

Pertanto scrivendo l'integrale doppio come integrale iterato si può calcolare poi l'integrale interno col teorema fondamentale del calcolo integrale. Supponiamo che A ammetta la seguente rappresentazione[5] come insieme semplice:

$$A = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in [g_1(x), g_2(x)]\}$$

per $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Allora:

$$\int\int_{\Sigma} \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n} dS = \int\int_{A} -\frac{\partial}{\partial y}[F(x,y,f(x,y))] dxdy =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} -\frac{\partial}{\partial y}[F(x,y,f(x,y))] dy \right) dy =$$

$$= \int_a^b [F(x,g_1(x),f(x,g_1(x))) - F(x,g_2(x),f(x,g_2(x)))] dx. \qquad (5)$$

Si tratta ora di riconoscere che l'integrale unidimensionale scritto non è altro che

$$\int_{\partial^+\Sigma} \underline{F} \cdot d\underline{r}.$$

Occorre per questo scrivere la rappresentazione analitica di $\partial^+\Sigma$:

---

[5] Questa ipotesi non è così restrittiva se ricordiamo che A è il dominio dei parametri di una piccola porzione Σ_i della superficie iniziale: pur di suddividere Σ in un numero abbastanza alto di piccole porzioni, le Σ_i si possono supporre di questo tipo anche per una superficie Σ molto generale.

6.99.★ Dimostrare che $\partial^+\Sigma$ si può vedere come unione di 4 archi di curva:

$$\gamma_1 : \underline{r}(t) = (t, g_1(t), f(t, g_1(t))) \text{ per } t \in [a, b];$$

$$\gamma_2 : \underline{r}(t) = (b, t, f(b, t)) \text{ per } t \in [g_1(b), g_2(b)];$$

$$\gamma_3 : \underline{r}(t) = (t, g_2(t), f(t, g_2(t))) \text{ per } t \in [b, a];$$

$$\gamma_4 : \underline{r}(t) = (a, t, f(a, t)) \text{ per } t \in [g_2(a), g_1(a)].$$

(*Suggerimento*: un buon disegno dovrebbe essere sufficiente a capire perché).

Ora ricordiamo che il campo è $\underline{F} = F\underline{i}$, quindi è ortogonale alle curve γ_2 e γ_4. Rimane perciò

$$\int_{\partial^+\Sigma} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} + \int_{\gamma_3} \underline{F} \cdot d\underline{r} =$$

$$= \int_a^b F(x, g_1(x), f(x, g_1(x)))dx - \int_a^b F(x, g_2(x), f(x, g_2(x)))dx.$$

Perciò la (5) dà

$$\int\int_\Sigma \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n} dS = \int_{\partial^+\Sigma} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

e il teorema è in questo caso dimostrato. Si noti che in questo caso l'identità è stata dimostrata, in ultima analisi, applicando direttamente il teorema fondamentale del calcolo integrale in una variabile.

Passo 4. Proviamo il teorema del rotore per

$$\underline{F}(x, y, z) = F(x, y, z)\underline{i}$$

e

$$\Sigma : x = f(y, z) \text{ con } (x, y) \in A,$$

∂A curva regolare.

Abbiamo, come prima

$$\nabla \times \underline{F} = (0, \partial_z F, -\partial_y F);$$

e, questa volta, $\underline{n}dS = (1, -f_y, -f_z)dydz;$

$$\int\int_\Sigma \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n}dS =$$

$$= \int\int_A [-f_y(y,z)\partial_z F(f(y,z),y,z) + f_z(y,z)\partial_y F(f(y,z),y,z)]dxdy. \quad (6)$$

Questa volta l'integranda non si riesce a vedere come la derivata di una funzione composta. Occorre un'osservazione e una riscrittura più attenta dell'integranda, per poter trasformare l'integrale doppio in un integrale semplice. Ciò è il contenuto del prossimo esercizio:

6.100.★ Si verifichi che, ponendo

$$G(y,z) = F(f(y,z),y,z),$$

e supponendo[6] f di classe C^2, vale la seguente identità:

$$f_z(y,z)(\partial_y F)(f(y,z),y,z) - f_y(y,z)(\partial_z F)(f(y,z),y,z) =$$

$$= \partial_y[f_z G](y,z) - \partial_z[f_y G](y,z).$$

Utilizzando l'identità dell'ultimo esercizio, la (6) si riscrive come

$$\int\int_\Sigma \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n}dS = \int\int_A [\partial_y[f_z G] - \partial_z[f_y G]]dydz.$$

Possiamo ora applicare le formule di Gauss-Green[7] nel piano yz, ed affermare che l'ultimo integrale è uguale a

$$= \int_{\partial^+ A} f_z G dz + f_y G dy.$$

Abbiamo quindi trasformato l'integrale di flusso in un integrale di linea. Si tratta ora di riconoscere che ciò che si è ottenuto è quel che volevamo; in altre parole, si tratta di provare che:

---

[6] Quest'ipotesi è più forte di quella ipotizzata nell'enunciato del teorema del rotore (superficie Σ regolare a pezzi), e si potrebbe farne a meno con un procedimento di approssimazione. Non entriamo però in questo dettaglio.

[7] Si ricordi che nel testo [BPS2], cap.6 §2, è stata data una dimostrazione diretta di questa formula, senza dedurla dal teorema del rotore che stiamo dimostrando ora.

$$\int_{\partial^+\Sigma} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\partial^+ A} f_z G dz + f_y G dy. \tag{7}$$

Occorre per questo scrivere più esplicitamente ognuno dei due membri. Osserviamo che, se $\partial^+ A$ ha equazioni parametriche

$$\partial^+ A : \begin{cases} y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

allora $\partial^+ \Sigma$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = f(y(t), z(t)) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

(dove $y(t), z(t)$ sono le funzioni che compaiono nelle equazioni di $\partial^+ A$). Quindi:

6.101.★ Utilizzando le parametrizzazioni precedenti per $\partial^+ A$ e $\partial^+ \Sigma$, e ricordando che $\underline{F} = F\underline{i}$, verificare che vale la (7).

Questo completa la dimostrazione del teorema del rotore. Veniamo ora ad una interessante conseguenza:

Dimostrazione della condizione sufficiente per la conservatività di un campo, a partire dal teorema del rotore.

Nel testo abbiamo enunciato senza dimostrazione il seguente teorema (v. [BPS2], cap.6, §1.5, Teorema 6.3):

Teorema. *Sia $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ irrotazionale in Ω. Se Ω è semplicemente connesso, allora $\underline{F}$ è conservativo in Ω.*

Possiamo darne una dimostrazione (anche se non completamente rigorosa) basata sul teorema del rotore, e su un altro teorema dimostrato nel testo (v. [BPS2], cap.6, §1.5, Teorema 6.2), che afferma, tra l'altro, quanto segue:

se $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ e per ogni curva chiusa, semplice e regolare a tratti $\gamma \subset \Omega$ si ha

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0,$$

allora $\underline{F}$ è conservativo in Ω.

Proviamo quindi che se $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ è irrotazionale in Ω e Ω è semplicemente connesso, allora per ogni curva chiusa, semplice e regolare a tratti $\gamma \subset \Omega$ si ha $\int_\Omega \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$.

Consideriamo dunque una tale curva γ; per l'ipotesi su Ω, γ si può contrarre fino a un punto senza uscire da Ω; contraendosi a questo modo, γ descrive una superficie Σ, contenuta in Ω, di cui γ è il bordo (v, fig. 6.9). E' possibile inoltre scegliere Σ regolare e orientabile. (Questo è un punto che andrebbe dimostrato, e che qui ci limitiamo a lasciare all'intuizione). Così facendo, l'applicazione del teorema del rotore a Σ dà:

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int\int_\Sigma \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n} dS = 0$$

perché $\Sigma \subset \Omega$ e $\nabla \times \underline{F} = 0$ in Ω per ipotesi. Per quanto richiamato all'inizio della dimostrazione, con ciò il teorema è dimostrato.

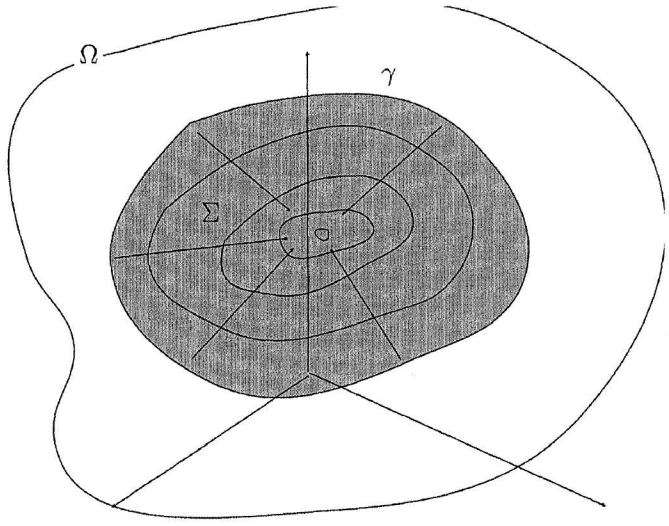


Fig. 6.9.

Soluzioni § 6.4

6.65.

a. Falso
b. Falso
c. Vero.
d. Vero.
e. Falso.
f. Falso.
g. Vero.

6.66.

a. $$\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{F} = 0$$

b. $$\operatorname{div}(f\,\underline{G}) = \nabla f \cdot \underline{G} + f\,\operatorname{div}\underline{G}$$

c. $$\operatorname{rot}\nabla u = 0$$

d. $$\operatorname{div}(f\nabla g) = f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g$$

e. $$\operatorname{div}\nabla u = \Delta u$$

f. $$\operatorname{rot}(f\underline{G}) = \nabla f \times \underline{G} + f\,\operatorname{rot}\underline{G}$$

6.67. $$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{k/2}}\right) =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)^{k/2} - x\frac{k}{2}(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}-1}2x}{(x^2+y^2)^k} = \frac{(x^2+y^2) - kx^2}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}+1}}.$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^{k/2}}\right) = \frac{-(x^2+y^2) + ky^2}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}+1}}.$$

$$\operatorname{rot}\underline{F} = \underline{k}\left(\frac{(x^2+y^2) - kx^2}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}+1}} + \frac{(x^2+y^2) - ky^2}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}+1}}\right) =$$

$$= \underline{k}\frac{(2-k)}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}} = \underline{0} \text{ se e solo se } k = 2.$$

6.68. *a.* Ponendo $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho^k}\right) = \frac{\rho^k - xk\rho^{k-1}\frac{x}{\rho}}{\rho^{2k}} = \frac{\rho^2 - kx^2}{\rho^{k+2}};$$

Per simmetria,

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\rho^2 - ky^2}{\rho^{k+2}}; \quad \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\rho^2 - kz^2}{\rho^{k+2}},$$

$$\mathrm{div}\underline{F} = \frac{\rho^2 - kx^2}{\rho^{k+2}} + \frac{\rho^2 - ky^2}{\rho^{k+2}} + \frac{\rho^2 - kz^2}{\rho^{k+2}} = \frac{3\rho^2 - k\rho^2}{\rho^{k+2}} = \frac{(3-k)}{\rho^k}.$$

b. Perciò il campo è solenoidale in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ se e solo se $k = 3$.

c. Un calcolo analogo in $\mathbb{R}^n$ mostra che $\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^k}$ è solenoidale in $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ se e solo se $k = n$:

$$\mathrm{div}\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho^2 - kx_i^2}{\rho^{k+2}} = \frac{n\rho^2 - k\rho^2}{\rho^{k+2}} = \frac{(n-k)}{\rho^k}.$$

6.69.

a.
$$\mathrm{rot}\underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2 \end{vmatrix} = (-2z, -2x, -2y).$$

b. La circonferenza ha equazione

$$\underline{r}(\vartheta) = (R\cos\vartheta, R\sin\vartheta, 0), \ \underline{r}'(\vartheta) = (-R\sin\vartheta, R\cos\vartheta, 0);$$

$$\mathrm{rot}\underline{F}(\underline{r}(\vartheta)) = (0, -2R\cos\vartheta, -2R\sin\vartheta).$$

$$\int_\gamma \mathrm{rot}\underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} (0, -2R\cos\vartheta, -2R\sin\vartheta) \cdot (-R\sin\vartheta, R\cos\vartheta, 0) d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -2R^2\cos^2\vartheta \, d\vartheta = -2R^2\pi.$$

6.70. *a.* $\nabla \cdot (f\underline{G}) = \nabla f \cdot \underline{G} + f\nabla \cdot \underline{G}.$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \underline{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$

$$\nabla \cdot (f\underline{G}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(fG_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} G_i + f \frac{\partial G_i}{\partial x_i} \right] =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} G_i \right) + f \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = \nabla f \cdot \underline{G} + f\nabla \cdot \underline{G}.$$

b. $\nabla \cdot (f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g.$

$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Applichiamo la *a* con $\underline{G} = \nabla g$ e abbiamo:

$$\nabla \cdot (f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f\nabla \cdot \nabla g = \nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g$$

ricordando l'identità (*iii*) $\nabla \cdot \nabla g = \Delta g$.

c. $\nabla \cdot (f\nabla \times \underline{G}) = \nabla f \cdot (\nabla \times \underline{G}).$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \underline{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Applichiamo la *a* con $\underline{G}$ sostituito da $\nabla \times \underline{G}$ e abbiamo:

$$\nabla \cdot (f\nabla \times \underline{G}) = \nabla f \cdot (\nabla \times \underline{G}) + f\nabla \cdot (\nabla \times \underline{G}) = \nabla f \cdot (\nabla \times \underline{G}),$$

ricordando che $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{G}) \equiv 0$.

d. $\nabla \times (f\underline{G}) = \nabla f \times \underline{G} + f(\nabla \times \underline{G}).$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \underline{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$

$$\nabla \times (f\underline{G}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ fG_1 & fG_2 & fG_3 \end{vmatrix} =$$

poiché, ad es., $\partial_x(fG_2) = (\partial_x f)G_2 + f\partial_x G_2$, riscriviamo il determinante formale precedente separando gli addendi in cui si deriva f da quelli in cui si deriva una componente di $\underline{G}$,

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ f\partial_x & f\partial_y & f\partial_z \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = \nabla f \times \underline{G} + f \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \nabla f \times \underline{G} + f(\nabla \times \underline{G}).$$

e. $\nabla \times (f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g.$

$f,g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Applichiamo la d con $\underline{G} = \nabla g$ e abbiamo:

$$\nabla \times (f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g + f(\nabla \times (\nabla g)) = \nabla f \times \nabla g,$$

ricordando l'identità (i) $\nabla \times (\nabla g) = 0$.

f. $$\nabla \times (\nabla \times \underline{G}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{G}) - \Delta \underline{G}.$$

$\underline{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$$\nabla \times \underline{G} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = (\partial_y G_3 - \partial_z G_2, \partial_z G_1 - \partial_x G_3, \partial_x G_2 - \partial_y G_1);$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{G}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_y G_3 - \partial_z G_2 & \partial_z G_1 - \partial_x G_3 & \partial_x G_2 - \partial_y G_1 \end{vmatrix}.$$

Calcoliamo ad es. la prima componente:

$$\underline{i}(\partial_y(\partial_x G_2 - \partial_y G_1) - \partial_z(\partial_z G_1 - \partial_x G_3)) =$$

$$= \underline{i}\left(-\partial^2_{zz} G_1 - \partial^2_{yy} G_1 + \partial_y \partial_x G_2 + \partial_z \partial_x G_3\right) =$$

aggiungendo e togliendo un termine $\partial^2_{xx} G_1$

$$= \underline{i}\left(-\partial^2_{zz} G_1 - \partial^2_{yy} G_1 - \partial^2_{xx} G_1 + \partial^2_{xx} G_1 + \partial_y \partial_x G_2 + \partial_z \partial_x G_3\right) =$$

$$= \underline{i}(-\Delta G_1 + \partial_x(\partial_x G_1 + \partial_y G_2 + \partial_z G_3)) = \underline{i}(-\Delta G_1 + \partial_x(\nabla \cdot \underline{G})).$$

Date le simmetrie, le altre componenti di $\nabla \times (\nabla \times \underline{G})$ saranno

$$\underline{j}(-\Delta G_2 + \partial_y(\nabla \cdot \underline{G})), \underline{k}(-\Delta G_3 + \partial_z(\nabla \cdot \underline{G}))$$

quindi

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{G}) = -\Delta \underline{G} + \nabla(\nabla \cdot \underline{G}).$$

6.71. E' una semplice applicazione del teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate seconde miste:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \underline{F}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial x_i}\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F_i}{\partial t}\right) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}, \frac{\partial F_2}{\partial t}, \frac{\partial F_3}{\partial t}\right) = \nabla \cdot \frac{\partial \underline{F}}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \underline{F}) = \frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_t\partial_x & \partial_t\partial_y & \partial_t\partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x\partial_t & \partial_y\partial_t & \partial_z\partial_t \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_t F_1 & \partial_t F_2 & \partial_t F_3 \end{vmatrix} = \nabla \times \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}, \frac{\partial F_2}{\partial t}, \frac{\partial F_3}{\partial t}\right) = \nabla \times \frac{\partial \underline{F}}{\partial t}.$$

6.72. Applichiamo ad ambo i membri della terza equazione l'operatore rotore. Si ha:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \underline{B}) =$$

per la quarta equazione $$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}.$$

Si noti che nella prima riga abbiamo scambiato l'operatore rotore con l'operatore $\frac{\partial}{\partial t}$ in base a quanto provato nell'esercizio precedente.

D'altro canto per l'identità *f* dell'esercizio 6.71 il primo membro è

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{E}) - \Delta \underline{E} = -\Delta \underline{E}$$

per la seconda equazione. Quindi

$$-\Delta \underline{E} = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}$$

ossia $$\Delta E_j = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} \quad \text{per } j = 1, 2, 3.$$

Analogamente si dimostra l'equazione delle onde per le componenti del campo $\underline{B}$: si applica l'operatore rotore ad ambo i membri della quarta equazione e si ha

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{B}) = \nabla \times \left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \underline{E}) =$$

per la terza equazione $$= \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2}.$$

D'altro canto ancora l'identità *f* e, questa volta, la prima equazione, danno:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{B}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{B}) - \Delta \underline{B} = -\Delta \underline{B}$$

da cui $$\Delta \underline{B} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2}$$

ossia $$\Delta B_j = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 B_j}{\partial t^2} \quad \text{per } j = 1, 2, 3.$$

6.73. Si ha: $$\underline{r}'(\vartheta) = (-a\sin\vartheta, b\cos\vartheta);$$

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\,dy - y\,dx) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos\vartheta \cdot b\cos\vartheta + b\sin\vartheta \cdot a\sin\vartheta)\,d\vartheta = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} d\vartheta = \pi ab.$$

6.74. Si ha: $$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\,dy - y\,dx) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(R\cos^3\vartheta \cdot 3R\sin^2\vartheta\cos\vartheta + R\sin^3\vartheta \cdot 3R\cos^2\vartheta\sin\vartheta\right)d\vartheta =$$

$$= \frac{3}{2}R^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(\sin 2\vartheta)^2\,d\vartheta = \frac{3}{8}\pi R^2.$$

6.75. Si ha:

$$\underline{r}(\vartheta) = ((1+\cos\vartheta)\cos\vartheta, (1+\cos\vartheta)\sin\vartheta)$$

$$\underline{r}'(\vartheta) = (-\sin\vartheta - \sin 2\vartheta, \cos\vartheta + \cos 2\vartheta);$$

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\,dy - y\,dx) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ((1+\cos\vartheta)\cos\vartheta \cdot (\cos\vartheta + \cos 2\vartheta) + (1+\cos\vartheta)\sin\vartheta \cdot (\sin\vartheta + \sin 2\vartheta))\,d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\vartheta)[1+\cos 2\vartheta\cos\vartheta+\sin 2\vartheta\sin\vartheta]d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\vartheta)^2 d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1+2\cos\vartheta+\cos^2\vartheta\right)d\vartheta = \frac{1}{2}(2\pi+0+\pi) = \frac{3}{2}\pi.$$

6.76. Si ha:

$$\underline{r}(\vartheta) = (\alpha\cos\vartheta - \cos(\alpha\vartheta), \alpha\sin\vartheta - \sin(\alpha\vartheta))$$

$$\underline{r}'(\vartheta) = (-\alpha\sin\vartheta + \alpha\sin(\alpha\vartheta), \alpha\cos\vartheta - \alpha\cos(\alpha\vartheta));$$

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\,dy - y\,dx) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big[(\alpha\cos\vartheta - \cos(\alpha\vartheta))\cdot(\alpha\cos\vartheta - \alpha\cos(\alpha\vartheta))$$

$$- (\alpha\sin\vartheta - \sin(\alpha\vartheta))\cdot(-\alpha\sin\vartheta + \alpha\sin(\alpha\vartheta))\Big]d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\alpha^2+\alpha-\left(\alpha^2+\alpha\right)\cos\vartheta\cos(\alpha\vartheta) - \left(\alpha^2+\alpha\right)\sin\vartheta\sin(\alpha\vartheta)\right)d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\alpha^2+\alpha-\left(\alpha^2+\alpha\right)\cos((\alpha-1)\vartheta)\right)d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha^2+\alpha\right)\pi - \left(\alpha^2+\alpha\right)\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((\alpha-1)\vartheta)d\vartheta = \frac{1}{2}\left(\alpha^2+\alpha\right)\pi.$$

6.77. Si ha:

$$\underline{r}(\vartheta) = \left(\cos\vartheta - 2\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \sin\vartheta + 2\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)$$

$$\underline{r}'(\vartheta) = \left(-\sin\vartheta + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \cos\vartheta + \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right);$$

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_\gamma (x dy - y dx) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \left[\left(\cos\vartheta - 2\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) \cdot \left(\cos\vartheta + \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) + \right.$$

$$\left. - \left(\sin\vartheta + 2\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) \cdot \left(-\sin\vartheta + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) \right] d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \left(1 - 2 - \cos\vartheta\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \sin\vartheta\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \left[-1 - \cos\left(\frac{3}{2}\vartheta\right)\right] d\vartheta = -\frac{1}{2}\left(4\pi + \left[\frac{2}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\vartheta\right)\right]_0^{4\pi}\right) = -2\pi.$$

Abbiamo ottenuto un risultato negativo. Il motivo è che esaminando più da vicino la parametrizzazione ci si può rendere conto che l'ipocicloide così parametrizzata è una curva semplice e chiusa che avvolge l'origine in senso *orario*; perciò il valore dell'integrale va cambiato di segno, e troviamo correttamente che l'area vale 2π.

6.78. $$\int\int\int_D \nabla \cdot \underline{F}\, dxdydz = \int\int_{\partial D} \underline{F} \cdot \underline{n}_e dS.$$

a. D è un dominio limitato dello spazio.

b. ∂D è la frontiera di D; dev'essere una superficie regolare a pezzi e orientabile.

c. $\underline{n}_e$ indica il versore normale alla superficie, orientato verso l'esterno.

d. L'integranda $\nabla \cdot \underline{F}$, cioè $\mathrm{div}\underline{F}$, è una funzione a valori scalari.

e. La superficie che compare nell'integrale a secondo membro non può avere un bordo, in quanto lei stessa è il bordo di una regione tridimensionale.

f. Se si applica il teorema a un campo $\underline{F}$ solenoidale in D, si ottiene

$$\int\int_{\partial D} \underline{F} \cdot \underline{n}_e dS = 0.$$

g. Se si applica il teorema a un campo $\underline{F}$ conservativo in D, detto U un potenziale di $\underline{F}$, si ottiene

$$\int\int\int_D \Delta U\, dxdydz = \int\int_{\partial D} \nabla U \cdot \underline{n}_e dS$$

cioè l'integrale in D del laplaciano di U è uguale all'integrale su ∂D della derivata normale uscente di U.

6.79.

a. Applicabile. Il bordo del parallelepipedo è una superficie regolare a pezzi, anche se non regolare; il campo è C^1 in D.

b. Non applicabile. Il campo è illimitato in un intorno dell'origine, quindi non è C^1 in tutta la sfera.

c. Applicabile. Il campo è C^1 al di fuori di un intorno dell'origine, e la regione D questa volta esclude un intorno dell'origine.

d. Non applicabile. La regione D è illimitata.

e. Applicabile. La regione D è un poliedro, quindi ha frontiera regolare a pezzi; il campo è C^1 nel semispazio $z \geq 0$ (il denominatore $z+1$ non si annulla).

6.80.

a. Σ è una superficie nello spazio, e come caso particolare può essere un dominio del piano.

b. Il simbolo $\partial^+\Sigma$ indica il bordo di Σ, che si suppone essere una curva regolare a tratti o l'unione di un numero finito di curve regolari a tratti, e si suppone orientato positivamente rispetto all'orientazione di Σ: se si cammina su $\partial\Sigma$ con la testa dalla parte del versore normale a Σ, la regione Σ dev'essere sulla sinistra.

c. $\nabla \times \underline{F} = \mathrm{rot}\underline{F}$.

d. In generale la superficie Σ ha bordo, ma può anche non averlo.

e. Se $\underline{F}$ è conservativo, si ottiene

$$\int_{\partial^+\Sigma} \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0.$$

f. Si ottiene la formula di Green.

g. Se $\partial\Sigma = \emptyset$, si ottiene

$$\int\int_{\Sigma} \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n} dS = 0.$$

6.81.

a. Applicabile. Σ è una supericie orientabile e regolare a pezzi, anche se non regolare, e il suo bordo è il bordo di un quadrato, quindi una curva regolare a pezzi; $\underline{F}$ è C^1.

b. Applicabile. Σ è orientabile e regolare, con bordo regolare. Notare che la superficie non passa per l'origine, dove il campo $\underline{F}$ è discontinuo.

c. Applicabile. Σ è orientabile e regolare, senza bordo. Notare che la superficie non passa per l'origine, dove il campo $\underline{F}$ è discontinuo.

d. Non applicabile. Il campo è irregolare sul piano $x = 0$, che interseca la superficie nell'origine.

e. Applicabile. Il campo è regolare e la superficie anche.

f. Non applicabile. La superficie è illimitata.

g. Non applicabile. La superficie non è orientabile.

6.82.
$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{\rho^2} & \frac{y}{\rho^2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{2yz}{\rho^4}, -\frac{2xz}{\rho^4}, 0 \right)$$

avendo posto $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. La normale uscente dalla sfera è $\underline{n} = (x,y,z)/R$ perciò

$$\nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n} = \left(\frac{2yz}{R^4}, -\frac{2xz}{R^4}, 0 \right) \cdot \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right) = \frac{2xyz - 2xyz}{R^5} = 0$$

e il flusso è nullo perché l'integranda è identicamente nulla.

6.83. *a.*

$$\Phi(F,\Sigma) = \int\int_\Sigma \underline{F} \cdot \underline{n}_e dS = \int\int_\Sigma \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^2} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} dS = \int\int_\Sigma \frac{|\underline{r}|^2}{|\underline{r}|^3} dS = \frac{1}{R} \int\int_\Sigma dS =$$

$$= \frac{1}{R} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R.$$

b.
$$\partial_x \left(\frac{x}{\rho^2} \right) = \frac{\rho^2 - x 2\rho \cdot \frac{x}{\rho}}{\rho^4} = \frac{\rho^2 - 2x^2}{\rho^4}.$$

Quindi

$$\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\rho^2 - 2x^2}{\rho^4} + \frac{\rho^2 - 2y^2}{\rho^4} + \frac{\rho^2 - 2z^2}{\rho^4} = \frac{3\rho^2 - 2\rho^2}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

c.
$$\int\int\int_S \nabla \cdot \underline{F}(x,y,z) dxdydz = \int\int\int_S \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dxdydz =$$

$$= 4\pi \int_0^R \frac{1}{\rho^2} \rho^2 d\rho = 4\pi R.$$

L'integrale della divergenza di $\underline{F}$ in S è uguale al flusso uscente di $\underline{F}$ dal bordo di S.

Attenzione al commento: *non si può* dire: "L'integrale della divergenza di $\underline{F}$ in S è uguale al flusso uscente di $\underline{F}$ dal bordo di S per il teorema della divergenza" in quanto il teorema della divergenza in questo caso NON è applicabile, perché il campo $\underline{F}$ non è regolare nella regione considerata: nell'origine va all'infinito.

Si può dire che *in questo caso constatiamo che l'integrale della divergenza di $\underline{F}$ in S è uguale al flusso uscente di $\underline{F}$ dal bordo di S, anche se le ipotesi del teorema della divergenza non sono verificate e quindi il teorema non è applicabile.*

6.84.

a. $\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z-y & x(1+z^2) & xy \end{vmatrix} = \underline{i}(x-2xz) + \underline{j}(1-y) + \underline{k}(2+z^2).$

b.

$$\nabla \times \underline{F}(x,y,f(x,y)) =$$

$$= \left(x - 2x\left(1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)\right), 1-y, 2 + \left(1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)\right)^2\right);$$

$$\underline{n}dS = (-f_x, -f_y, 1)dxdy = \left(\frac{1}{2}x, \frac{2}{9}y, 1\right);$$

$$\Phi = \int\int_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1} \left\{ \frac{x^2}{2}\left[2\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) - 1\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{9}y(1-y) + 2 + \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)^2 \right\} dxdy$$

c. $\partial^+\Sigma : \underline{r}(\vartheta) = (2\cos\vartheta, 3\sin\vartheta, 0), \ \vartheta \in [0, 2\pi];$

$$\underline{r}'(\vartheta) = (-2\sin\vartheta, 3\cos\vartheta, 0);$$

$$\underline{F}(\underline{r}(\vartheta)) = (-3\cos\vartheta, 2\cos\vartheta, 6\cos\vartheta\sin\vartheta);$$

$$\Phi = \int_{\partial^+\Sigma} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} (-3\sin\vartheta, 2\cos\vartheta, 6\cos\vartheta\sin\vartheta) \cdot (-2\sin\vartheta, 3\cos\vartheta, 0)d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 6d\vartheta = 12\pi.$$

6.85.

a. $\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 1 & 0 & y \end{vmatrix} = (1,0,0).$

$$\underline{n}dS = (-f_x, -f_y, 1)dxdy = (-2x, -2y, 1)dxdy.$$

$$\Phi(\underline{F}, \Sigma) = \int\int_{\Sigma} \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n}dS = \int\int_{x^2+y^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0} (1,0,0) \cdot (-2x, -2y, 1)dxdy =$$

$$= \int\int_{x^2+y^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0} -2xdxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R -2\rho\cos\vartheta \rho d\rho \right) d\vartheta =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta d\vartheta \right) \left(\int_0^R -2\rho^2 d\rho \right) = -\frac{2}{3}R^3.$$

b.

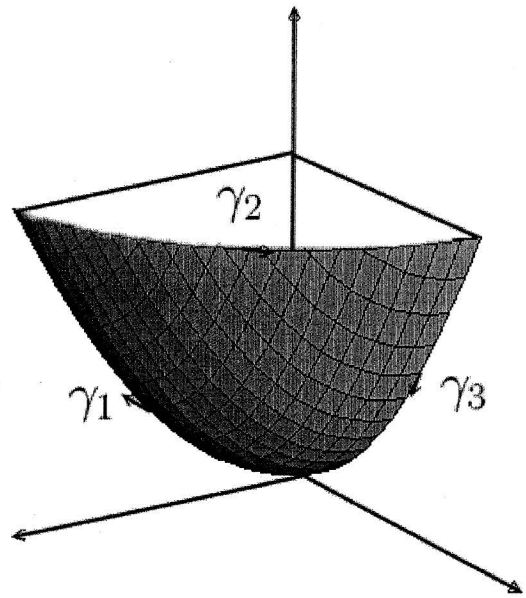


Fig. 6.10.

$$\gamma_1 : \underline{r}(t) = (0, t, t^2), t \in [R, 0];$$

$$\gamma_2 : \underline{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, R^2), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\gamma_3 : \underline{r}(t) = (t, 0, t^2), t \in [0, R].$$

$$\int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_R^0 (1,0,t) \cdot (0,1,2t)dt = -\int_0^R 2t^2 dt = -\frac{2}{3}R^3.$$

$$\int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1,0,R\text{sin}t) \cdot (-R\text{sin}t, R\text{cos}t, 0)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -R\text{sin}t dt = -R.$$

$$\int_{\gamma_3} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^R (1,0,0) \cdot (1,0,2t)dt = \int_0^R 1dt = R.$$

Quindi complessivamente

$$\int_{\partial^+\Sigma} \underline{F} \cdot d\underline{r} = -\frac{2}{3}R^3 - R + R = -\frac{2}{3}R^3$$

(come già trovato al punto *a*).

6.86.

a. $$\int\int\int_\Omega \nabla \cdot \underline{F} dxdydz = \int\int\int_\Omega 3dxdydz = 3|\Omega| = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$|\Omega| = \frac{1}{3}\text{Area base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

b. Indichiamo così le 4 facce del tetraedro con:

$$\Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_z$$

sono le 3 facce poste sui piani coordinati e perpendicolari, rispettivamente, agli assi x, y, z,

$$\Sigma_0$$

è la faccia obliqua, passante per i punti $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ e quindi posta sul piano $x+y+z=1$.

Su Σ_x il versore normale uscente è $(-1,0,0)$, il campo è $\underline{F} = (0,y,z)$, perciò i due vettori sono ortogonali e il flusso attraverso Σ_x è nullo.

Per la simmetria tra le variabili, lo stesso accade per le facce Σ_y e Σ_z.

Σ_0 si rappresenta come:

$$z = 1 - x - y \text{ per } x \in [0,1], y \in [0, 1-x];$$

$$\underline{n}dS = (1,1,1)dxdy$$

$$\int\int_{\Sigma_0} \underline{F} \cdot \underline{n} dS = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x, y, 1-x-y) \cdot (1,1,1) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx = \int_0^1 (1-x) dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

quindi in totale $$\Phi(\underline{F}, \Sigma) = \frac{1}{2},$$

come già trovato al punto precedente.

6.87. Notiamo che il campo è tangente alla superficie laterale del cono, perciò il flusso uscente dalla superficie laterale è nullo, ed è sufficiente calcolare il flusso uscente dalla base che, scegliendo il riferimento con l'asse z sull'asse del cono è il cerchio

$$z = h; x^2 + y^2 \leq R^2.$$

Si ha: $$\underline{n} dS = \underline{k} dx dy; \quad \underline{F} = \frac{(x, y, h)}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}};$$

$$\Phi = \int\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{(x, y, h)}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \cdot \underline{k} dx dy =$$

$$= \int\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{h}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} dx dy =$$

$$= 2\pi h \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = 2\pi h \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right]_0^R = 2\pi h \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) =$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(R/h)^2 + 1}} \right).$$

Si osserva che questo flusso dipende solo dal rapporto R/h, cioè dall'apertura del cono, non dalle sue dimensioni assolute. Per qualsiasi apertura positiva, in particolare, questo flusso non è nullo.

Osserviamo che il campo $\underline{F}$ ha divergenza nulla fuori dall'origine, quindi in tutto il cono (tranne il vertice); se fosse applicabile il teorema della divergenza, il flusso uscente sarebbe nullo, cosa falsa. Il teorema della divergenza non è applicabile perché il campo $\underline{F}$ non è regolare in tutto il cono. Si noti che questo esercizio presenta un caso limite: il campo

è irregolare in un punto del bordo di Ω; ciò non impedisce, in questo caso, di calcolare comunque il flusso del campo attraverso la superficie, né l'integrale della divergenza nel dominio (che è l'integrale della funzione nulla), ma le due quantità non sono uguali.

6.88. Conviene calcolare la circuitazione di $\underline{F}$ lungo $\partial^+\Sigma$, che è la circonferenza $z = 0, x^2 + y^2 = 1$, percorsa in verso antiorario. (Per il teorema del rotore, questa quantità uguaglia il flusso cercato). Quindi:

$$\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad \text{per } t \in [0, 2\pi]; \quad \underline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0);$$

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) = \left(\cos^2 t \sin t, 0, 1\right);$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t \sin t, 0, 1\right) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} -\cos^2 t \sin^2 t dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\, dt = -\frac{\pi}{4}.$$

6.89. Si ha, su Σ,

$$\underline{r}' = \left(x, y, R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\right);$$

$$\underline{n}_e(\underline{r}') = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}, -1\right)}{\sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2-(x^2+y^2)}}}.$$

Perciò

$$|\underline{r}' \cdot \underline{n}_e(\underline{r}')| = \frac{\left|\frac{x^2}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} + \frac{y^2}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} - \left(R - \sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}\right)\right|}{\sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2-(x^2+y^2)}}} \leq$$

$$\leq \left| \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}} - R + \sqrt{R^2 - (x^2+y^2)} \right| =$$

$$= \left| \frac{(x^2+y^2) - R\sqrt{R^2 - (x^2+y^2)} + R^2 - (x^2+y^2)}{\sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}} \right| =$$

$$= \left| \frac{R^2 - R\sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}}{\sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}} \right| \leq$$

per $x^2 + y^2 \leq R^2/4$

$$\leq \frac{R^2}{\sqrt{3R^2/4}}\left|1-\sqrt{1-\left(\frac{x^2+y^2}{R^2}\right)}\right| = \frac{R^2}{\sqrt{3R^2/4}}\cdot\frac{\frac{x^2+y^2}{R^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{x^2+y^2}{R^2}\right)}} \leq$$

$$\leq \frac{R^2}{\sqrt{3R^2/4}}\cdot\frac{x^2+y^2}{R^2} = \frac{x^2+y^2}{R\sqrt{3}/2},$$

che è quanto si voleva dimostrare.

6.90. Fissiamo un punto $P_0 \in \Omega$, un qualsiasi versore $\underline{n}$, e sia Σ il cerchio di centro P_0, raggio R, posto nel piano di versore normale $\underline{n}$. Applichiamo la legge di Ampère a questa superficie Σ. Riscrivendo la circuitazione di $\underline{E}$ mediante il teorema di Stokes e scrivendo esplicitamente i vari flussi abbiamo:

$$\int\int_\Sigma \nabla \times \underline{B}\cdot n dS = \mu_0 \int\int_\Sigma \underline{j}\cdot\underline{n} dS + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int\int_\Sigma \underline{E}\cdot\underline{n} dS =$$

portando la derivata rispetto al tempo sotto l'integrale

$$= \mu_0 \int\int_\Sigma \underline{j}\cdot\underline{n} dS + \mu_0\varepsilon_0 \int\int_\Sigma \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\cdot\underline{n} dS.$$

Si ottiene così

$$\int\int_\Sigma \left(\nabla \times \underline{B} - \mu_0\underline{j} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right)\cdot\underline{n} dS.$$

Ora si ragiona come nell'esempio precedente: per $\underline{n}$ e P_0 fissati si divide per πR^2 e si fa tendere a zero R, trovando (nell'ipotesi di continuità dell'integranda)

$$\left(\nabla \times \underline{B} - \mu_0\underline{j} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right)\cdot\underline{n} = 0 \text{ in } P_0.$$

Per la generalità di $\underline{n}$ questo dà

$$\nabla \times \underline{B} - \mu_0\underline{j} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = 0 \text{ in } P_0$$

e per la generalità di P_0 questo dà

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0\underline{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \text{ in } \Omega$$

che è l'equazione di Maxwell cercata.

6.91. Siano $P_0 \in \Omega$ e $R > 0$ qualsiasi. Partiamo dall'identità:

$$\int\int_{\partial B_R(P_0)} \underline{j} \cdot \underline{n}_e dS = -\frac{d}{dt}\int\int\int_{B_R(P_0)} c\rho u \, dxdydz.$$

Riscrivendo il primo membro mediante il teorema di Gauss e, a secondo membro, portando la derivata rispetto a t sotto l'integrale, abbiamo:

$$\int\int\int_{B_R(P_0)} \nabla \cdot \underline{j} \, dxdydz = -\int\int\int_{B_R(P_0)} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dxdydz$$

e quindi

$$\int\int\int_{B_R(P_0)} \left[\nabla \cdot \underline{j} + c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\right] dxdydz = 0$$

che, per la genericità di R e P_0, implica (come nell'Esempio 6.19):

$$\nabla \cdot \underline{j} + c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ in } \Omega \text{ e per ogni } t.$$

Infine, la legge di Fourier $\underline{j} = -k\nabla u$ ci permette di riscrivere l'equazione nella forma:

$$\nabla \cdot (-k\nabla u) + c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

cioè

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\Delta u$$

che è l'equazione di diffusione.

6.92. *a.* Si ha, per il teorema di Gauss:

$$-\frac{d}{dt}\int\int\int_{B_R} \rho(t,x,y,z)dxdydz = \int\int_{\partial B_R} \rho \underline{v} \cdot \underline{n}_e dS =$$

$$= \int\int\int_{B_R} \nabla \cdot (\rho \underline{v}) dxdydz.$$

D'altro canto il primo membro è

$$-\frac{d}{dt}\int\int\int_{B_R} \rho(t,x,y,z)dxdydz = -\int\int\int_{B_R} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x,y,z)dxdydz,$$

quindi

$$\int\int\int_{B_R} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v})\right] dxdydz = 0$$

che, per la genericità di P_0 ed R dà, come in altri esempi,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \text{ in } \Omega, \text{ per ogni } t.$$

b. Sappiamo già che

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0,$$

d'altro canto $\nabla \cdot (\rho \underline{v}) = \nabla \rho \cdot \underline{v} + \rho \nabla \cdot \underline{v}$, quindi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \underline{v} + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0,$$

e la condizione di incompressibilità $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \underline{v} = 0$ implica allora

$$\rho \nabla \cdot \underline{v} = 0.$$

Poiché la densità non può annullarsi, ne segue $\nabla \cdot \underline{v} = 0$, ossia il campo $\underline{v}$ è solenoidale.

6.93. *a.* Applichiamo la (3) con $f = g = u$ e abbiamo

$$\int\int\int_\Omega u \Delta u dx dy dz + \int\int\int_\Omega |\nabla u|^2 dx dy dz = \int\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n_e} dS$$

da cui, poiché $\Delta u = 0$ in Ω e $u = 0$ su $\partial\Omega$,

$$\int\int\int_\Omega |\nabla u|^2 dx dy dz = 0.$$

Essendo l'integranda non negativa e l'integrale nullo, l'integranda dev'essere identicamente nulla. Allora $u =$ costante in Ω (qui utilizziamo l'ipotesi che Ω sia connesso); ma essendo $u \in C(\overline{\Omega})$ e $u = 0$ su $\partial\Omega$, tale costante è zero, cioè $u = 0$.

b. Siano u_1, u_2 due soluzioni dello stesso problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Allora per linearità, la funzione $u = u_1 - u_2$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

e questo, per il punto *a*, implica che sia $u \equiv 0$, ossia $u_1 = u_2$, che è il risultato di unicità che si voleva dimostrare.

6.94. *a.* Come nell'esempio precedente, ma usando questa volta l'ipotesi $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ su $\partial\Omega$, si prova ancora che

$$\int\int\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdydz = 0$$

e quindi $u =$ costante in Ω. Ora però da questo non si può dedurre che $u = 0$.

b. Se u_1, u_2 sono soluzioni dello stesso problema di Neumann non omogeneo, $u = u_1 - u_2$ è soluzione del problema di Neumann omogeneo e quindi, per il punto *a*, è costante.

6.95. Applichiamo la (3) con $f = 1$ e $g = u$. Si ha:

$$\int\int\int_\Omega \Delta u dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n_e} dS$$

cioè

$$\int\int\int_\Omega f dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} g dS$$

che è la condizione di compatibilità cercata. Ovviamente se $f \equiv 0$ dev'essere

$$\int\int_{\partial\Omega} g dS = 0.$$

6.96. E' sufficiente scrivere due volte la (3) con i ruoli scambiati di f e g, cioè

$$\int\int\int_\Omega f\Delta g dxdydz + \int\int\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n_e} dS$$

$$\int\int\int_\Omega g\Delta f dxdydz + \int\int\int_\Omega \nabla g \cdot \nabla f dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} g \frac{\partial f}{\partial n_e} dS$$

e poi sottrarre membro a membro.

6.97. Proviamo l'identità per $i = 1$. E' sufficiente applicare il teorema della divergenza al campo $\underline{F} = f g \underline{i}$. Si ha:

$$\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial}{\partial x_1}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial x_1} + g\frac{\partial f}{\partial x_1}$$

quindi

$$\int\int\int_\Omega \left(f\frac{\partial g}{\partial x_1} + g\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \int\int_{\partial\Omega} fg\underline{i} \cdot \underline{n}_e dS = \int\int_{\partial\Omega} fgn_1 dS,$$

e quindi

$$\int\int\int_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \int\int_{\partial\Omega} fgn_1 dS - \int\int\int_\Omega g\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3.$$

6.98. $$\sum_{i=1}^{n} \int\int_{\Sigma_i} \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n} dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial^+ \Sigma_i} \underline{F} \cdot d\underline{r}.$$

A primo membro otteniamo ovviamente il flusso di $(\nabla \times \underline{F})$ attraverso l'unione delle superfici Σ_i, cioè attraverso Σ; a secondo membro troveremo la cirucuitazione lungo $\partial^+\Sigma$, perché tutti gli integrali di linea su archi di curva interni a Σ risultano elidersi a due a due (v. fig. 6.8), per la proprietà notata in precedenza riguardo all'orientamento indotto.

6.99. (v. fig. 6.11),

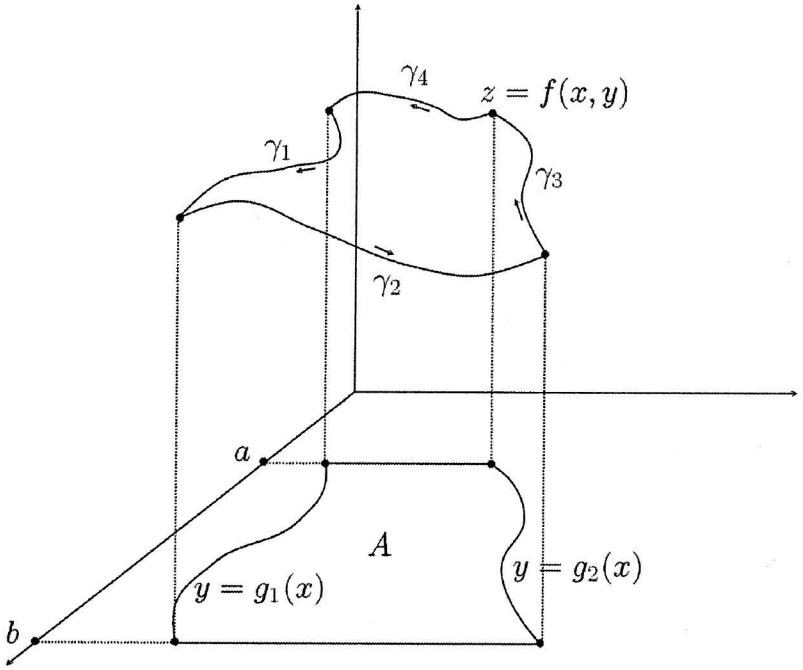


Fig.6.11.

$\gamma_1 : \underline{r}(t) = (t, g_1(t), f(t, g_1(t)))$ per $t \in [a, b]$;

$\gamma_2 : \underline{r}(t) = (b, t, f(b, t))$ per $t \in [g_1(b), g_2(b)]$;

$\gamma_3 : \underline{r}(t) = (t, g_2(t), f(t, g_2(t)))$ per $t \in [b, a]$;

$\gamma_4 : \underline{r}(t) = (a, t, f(a, t))$ per $t \in [g_2(a), g_1(a)]$.

6.100. Partiamo dal secondo membro:

$$\partial_y[f_z G] - \partial_z[f_y G] =$$

$$= f_z G_y + f_{zy} G - f_y G_z - f_{zy} G = f_z G_y - f_y G_z$$

dove la semplificazione effettuata si basa sul teorema di Schwarz di uguaglianza delle derivate seconde miste, nell'ipotesi f di classe C^2. Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, essendo $G(y,z) = F(f(y,z), y, z)$, l'ultima espressione scritta è uguale a

$$f_z(y,z)[F_x(f(y,z),y,z) f_y(y,z) + F_y(f(y,z),y,z)] +$$

$$- f_y(y,z)[F_x(f(y,z),y,z) f_z(y,z) + F_z(f(y,z),y,z)] =$$

$$= f_z(y,z) F_y(f(y,z),y,z) - f_y(y,z) F_z(f(y,z),y,z),$$

perciò l'identità è dimostrata.

6.101.

$$\int_{\partial^+ A} f_z G dz + f_y G dy = \int_{\partial^+ A} F(f(y,z),y,z)(f_z(y,z)dz + f_y(y,z)dy) =$$

$$= \int_a^b F(f(y(t),z(t)),y(t),z(t))\big[f_z(y(t),z(t))z'(t) + f_y(y(t),z(t))y'(t)\big]dt.$$

D'altro canto, $\underline{F} = F\underline{i}$, e calcolando $x'(t)$ da $x(t) = f(y(t),z(t))$, si ha:

$$\int_{\partial^+ \Sigma} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_a^b F(f(y(t),z(t)),y(t),z(t))x'(t)dt =$$

$$= \int_a^b F(f(y(t),z(t)),y(t),z(t))(f_y(y(t),z(t))y'(t) + f_z(y(t),z(t))z'(t))dt,$$

che è la stessa espressione trovata per $\int_{\partial^+ A} f_z G dz + f_y G dy$.

Cap. 7. Serie di potenze e serie di Fourier

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 7, §1, 2, 3.

7.1. Serie di funzioni e convergenza totale

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 7, §1.

Esempi svolti

Esempio 7.1. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos x (\sin x)^{n+\sqrt{n}}.$$

a. Determinare l'insieme $I \subseteq [0, 2\pi]$ dei punti in cui la serie converge puntualmente.

b. Stabilire se la serie converge totalmente in I, o in caso contrario stabilire in quali intervalli contenuti in I la serie converge totalmente.

a. Per $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ è $|\sin x| < 1$, perciò

$$\left|\cos x (\sin x)^{n+\sqrt{n}}\right| \leq |\cos x||\sin x|^{n+\sqrt{n}} \leq |\cos x||\sin x|^{n},$$

serie geometrica convergente. Se poi $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, $\cos x = 0$ perciò la serie converge comunque. Dunque la serie converge semplicemente in tutto $[0, 2\pi]$.

b. Non si ha però convergenza totale in tutto $[0, 2\pi]$, ma solo nei sottointervalli $[a, b]$ che *non contengono* $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Infatti, fissato un intervallo $[a, b] \subseteq [0, 2\pi]$ che *non* contiene $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, esiste un $\delta > 0$ tale che $|\sin x| \leq \delta$ per ogni $x \in [a, b]$, e quindi

$$\left|\cos x (\sin x)^{n+\sqrt{n}}\right| \leq \delta^{n+\sqrt{n}} \leq \delta^{n}$$

per un certo $\delta < 1$, e quindi la serie converge totalmente.

Esempio 7.2. Si consideri la serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{1+n^2}.$$

a. Stabilire se la serie converge totalmente in $[0, 2\pi]$.

b. Stabilire se la somma $f(x)$ della serie è una funzione continua in $[0, 2\pi]$ (o in quale intervallo lo è).

c. Stabilire se la serie delle derivate converge semplicemente in $[0, 2\pi]$ e se converge totalmente in $[0, 2\pi]$.

d. In base ai punti precedenti, si può affermare che la serie è derivabile termine a termine?

a.
$$\left|\frac{\sin nx}{1+n^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2},$$

serie convergente. Quindi la serie converge totalmente in $[0, 2\pi]$.

b. Poiché $f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+n^2}$ sono continue e la serie converge totalmente in $[0, 2\pi]$, la somma della serie è continua[1] in tutto $[0, 2\pi]$.

c.
$$f_n'(x) = \frac{n\cos nx}{1+n^2}.$$

La serie delle derivate è una serie trigonometrica convergente semplicemente in $(0, 2\pi)$ in quanto $\frac{n}{1+n^2} \to 0$ *monotonamente* (v. Proposizione 7.1 in [BPS2], cap.7, §3.1). In $x = 0, x = 2\pi$ la serie delle derivate diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}; \quad \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n}.$$

La serie delle derivate non converge totalmente, perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{x \in [0, 2\pi]} |f_n'(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} \text{ divergente.}$$

d. Pertanto *non si può* affermare che la serie di partenza è derivabile termine a termine[2].

[1] v. [BPS2], cap.7, §1, Teorema 7.1.

[2] v. [BPS2], cap.7, §1, Teorema 7.2.

Esercizi

7.1. Si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \tag{1}$$

a. La serie converge totalmente in $[0, 2\pi]$? Se sì, perché?
b. Scrivere la serie derivata della (1).
c. La serie derivata della (1) converge totalmente in $[0, 2\pi]$?

7.2. Si consideri la serie trigonometrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{2^n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right).$$

a. La serie converge semplicemente in $[0, 2\pi]$?
b. La serie converge totalmente in $[0, 2\pi]$?
c. Si può garantire che la somma della serie sia una funzione continua?

7.3. Si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{1+n^2} \tag{2}$$

a. La serie converge totalmente? Se sì, perché?
b. Scrivere la serie derivata della (2).
c. La serie derivata della (2) converge totalmente?

7.4.★ Si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1 - x^n)$$

a. Determinare l'insieme $I \subseteq [0, 1]$ dei punti in cui la serie converge puntualmente.
b. Stabilire se la serie converge totalmente in I.

7.5.★ Si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x)^n$$

a. Determinare l'insieme $I \subseteq [0,1]$ dei punti in cui la serie converge puntualmente.

b. Stabilire se la somma $f(x)$ della serie è una funzione continua in $[0,1]$ (o in quale intervallo lo è).

Soluzioni §7.1

7.1.

a. Converge totalmente in $[0, 2\pi]$, perché $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq 1/n^2$ e $\sum 1/n^2$ converge.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$. *c.* La serie derivata converge semplicemente in $(0, 2\pi)$ ma diverge in $x = 0, x = 2\pi$. Pertanto non converge totalmente in $[0, 2\pi]$.

7.2. *a.* Sì. *b.* Sì. *c.* Sì perché la serie converge totalmente e i singoli addendi sono continui.

7.3.

a. Sì, perché $\left|\frac{\cos(n^2x)}{1+n^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2}$ e $\sum \frac{1}{1+n^2}$ converge.

b. $\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n^2 \sin(n^2x)}{1+n^2}$

c. No perché il termine generale non tende a zero.

7.4.

a. Per $x \in (0, 1)$ fissato, si tratta di una serie a termini positivi. Si ha:

$$x^n(1 - x^n) \sim x^n,$$

serie geometrica convegente. Perciò la serie converge puntualmente per $x \in (0, 1)$. D'altro canto per $x = 0$ o $x = 1$ la serie è identicamente nulla, quindi la serie converge puntualmente in tutto $[0, 1]$.

b. Per provare l'eventuale convergenza totale cerchiamo una maggiorante di $x^n(1 - x^n)$ indipendente da x (notare che $x^n(1 - x^n)$ è ≥ 0 in $[0, 1]$). Basta calcolare per ogni n il massimo in $[0, 1]$ della funzione

$$f_n(x) = x^n(1 - x^n).$$

Si ha: $$f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n) \geq 0 \text{ per } x \leq \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

Quindi il massimo di f_n in $[0, 1]$ è

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \frac{1}{4}.$$

Questo significa che qualsiasi successione a_n per cui si ha

$$x^n(1 - x^n) \leq a_n \ \forall x \in [0, 1]$$

soddisfa $a_n \geq \frac{1}{4}$, quindi $\sum a_n$ diverge, e la serie di partenza non converge totalmente.

7.5.

a. E' una serie geometrica di ragione $x(1-x)$, perciò per ogni $x \in (0,1)$ fissato converge. D'altro canto per $x = 0$ o $x = 1$ la serie è identicamente nulla, quindi la serie converge puntualmente in tutto $[0,1]$.

b. Come nell'esercizio precedente, per provare la convergenza totale calcoliamo per ogni n il massimo in $[0,1]$ della funzione

$$f_n(x) = x^n(1-x)^n.$$

Si ha: $$f_n'(x) = n[x(1-x)]^{n-1}(1-2x) \geq 0 \text{ per } x \leq \frac{1}{2}.$$

Quindi il massimo di f_n in $[0,1]$ è

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4^n}.$$

Pertanto $$x^n(1-x)^n \leq \frac{1}{4^n} \quad \forall x \in [0,1],$$

e la serie di partenza converge totalmente in $[0,1]$. Essendo continue le funzioni f_n, se ne conclude che la somma è continua in $[0,1]$.

7.2. Serie di potenze

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 7, §2.

Per gli argomenti: serie di Taylor di trascendenti elementari, serie geometrica, serie esponenziale, esponenziale complesso, si rimanda a [B1], cap.5, §5.2. In questo paragrafo sono raccolti esercizi sulla determinazione del raggio di convergenza di una serie di potenze.

Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze. Se a fianco della serie è scritto "(studiare estremi)" studiare anche il carattere della serie negli estremi dell'intervallo di convergenza.

7.6.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{3^n}$ (studiare estremi)

7.7.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2}$ (studiare estremi)

7.8.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n^n}$

7.9.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n x^n}{2^n}$

7.10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$

7.11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n^2}x^n$ (studiare estremi)

7.12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{2n}+1}x^n$ (studiare estremi)

7.13.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2}(2x)^n$ (studiare estremi)

7.14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{2n}}x^n$

7.15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}100^n x^n$

7.16.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$

7.17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

7.18.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log(1+n)}{2^n+3^n}x^n$

7.19.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+2}x^n$ (studiare estremi)

7.20.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$

7.21.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

7.22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$.

Soluzioni §7.2

7.6. $$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

(perché $\sqrt[n]{n} \to 1$), perciò $R = 3$. Comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza:

per $x = 3$ si ha la serie $\sum_{n=}^{\infty} n^2$ divergente;

per $x = -3$ si ha la serie $\sum_{n=}^{\infty} (-1)^n n^2$ irregolare.

7.7. $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$; $R = 1$. Comportamento agli estremi:

per $x = 1$ si ha la serie $\sum_{n=}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ convergente;

per $x = -1$ si ha la serie $\sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergente.

7.8. $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $R = +\infty$.

7.9. $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$; $R = 0$.

7.10. $R = \frac{1}{e}$.

7.11. $R = \frac{1}{3}$. Comportamento agli estremi:

per $x = \frac{1}{3}$ si ha la serie $\sum_{n=}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ convergente;

per $x = -\frac{1}{3}$ si ha la serie $\sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergente;

7.12. $R = 9$. Comportamento agli estremi:

per $x = 9$ si ha la serie $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty}(-1)^n\frac{9^n}{9^n+1}$ irregolare;

per $x = -9$ si ha la serie $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty}\frac{9^n}{9^n+1}$ irregolare.

7.13. $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n^2+2}2^n} = 2$. $R = \frac{1}{2}$. Comportamento agli estremi:

per $x = \dfrac{1}{2}$ si ha la serie $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2}$ divergente

perché $\frac{n+1}{n^2+2} \sim \frac{1}{n}$;

per $x = -\dfrac{1}{2}$ si ha la serie $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+2}$ convergente

per il criterio di Leibniz: si mostra che $\frac{n+1}{n^2+2}$ è dfinitivamente monotona decrescente, ponendo $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$, calcolando $f'(x)$ e mostrando che questa è definitivamente negativa.

7.14. $R = \frac{9}{2}$.

7.15. $R = \frac{1}{100}$.

7.16. $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$. $R = 0$.

7.17. $R = \infty$.

7.18.
$$|a_n| = \left|\frac{\log(1+n)}{2^n+3^n}\right| \sim \frac{\log n}{3^n}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \sim \frac{\log(n+1)}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{\log n} \to \frac{1}{3}$$

quindi $R = 3$.

7.19. $R = 1$. Comportamento agli estremi:

per $x = 1$ si ha la serie $\sum_{n=}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2}$ convergente;

per $x = -1$ si ha la serie $\sum_{n=}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}$ divergente.

7.20.
$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|;$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

dunque
$$R = e.$$

7.21.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{1}{4}$$

perciò $R = 4$.

7.22. $R = \frac{1}{e}$.

7.3. Serie trigonometriche e serie di Fourier

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 7, §3.

7.3.A. Polinomi trigonometrici

Qualsiasi polinomio in $\cos\omega x, \sin\omega x$, cioè qualsiasi combinazione lineare di funzioni del tipo

$$(\cos\omega x)^n(\sin\omega x)^m \qquad (*)$$

si può riscrivere come combinazione lineare di funzioni

$$\cos(k\omega x) \quad \text{e} \quad \sin(k\omega x) \quad \text{per } k \text{ intero,}$$

cioè come "polinomio trigonometrico" (e questo è il motivo per cui si chiamano polinomi trigonometrici le funzioni di questo tipo). Ciò significa che *la serie di Fourier di una funzione del tipo* $(*)$ *è in realtà una somma finita, che si può scrivere trasformando la funzione di partenza mediante identità trigonometriche elementari, anziché calcolando integrali.* Le identità che servono per questo sono le seguenti:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}; \quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

Esempio 7.3. Si scriva la serie di Fourier della funzione 2π-periodica

$$f(x) = \sin^3 x$$

senza calcolare i coefficienti di Fourier, ma utilizzando identità trigonometriche elementari.

$$\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x \cdot \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x\cos 2x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) =$$

$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

La serie di Fourier richiesta è questo polinomio trigonometrico.

In alternativa, si può usare il *calcolo coi numeri complessi*. Ricordando le formule di Eulero:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

si vede che

$$(\cos x)^n (\sin x)^m = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^m$$

e, sviluppando con pazienza le potenze ed eseguendo i prodotti, si ottiene una somma di termini del tipo e^{ikx} (con k intero relativo) che, riscritte a loro volta nella forma trigonometrica $\cos kx + i\sin kx$ e semplificate, danno una combinazione lineare di funzioni del tipo $\cos nx$, $\sin nx$.

Esempio 7.4. Si scriva la serie di Fourier della funzione 2π-periodica

$$f(x) = \sin^3 x$$

senza calcolare i coefficienti di Fourier, ma utilizzando le formule di Eulero.

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} =$$

$$= \frac{(e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{-8i} = -\frac{1}{8i}(2i\sin 3x - 6i\sin x) =$$

$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x,$$

risultato ovviamente uguale a quello ottenuto applicando identità trigonometriche.

Esercizi

Scrivere la serie di Fourier (che è una somma finita!) delle seguenti funzioni trigonometriche, senza calcolare integrali, ma utilizzando i metodi appena illustrati.

7.23.★ $\sin^2 x \cos^3 x$

7.24.★ $\cos^4 x$

7.25.★ $\sin^5 x$

7.26.★ $\sin^2 x \cos^4 x$

7.3.B. Periodizzazione, regolarità di funzioni periodizzate

Lo sviluppo in serie di Fourier si applica a funzioni periodiche. A volte la funzione da sviluppare è già in partenza definita su tutto $\mathbb{R}$ e T-periodica, altre volte inizialmente è definita solo su un intervallo, ad es. $[0, T]$, e siamo noi che la prolunghiamo a tutto $\mathbb{R}$ periodizzandola, per poterla poi sviluppare. Poiché, nei teoremi sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier, le ipotesi coinvolgono anche le proprietà della funzione periodizzata, è importante imparare a riconoscere come si esegue la periodizzazione, in particolare come si verifica la continuità e la regolarità della funzione periodizzata. I prossimi esercizi ruotano intorno a queste questioni preliminari.

Periodizzazione e simmetrizzazione di un grafico

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni sull'intervallo indicato, osservando le differenze tra i grafici presentati nello stesso esercizio.

7.27. Tracciare i grafici su $[-4, 4]$:

a. $f(x) = x$ su $[0, 2]$, periodizzata di periodo 2.

b. $f(x) = x$ su $[-1, 1]$, periodizzata di periodo 2.

7.28. Tracciare i grafici su $[-3\pi, 3\pi]$:

a. $f(x) = x \sin x$ su $[0, \pi]$,

riflessa dispari su $[-\pi, 0]$ e periodizzata di periodo 2π.

b. $f(x) = x\sin x$ su $[0, \pi]$,

riflessa pari su $[-\pi, 0]$ e periodizzata di periodo 2π.

c. $f(x) = x\sin x$ su $[0, \pi]$,

periodizzata di periodo π.

7.29. Tracciare i grafici su $[-2, 2]$:

a. $f(x) = e^{-x^2}$ su $[0, 1]$, periodizzata di periodo 1.

b. $f(x) = e^{-x^2}$ su $[-1/2, 1/2]$, periodizzata di periodo 1.

7.30. Tracciare i grafici su $[-6, 6]$:

a. $f(x) = xe^x$ su $[0, 2]$,

riflessa dispari su $[-2, 0]$ e periodizzata di periodo 4.

b. $f(x) = xe^x$ su $[0, 2]$,

riflessa pari su $[-2, 0]$ e periodizzata di periodo 4.

Regolarità di una funzione, continuità della periodizzata

Ricordiamo che una funzione f si dice *regolare a tratti* sull'intervallo $[a, b]$ se è limitata sull'intervallo e questo si può suddividere in un numero finito di intervalli $[a_i, b_i]$ tali che in ciascun (a_i, b_i) f è derivabile, e inoltre esistono finiti i limiti per $x \to a_i^+$ e per $x \to b_i^-$ di f e di f'.

La regolarità a tratti di f si valuta osservando la funzione sul solo intervallo $[a, b]$. Per applicare i teoremi sulla covergenza delle serie di Fourier ci interessa anche, però, sapere se la *periodizzata* di f è continua in $\mathbb{R}$. Questo significa che non solo f è continua in $[a, b]$, ma che vale la condizione di raccordo $f(a) = f(b)$. I prossimi esercizi riguardano questi aspetti.

Dire se la seguente funzione è regolare a tratti sul suo intervallo base di definizione (periodo) oppure no, e dire se la sua periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ *oppure no.*

7.31. $f(x) = e^{-x^2}$ su $[-1/2, 1/2]$, periodizzata di periodo 1.

7.32. $f(x) = e^{-x^2}$ su $[0, 1]$, periodizzata di periodo 1

7.33. $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ su $[0,1]$, periodizzata di periodo 1.

7.34. $f(x) = x(1-x)$ su $[0,1]$, periodizzata di periodo 1.

7.35. $f(x) = x(1-x)$ su $[-1/2, 1/2]$, periodizzata di periodo 1.

7.36. $f(x) = |x|$ su $[-1,1]$, periodizzata di periodo 2.

7.37. $f(x) = x\log x$ su $[0,1]$, periodizzata di periodo 1.

Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se la periodizzata è $C^1(\mathbb{R})$.

7.38. $f(x) = x^2$ su $[-1,1]$, periodizzata di periodo 2.

7.39. $f(x) = x(1-x)$ su $[0,1]$, riflessa dispari su $[-1,0]$ e periodizzata di periodo 2.

7.40. $f(x) = x(1-x)$ su $[0,1]$, riflessa pari su $[-1,0]$ e periodizzata di periodo 2.

7.41. $f(x) = x^2(1-x)^2$ su $[0,1]$, periodizzata di periodo 1.

7.42. $f(x) = x^2\log x$ su $[0,1]$, riflessa dispari su $[-1,0]$ e periodizzata di periodo 2.

7.3.C. Serie di Fourier: convergenza puntuale e rapidità di convergenza a zero dei coefficienti

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 7, §3.3, 3.4, 3.6.

Esempi svolti

Esempio 7.5. Si consideri la funzione 4-periodica definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \le |x| \le 2 \\ 0 & \text{se } |x| < 1 \end{cases} \quad \text{per } x \in [-2,2].$$

a. In base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la

convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f sfruttando le simmetrie, tenendo conto del periodo di f, e scrivere in forma compatta la serie di Fourier.

a. La periodizzata di f è regolare a tratti e continua tranne in $\pm 1 + 4k$ (v. fig. 7.1), quindi i coefficienti di Fourier saranno solo $o(1)$. Per lo stesso motivo, la serie di Fourier convergerà puntualmente a $f(x)$ per ogni $x \in [-2, 2], x \neq \pm 1$; in $x = \pm 1$ la serie convergerà a $1/2$, che è la media dei limiti destro e sinistro in questi punti.

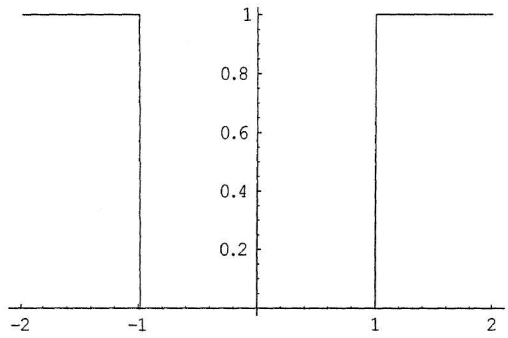


Fig. 7.1.

b. La formula generale che assegna i coefficienti di Fourier sull'intervallo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, quindi per funzioni periodiche di periodo T, è:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)dx \text{ con } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Nel nostro caso $T = 4$. Poiché f è pari, $b_k = 0\ \forall k$, mentre

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)dx = \int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx = \int_1^2 \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx.$$

$$a_0 = 1; a_k = \left[\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\right]_1^2 = -\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Quindi
$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right).$$

A titolo d'esempio, mostriamo il grafico di f sovrapposto a quella della sua somma di Fourier per $n = 10$:

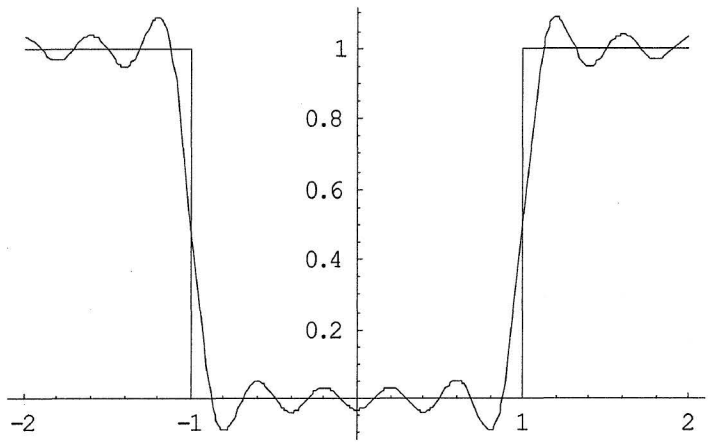


Fig. 7.2.

Osservazione 7.1. Impostazione del calcolo dei coefficienti di Fourier. Si faccia particolare attenzione, nel momento in cui si imposta il calcolo di a_k e b_k, ad applicare correttamente la formula generale, prestando attenzione a:

1) qual è il periodo T della funzione;

2) se il periodo fondamentale su cui possediamo la definizione analitica della funzione è l'intervallo $[0, T]$, oppure $[-T/2, T/2]$ (o un altro intervallo ancora!). E' chiaro infatti che un errore di impostazione in questa fase pregiudica completamente il calcolo successivo. Infine:

3) se la funzione ha una simmetria (pari o dispari) che consente di concludere a priori che i coefficienti b_k oppure a_k sono identicamente nulli. Non accorgersi di questo non è di per sé un errore ma, evidentemente, può far perdere molto tempo in calcoli inutili.

Esempio 7.6. Si consideri la funzione 2-periodica definita da:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } x \in [-1, 0] \\ x^2 & \text{per } x \in [0, 1] \end{cases}.$$

a. In base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier?

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo di f, e verificare che rispettano la previsione fatta al punto precedente,

riguardo alla rapidità di convergenza a zero. Scrivere poi f come somma della sua serie.

a. La funzione è limitata e integrabile e la sua periodizzata è continua e regolare a tratti (v. fig. 7.3), perciò i coefficienti di Fourier sono $o(1/k)$.

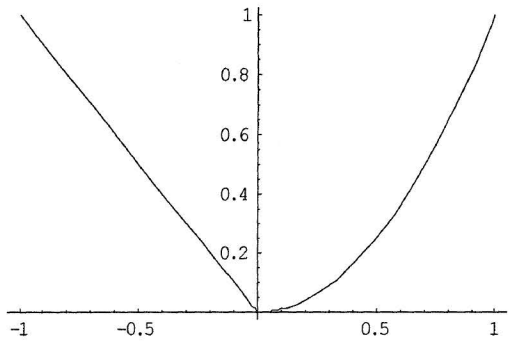


Fig. 7.3.

La serie di Fourier converge puntualmente a f in tutto $[-1, 1]$.

b. $$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)dx \text{ con } \omega = \frac{2\pi}{T};$$

In questo caso $T = 2$ e

$$a_k = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(k\pi x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} -x\cos(k\pi x)dx + \int_{0}^{1} x^2\cos(k\pi x)dx =$$

$$= -\left\{\left[x\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}dx\right\} + \left\{\left[x^2\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} 2x\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}dx\right\} =$$

$$= \left[-\frac{\cos(k\pi x)}{(k\pi)^2}\right]_{-1}^{0} - \left\{\left[-2x\frac{\cos(k\pi x)}{(k\pi)^2}\right]_{0}^{1} + \int_{0}^{1} 2\frac{\cos(k\pi x)}{(k\pi)^2}dx\right\} =$$

$$= -\frac{(1-\cos(k\pi))}{(k\pi)^2} + 2\frac{\cos(k\pi)}{(k\pi)^2} - 2\left[\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^3}\right]_0^1 = \frac{3\cos(k\pi)-1}{(k\pi)^2}.$$

$$a_0 = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

$$b_k = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(k\pi x)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} -x\sin(k\pi x)\,dx + \int_0^1 x^2\sin(k\pi x)\,dx =$$

$$= \left\{\left[x\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx\right\} + \left\{\left[-x^2\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 2x\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx\right\} =$$

$$= \frac{\cos(k\pi)}{k\pi} - \left[\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\right]_{-1}^{0} - \frac{\cos(k\pi)}{k\pi} + 2\left\{\left[x\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\right]_0^1 - \int_0^1\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\,dx\right\} =$$

$$= 2\left[\frac{\cos(k\pi x)}{(k\pi)^3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{\cos(k\pi)-1}{(k\pi)^3}\right].$$

$$f(x) = \frac{5}{12} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3\cos(k\pi)-1}{(k\pi)^2}\cos(k\pi x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\left[\frac{\cos(k\pi)-1}{(k\pi)^3}\right]\sin(k\pi x).$$

Notiamo che effettivamente i coefficienti di Fourier sono $o(1/k)$. La prossima figura mostra il grafico di f sovrapposto a quello della sua somma di Fourier per $n = 3$. Si nota che l'approssimazione è già buona per un piccolo valore di n, in questo caso.

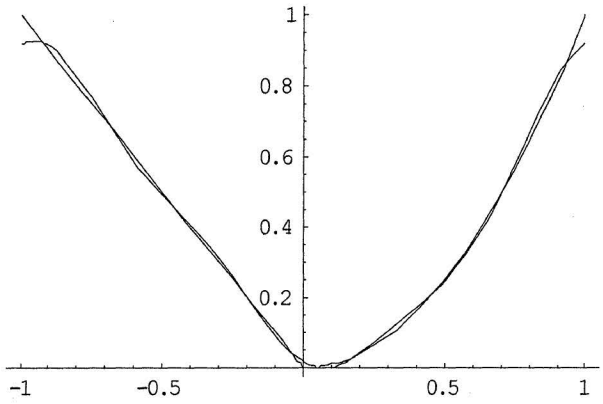


Fig. 7.4.

Esercizi

Per ciascuna delle seguenti funzioni, si chiede:

a. In base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte. Talvolta può essere utile disegnare il grafico di f su un intervallo più ampio di un periodo, per visualizzare la continuità o meno della periodizzata di f.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f e scrivere in forma compatta la serie di Fourier. (Talvolta si chiederà di calcolare solo i termini a_k o b_k; in questo caso non si scriverà la serie di Fourier).

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, prestando attenzione al periodo e alle eventuali simmetrie.

7.43.★ Funzione 2π-periodica definita da:

$$f(x) = |x| \text{ per } -\pi \leq x \leq \pi.$$

7.44.★ Funzione 4-periodica definita per $x \in [-2, 2]$ da:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{per } |x| \in [0, 1] \\ 1 & \text{per } |x| \in [1, 2]. \end{cases}$$

7.45. Funzione 2-periodica definita da:

$$f(x) = 1 - |x| \text{ per } x \in [-1, 1].$$

7.46. Funzione 2π-periodica definita da:

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \text{ per } -\pi \leq x \leq \pi.$$

7.47.★ Funzione 2-periodica definita per $x \in [-1, 1]$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [0, 1] \\ x + 1 & \text{per } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

Calcolare solo i coefficienti a_k (non è richiesto il calcolo dei b_k).

7.48. Funzione 2-periodica definita da:

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ per } x \in [-1, 1].$$

7.49.★ Funzione π-periodica definita per $x \in [0, \pi]$ da:

$$f(x) = e^x.$$

Calcolare solo i coefficienti a_k (non è richiesto il calcolo dei b_k).

7.50.★ Funzione 2π-periodica definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \text{ se } x \in [0, \pi], f \text{ riflessa dispari in } [-\pi, 0].$$

7.51. Funzione 2-periodica definita da:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \text{ per } x \in [-1, 1].$$

Calcolare solo i coefficienti a_k (non è richiesto il calcolo dei b_k).

7.52. Funzione 4-periodica definita da:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{per } x \in [1, 2] \end{cases}$$

e riflessa pari in $[-2, 0]$.

7.53.★ Funzione 3-periodica definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in [0,1) \\ 1 & \text{per } x \in [1,2). \\ 2 & \text{per } x \in [2,3) \end{cases}$$

Calcolare solo i coefficienti b_k (non è richiesto il calcolo degli a_k).

7.54. Funzione 2-periodica definita da:

$$f(x) = x^3 \text{ per } x \in [-1,1].$$

7.55.★ Funzione 3-periodica definita in $[-1,2]$ da:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{per } x \in [-1,0] \\ 1 - x/2 & \text{per } x \in [0,2]. \end{cases}$$

Calcolare solo i coefficienti b_k (non è richiesto il calcolo degli a_k).

7.56. Funzione 4-periodica definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{per } x \in (0,1] \\ 0 & \text{per } x \in [1,2] \end{cases}$$

e riflessa dispari in $[-2,0)$.

7.57.★ Funzione 4-periodica definita in $[-2,2]$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [1,2] \\ x & \text{per } x \in [0,1] \\ 0 & \text{per } x \in [-2,0]. \end{cases}$$

Calcolare solo i coefficienti a_k (non è richiesto il calcolo dei b_k).

7.58.★ Funzione 2π-periodica, uguale a $\cos x$ per $x \in [0,\pi]$ e riflessa dispari in $[-\pi,0]$.

7.59.★ Funzione 2-periodica definita da:

$$f(x) = e^{|x|} \text{ per } x \in [-1,1].$$

7.60. Funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da:

$$f(x) = \begin{cases} \pi x & \text{per } 0 \le x \le \pi \\ x^2 & \text{per } -\pi \le x \le 0. \end{cases}$$

Calcolare solo i coefficienti a_k (non è richiesto il calcolo dei b_k).

7.61.★ ("Onda quadra"). Funzione 2-periodica definita in $[-1, 1]$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ -1 & \text{per } -1 \le x < 0 \end{cases}$$

7.62.★ Funzione 2π-periodica definita da:

$$f(x) = e^{-|x|} \text{ per } -\pi \le x \le \pi.$$

7.63.★ Funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ x & \text{per } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

7.64. Funzione 4-periodica definita da:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{per } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{per } x \in [0, 1] \end{cases} \text{ e riflessa pari per } x \in [-2, 0].$$

7.65.★ Funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{per } |x| \le \frac{1}{10} \\ 0 & \text{per } \frac{1}{10} < |x| \le \pi. \end{cases}$$

7.66.★ Funzione 2π-periodica definita da:

$$f(x) = x|x| \text{ per } -\pi \le x \le \pi.$$

7.67. Funzione 2π-periodica definita da:

$$f(x) = \mathrm{Ch}x \text{ per } -\pi \le x \le \pi.$$

7.3.D. Forma esponenziale complessa delle serie di Fourier

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 7, §3.5.

Ricordiamo che le funzioni T periodiche possono essere sviluppate in serie di Fourier complessa (sotto le opportune ipotesi), in base alle formule:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\omega kx}dx \text{ per } k \in \mathbb{Z}, \omega = 2\pi/T,$$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{i\omega kx}.$$

Si scriva la serie di Fourier delle seguenti funzioni in forma complessa, dopo aver verificato la validità delle ipotesi del teorema di convergenza puntuale. Riscrivere in forma algebrica i coefficienti $\widehat{f}(k)$.

7.68. Funzione 1-periodica definita da

$$f(x) = x \text{ in } [0, 1].$$

7.69. Funzione 2-periodica definita da

$$f(x) = |x| \text{ in } [-1, 1].$$

7.70. Funzione 2π-periodica definita da

$$f(x) = e^x \text{ in } [0, 2\pi].$$

7.71. Funzione 2-periodica definita da

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \text{ in } [-1, 1].$$

7.3.E. Serie trigonometriche

Riferimento: libro di testo [BPS2], cap. 7, §3.1, 3.3.

Serie trigonometriche e serie di Fourier: un confronto

Ricordiamo che una serie trigonometrica (adattata all'intervallo $[0,T]$) è una qualsiasi serie del tipo

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x)) \quad \text{con } \omega = 2\pi/T.$$

Che differenza c'è tra le serie trigonometriche e le serie di Fourier? E' facile che lo studente faccia qualche confusione a riguardo. Anzitutto è chiaro che ogni serie di Fourier è una serie trigonometrica, mentre il viceversa non è ovvio.

Ad esempio,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$$

è una serie trigonometrica su $[0,2\pi]$, puntualmente convergente[3] in tutto $[0,2\pi]$, ma non può essere la serie di Fourier di nessuna funzione limitata e integrabile in $[0,2\pi]$, altrimenti[4] dovrebbe essere convergente anche la serie numerica

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}, \text{ che invece diverge.}$$

Quindi, almeno se ambientiamo la nostra analisi nello spazio delle funzioni limitate e integrabili su $[0,T]$ (ciò che si fa nel testo [BPS2]), la classe delle serie trigonometriche (anche limitandosi a quelle convergenti almeno in un intervallo) non coincide con la classe delle serie di Fourier.

Ma è soprattutto il punto di vista che è diverso, nello studio di questi due oggetti matematici. Infatti, quando parliamo di serie di Fourier solitamente stiamo partendo da una funzione f esplicitamente nota e ci chiediamo qual è la sua serie di Fourier (calcolo dei coefficienti) o, *a partire dalle proprietà note della somma* f, ci chiediamo se e in che senso la serie di Fourier converge a f.

Viceversa, quando parliamo di serie trigonometriche solitamente stiamo partendo da una serie esplicitamente nota (conosciamo già i coefficienti), di cui però in generale la somma non è esplicitamente nota, e ci chiediamo, *a partire*

[3] Questo segue dalla Proposizione 7.1 in [BPS2], cap.7, §3.1.

[4] in base al Teorema 7.10 in [BPS2], cap.3, §3.3.

dalle proprietà dei coefficienti, se e in che senso questa serie converge, e quali proprietà eventualmente avrà la sua somma (ad es. continuità, derivabilità, ecc.).

In un certo senso, quindi, i due concetti di serie trigonomentrica e serie di Fourier corrispondono a due problemi che sono l'uno l'inverso dell'altro.

L'analisi della convergenza delle serie trigonometriche sul testo è stata fatta appellandosi quando possibile al concetto generale di *convergenza totale per una serie di funzioni*[5], oppure al *criterio di convergenza puntuale per serie trigonometriche*[6] basato sulla monotonia delle successioni $\{a_k\}, \{b_k\}$. I prossimi esercizi riguardano questo tema.

Studiare la convergenza puntuale delle seguenti serie trigonometriche, nell'intervallo specificato. In ciascuno degli esempi, dire se è possibile affermare a priori che la somma delle serie è continua, e se la serie è derivabile termine a termine.

7.72.★ $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kx}{2k\pi + k^2}\right) \text{ in } [0, 2\pi].$$

7.73.★ $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos kx}{k^3} + \frac{(-1)^k \sin kx}{k!}\right) \text{ in } [0, 2\pi].$$

7.74.★ $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\log k}{k}\cos(2k\pi x) \text{ in } [0, 1].$$

7.75.★ $$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1 + 2k - k^2}{k^3 + 1}\right)\sin(k\pi x) \text{ in } [0, 2].$$

7.76.★ $$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1 + 2k}{k^3 + 1}\right)\cos(k\pi x) \text{ in } [0, 2].$$

[5] v. [BPS2], cap. 7, §1.

[6] v. Proposizione 7.1 ([BPS2], cap.7, §3.1).

7.3.F. Applicazioni fisiche delle serie di Fourier

Applicazioni alle equazioni a derivate parziali.
Metodo di separazione delle variabili

Nel testo (v. [BPS2], cap. 7, §3.8) è illustrato, su alcuni esempi, il metodo di separazione delle variabili, con cui, facendo uso anche degli sviluppi in serie di Fourier, si riesce a scrivere esplicitamente la soluzione di certi problemi al contorno per equazioni a derivate parziali, quando il dominio ha una forma particolarmente semplice. Qui non daremo nessun riepilogo del metodo ma ci limiteremo a presentare qualche esercizio che fa esplicito riferimento agli esempi discussi del libro di testo.

Esempio 7.7. Equazione della corda vibrante con estremi fissati. Si consideri il seguente problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione della corda vibrante:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{per } x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) & \text{per } x \in [0,\pi] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x) & \text{per } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Significato fisico: $u(t,x)$ rappresenta l'altezza rispetto all'orizzontale, all'istante t, del punto di una corda vibrante che in posizione di riposo si trova nel punto di ascissa x. La corda, rappresentata dal segmento $[0,\pi]$, è fissata agli estremi (questo è espresso dalle condizioni $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ per $t > 0$), mentre all'istante iniziale è nota la forma della corda $(u(0,x) = \varphi(x))$ e la sua velocità istantanea $\left(\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x)\right)$. La soluzione del problema che si ottiene col metodo di separazione delle variabili[7] è

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \sin(kx)\cos(akt) + d_k \sin(kx)\sin(akt))$$

dove i coefficienti c_k, d_k sono quelli per cui si ha:

[7] v. [BPS2], cap.7, §3.8.

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx) \text{ per } x \in [0, \pi]$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k ak \sin(kx) \text{ per } x \in [0, \pi].$$

Perciò questi coefficienti si ricavano dallo sviluppo di Fourier in serie di soli seni delle funzioni φ e ψ in $[0, \pi]$; a sua volta, per ottenere questo sviluppo occorre riflettere in modo dispari queste funzioni su $[-\pi, 0]$, e quindi svilupparle come funzioni 2π-periodiche su $[-\pi, \pi]$. Nei prossimi esercizi si chiede di applicare esplicitamente queste formule.

Esercizi

Risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante discusso nell'esempio precedente per i seguenti dati iniziali:

7.77.★ $\varphi(x) = \sin^3 x, \psi(x) = 0.$

7.78.★ $\varphi(x) = 0, \psi(x) = \sin x \cos^2 x.$

7.79.★ $\varphi(x) = \sin^2 x, \psi(x) = 0.$

7.80.★ $\varphi(x) = \sin 3x, \psi(x) = \sin 5x.$

Esempio 7.8. Equazione di Laplace sul cerchio. Si consideri il seguente problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{per } x^2 + y^2 = 1 \\ u(x, y) = f(x, y) & \text{per } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

I significati fisici del problema possono essere diversi, ne ricordiamo due:

1. Equazione di diffusione del calore in regime stazionario. La funzione $u(x, y)$ è la temperatura nel punto (x, y) di una lastra circolare in cui non ci sono sorgenti e pozzi di calore, la temperatura al bordo è mantenuta uguale a $f(x, y)$, e il sistema ha raggiunto l'equilibrio termico (ossia la temperatura non cambia più nel tempo).

2. Equilibrio di una membrana. La funzione $u(x,y)$ rappresenta l'altezza sull'orizzontale di una membrana elastica circolare fissata sul bordo su un contorno di sagoma $z = f(x,y)$, in equilibrio.

La soluzione del problema che si ottiene col metodo di separazione delle variabili[8] è, espressa in coordinate polari (ρ, ϑ),

$$u(\rho,\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (a_k \cos(k\vartheta) + b_k \sin(k\vartheta))$$

dove i coefficienti a_k, b_k sono quelli per cui si ha:

$$f(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(k\vartheta) + b_k \sin(k\vartheta)) \text{ per } \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Nei prossimi esercizi si chiede di applicare esplicitamente queste formule.

Esercizi

Risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace discusso nell'esempio precedente per i seguenti dati iniziali:

7.81.★ $f(x,y) = xy^2$

7.82.★ $f(x,y) = |x|$

Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie. Oscillazioni forzate con forzante non sinusoidale

Nel Cap.1, §1.2.E, abbiamo studiato l'equazione delle oscillazioni forzate,

$$y'' + \omega_0^2 y = F\sin(\omega t + \beta)$$

(senza smorzamento) o

$$y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = F\sin(\omega t + \beta)$$

(con smorzamento). In quegli esempi, la forzante era in ogni caso una funzione di tipo sinusoidale, che poteva mettere in risonanza il sistema quando la pulsazione ω della forzante era uguale (in assenza di smorzamento) o vicina (in presenza di smorzamento) alla pulsazione propria del sistema, ω_0.

[8] v. [BPS2], cap.7, §3.8.

Nei prossimi esempi ed esercizi vedremo che cosa accade quando la forzante è una funzione periodica ma non sinusoidale.

Esempio 7.9. Consideriamo l'equazione

$$y'' + \frac{1}{4}y' + y = F(t)$$

con F funzione 2π-periodica definita su $[-\pi, \pi]$ da

$$F(t) = |t|.$$

Sappiamo già dalla discussione svolta nel Cap.1 che che l'equazione omogenea ha un integrale generale che tende a zero per $t \to +\infty$. Se troviamo una soluzione dell'equazione completa che non tende a zero per $t \to +\infty$, questa rappresenterà il regime permanente del sistema.

Possiamo sviluppare il termine noto in serie di Fourier. F è 2π-periodica, pari, si ha:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t dt = \pi;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}dt\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}\Big((-1)^k - 1\Big).$$

Quindi
$$F(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right)\cos kt.$$

Ora ragioniamo a questo modo. Poiché l'equazione è lineare, se noi per $k = 0, 1, 2, \ldots$ risolviamo l'equazione

$$y_k'' + \frac{1}{4}y_k' + y_k = a_k\cos(kt)$$

la somma delle soluzioni y_k darà una soluzione dell'equazione non omogenea con termine noto $F(t)$.

Per $k = 0$, una soluzione di

$$y_k'' + \frac{1}{4}y_k' + y_k = \frac{\pi}{2} \text{ è } y_0(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Per $k \geq 1$, una soluzione particolare di

$$y_k'' + \frac{1}{4}y_k' + y_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right)\cos kt$$

ha la forma $$y_k = c_k \cos kt + d_k \sin kt.$$

$$y_k'(t) = -c_k k \sin kt + d_k k \cos kt$$

$$y_k''(t) = -c_k k^2 \cos kt - d_k k^2 \sin kt$$

$$\left(-c_k k^2 \cos kt - d_k k^2 \sin kt\right) + \frac{1}{4}(-c_k k \sin kt + d_k k \cos kt) +$$

$$+ (c_k \cos kt + d_k \sin kt) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right)\cos kt.$$

$$\begin{cases} -c_k k^2 + \frac{1}{4}d_k k + c_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right) \\ -d_k k^2 - \frac{1}{4}c_k k + d_k = 0 \end{cases}$$

sistema che risolto dà

$$d_k = \frac{8\left((-1)^k - 1\right)}{\pi k\left[16(1-k^2)^2 + k^2\right]};$$

$$c_k = \frac{32\left((-1)^k - 1\right)(1-k^2)}{\pi k^2\left[16(1-k^2)^2 + k^2\right]}.$$

Notiamo che $$|c_k| \leq \frac{c}{k^4}; |d_k| \leq \frac{c}{k^5},$$

il che mostra che la funzione definita come serie trigonometrica

$$y(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k \cos kt + d_k \sin kt) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{32\left((-1)^k - 1\right)(1-k^2)}{\pi k^2\left[16(1-k^2)^2 + k^2\right]}\cos kt + \frac{8\left((-1)^k - 1\right)}{\pi k\left[16(1-k^2)^2 + k^2\right]}\sin kt\right)$$

è effettivamente due volte derivabile termine a termine, e di conseguenza risolve l'equazione non omogenea (in base al teorema sulla derivabilità termine a termine di serie la cui derivata converge totalmente).

Tabuliamo i primi coefficienti. $c_k, d_k = 0$ per k pari; per k dispari:

k	1	3	5	7	9
c_k	0	0.0177	0.002	0.0005	0.00012
d_k	−5.093	−0.0016	−0.0001	−0.00002	−0.0000055

Si vede quindi che

$$y(t) \simeq \frac{\pi}{2} - 5.093 \sin t.$$

In altre parole, un singolo termine è di gran lunga (almeno due ordini di grandezza) più grande degli altri. Questo si spiega col fenomeno della *risonanza*. In base alla discussione fatta al Cap.1, § 1.2.E, la nostra equazione omogenea è l'equazione delle vibrazioni smorzate con pulsazione propria

$$\omega_0 = 1, \delta = \frac{1}{4},$$

quindi $2\delta < \omega_0^2$ ("piccolo smorzamento"), da cui si ricava che la pulsazione che produce la risonanza è

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{8}}.$$

Ora, tra le armoniche che compongono lo sviluppo di Fourier della forzante F, quella per $k = 1$ è quella la cui pulsazione (uguale a 1) più si avvicina a quella di risonanza. Questo spiega il fatto che questa sia la componente più rilevante anche nella soluzione.

A titolo di verifica, calcoliamo il primo membro dell'equazione differenziale per $y(t) = \frac{\pi}{2} - 5.093 \sin t$,

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{4}\frac{d}{dt}+1\right)\left(\frac{\pi}{2}-5.093\sin t\right)=\frac{\pi}{2}-1.27325\cos t$$

e rappresentiamo questa funzione su un grafico insieme al secondo membro $|t|$:

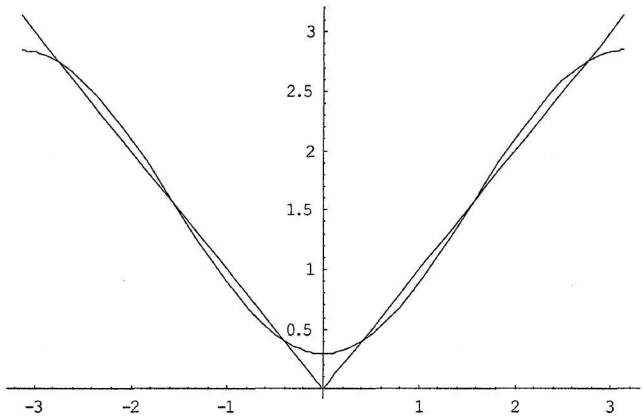


Fig.7.5.

La funzione $y(t)$ è quindi effettivamente una soluzione approssimata dell'equazione differenziale, ottenuta prendendo un solo termine della serie infinita!

Si rifletta sul fatto che, pur non essendo sinusoidale, la forzante di quest'esempio è periodica di periodo 2π, quindi pulsazione $\omega=1$, che è vicina alla pulsazione propria del sistema smorzato $\left(y''+\frac{1}{4}y'+y=0\right)$, e uguale alla pulsazione propria del corrispondente sistema non smorzato, cioè dell'equazione $(y''+y=0)$. Nei prossimi esercizi si esploreranno situazioni leggermente diverse.

7.83.★ Si calcoli, col metodo illustrato nell'esempio precedente, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea:

$$y''+\frac{1}{4}y'+y=F(t)$$

con F funzione 2-periodica definita su $[-1,1]$ da

$$F(t)=|t|.$$

Precisamente:

a. Scrivere la soluzione esatta dell'equazione non onogenea in forma di serie trigonometrica.

b. Tabulare i valori numerici dei primi coefficienti, individuando se è possibile approssimare bene la soluzione con la somma di pochi termini.

(Si osservi che la differenza con l'esempio precedente sta nel periodo della forzante).

7.84.★ Si calcoli, col metodo illustrato nell'esempio precedente, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea:

$$y'' + y = F(t)$$

con F funzione 2π-periodica definita su $[-\pi, \pi]$ da

$$F(t) = |t|.$$

Individuare il regime permanente del sistema, cioè la soluzione dell'equazione per tempi lunghi.

(Si osservi che la differenza con l'esempio sta nell'assenza di smorzamento).

Soluzioni §7.3

7.23. $$\sin^2 x\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2}{-4}\right)\left(\frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}\right) =$$

$$= -\frac{1}{32}\Big(e^{5ix}+3e^{3ix}+3e^{ix}+e^{-ix}+e^{ix}+3e^{-ix}+3e^{-3ix}+$$

$$+e^{-5ix}-2e^{3ix}-6e^{ix}-6e^{-ix}-2e^{-3ix}\Big) =$$

$$= -\frac{1}{32}\Big(\big(e^{5ix}+e^{-5ix}\big)+\big(e^{3ix}+e^{-3ix}\big)-2\big(e^{ix}+e^{-ix}\big)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{32}(2\cos 5x+2\cos 3x-4\cos x) = \frac{1}{16}\cos x-\frac{1}{16}\cos 3x-\frac{1}{8}\cos 5x.$$

7.24. $$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

7.25.

$$\sin^5 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\sin x = \left(\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\right)\sin x =$$

$$= \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right)\sin x =$$

$$= \frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{2}\sin x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin x+\frac{1}{8}\sin x\cos 4x =$$

$$= \frac{3}{8}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) + \frac{1}{16}(\sin 5x - \sin 3x) =$$

$$= \frac{5}{8}\sin x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{1}{16}\sin 5x.$$

7.26. $$\sin^2 x \cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 =$$

$$= \left(\frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4}\right)\left(\frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16}\right) =$$

$$= -\frac{1}{64}\Big(e^{6ix} + e^{4ix}(4-2) + e^{2ix}(1-8+6) + (4-12+4) +$$

$$+ e^{-2ix}(1-8+6) + e^{-4ix}(-2+4) + e^{-6ix}\Big) =$$

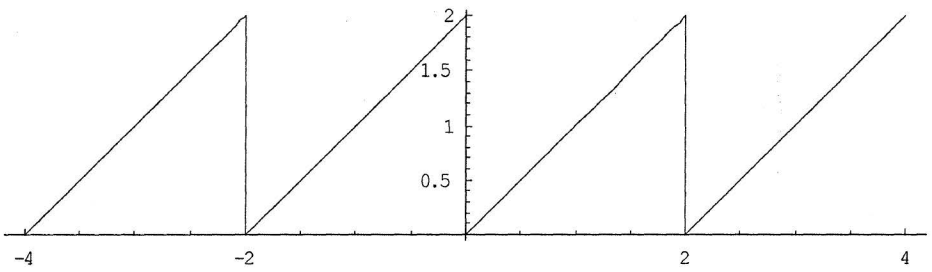
$$= -\frac{1}{64}\big((e^{6ix} + e^{-6ix}) + 2(e^{4ix} + e^{-4ix}) - (e^{2ix} + e^{-2ix}) - 4\big) =$$

$$= -\frac{1}{64}(2\cos 6x + 4\cos 4x - 2\cos 2x - 4) =$$

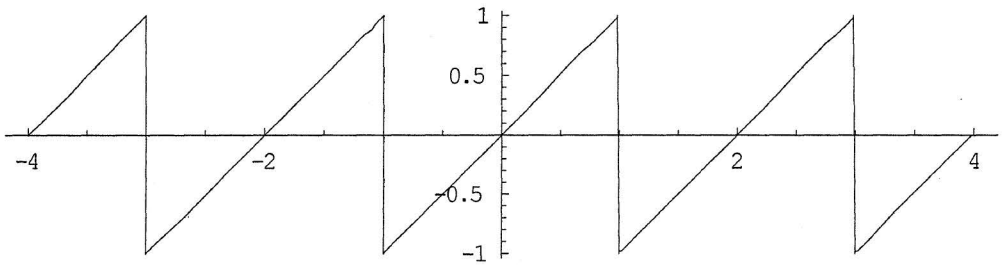
$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x.$$

7.27.

a.

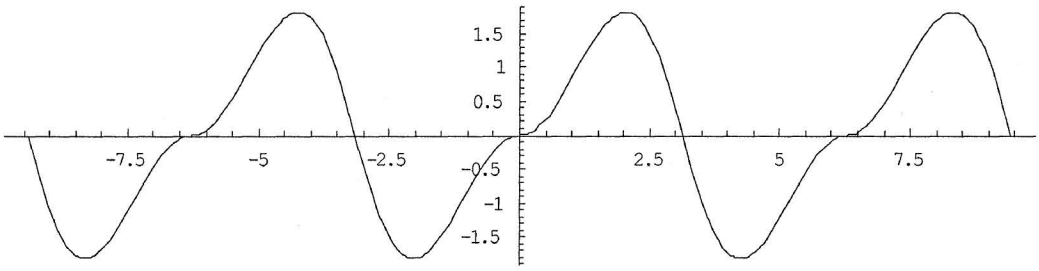


b.

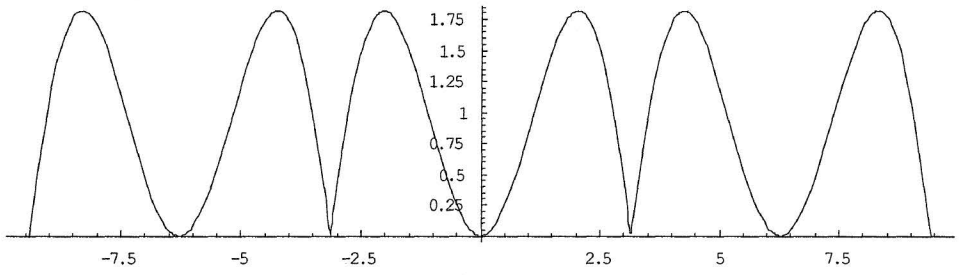

1
0.5
-4
-2
2
4
-0.5
-1

7.28.

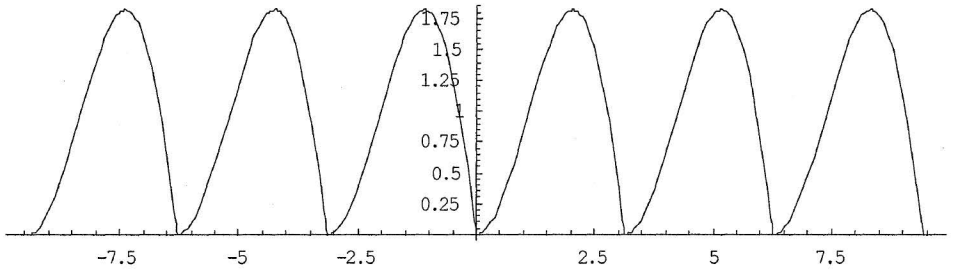
a.


1.5
1
0.5
-7.5
-5
-2.5
-0.5
-1
-1.5
2.5
5
7.5

b.

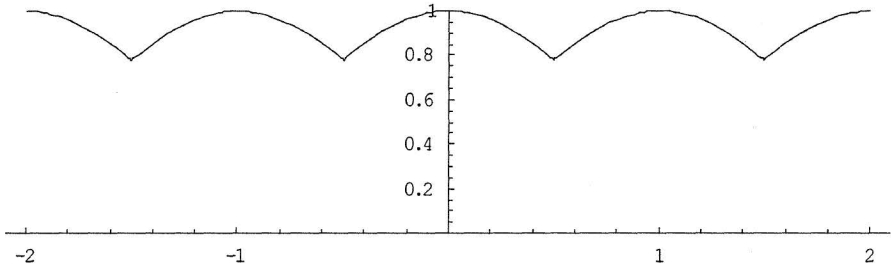

1.75
1.5
1.25
1
0.75
0.5
0.25
-7.5
-5
-2.5
2.5
5
7.5

c.

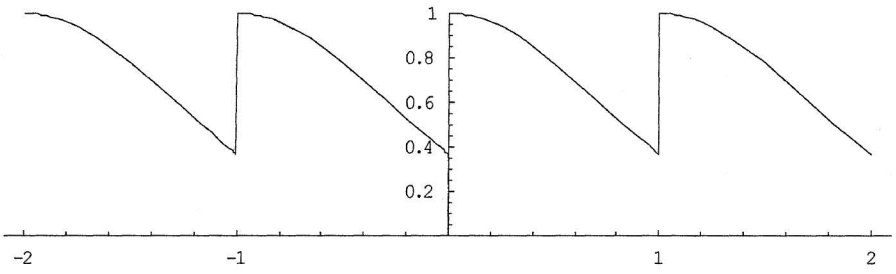

1.75
1.5
1.25
1
0.75
0.5
0.25
-7.5
-5
-2.5
2.5
5
7.5

7.29.

a.

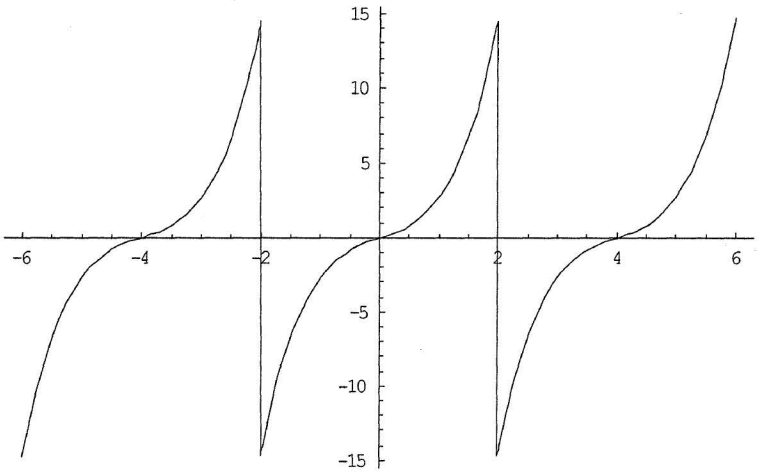


b.

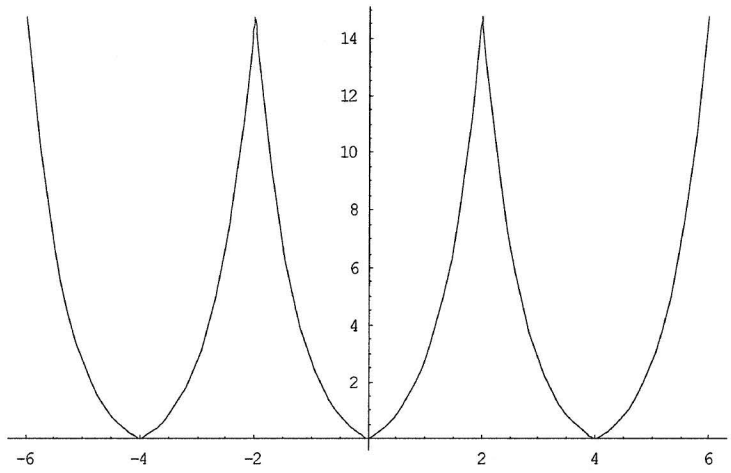


7.30.

a.



b.



7.31. Regolare a tratti. La periodizzata è continua in $\mathbb{R}$.

7.32. Regolare a tratti. La periodizzata è discontinua.

7.33. Non regolare a tratti: la derivata destra in 0 e la derivata sinistra in 1 sono infinite. La periodizzata è continua.

7.34. Regolare a tratti. La periodizzata è continua.

7.35. Regolare a tratti. La periodizzata è discontinua.

7.36. Regolare a tratti. La periodizzata è continua.

7.37. Non è regolare a tratti: pur definendo per continuità $f(0) = 0$, risulta $f'(0^+) = -\infty$. La periodizzata è continua.

7.38. No, in ± 1 la derivata non si raccorda in modo continuo.

7.39. $f(0^+) = 0, f'(0^+) = 1$, la riflessa dispari perciò è $C^1(-1,1)$; chiamando ancora f la funzione così definita su $[-1,1]$ si ha ora $f(1) = 0 = f(-1)$, $f'(1) = -1 = f'(-1)$, perciò la periodizzata è $C^1(\mathbb{R})$.

7.40. No, la riflessione pari rende f non derivabile in 0.

7.41. $f(0) = 0, f(1) = 0; f'(0) = 0, f'(1) = 1$, quindi la periodizzata è $C^1(\mathbb{R})$.

7.42. $f(0) = 0, f'(0) = 0$, perciò la riflessa dispari è continua e derivabile in $(-1,1)$. Inoltre $f'(1) = 1 = f'(-1)$, quindi la periodizzata è $C^1(\mathbb{R})$.

7.43. *a.* La funzione periodizzata è continua su tutto $\mathbb{R}$, regolare a tratti, perciò la serie di Fourier converge in ogni punto a $f(x)$. I coefficienti saranno $o(1/k)$.

b. f è 2π-periodica e pari, perciò $b_k = 0$ e

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

Per $k \geq 1$,
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\, dx.$$

$$\int_0^\pi \underset{f}{x}\underset{g'}{\cos kx}\, dx = \left[x\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin kx}{k}\, dx = \left[\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^\pi = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

Perciò:
$$a_k = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

7.44. *a.* La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ e regolare a tratti. Pertanto la serie di Fourier converge in ogni punto a $f(x)$ e i coefficienti di Fourier a_n, b_n di f sono $o(1/n)$.

b. f è 2-periodica e pari; quindi $b_n = 0$ e

$$a_0 = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 dx = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx = \int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \int_1^2 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{2x}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \frac{2}{\pi n}\left[\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \left(\frac{2}{\pi n}\right)^2\left[\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1\right).$$

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \quad \forall x.$$

7.45. *a.* La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ e regolare a tratti. Pertanto la serie di Fourier converge in ogni punto a $f(x)$ e i coefficienti di Fourier a_n, b_n di f sono $o(1/n)$.

b. f è 2-periodica e pari; quindi $b_n = 0$ e

$$a_n = 2\int_0^1 (1-x)\cos(\pi n x)dx = \frac{2}{(n\pi)^2}(1-(-1)^n); \qquad a_0 = 1$$

$$1-|x| \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right)\cos(n\pi x) \quad \forall x \in [-1,1].$$

7.46. *a.* La funzione periodizzata è continua su tutto $\mathbb{R}$, regolare a tratti, perciò la serie di Fourier converge in ogni punto a $f(x)$. I coefficienti saranno $o(1/k)$.

b. f è 2π-periodica e pari, perciò $b_k = 0$ e

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos kx\, dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx\, dx = \frac{2\pi}{k^2}(-1)^k; \qquad a_0 = \frac{4}{3}\pi^2.$$

$$\pi^2 - x^2 = \frac{2}{3}\pi^2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kx \quad \forall x \in [-\pi,\pi].$$

7.47. *a.* La funzione è regolare a tratti, la sua periodizzata è però discontinua (non vale la condizione di raccordo), perciò i coefficienti di Fourier tenderanno a zero ma ci aspettiamo che non siano $o(1/k)$. La serie di Fourier converge puntualmente a f in tutti i punti di $(-1,1)$, mentre negli estremi dell'intervallo converge alla media dei valori

$$\frac{f(-1)+f(1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

b. Formule generali:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(kx\frac{2\pi}{T}\right)dx;\; b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(kx\frac{2\pi}{T}\right)dx$$

Per noi $T = 2$,

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_0^1 1dx = \frac{3}{2}.$$

$$a_k = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(k\pi x)dx = \int_{-1}^{0}(x+1)\cos(k\pi x)dx + \int_0^1 \cos(k\pi x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x\cos(k\pi x)dx + \int_{-1}^{1} \cos(k\pi x)dx =$$

$$= \left[\frac{\cos(k\pi x)}{\pi^2 k^2} + \frac{x\sin(k\pi x)}{\pi k}\right]_{-1}^{0} + 0 = \frac{1-(-1)^k}{\pi^2 k^2}.$$

7.48. *a.* La funzione è regolare a tratti e la sua periodizzata è continua in $\mathbb{R}$, quindi la serie di Fourier convergerà in ogni punto ad f e i suoi coefficienti di Fourier saranno $o(1/k)$. Poiché f è pari, saranno presenti solo i coefficienti a_k.

b. $$a_k = \int_{-1}^{1} (x^2-1)\cos(k\pi x)dx = \frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^k}{k^2}; \qquad a_0 = -\frac{4}{3}.$$

$$x^2 - 1 \sim -\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(k\pi x) \quad \forall x \in [-1,1].$$

7.49. *a.* La funzione periodizzata è regolare a tratti ma è discontinua negli estremi $0, \pi$. La serie convergerà puntualmente a $f(x)$ per $x \in (0,\pi)$, mentre convergerà a $(1+e^{\pi})/2$ negli estremi.

b. $$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x\cos(2kx)dx.$$

Sia $$I = \int_0^{\pi} e^x\cos(2kx)dx = [e^x\cos(2kx)]_0^{\pi} + 2k\int_0^{\pi} e^x\sin(2kx)dx =$$

$$= e^{\pi} - 1 + 2k\left\{[e^x\sin(2kx)]_0^{\pi} - 2k\int_0^{\pi} e^x\cos(2kx)dx\right\} = (e^{\pi}-1) - 4k^2 I.$$

Quindi $$I = \frac{(e^{\pi}-1)}{1+4k^2} \text{ e } a_k = \frac{2}{\pi}\frac{(e^{\pi}-1)}{1+4k^2} \text{ per } k = 1,2,3,\ldots$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x dx = \frac{2}{\pi}(e^{\pi}-1).$$

7.50. *a.* La periodizzata di f è regolare a tratti e continua tranne in $0 + 2k\pi$, quindi i coefficienti di Fourier saranno solo $o(1)$. Per lo stesso motivo, la serie di Fourier convergerà a $f(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi], x \neq 0$; in $x = 0$ la serie convergerà a 0.

b. Poiché f è 2π-periodica e dispari, $a_k = 0\ \forall k$, mentre

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\sin(kx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin(kx)dx\right] =$$

$$= \left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\left\{\left[-(\pi - x)\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}dx\right\} =$$

$$= \frac{1-\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k} + \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k} - \left[\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\} = \frac{1}{k} + \frac{2}{\pi k^2}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

Perciò, per ogni $x \in [-\pi, \pi], x \neq 0$ è

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k} + \frac{2}{\pi k^2}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin(kx).$$

7.51. *a.* La periodizzata di f è regolare a tratti e continua tranne in $1 + 2k$, quindi i coefficienti di Fourier saranno solo $o(1)$. Per lo stesso motivo, la serie di Fourier convergerà puntualmente a $f(x)$ per ogni $x \in (-1, 1)$; in $x = \pm 1$ la serie convergerà a $1/2$.

b. $a_k = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(\pi kx)dx = \int_0^1 x^2\cos(\pi kx)dx = \frac{2(-1)^k}{(k\pi)^2}; \qquad a_0 = \frac{1}{3}.$

7.52. *a.* La funzione è limitata e integrabile e la sua periodizzata è continua e regolare a tratti, perciò i coefficienti di Fourier sono $o(1/k)$. La serie di Fourier converge puntualmente a f in tutto $[-2, 2]$.

b. Poiché f è 4-periodica e pari, i coefficienti b_k sono zero.

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx = \int_0^2 f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx =$$

$$= \int_0^1 x^2\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{k^2}\left\{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

$$a_0 = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 dx = \frac{4}{3}.$$

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left\{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right\}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \quad \forall x \in [0, 2].$$

7.53. *a.* La funzione è limitata e integrabile ma discontinua, i coefficienti di Fourier tendono semplicemente a zero. (Ci attendiamo velocità non più di $1/k$).

La serie di Fourier converge puntualmente a f in $[0, 3]$ tranne nei punti:

0 e 3 in cui converge a 1;

1 in cui converge a $1/2$;

2 in cui converge a $3/2$.

b.
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)dx = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\left(\frac{2\pi kx}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\int_1^2 \sin\left(\frac{2\pi kx}{3}\right)dx + \int_2^3 2\sin\left(\frac{2\pi kx}{3}\right)dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left[-\frac{3}{2\pi k}\cos\left(\frac{2\pi kx}{3}\right)\right]_1^2 + \left[-\frac{3}{\pi k}\cos\left(\frac{2\pi kx}{3}\right)\right]_2^3\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\left\{-\frac{3}{2\pi k}\left[\cos\left(\frac{4k\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right] + -\frac{3}{\pi k}\left[1 - \cos\left(\frac{4k\pi}{3}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left\{\cos\left(\frac{4k\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - 2\right\}.$$

N.B. Per $k = 1, 2, 3$ la quantità entro $\{\}$ vale rispettivamente $-4, -4, 0$, e poi ripete ciclicamente questi valori.

7.54. *a.* La funzione è limitata e integrabile ma la sua periodizzata è discontinua, perciò i coefficienti di Fourier tendono semplicemente a zero. (Ci attendiamo velocità non più di $1/k$). La serie di Fourier converge puntualmente a f in $(-1, 1)$ mentre negli estremi converge a 0 (media dei valori in ± 1).

b. Poiché f è 2-periodica e dispari, $a_k = 0$ per ogni k.

$$b_k = \int_{-1}^1 x^3\sin(k\pi x)dx = 2\int_0^1 x^3\sin(k\pi x)dx = (-1)^{k+1}\left[\frac{2}{k\pi} - \frac{12}{k^3\pi^3}\right].$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{2}{k\pi} - \frac{12}{k^3\pi^3}\right]\sin(k\pi x)$$

7.55. *a.* La funzione è limitata, integrabile e regolare a tratti, e la sua periodizzata è continua, perciò i coefficienti di Fourier sono $o(1/k)$.

La serie di Fourier converge puntualmente a f in tutto $[-1, 2]$.

b. Calcoliamo:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-1}^{2} f(x)\sin(k\omega x)dx \text{ con } T = 3, \omega = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, \text{ quindi:}$$

$$b_k = \frac{2}{3}\int_{-1}^{2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}kx\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\int_{-1}^{0}(x+1)\sin\left(\frac{2\pi}{3}kx\right)dx + \int_{0}^{2}(1-x/2)\sin\left(\frac{2\pi}{3}kx\right)dx\right\}.$$

$$\int_{-1}^{0}(x+1)\sin\left(\frac{2\pi}{3}kx\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2k\pi}\left[-(x+1)\cos\left(\frac{2\pi}{3}kx\right)\right]_{-1}^{0} + \frac{3}{2k\pi}\int_{-1}^{0}\cos\left(\frac{2\pi}{3}kx\right)dx =$$

$$= -\frac{3}{2k\pi} + \frac{3}{2k\pi}\left[\frac{3}{2k\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}kx\right)\right]_{-1}^{0} = -\frac{3}{2k\pi} + \frac{9}{4k^2\pi^2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}k\right).$$

$$\int_{0}^{2}(1-x/2)\sin\left(\frac{2\pi}{3}kx\right)dx = \frac{3}{2k\pi}\left[-\cos\left(\frac{2\pi}{3}kx\right)\right]_{0}^{2} +$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2k\pi}\left[-x\cos\left(\frac{2\pi}{3}kx\right)\right]_{0}^{2} + \frac{3}{2k\pi}\int_{0}^{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}kx\right)dx\right\} =$$

$$= \frac{3}{2k\pi}\left[1-\cos\left(\frac{4\pi}{3}k\right)\right] + \frac{3}{2k\pi}\cos\left(\frac{4\pi}{3}k\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{9}{4k^2\pi^2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}kx\right)\right]_{0}^{2} =$$

$$= \frac{3}{2k\pi} - \frac{9}{8k^2\pi^2}\sin\left(\frac{4\pi}{3}k\right).$$

Quindi

$$b_k = \frac{2}{3}\left\{-\frac{3}{2k\pi} + \frac{9}{4k^2\pi^2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}k\right) + \frac{3}{2k\pi} - \frac{9}{8k^2\pi^2}\sin\left(\frac{4\pi}{3}k\right)\right\} =$$

$$= \frac{3}{2k^2\pi^2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}k\right) - \frac{3}{4k^2\pi^2}\sin\left(\frac{4\pi}{3}k\right).$$

7.56. *a.* La funzione è limitata, integrabile e regolare a tratti ma la sua periodizzata è discontinua, perciò i coefficienti di Fourier sono solo infinitesimi (non possiamo garantire che siano $o(1/k)$).

La serie di Fourier converge puntualmente a f in $[-2,2]$ per $x \neq 0$, mentre in 0 converge a 0.

b. Poiché f è dispari, i coefficienti a_k sono zero.

$$b_k = \int_0^2 f(x)\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx = \int_0^1 (1-x)\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{k\pi}\left\{1 - \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Effettivamente b_k non è $o(1/k)$.

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left\{1 - \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right\}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \text{ per } x \neq 0.$$

7.57. *a.* La funzione è regolare a tratti ma la sua periodizzata è discontinua, perciò i coefficienti di Fourier sono solo infinitesimi (non possiamo garantire che siano $o(1/k)$). La serie di Fourier converge puntualmente a f in tutto $(-2,2)$, mentre in ± 2 converge a $\frac{1}{2}$.

b. Calcoliamo:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(k\omega x)dx \text{ con } T = 4, \omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{ quindi:}$$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 x\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx\right\}.$$

$$\int_1^2 \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{k\pi}\left[\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^2 = -\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\int_0^1 x\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{k\pi}\left[x\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi}\left[\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{k^2\pi^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{k^2\pi^2}.$$

Quindi $$a_k = \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{k^2\pi^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{k^2\pi^2} - \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k^2}\left[\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 1\right] \text{ per } k = 1,2,3\ldots$$

Calcoliamo anche

$$a_0 = \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 x dx + \int_1^2 dx\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} + 1\right\} = \frac{3}{4}.$$

In effetti i coefficienti a_k sono $o(1/k)$; ci aspettiamo di conseguenza che i coefficienti b_k *non siano* $o(1/k)$.

7.58. *a.* La funzione f è regolare a tratti ed è continua tranne nei punti $k\pi$. Pertanto la serie di Fourier converge in ogni punto a $f(x)$, tranne in $k\pi$, dove converge a 0. Possiamo dire che i coefficienti di Fourier a_n, b_n tendono a zero, ma non possiamo precisare la velocità di convergenza (probabilmente *non* saranno $o(1/n)$).

b. Poiché f è 2π-periodica e dispari, $a_n = 0$, e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin(nx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\{\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\}dx =$$

per $n > 1$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right] = \begin{cases} \text{se } n \text{ dispari} & 0 \\ \text{se } n \text{ pari} & \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right] = \frac{4}{\pi}\frac{n}{n^2-1} \end{cases}$$

mentre

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} = 0.$$

Quindi ($n = 2k$)

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{4k^2-1}\right)\sin(2kx).$$

7.59. *a.* La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ e regolare a tratti. Pertanto la serie di Fourier converge in ogni punto a $f(x)$ e i coefficienti di Fourier a_n, b_n di f sono $o(1/n)$.

b. f è 2-periodica e pari; quindi $b_n = 0$ e

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 e^x dx = 2[e^x]_0^1 = 2(e-1).$$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(\pi n x)dx = 2\int_0^1 e^x \cos(\pi n x)dx =$$

$$= 2\left\{ [e^x \cos(\pi n x)]_0^1 + \pi n \int_0^1 e^x \sin(\pi n x) dx \right\} =$$

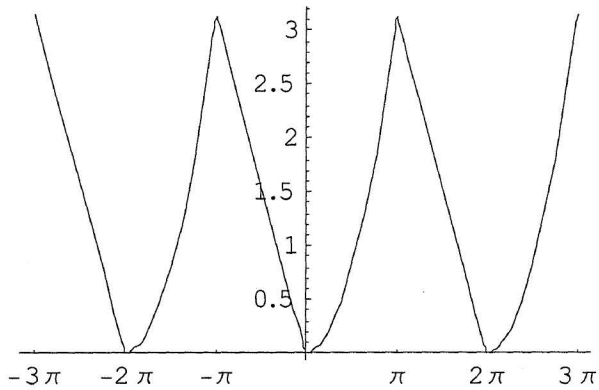
$$= 2[(-1)^n e - 1] + 2\pi n \left\{ [e^x \sin(\pi n x)]_0^1 - \pi n \int_0^1 e^x \cos(\pi n x) dx \right\} =$$

$$= 2[(-1)^n e - 1] - \pi^2 n^2 a_n.$$

$$a_n = \frac{2[(-1)^n e - 1]}{1 + \pi^2 n^2}$$

$$e^{|x|} = (e-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n e - 1]}{1 + \pi^2 n^2} \cos(n\pi x) \quad \forall x \in [-1, 1].$$

7.60.



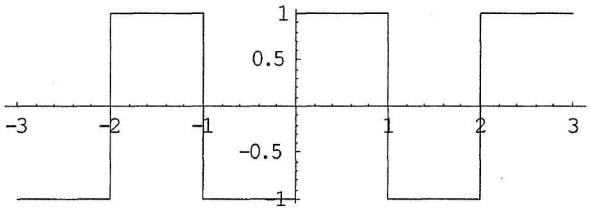
a. La funzione $f(x)$ è continua in $[-\pi, \pi]$, inoltre $f(-\pi) = \pi^2 = f(\pi)$, perciò f è continua in tutto $\mathbb{R}$; $f(x)$ è regolare a tratti, quindi la serie di Fourier converge ovunque; la somma è $f(x)$ in ogni punto, ancora per la continuità di f. I coefficienti saranno $o(1/k)$.

b.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x^2 \cos kx dx + \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{k^2} \left(-1 + 3(-1)^k \right).$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x^2 dx + \int_0^{\pi} x dx = \frac{5}{6} \pi^2.$$

7.61.



a. La funzione è regolare a tratti, continua per $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ In tutti questi punti la serie converge alla media tra i limiti destro e sinistro, che è 0. Altrove converge ad f. I coefficienti saranno infinitesimi ma ci aspettiamo che non siano $o(1/k)$.

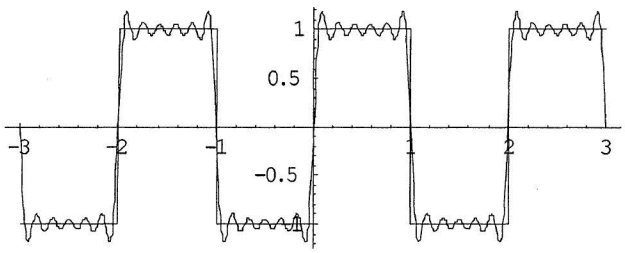
b. Poiché f è 2-periodica e dispari, $a_k = 0$ per ogni k, e

$$b_k = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(k\pi x)dx = 2\int_0^1 \sin(k\pi x)\,dx =$$

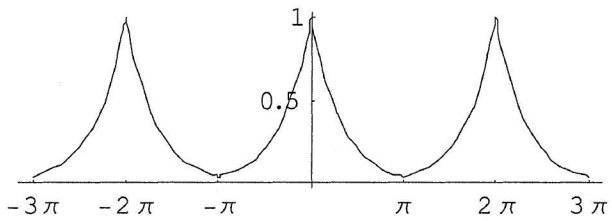
$$= \frac{2}{k\pi}[-\cos(k\pi x)]_0^1 = \frac{2}{k\pi}\Big(-(-1)^k + 1\Big) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2n \\ \frac{4}{k\pi} & \text{se } k = 2n+1. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\Big(-(-1)^k + 1\Big)\sin(k\pi x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{2n+1}$$

Il grafico di $f(x)$ insieme alla somma parziale della serie di Fourier fino a $n = 5$, cioè $k = 11$, è il seguente:



7.62.



a. La funzione periodizzata è continua su tutto $\mathbb{R}$, regolare a tratti, perciò la serie di Fourier converge in ogni punto a $f(x)$. I coefficienti saranno $o(1/k)$.

b. f è 2π-periodica e pari; quindi $b_n = 0$ e

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-x}dx = \frac{2}{\pi}[-e^{-x}]_0^\pi = \frac{2}{\pi}(1-e^{-\pi}).$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-x}\cos(nx)dx.$$

$$I = \int_0^\pi e^{-x}\cos(nx)dx = [-e^{-x}\cos(nx)]_0^\pi - n\int_0^\pi e^{-x}\sin(nx)dx =$$

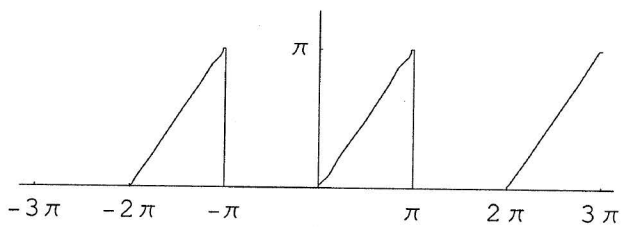
$$= 1-e^{-\pi}\cos(n\pi) - n\left\{[-e^{-x}\sin(nx)]_0^\pi + n\int_0^\pi e^{-x}\cos(nx)dx\right\} =$$

$$= 1-e^{-\pi}\cos(n\pi) - n^2 I.$$

Quindi $$I = \frac{1-e^{-\pi}\cos(n\pi)}{1+n^2} \quad \text{e} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\frac{1-e^{-\pi}\cos(n\pi)}{1+n^2}.$$

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi}(1-e^{-\pi}) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-e^{-\pi}\cos(n\pi)}{1+n^2}\cos(nx) \quad \forall x \in [-\pi,\pi].$$

7.63.



a. La funzione $f(x)$ è regolare a tratti e la sua periodizzata è continua tranne nei punti $\pi + 2k\pi$; la serie di Fourier converge ad $f(x)$ in tutti i punti diversi da $\pi + 2k\pi$; in questi punti di discontinuità converge al valor medio $\frac{\pi}{2}$. I coefficienti saranno infinitesimi ma ci aspettiamo che non siano $o(1/k)$.

b. $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x\sin kx}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin kx}{k}dx\right\} = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_0^\pi = \frac{1}{k^2\pi}\Big((-1)^k - 1\Big);$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos kx}{k}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos kx}{k}dx\right\} = -\frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi = -\frac{(-1)^k}{k}.$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi}\Big((-1)^k - 1\Big)\cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{(-1)^k}{k}\sin kx.$$

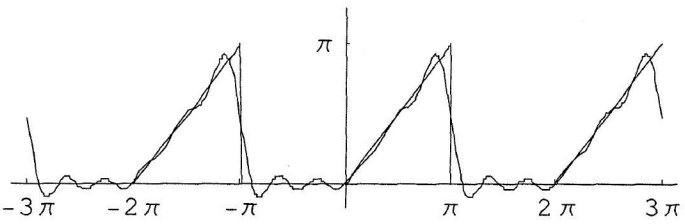


Fig. 7.6. Grafico di $f(x)$ insieme alla somma parziale di Fourier per $n = 5$

7.64. *a.* La periodizzata di f è continua, ed è regolare a tratti; perciò i coefficienti saranno $o(1/k)$; per lo stesso motivo la serie di Fourier convergerà a $f(x)$ per ogni $x \in [-2, 2]$.

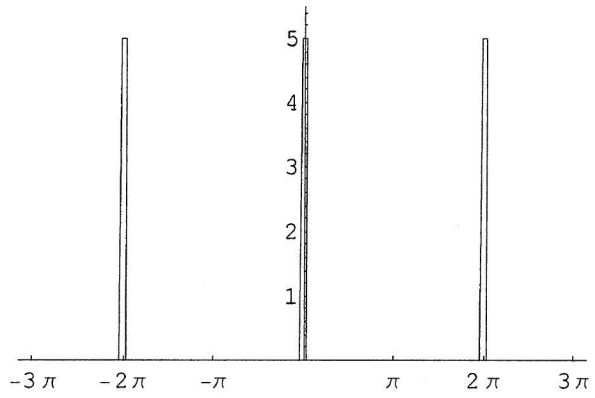
b. La funzione è 4-periodica e pari, perciò $b_k = 0\ \forall k$, e

$$a_k = \int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx = \int_1^2 (x-1)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx = \frac{4}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

$$a_0 = \int_1^2 (x-1)dx = \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2}\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \qquad \forall x \in [-2, 2].$$

7.65.



a. f è discontinua in tutti i punti $|x| = \frac{1}{10} + 2k\pi$; in questi punti la serie di Fourier converge al valor medio 2.5, e non a $f(x) = 5$. Altrove la serie converge ad f, perché f è regolare a tratti. I coefficienti saranno infinitesimi ma ci aspettiamo non siano $o(1In)$.

b.
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{10}{\pi}\int_0^{\frac{1}{10}} \cos nx\, dx = \frac{10}{\pi n}\sin\frac{n}{10};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0.$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\pi n}\sin\frac{n}{10}\cos nx.$$

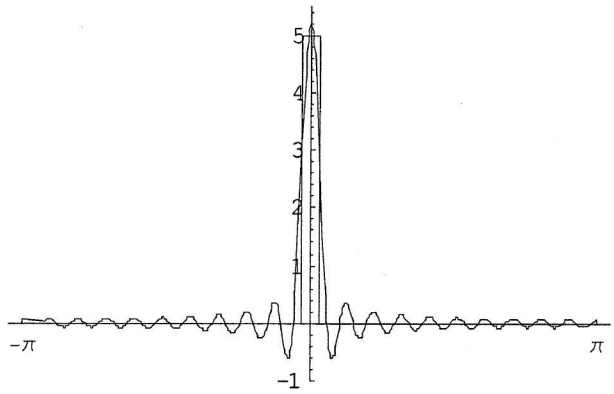


Fig. 7.7. Grafico di $f(x)$ insieme alla somma parziale di Fourier con $n = 20$

7.66. *a.* La funzione f è regolare a tratti, la sua periodizzata è discontinua nei punti $x = \pi + 2k\pi$. La serie di Fourier convergerà ad f in $(-\pi, \pi)$, e negli estremi $\pm\pi$ convergerà a 0. I coefficienti saranno infinitesimi ma ci aspettiamo che non siano $o(1/k)$.

b. f è dispari, perciò $a_k = 0$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x|x|\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin kx\,dx.$$

$$\int_0^{\pi} \underset{f}{x^2}\underset{g'}{\sin kx}\,dx = \left[-x^2\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\frac{\cos kx}{k}\,dx =$$

$$= -\frac{\pi^2}{k}\cos(k\pi) + \frac{2}{k}\left(\left[x\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\,dx\right) =$$

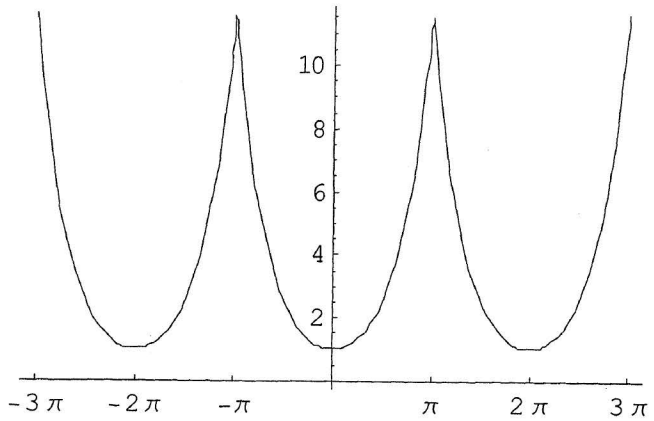
$$= -\frac{\pi^2}{k}(-1)^k + \frac{2}{k^2}\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{k}(-1)^k + \frac{2}{k^2}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k}\right).$$

Perciò:
$$b_k = \frac{2}{\pi}\cdot\left[-\frac{\pi^2}{k}(-1)^k + \frac{2}{k^2}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k}\right)\right] =$$

$$= -\frac{2\pi}{k}(-1)^k + \frac{4}{\pi k^3}\Big((-1)^k - 1\Big).$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{2\pi}{k}(-1)^k + \frac{4}{\pi k^3}\Big((-1)^k - 1\Big)\right]\sin kx.$$

7.67.



a. La serie di Fourier converge in ogni punto a f, perché f è continua in $\mathbb{R}$ e regolare a tratti. I coefficienti di Fourier saranno $o(1/k)$.

b. $b_k = 0$ perché f è pari.

$$a_0 = \frac{2\,\mathrm{Sh}\pi}{\pi};\ a_k = \frac{2\mathrm{Sh}\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k}{1+k^2}.$$

$$\mathrm{Ch}x = \frac{\mathrm{Sh}\pi}{\pi} + \frac{2\mathrm{Sh}\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}\cos kx$$

7.68. Funzione regolare a tratti, la sua periodizzata è discontinua. La serie convergerà a $f(x)$ in $(0,1)$, e a $\frac{1}{2}$ negli estremi. Calcoliamo:

$$\widehat{f}(k) = \int_0^1 xe^{-2\pi ikx}dx = (\text{per } k \neq 0)$$

$$= \left[-x\frac{e^{-2\pi ikx}}{2\pi ik}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-2\pi ikx}}{2\pi ik}dx = -\frac{1}{2\pi ik} + \left[\frac{e^{-2\pi ikx}}{-(2\pi ik)^2}\right]_0^1 = \frac{i}{2\pi k}.$$

$$\widehat{f}(0) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\sum_{k\neq 0, k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\pi ikx}}{k} \qquad \forall x \in (0,1).$$

7.69. Funzione regolare a tratti, periodizzata continua. La serie convergerà a $f(x)$ in $[-1,1]$. Calcoliamo:

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 |x|dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

Per $k \neq 0$,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 |x|e^{-\pi ikx}dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 xe^{-\pi ikx}dx - \int_{-1}^0 xe^{-\pi ikx}dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[-x\frac{e^{-\pi ikx}}{\pi ik}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-\pi ikx}}{\pi ik}dx + \left[x\frac{e^{-\pi ikx}}{\pi ik}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{e^{-\pi ikx}}{\pi ik}dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{(-1)^k i}{\pi k} + \left[\frac{e^{-\pi i k x}}{\pi^2 k^2}\right]_0^1 - \frac{(-1)^k i}{\pi k} - \left[\frac{e^{-\pi i k x}}{\pi^2 k^2}\right]_{-1}^0 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 k^2}\left\{(-1)^k - 1 - 1 + (-1)^k\right\} = \frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2}.$$

$$|x| = \frac{1}{2} + \sum_{k\neq 0, k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2} e^{\pi i k x} \qquad \forall x \in [-1, 1].$$

7.70. Funzione regolare a tratti, periodizzata discontinua. La serie convergerà a $f(x)$ in $(0, 2\pi)$, e alla media $\frac{e^{2\pi}+1}{2}$ negli estremi dell'intervallo. Calcoliamo:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^x e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{x(1-ki)}}{1-ki}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2\pi}-1}{1-ki}\right) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left(\frac{1+ki}{1+k^2}\right).$$

Notiamo che questa volta il calcolo ha senso anche per $k = 0$, quindi non c'è bisogno di calcolare a parte $\widehat{f}(0)$. Quindi

$$e^x = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1+ki}{1+k^2} e^{ikx} \quad \text{per } x \in (0, 2\pi).$$

7.71. Funzione regolare a tratti, discontinua. La serie convergerà a $f(x)$ per $x \in (-1, 1), x \neq 0$, e convergerà a 0 per $x = 0, \pm 1$. Calcoliamo:

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) dx = 0.$$

Per $k \neq 0$,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) e^{-\pi i k x} dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 e^{-\pi i k x} dx - \int_{-1}^0 e^{-\pi i k x} dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{e^{-\pi i k x}}{\pi i k}\right]_0^1 + \left[\frac{e^{-\pi i k x}}{\pi i k}\right]_{-1}^0\right\} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{(-1)^k - 1}{\pi i k} + \frac{1-(-1^k)}{\pi i k}\right\} =$$

$$= \frac{(-1^k) - 1}{\pi k} i;$$

$$f(x) \sim \sum_{k \neq 0, k=-\infty}^{\infty} i \frac{(-1^k) - 1}{\pi k} e^{\pi i k x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2i}{\pi(2n+1)} e^{\pi i (2n+1) x}$$

7.72. $$b_k = \frac{1}{2k\pi + k^2} > 0 \text{ e } b_k \downarrow 0$$

(cioè tende a zero monotonamente). Quindi la serie converge puntualmente in $(0, 2\pi)$, ed essendo una serie di soli seni converge anche negli estremi. In conclusione, converge in tutto $[0, 2\pi]$. Poiché

$$b_k \sim \frac{1}{2k\pi} \text{ che ha serie divergente,}$$

non si può applicare il criterio della convergenza totale, e quindi non si può garantire la continuità della somma, né tantomeno la sua derivabilità.

7.73. La serie converge totalmente perché

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

sono convergenti. Quindi la serie converge in tutto $[0, 2\pi]$ e la sua somma è una funzione continua. La serie derivata è

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\sin kx}{k^2} + (-1)^k \frac{\cos kx}{(k-1)!} \right)$$

e, data la velocità di convergenza a zero dei coefficienti, converge anch'essa totalmente. Quindi la somma della serie è derivabile, e la serie si può derivare termine a termine.

7.74. La serie numerica

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k} \text{ diverge,}$$

quindi la serie non converge totalmente. Proviamo che la successione $\frac{\log k}{k}$, che è positiva e tende a zero per la gerarchia degli infiniti, è anche monotona decrescente. Si pone

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \text{ e si calcola } f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} < 0 \text{ per } x > e,$$

quindi per $k \geq 3$ la successione a_k è monotona decrescente[9]. Ne segue che la serie trigonometrica converge in $(0,1)$. Negli estremi si ha la serie numerica $\sum a_k$, divergente. Non si può garantire né la continuità né la derivabilità della somma.

7.75. $$b_k = \left(\frac{1+2k-k^2}{k^3+1}\right) \sim -\frac{1}{k}$$

quindi la serie non converge totalmente. La successione b_k è definitivamente negativa; raccogliendo un segno $-$ dalla serie avremo una successione definitivamente positiva e tendente a zero. Proviamo che

$$-b_k = \left(\frac{k^2-1-2k}{k^3+1}\right) \text{ è monotona decrescente.}$$

Poniamo $$f(x) = \frac{x^2-1-2x}{x^3+1} \text{ e calcoliamo}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^3+1) - 3x^2(x^2-1-2x)}{(x^3+1)^2} =$$

$$= \frac{-x^4+4x^3+3x^2+2x-2}{(x^3+1)^2} \sim \frac{-x^4}{x^6} = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ per } x \text{ abbastanza grande.}$$

Quindi la successione $(-b_k)$ è definitivamente decrescente, e la serie trigonometrica converge puntualmente (essendo di soli seni) in tutto $[0,2]$. Non si può garantire né la continuità né la derivabilità della somma.

7.76. Poiché

$$a_k \sim \frac{2}{k^2},$$

la serie trigonometrica converge totalmente. Quindi converge in tutto $[0,2]$ e la sua somma è continua. La serie derivata,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(-k\pi \frac{(1+2k)}{k^3+1}\right) \sin(k\pi x)$$

non converge però totalmente, essendo

[9] Questa tecnica per provare che una successione è monotona è stata illustrata in [BPS1], cap.4, §4.2.

$$-k\pi\frac{(1+2k)}{k^3+1}\sim-\frac{2\pi}{k},$$

quindi non si può garantire la derivabilità della somma.

7.77. $\sin^3x$ è già dispari,

perciò non occorre rifletterla. La sua serie di Fourier si ottiene con identità trigonometriche (è già un polinomio trigonometrico).

$$\sin^3x=\sin x\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x\cos2x=$$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}(\sin3x-\sin x)=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin3x.$$

Questo è lo sviluppo in serie di seni di $\sin^3x$, perciò

$$c_1=\frac{3}{4};c_3=-\frac{1}{4},$$

e tutti gli altri coefficienti sono nulli. La soluzione del problema quindi è data da:

$$u(t,x)=\frac{3}{4}\sin x\cos(at)-\frac{1}{4}\sin(3x)\cos(3at).$$

7.78. $\sin x\cos^2x$ è già dispari.

$$\sin x\cos^2x=\sin x\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x\cos2x=$$

$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{4}(\sin3x-\sin x)=\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{4}\sin3x.$$

Poiché dev'essere

$$\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{4}\sin3x=\sum_{k=1}^{\infty}d_kak\sin(kx)$$

si ha:

$$d_1=\frac{1}{4a};d_3=\frac{1}{12a}$$

e tutti gli altri coefficienti sono nulli. La soluzione del problema è quindi data da:

$$u(t,x)=\frac{1}{4a}\sin(x)\sin(at)+\frac{1}{12a}\sin(3x)\sin(3at).$$

7.79. La funzione $\sin^2 x$ è pari, non dispari. Dobbiamo svilupparla in serie di soli seni, quindi sviluppare la sua riflessa dispari. Si ha:

$$c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x \sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin kx - \cos(2x)\sin(kx)]dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin kx - \frac{1}{2}(\sin((k+2)x) + \sin(k-2)x)\right]dx =$$

se $k \neq 2$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(kx)}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos((k+2)x)}{k+2} + \frac{\cos(k-2)x}{k-2}\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^k}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^k-1}{k+2} + \frac{(-1)^k-1}{k-2}\right)\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{k} - \left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k-2}\right)\right] & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

(Anche se $k = 2$ si trova $c_k = 0$). Per k dispari si ha (semplificando l'espressione)

$$c_k = -\frac{8}{\pi k(k^2-4)} \text{ per } k \text{ dispari,}$$

e tutti gli altri coefficienti sono nulli. La soluzione del problema è quindi data da:

$$u(t,x) = \sum_{k \text{ dispari}, k=1}^{\infty} -\frac{8}{\pi k(k^2-4)}\sin(kx)\cos(akt) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{8}{\pi(2n+1)\left((2n+1)^2-4\right)}\sin((2n+1)x)\cos(a(2n+1)t)$$

7.80. I due dati iniziali sono già sviluppati in serie di soli seni, si ha:

$$c_3 = 1; d_5 = \frac{1}{5a},$$

e tutti gli altri coefficienti sono nulli. La soluzione del problema è quindi data da:

$$u(t,x) = \sin(3x)\cos(a3t) + \frac{1}{5a}\sin(5x)\sin(a5t).$$

7.81. Dobbiamo anzitutto riscrivere f come funzione di ϑ, per $\rho = 1$. Quindi

$$x = \cos\vartheta, y = \sin\vartheta, \text{ e}$$

$$f(\vartheta) = \cos\vartheta\sin^2\vartheta.$$

Ora dobbiamo sviluppare f in serie di Fourier. E' già un polinomio trigonometrico, basta

riscriverlo nella forma opportuna:

$$f(\vartheta) = \cos\vartheta\left(\frac{1-\cos 2\vartheta}{2}\right) = \frac{1}{2}[\cos\vartheta - \cos\vartheta\cos 2\vartheta] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\vartheta - \frac{1}{2}(\cos 3\vartheta + \cos\vartheta)\right] = \frac{1}{4}\cos\vartheta - \frac{1}{4}\cos 3\vartheta.$$

Perciò la soluzione del problema è:

$$u(\rho,\vartheta) = \frac{1}{4}\rho\cos\vartheta - \frac{1}{4}\rho^3\cos 3\vartheta.$$

Se vogliamo riscrivere in la soluzione in funzione di (x,y) possiamo sfruttare il calcolo coi numeri complessi: poiché

$z = \rho e^{i\vartheta} \Rightarrow z^n = \rho^n e^{in\vartheta} = \rho^n\cos n\vartheta + i\rho^n\sin n\vartheta$, si ha:

$$\rho^n\cos n\vartheta = \mathrm{Re}(x+iy)^n, \quad \rho^n\sin n\vartheta = \mathrm{Im}(x+iy)^n.$$

Nel nostro caso,

$$\rho\cos\vartheta = x; \rho^3\cos 3\vartheta = \mathrm{Re}(x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2,$$

perciò
$$u(x,y) = \frac{1}{4}(x - x^3 + 3xy^2).$$

7.82. Dobbiamo anzitutto riscrivere f come funzione di ϑ, per $\rho = 1$. Quindi

$$x = \cos\vartheta, \text{ e } f(\vartheta) = |\cos\vartheta|.$$

Ora dobbiamo sviluppare f in serie di Fourier.

Notiamo che la funzione $\cos x$ definita su $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e periodizzata di periodo π coincide con la funzione $|\cos x|$ definita su $[-\pi,\pi]$ e periodizzata di periodo 2π. Sviluppiamo perciò $\cos x$ su $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Funzione pari, $b_k = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\vartheta d\vartheta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta d\vartheta = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\vartheta\cos(2k\vartheta)d\vartheta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\cos(2k\vartheta)d\vartheta =$$

$$\text{poiché } \cos\vartheta\cos(2k\vartheta) = \frac{1}{2}[\cos((2k+1)\vartheta) + \cos((2k-1)\vartheta)]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{\sin((2k+1)\vartheta)}{2k+1} + \frac{\sin((2k-1)\vartheta)}{2k-1}\right]_0^{\pi/2}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2k+1} + \frac{\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right)}{2k-1}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(k\pi)}{2k+1} - \frac{\cos(k\pi)}{2k-1}\right)$$

$$= \frac{-4\cos(k\pi)}{\pi} \cdot \frac{1}{4k^2-1}.$$

La soluzione cercata è:

$$u(\rho,\vartheta) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi}\left(\frac{1}{4k^2-1}\right)\rho^{2n}\cos(2k\vartheta)$$

Trattandosi di una serie effettiva (cioè con infiniti termini diversi da zero) in questo caso non è agevole riscriverla come funzione di (x,y), anche se potremmo farlo, con un po' di pazienza, per la somma parziale dei primi termini.

7.83. Sviluppiamo $F(t)$ in serie di Fourier. F è 2-periodica, pari, si ha:

$$a_0 = 2\int_0^1 t\,dt = 1;$$

$$a_k = 2\int_0^1 t\cos(k\pi t)dt = 2\left\{\left[\frac{t\sin(k\pi t)}{\pi k}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(k\pi t)}{\pi k}dt\right\} =$$

$$= 2\left[\frac{\cos(k\pi t)}{\pi^2 k^2}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right).$$

Quindi $$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right)\cos(k\pi t).$$

Per $k = 0$, una soluzione di

$$y_k'' + \frac{1}{4}y_k' + y_k = \frac{1}{2} \text{ è } y_0(t) = \frac{1}{2}.$$

Per $k \geq 1$, una soluzione particolare di

$$y_k'' + \frac{1}{4}y_k' + y_k = \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right)\cos(k\pi t)$$

ha la forma $$y_k = c_k\cos(k\pi t) + d_k\sin(k\pi t).$$

$$y_k'(t) = -c_k\pi k\sin(k\pi t) + d_k k\pi\cos(k\pi t)$$

$$y_k''(t) = -c_k k^2\pi^2\cos(k\pi t) - d_k k^2\pi^2\sin(k\pi t)$$

$$\left(-c_k k^2\pi^2\cos(k\pi t) - d_k k^2\pi^2\sin(k\pi t)\right) + \frac{1}{4}(-c_k k\pi\sin(k\pi t) + d_k k\pi\cos(k\pi t)) +$$

$$+ (c_k\cos(k\pi t) + d_k\sin(k\pi t)) = \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right)\cos kt.$$

$$\begin{cases} -c_k k^2\pi^2 + \frac{1}{4}d_k k\pi + c_k = \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{(-1)^k-1}{k^2}\right) \\ -d_k k^2\pi^2 - \frac{1}{4}c_k k\pi + d_k = 0 \end{cases}$$

sistema che risolto dà

$$d_k = \frac{8\left((-1)^k - 1\right)}{\pi k\left[16(1 - \pi^2k^2)^2 + k\pi^2\right]};$$

$$c_k = \frac{32\left((-1)^k - 1\right)(1 - k^2)}{\pi^2k^2\left[16(1 - \pi^2k^2)^2 + k^2\pi^2\right]}.$$

La soluzione trovata è quindi:

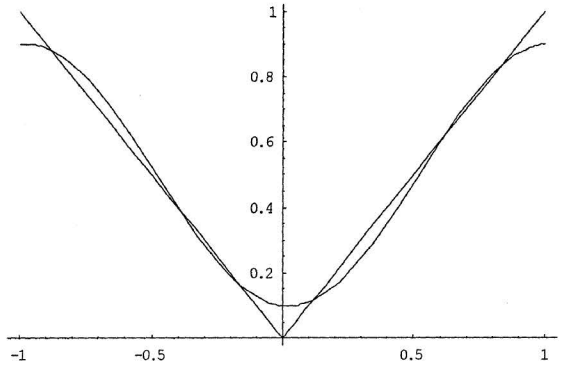
$$y(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{32\left((-1)^k - 1\right)(1 - \pi^2k^2)}{\pi^2k^2\left[16(1 - \pi^2k^2)^2 + k^2\pi^2\right]}\cos(k\pi t) + \frac{8\left((-1)^k - 1\right)}{\pi k\left[16(1 - \pi^2k^2)^2 + k\pi^2\right]}\sin(k\pi t).$$

Tabuliamo i primi coefficienti. $c_k, d_k = 0$ per k pari; per k dispari:

k	1	3	5	7	9
c_k	0.045	0.0005	0.0002	0.000066	0.000017
d_k	−0.0013	−0.000004	−0.0000003	−0.00000008	−0.00000002

Si vede che $$y(t) \simeq \frac{1}{2} + 0.045\cos(\pi t) - 0.0013\sin(\pi t),$$

e gli altri coefficienti sono di almeno due ordini di grandezza più piccoli. Pur non essendoci qui un vero fenomeno di risonanza (la forzante è periodica con pulsazione $\omega = \pi$ mentre la pulsazione propria del sistema non smorzato è 1), è ancora vero che, tendendo a zero molto velocemente i coefficienti della serie trigonometrica che assegna la soluzione, questa è ben approssimata da una singola funzione sinusoidale. Il grafico mostra il confronto tra $F(t)$ e il primo membro dell'equazione differenziale calcolato sulla soluzione approssimata.



7.84. Sappiamo già dai calcoli fatti nell'esempio svolto che

$$F(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right)\cos kt.$$

Dobbiamo perciò risolvere per $k = 0, 1, 2, \ldots$ l'equazione

$$y_k'' + y_k = a_k\cos(kt)$$

Per $k = 0$, una soluzione di

$$y_0'' + y_0 = \frac{\pi}{2} \text{ è } y_0(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Per $k = 1$, una soluzione di

$$y_1'' + y_1 = -\frac{4}{\pi}\cos t$$

si può cercare (osservando che siamo nel caso particolare in cui *il termine noto è soluzione dell'omogenea*) nella forma

$$y_1(t) = t(a\cos t + b\sin t),$$

$$y_1'(t) = a\cos t + b\sin t + t(-a\sin t + b\cos t)$$

$$y_1''(t) = 2(-a\sin t + b\cos t) + t(-a\cos t - b\sin t)$$

$$2(-a\sin t + b\cos t) + t(-a\cos t - b\sin t) + t(a\cos t + b\sin t) = -\frac{4}{\pi}\cos t$$

$$2(-a\sin t + b\cos t) = -\frac{4}{\pi}\cos t; \quad -2a = -\frac{4}{\pi}; b = 0.$$

$$a = \frac{2}{\pi}; y_1(t) = \frac{2}{\pi}t\cos t \text{ (soluzione risonante)}$$

mentre per $k = 2, 3, 4, \ldots$. l'equazione

$$y_k'' + y_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right)\cos(kt)$$

avrà una soluzione del tipo $c_k\cos(kt)$.

Quindi la soluzione con termine noto F ha una soluzione particolare che è somma di una funzione limitata e della funzione

$$y_1(t) = \frac{2}{\pi}t\cos t, \text{ risonante.}$$

Poiché anche l'integrale generale dell'equazione omogenea è limitata, $(c_1\cos t + c_2\sin t)$, y_1 sarà la soluzione per tempi lunghi.

Questo testo raccoglie esercizi adatti a corsi di Analisi Matematica 2 per la Laurea in Ingegneria o affini. Si tratta perlopiù di esercizi tratti da temi d'esame assegnati negli ultimi dieci anni al Politecnico di Milano. L'impostazione seguita è quella del libro di testo:
Bramanti-Pagani-Salsa: ***Analisi Matematica 2***, Zanichelli, 2009.

Caratteristiche del libro:

- Oltre 700 esercizi di Analisi Matematica 2, suddivisi per argomento, con svolgimento completo oppure con le soluzioni.
- Un centinaio di esempi guida, svolti e commentati dettagliatamente, per introdurre gli argomenti più importanti.
- Numerose osservazioni didattiche e puntualizzazioni per illustrare i punti più delicati e prevenire gli errori più comuni.
- Ampio spazio ad esercizi ed esempi rivolti alle applicazioni fisiche degli argomenti di analisi.

Questo volume quindi non è solo una raccolta di esercizi, ma un percorso di esercitazioni, mirato ad aiutare specialmente lo studente che, per qualunque motivo, non ha seguito bene lezioni o esercitazioni e deve perciò affrontare l'esame da autodidatta. Naturalmente, lo studio del libro di testo rimane un presupposto.

ISBN 978-88-7488-482-7

9 788874 884827

Euro 38,00

SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO

www.editrice-esculapio.it