

ANALISI MATEMATICA 2 (9 CFU)

2 Parte 10.7.2023

Cognome.....

Nome.....

n.matricola

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ y^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{y^2}{x^4}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

si verifichi se in $(0,0)$

a f è continua;

b f è derivabile in ogni direzione;

c vale la formula del gradiente;

d f è differenziabile.

Esercizio 2 Determinare i punti di estremo libero della funzione

$$f(x, y) = (x - 1)^4 + y^4 - 2(x - 1 - y)^2 + 2$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int \int_D (y^2 + 1) dx dy$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4x^2 \leq 1, xy \geq 0\}$$

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{8(x-1)}{4(x-1)^2 + 2y^2} + 2(x-2), \frac{4y}{4(x-1)^2 + 2y^2} + 2(y+2) \right),$$

a determinare il suo insieme di definizione;

b stabilire se il campo è conservativo senza calcolare il potenziale;

c se possibile, calcolare un potenziale;

d calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $\mathbf{r}(t) = (1 + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t), t \in [0, \pi]$.

Esercizio 5 Dati il campo vettoriale $\vec{F}$ e la superficie S definiti da

$$\vec{F}(x, y, z) = (z(x-1), zy, z^2) \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 3, |z| \leq \sqrt{2}\}$$

a Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso S orientata verso l'esterno usando la definizione di flusso.

b Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso S orientata verso l'esterno usando il teorema di Stokes.

Esercizio 6 Sia V il volume descritto da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

ed $\mathbf{F}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (0, (x-1)^2, z^2),$$

a calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}$ attraverso ∂V ;

b verificare il teorema della divergenza.

ESAME 10.7.2023 PARTE 2 SCHEMA SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ y^{1/3} e^{-y^2/x^4} & x \neq 0 \end{cases} \quad D = \mathbb{R}^2$$

f è continua in $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = |y^{1/3} e^{-y^2/x^4}| \leq |y^{1/3}| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$\Rightarrow f$ è continua in $(0,0)$

$$\begin{aligned} D_r f(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \theta, t \sin \theta) - f(0,0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t \sin \theta)^{1/3} e^{-\frac{\sin^2 \theta}{t^2 \cos^4 \theta}}}{t} = 0 \quad \cos \theta \neq 0 \end{aligned}$$

$$\cos \theta \neq 0 \Leftrightarrow \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

devo considerare la derivata per $\theta = \pi/2$ ($\frac{3}{2}\pi$)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy} f(0,y) \Big|_{y=0} = \frac{d}{dy} (0) \Big|_{y=0} = 0$$

$\Rightarrow D_r f(0,0) = 0 \Rightarrow f$ è derivabile in $(0,0)$.

$\nabla f(0,0) = (0,0)$, la formula del gradiente è valida:

$$\Rightarrow D_{\hat{v}} f(0,0) = 0 = \nabla f(0,0) \cdot \hat{v}$$

Differenziabilità in $(0,0)$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k^{1/3} e^{-k^2/h^4}}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad \text{non esiste}$$

$$k=h^2 \quad f(h,h^2) = \frac{h^{2/3} e^{-1}}{\sqrt{h^2+h^4}} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h^{2/3} e^{-1}}{|h|} \rightarrow \pm \infty \quad h \rightarrow 0^\pm$$

$\Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0,0)$

Esercizio 2

$$f(x, y) = (x-1)^4 + y^4 - 2(x-1-y)^2 + 2 \quad D = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x-1)^3 - 4(x-1-y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x-1-y) = 0$$

Sommando le eq. ottengo

$$4(x-1)^3 + 4y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -y^3$$

$$\Leftrightarrow x-1 = -y \Leftrightarrow y = 1-x$$

Sostituisco nella seconda

$$\cancel{4}y^3 + \cancel{4}(-2y) = 0 \Leftrightarrow y(y^2 - 2) = 0$$

$$y = 0 \quad x = 1 \Rightarrow (1, 0) \quad 3 \text{ Pti critici}$$

$$y = \pm\sqrt{2} \quad x = 1 \mp \sqrt{2} \Rightarrow (1-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (1+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12(x-1)^2 - 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \det H_f(1, 0) = 0 \Rightarrow \text{non posso dire nulla}$$

$$H_f(1-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 400-16 > 0 \\ 20 > 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow (1-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ è un punto di minimo locale forte

$H_f(1+\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(1-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \Rightarrow (1+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
è un punto di minimo locale forte.

Studio il segno dell'incremento di f in $(1,0)$

$$\Delta f(x,y) - f(1,0) = (x-1)^4 + y^4 - 2(x-1-y)^2 \geq 0$$

$$\Delta f(x, x-1) = 2(x-1)^4 \geq 0$$

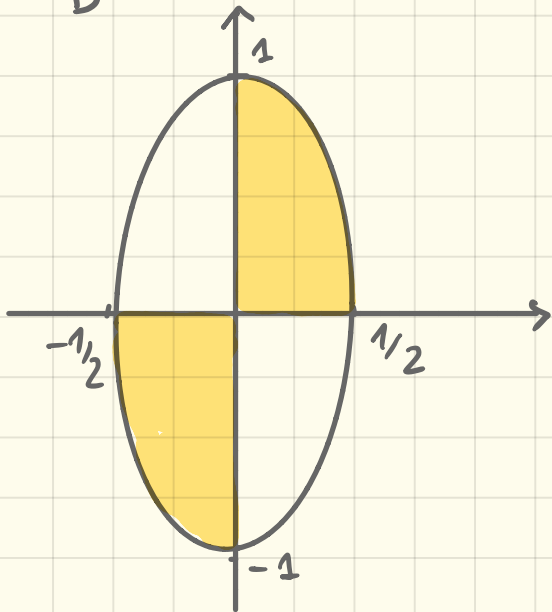
$$\Delta f(x, 1-x) = 2(x-1)^4 - 2(2x-2)^2 = 2(x-1)^4 - 8(x-1)^2$$

$$\Delta f(x, 1-x) = 2(x-1)^4 - 8(x-1)^2 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -8(x-1)^2 \leq 0$$

$\Rightarrow (1,0)$ è un punto di sella.

Esercizio 3

$$\iint_D (y^2 + 1) dx dy \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4x^2 \leq 1, xy \geq 0\}$$



$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \rho \cos \theta & \rho \in [0, 1] \\ y = \rho \sin \theta & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\iint_D (y^2 + 1) dx dy = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (\rho^2 \sin^2 \theta + 1) \frac{1}{2} \rho d\rho d\theta +$$

$$+ \int_0^1 \int_{\pi}^{3/2\pi} (\rho^2 \sin^2 \theta + 1) \frac{1}{2} \rho d\rho d\theta =$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{\cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \rho^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho d\rho + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_{\pi}^{3/2\pi} \sin^2 \theta + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho d\rho \right] =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \int^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta + \frac{\pi}{4} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{5}{16} \pi$$

ESERCIZIO 4

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{8(x-1)}{4(x-1)^2+2y^2} + 2(x-2), \frac{4y}{4(x-1)^2+2y^2} + 2(y+2) \right)$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (1,0) \}$$

Insieme aperto, illimitato, connesso, non semplicemente connesso.

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) =$$

$$= \hat{k} \left(\frac{-32(x-1)y}{(4(x-1)^2+2y^2)^2} + \frac{32(x-1)y}{(4(x-1)^2+2y^2)^2} \right) = 0$$

$\Rightarrow \vec{F}$ è irrotazionale $\Rightarrow \vec{F}$ è localmente conservativo.

TEOREMA sui campi conservativi:

$$\vec{F} = \nabla U \text{ è equivalente a } \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

$$\Gamma = \{ \gamma \subset D : \text{regolare e chiusa, semplice, chiusa} \}$$

Dimostriamo che $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \rightarrow$

Sia $\gamma \in \Gamma$, può contenere o il suo intero
il punto $(1,0)$ oppure no.

Supponiamo che lo contenga; dato che il
campo è irrotazionale posso usare la proprietà
dei cammini equivalenti

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

C ellisse di eq. $4(x-1)^2 + 2y^2 = 1$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2} \cos \theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \begin{cases} x' = -\frac{1}{2} \sin \theta \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(4 \cos \theta + 2 \left(\frac{1}{2} \cos \theta - 1 \right), \frac{4}{\sqrt{2}} \sin \theta + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + 2 \right) \right) \cdot \vec{r}'(\theta) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-2 \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \left(\frac{1}{2} \cos \theta - 1 \right) + \frac{4}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \theta + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos \theta \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + 2 \right) \right] d\theta$$
$$= 0$$

Se $f \in \Gamma$ non contiene all'origine $(1,0)$

$\Rightarrow \exists B \subset D : f \subset B \subset B$ semplicemente
connesso $\Rightarrow \vec{F}$ è conservativo su B

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Possiamo concludere che $\vec{F} = \nabla U$ ovvero
 $\vec{F}$ è conservativo.

Calcolo U

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{8(x-1)}{4(x-1)^2 + 2y^2} + 2(x-2) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{4y}{4(x-1)^2 + 2y^2} + 2(y+2) \end{cases} \quad \text{integrando la prima eq.}$$

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int \left[\frac{8(x-1)}{4(x-1)^2 + 2y^2} + 2(x-2) \right] dx = \\ &= \lg[4(x-1)^2 + 2y^2] + (x-2)^2 + C(y) \end{aligned}$$

Usando la seconda equazione

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{4y}{4(x-1)^2 + 2y^2} + C'(y) = \frac{4y}{4(x-1)^2 + 2y^2} + 2(y+2) \Rightarrow$$

$$C'(y) = 2(y+2) \Leftrightarrow C(y) = (y+2)^2 + C$$

$$\Rightarrow V(x,y) = \lg[4(x-1)^2 + 2y^2] + (x-2)^2 + (y+2)^2 + C$$

$$\gamma \quad \vec{F}(t) = \left(1 + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\right) \quad t \in [0, \pi]$$

$$\vec{r}(0) = \left(\frac{3}{2}, 0\right) \quad \vec{r}(\pi) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V\left(\frac{1}{2}, 0\right) - V\left(\frac{3}{2}, 0\right) =$$

$$= \lg\left(4 \cdot \frac{1}{4}\right) + \frac{9}{4} + 4 - \left[\lg\left(4 \cdot \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + 4\right] = 2$$

Esercizio 5

$$\vec{F}(x, y, z) = (z(x-1), zy, z^2) \quad D = \mathbb{R}^3$$

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 3, |z| \leq \sqrt{2} \}$$

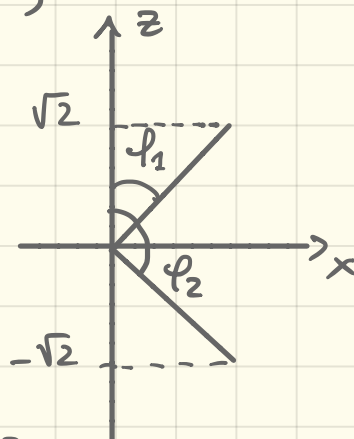
$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \hat{i} (0 - y) - \hat{j} (0 - (x-1)) + \hat{k} (0)$$

$$\nabla \wedge \vec{F} = (-y, x-1, 0)$$

Coordinate sferiche per S

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \sin \varphi \cos \vartheta + 1 \\ y = \sqrt{3} \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \sqrt{3} \cos \varphi \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \leq \cos \varphi \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$$



$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1$$

$$\vec{r}_\varphi = (\sqrt{3} \cos \varphi \cos \vartheta, \sqrt{3} \cos \varphi \sin \vartheta, -\sqrt{3} \sin \varphi)$$

$$\vec{r}_\vartheta = (-\sqrt{3} \sin \varphi \sin \vartheta, \sqrt{3} \sin \varphi \cos \vartheta, 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\vartheta &= (+3 \sin^2 \varphi \cos \vartheta, 3 \sin^2 \varphi \sin \vartheta, 3 \sin \varphi \cos \varphi) = \\ &= 3 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(\nabla \wedge \vec{F}, S) &= \iint_S \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (-\sqrt{3} \sin \rho \sin \vartheta, \sqrt{3} \sin \rho \cos \vartheta, 0) \cdot (\sin \rho \cos \vartheta, \sin \rho \sin \vartheta, \cos \rho) 3 \sin \rho \, d\rho \, d\vartheta \\
 &= 3\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (-\sin^2 \rho \sin \vartheta \cos \vartheta + \sin^2 \rho \sin \vartheta \cos \vartheta) \sin \rho \, d\rho \, d\vartheta = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial S &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 3 \mid z = \sqrt{2} \} \\
 &= \partial S_1 \cup \partial S_2
 \end{aligned}$$

$$\partial S_1 \quad (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad z = \sqrt{2}$$

$$\partial S_2 \quad (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad z = -\sqrt{2}$$

$$\partial S_1^+ \quad \begin{cases} x = 1 + \cos \vartheta \\ y = \sin \vartheta \\ z = \sqrt{2} \end{cases} \quad \vartheta \in [2\pi, 0] \quad \begin{cases} x' = -\sin \vartheta \\ y' = \cos \vartheta \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\partial S_2^+ \quad \begin{cases} x = 1 + \cos \vartheta \\ y = \sin \vartheta \\ z = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi] \quad \begin{cases} x' = -\sin \vartheta \\ y' = \cos \vartheta \\ z' = \sin \vartheta \end{cases}$$

$$\int_{\partial S^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial S_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\partial S_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{\partial^+ S_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^{2\pi} (\sqrt{2} \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta, 2) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta = 0$$

$$\int_{\partial^+ S_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sqrt{2} \cos \theta, -\sqrt{2} \sin \theta, 2) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

TEOREMA di STOKES

$$\iint_S \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{è verificato.}$$

ESERCIZIO 6

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad z \geq 0 \}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (0, (x-1)^2, z^2)$$

$$\partial V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad z > 0 \} \cup$$

$$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \quad z = 0 \} =$$

$$= \partial V_1 \cup \partial V_2$$

$$\partial V_1 \quad \begin{cases} x = \sin \varphi \cos \vartheta + 1 \\ y = \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \varphi \in [0, \pi/2] \\ \vartheta \in [0, 2\pi] \end{array}$$

$$\vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\vartheta = \sin \varphi (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi)$$

$$\Phi(\vec{F}, \partial V_1) = \iint_{\partial V_1} \vec{F} \cdot \hat{n}_e \, ds =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (0, \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta, \cos^2 \varphi) \cdot (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi) \sin \varphi \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\sin^4 \varphi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + \cos^3 \varphi \sin \varphi) d\varphi d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi =$$

$$= 2\pi \frac{1}{4} (\cos^4 \varphi)_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\partial V_2 \quad \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta + 1 \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \in [0, 1] \\ \vartheta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$\hat{\vec{r}}_\rho = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0) \quad \vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\vartheta = (0, 0, \rho)$$

$$\vec{r}_\vartheta = (-\rho \sin \vartheta, \rho \cos \vartheta, 0) \quad \hat{m}_e = \frac{1}{\rho} \vec{r}_\vartheta \wedge \vec{r}_\rho$$

$$\Phi(\vec{F}, \partial V_2) = \iint_{\partial V_2} \vec{F} \cdot \hat{m}_e d\Omega =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (0, \rho^2 \cos^2 \vartheta, 0) \cdot (0, 0, \rho) d\varphi d\vartheta = 0$$

$$\Phi(\vec{F}, \partial V) = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{\pi}{2}$$

TEOREMA della DIVERGENZA

$$\Phi(\vec{F}, \partial V) = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 2z$$

$$V \quad \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta & \rho \in [0, 1] \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta & \vartheta \in [0, 2\pi] \\ z = \rho \cos \varphi & \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Jacobiano coordinate sferiche $|J| = \rho^2 \sin \varphi$

$$dx \, dy \, dz = \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2\rho \cos \varphi \, \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= 2 \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ il teorema della divergenza è verificato.