

ANALISI MATEMATICA 2 (9 CFU)

2 Parte 28.6.2024

Cognome.....

Nome.....

n.matricola

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} |x| \frac{xe^{-y} + ye^x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a determinare il suo insieme di definizione e stabilire se è continua e derivabile in $(0, 0)$;**b** calcolare le derivate direzionali in $(0, 0)$ rispetto al generico versore $(\cos \theta, \sin \theta)$;**c** stabilire se f è differenziabile in $(0, 0)$.**Esercizio 2** Calcolare la massa totale dell'ellissoide non omogeneo espresso analiticamente da

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1 \}$$

avente densità di massa $\rho(x, y, z) = a(x^2 + (y+1)^2 + z^2)$ dove $a > 0$.**Esercizio 3** Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = [(x-1)^2 + y^2 - 4] e^{x-1-y}$$

a Determinare il dominio, calcolare il gradiente e la matrice Hessiana di f .**b** Determinare i punti critici di f e studiarne la natura.**a** Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto di f sulla circonferenza di raggio 3 e centro $(1, 0)$.**Esercizio 4** Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(y \log(1+x^2) + \frac{2x^2y}{1+x^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2}, x \log(1+x^2) + \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + y \right)$$

a Stabilire il suo insieme di definizione.**b** Verificare se il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale e dimostrare, senza calcolare il potenziale, che è conservativo.**c** Calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.**d** Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ per andare dal punto $(1, 3)$ al punto $(3, 2)$.**Esercizio 5** Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(yz, (x-1)z, (x-1)y)}{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$$

a determinarne il dominio e calcolarne il rotore $\nabla \wedge \mathbf{F}$;**b** calcolare il flusso del $\nabla \wedge \mathbf{F}$ attraverso al semisfera di centro $(1, 0, 0)$ e raggio $R = 2$, contenuta nel semispazio $z \geq 0$;**c** verificare il teorema di Stokes.**Esercizio 6** Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (0, x^2, z^2)$$

e la regione

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0 \}$$

a scrivere il bordo ∂E in forma parametrica e dire se è una superficie regolare;**b** verificare il teorema della divergenza.

ESAME 28.6.2024 PARTE 2 SCHEMA SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

$$f(x,y) = \begin{cases} |x| \frac{x e^{-y} + y e^x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

CONTINUITÀ in $(0,0)$

La funzione è continua in $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0 \quad (*)$$

Dimostriamo (*)

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = |x| \left| \frac{x e^{-y} + y e^x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| =$$

$$\leq |x| \left(\left| \frac{x e^{-y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| + \left| \frac{y e^x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \right) \leq$$

$$\leq |x| \left(\frac{|x|}{|x|} e^{-y} + \frac{|y|}{|y|} e^x \right) = |x| (e^{-y} + e^x) \rightarrow 0 \quad \text{se } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

DERIVATA DIREZIONALE

$$\hat{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$D_{\hat{v}} f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t\cos\theta| \cdot t\cos\theta e^{-t\sin\theta} + t\sin\theta e^{t\cos\theta}}{|t|} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= |\cos\theta| (\cos\theta + \sin\theta)$$

$$\nabla f(0,0) = (1, 0)$$

$$\nabla f(0,0) \cdot \hat{v} = (1,0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta$$

$$\Rightarrow D_{\hat{v}} f(0,0) = |\cos\theta|(\cos\theta + \sin\theta) \neq \nabla f(0,0) \cdot \hat{v} = \cos\theta$$

$\Rightarrow$ La formula del gradiente non è

valida $\Rightarrow$ la funzione non è

differentiabile in $(0,0)$.

Esercizio 2

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1 \right\}$$

$$\rho(x, y, z) = a(x^2 + (y+1)^2 + z^2) \quad a > 0$$

$$\begin{aligned} M &= \iiint_E \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint_E a(x^2 + (y+1)^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale uso le coordinate

$$\begin{cases} x = 2\rho \sin\varphi \cos\theta & \rho \in [0, 1] \\ y = 3\rho \sin\varphi \sin\theta - 1 & \varphi \in [0, \pi] \\ z = 4\rho \cos\varphi & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2\sin\varphi \cos\theta & 3\sin\varphi \sin\theta & 4\cos\varphi \\ 2\rho \cos\varphi \cos\theta & 3\rho \cos\varphi \sin\theta & -4\rho \sin\varphi \\ -2\rho \sin\varphi \sin\theta & 3\rho \sin\varphi \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J = 24\rho^2 \sin\varphi \sin^2\theta + 24\rho^2 \sin\varphi \cos^2\theta = 24\rho^2 \sin\varphi \Rightarrow$$

$$M = Q \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (4\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + 9\rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + 16\rho^2 \cos^2\varphi) \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi d\theta d\rho$$

$$= Q \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (4\rho^4 \sin^3\varphi \cos^2\theta + 9\rho^4 \sin^3\varphi \sin^2\theta + 16\rho^4 \sin\varphi \cos^2\varphi) \, d\varphi d\theta d\rho$$

$$\int_0^\pi \sin^3\varphi \, d\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi (1 - \cos^2\varphi) \, d\varphi =$$

$$= -\cos\varphi \Big|_0^\pi + \frac{1}{3} \cos^3\varphi \Big|_0^\pi = -(-1-1) + \frac{1}{3}(-1-1) = \frac{5}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \, d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \, d\theta = \pi$$

$$\Rightarrow M = Q \left[4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} \pi + 9 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} \pi + 16 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\pi \right]$$

$$\frac{Q\pi}{15} [20 + 45 + 32] = \frac{Q\pi 97}{15}$$

Esercizio 3

$$f(x,y) = [(x-1)^2 + y^2 - 4] e^{x-1-y}$$

$$D = \mathbb{R}^2 \quad f \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2(x-1) + (x-1)^2 + y^2 - 4) e^{x-1-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y - ((x-1)^2 + y^2 - 4)) e^{x-1-y}$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1) + (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0 \\ 2y - ((x-1)^2 + y^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

Sommando le eq. ottengo

$$\begin{cases} x-1+y=0 \\ 2y - (y^2+y^2-4)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=-y & x=1-y \\ y^2-y-2=0 \end{cases}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

$$P_1(2, -1) \quad P_2(-1, 2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2 + 4(x-1) + (x-1)^2 + y^2 - 4) e^{x-1-y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2 - 4y + (x-1)^2 + y^2 - 4) e^{x-1-y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (2y - 2(x-1) - (x-1)^2 - y^2 + 4) e^{x-1-y}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$H_f(2, -1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, -1) > 0$$

$$\det H_f(2, -1) = 12 > 0$$

$\Rightarrow P_1(2, -1)$ è un pto di minimo locale

$$H_f(-1, 2) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \det H_f(-1, 2) = -12 < 0$$

$\Rightarrow P_2(-1, 2)$ è un pto di sella

Vincolo $(x-1)^2 + y^2 = 9$

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$g(\theta) = f(1 + 3 \cos \theta, 3 \sin \theta) = 5 e^{3(\cos \theta - \sin \theta)}$$

$$g'(\theta) = 15 e^{3(\cos \theta - \sin \theta)} (-\sin \theta - \cos \theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = -\cos \theta \Leftrightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

$$g\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 5 e^{-3\sqrt{2}}$$

$$g\left(\frac{7}{4}\pi\right) = 5 e^{3\sqrt{2}}$$

$C = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 = 9\}$ è un insieme

chiuso e limitato $\Rightarrow$ posso usare il

teorema di Weierstrass

$\theta = \frac{3}{4}\pi$ punto di minimo $\left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$\theta = \frac{7}{4}\pi$ punto di massimo $\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

ESERCIZIO 4

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$$

$$F_1(x,y) = y \lg(1+x^2) + \frac{2x^2y}{1+x^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$F_2(x,y) = x \lg(1+x^2) + \lg(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + y$$

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ insieme aperto, i.e. unito, connesso
non semplicemente connesso

$$\nabla \wedge \vec{F} = \hat{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{infatti}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \lg(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \lg(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow \vec{F}$ è irrotazionale $\Rightarrow \vec{F}$ è localmente conservativo

$$\vec{F} = \nabla U \quad \text{è equivalente a} \quad \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$\forall \gamma \subset D$ chiuso, regolare e tratto, semplice

Se $\gamma \subset D' \subset D$, γ è chiusa, regolare a tratti,
 semplice e D' è semplicemente connesso
 dato che $\vec{F}$ è conservativo su $D' \Rightarrow$

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Se $\gamma \subset D' \subset D$, γ chiusa, regolare a tratti,
 semplice e D' non è semplicemente connesso

$(0,0) \in D'$, dato $\vec{F}$ è irrotazionale posso usare
 le proprietà dei cammini equivalenti

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$\Rightarrow$ Per dimostrare che il campo è conservativo devo
 dimostrare che

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F}(\cos \theta, \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) d\theta = 0$$

$$\vec{F}(\cos\theta, \sin\theta) = (F_1(\cos\theta, \sin\theta), F_2(\cos\theta, \sin\theta))$$

$$F_1(\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta \lg(1 + \cos^2\theta) + \frac{2\cos^2\theta \sin\theta}{1 + \cos^2\theta} + 2\cos\theta \sin\theta$$

$$F_2(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \lg(1 + \cos^2\theta) + 2\sin^2\theta + \sin\theta$$

$$\vec{F}(\cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) =$$

$$= -\sin^2\theta \lg(1 + \cos^2\theta) - 2 \frac{\cos^2\theta \sin^2\theta}{1 + \cos^2\theta} - 2\cancel{\cos\theta \sin^2\theta}$$

$$+ \cos^2\theta \lg(1 + \cos^2\theta) + 2\cancel{\sin^2\theta \cos\theta} + \sin\theta \cos\theta$$

$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \lg(1 + \cos^2\theta) - 2 \frac{\cos^2\theta \sin^2\theta}{1 + \cos^2\theta} + \sin\theta \cos\theta$$

Dato che

$$\frac{d}{d\theta} (\cos\theta \sin\theta \lg(1 + \cos^2\theta)) =$$

$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \lg(1 + \cos^2\theta) - 2 \frac{\cos^2\theta \sin^2\theta}{1 + \cos^2\theta}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) d\theta = \\
& = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d}{d\theta} (\sin\theta \cos\theta \lg(1+\cos^2\theta)) + \sin\theta \cos\theta \right) d\theta = \\
& = \sin\theta \cos\theta \lg(1+\cos^2\theta) + \frac{1}{2} \sin^2\theta \Big|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ il campo è conservativo su D .

CALCOLO IL POTENZIALE, uso $\vec{F} = \nabla U$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \end{cases} \quad \text{uso la seconda equazione}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x \lg(1+x^2) + \lg(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + y$$

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int \left(x \lg(1+x^2) + \lg(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + y \right) dy \\
&= xy \lg(1+x^2) + y \lg(x^2+y^2) + \frac{1}{2} y^2 + C(x)
\end{aligned}$$

Usa la prima eq.

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= y \lg(1+x^2) + \frac{2x^2 y}{1+x^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2} + c'(x) = \\ &= y \lg(1+x^2) + \frac{2x^2 y}{1+x^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow c'(x) = 0 \quad c(x) = C$$

$$\Rightarrow U(x, y) = xy \lg(1+x^2) + y \lg(x^2+y^2) + \frac{1}{2}y^2 + C$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \nabla U \quad \forall (x, y) \in D$$

Lavoro da $(1, 3)$ a $(3, 2)$ è dato da

$$\begin{aligned}U(3, 2) - U(1, 3) &= 6 \lg 10 + 2 \lg 13 + 2 - \\ &\quad - \left(3 \lg 2 + 3 \lg 10 + \frac{9}{2} \right)\end{aligned}$$

ESERCIZIO 5

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{\rho^2} (yz, (x-1)z, (x-1)y)$$

$$\rho = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\nabla \rho = \frac{1}{\rho} ((x-1), y, z)$$

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$\hat{i} \left(\cancel{\frac{x-1}{\rho^2}} - \frac{2}{\rho^4} (x-1)y^2 - \left(\cancel{\frac{x-1}{\rho^2}} - \frac{2}{\rho^4} (x-1)z^2 \right) \right)$$

$$- \hat{j} \left(\cancel{\frac{y}{\rho^2}} - \frac{2}{\rho^4} (x-1)^2 y - \left(\cancel{\frac{y}{\rho^2}} - \frac{2}{\rho^4} yz^2 \right) \right)$$

$$+ \hat{k} \left(\cancel{\frac{z}{\rho^2}} - \frac{2}{\rho^4} (x-1)^2 z - \left(\cancel{\frac{z}{\rho^2}} - \frac{2}{\rho^4} y^2 z \right) \right)$$

$$= -\frac{2}{\rho^4} \left[(x-1)(y^2 - z^2) \hat{i} + y(z^2 - (x-1)^2) \hat{j} + z((x-1)^2 - y^2) \hat{k} \right]$$

SEMISFERA

$$S = \{(x, y, z) : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad z \geq 0\}$$

$$\partial S = \{(x, y, z) : (x-1)^2 + y^2 = 4 \quad z = 0\}$$

$$S \quad \begin{cases} x = 2 \sin \varphi \cos \vartheta + 1 & \varphi \in [0, \pi/2] \\ y = 2 \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = 2 \cos \varphi & \vartheta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\vec{r}_\varphi = (2 \cos \varphi \cos \vartheta, 2 \cos \varphi \sin \vartheta, -2 \sin \varphi)$$

$$\vec{r}_\vartheta = (-2 \sin \varphi \sin \vartheta, 2 \sin \varphi \cos \vartheta, 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\vartheta &= (4 \sin \varphi \cos \vartheta, 4 \sin \varphi \sin \vartheta, 4 \cos \varphi \sin \varphi) \\ &= 4 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$\hat{m}_e = \frac{\vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\vartheta}{|\vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\vartheta|} = (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi)$$

$$\Rightarrow \hat{m}_e = \frac{1}{2} (x-1, y, z)$$

Flusso di $\nabla \wedge \vec{F}$ è dato da

$$\iint_S \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m}_e \, ds$$

$$\hat{m}_e = \frac{1}{2} (x-1, y, z)$$

$$\nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m}_e =$$

$$= \frac{2}{\rho^4} \left((x-1)(z^2 - y^2), y((x-1)^2 - z^2), z(y^2 - (x-1)^2) \right) \cdot \hat{m}_e$$

$$= \frac{1}{\rho^4} \left((x-1)^2(z^2 - y^2) + y^2((x-1)^2 - z^2) + z^2(y^2 - (x-1)^2) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \iint_S \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m}_e \, dS = 0$$

TEOREMA di STOKES

$$\iint_S \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m}_e \, dS = \oint_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\partial^+ S \quad \begin{cases} x = 1 + 2 \cos \vartheta \\ y = 2 \sin \vartheta \\ z = 0 \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (0, 0, 4 \sin \vartheta \cos \vartheta) \cdot (-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0) d\vartheta = 0$$

$\Rightarrow$ il teorema di Stokes è verificato

ESERCIZIO 6

$$\vec{F}(x, y, z) = (0, x^2, z^2) \quad D = \mathbb{R}^3 \quad \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$$

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

$$\partial E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$

$$\partial E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$$

$$\partial E_1 \rightarrow \vec{r}(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$$

$$\varphi \in [0, \pi/2] \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{r}_\varphi = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi)$$

$$\vec{r}_\theta = (-\sin \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \theta, 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\theta &= (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \varphi) \\ &= \sin \varphi \vec{r}(\varphi, \theta) \end{aligned}$$

$$\vec{r} \in C^1([0, \pi/2] \times [0, 2\pi])$$

$$\vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\theta = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$$

∂E_1 ha un solo punto di non regolarità in $\varphi = 0$

$$\partial E_2 \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \in [0, 1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix} \quad \partial E = \partial E_1 \cup \partial E_2$$

$$\vec{r}_\rho = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$$

$$\vec{r}_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

$$\vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta = (0, 0, r) \neq 0$$

$$\vec{r}(\rho, \theta) \in C^1([0, 1] \times [0, \pi])$$

$$|\vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta| = r \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{r}(\rho, \theta)$ ε̄ μια περιφ. κερσση.

$\Rightarrow \partial E = \partial E_1 \cup \partial E_2$ ε̄ μια περιφ. κερσση
α περσ. εση

Dato la regolarità di $\vec{F}$, $E \in \mathcal{O}E$ e

teorema della divergenza è $\hat{n}_e = \frac{\vec{r}_e \wedge \vec{r}_\theta}{|\vec{r}_e \wedge \vec{r}_\theta|}$

$$\iiint_E \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz = \iint_{\mathcal{O}E} \vec{F} \cdot \hat{n}_e ds$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 + 0 + 2z$$

E può essere descritto in coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{aligned} \varphi &\in [0, \pi/2] \\ \theta &\in [0, 2\pi] \\ \rho &\in [0, 1] \end{aligned}$$

$$\iiint_E \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz = \iiint_E 2z dx dy dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2\rho \cos \varphi \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\theta d\rho$$

$$= 4\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 4\pi \cdot \frac{1}{4} \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{\partial E} \vec{F} \cdot \hat{m} \, ds = \iint_{\partial E_1} \vec{F} \cdot \hat{m} \, ds + \iint_{\partial E_2} \vec{F} \cdot \hat{m} \, ds$$

$$\iint_{\partial E_1} \vec{F} \cdot \hat{m} \, ds =$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (0, \sin^2 \varphi \cos^2 \theta, \cos^2 \varphi) \cdot (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \varphi) \, \rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \varphi \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \theta + \cos^3 \varphi \sin \varphi) \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 2\pi \frac{1}{4} (-\cos^4 \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{\partial E_2} \vec{F} \cdot \hat{m} \, ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (0, \rho^2 \cos^2 \theta, 0) \cdot (0, 0, \rho) \, d\varphi \, d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{\partial E} \vec{F} \cdot \hat{m} \, ds = \frac{\pi}{2}$$