

ANALISI MATEMATICA 2 (9CFU)

1 Parte 14.6.2024

n.matricola

Cognome

Nome

Esercizio 1 Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{(2 + \sin x)^{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a Dimostrare che essa converge puntualmente in $\mathbb{R}$.

b Dimostrare che la somma della serie $S(x)$ è continua nell'intervallo $[0, \pi]$.

c Dimostrare che la serie è derivabile termine a termine nell'intervallo $[0, \pi]$.

d Determinare una stima dall'alto di $|S(x)|$.

Esercizio 2 Data la curva γ definita per $t \in [0, 1]$ dalle equazioni parametriche $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$

a stabilire se la curva è: continua, chiusa, semplice;

b calcolare il vettore derivato e il suo modulo;

c stabilire se la curva è regolare precisando in caso contrario i punti non regolari;

d calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \sqrt{z} \, ds.$$

Esercizio 3 Data la funzione periodica di periodo $T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi) \\ -1 & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

a Disegnare il grafico in $[-2\pi, 2\pi]$, calcolare i coefficienti di Fourier di f , $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, e scrivere la serie di Fourier associata;

b Dare la definizione di convergenza in media quadratica, dire a cosa converge la serie in media quadratica e spiegare perché;

c Studiare la convergenza puntuale della serie di Fourier e calcolarne la somma;

d Dimostrare che vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Esercizio 4 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x-1)^n}{\sqrt{n^3 - \log n}} \quad x \in \mathbb{R}$$

a studiarne la convergenza puntuale, assoluta e totale;

b determinare l'insieme di continuità della somma e di derivabilità termine a termine;

c dire se la somma della serie è sviluppabile in serie di Taylor nel punto $x = 1$ e, in caso positivo, calcolarne lo sviluppo.

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2 + 3y^2} [\log(2x - y + 2) - 1]$$

a Determinarne il dominio di definizione e dire che tipo di insieme è (aperto, chiuso, limitato, connesso).

b Studiarne il segno e dire se può essere prolungata con continuità in $(1, 0)$.

Esercizio 6 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^y xy^2 + x^3 \cos y}{\sqrt{x^4 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a stabilire se è continua in $(0, 0)$; stabilire se è derivabile in $(0, 0)$ ed, in caso affermativo, calcolare $\nabla f(0, 0)$;

d stabilire se è differenziabile in $(0, 0)$;

ESAME 28.6.2024 PARTE 1 SCHEMA SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{(2+\sin x)^{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{\sin(2nx)}{(2+\sin x)^{n^2}}$$

$$\text{CN } f_n\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{inoltre}$$

$$\text{se } x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \sin x > -1 \Rightarrow 2 + \sin x > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{(2+\sin x)^{n^2}} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

CONVERGENZA PUNTUALE

$$\text{Dato che } f_n\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

La serie è identicamente nulla per $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$$\text{se } x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \sin x > -1 \Rightarrow 2 + \sin x > 1$$

applico il criterio della radice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|\sin(2nx)|}}{(2+\sin x)^n} = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ La serie converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{(2+\sin x)^{n^2}} = S(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

CONTINUITÀ di $S(x)$ in $[0, \pi]$

Studio la convergenza totale in $[0, \pi]$

$$\sin x \geq 0 \quad \forall x \in [0, \pi] \Rightarrow$$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(2nx)}{(2 + \sin x)^{n^2}} \right| \leq \frac{1}{2^{n^2}} \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente in $[0, \pi]$

Dato che

$$f_n(x) \in C^0([0, \pi])$$

$\sum_n f_n(x)$ converge totalmente in $[0, \pi]$

posso applicare il teorema sulla continuità

della somma delle serie $\Rightarrow S(x) \in C^0([0, \pi])$.

DERIVABILITÀ TERMINE A TERMINE in $[0, \pi]$

$$f'_n(x) = \frac{2n \cos(2nx) (2 + \sin x)^{n^2} - n^2 (2 + \sin x)^{n^2-1} \sin(2nx)}{(2 + \sin x)^{2n^2}}$$

Dato che $\sin x \geq 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$

$$|f'_n(x)| \leq \frac{2n}{2^{n^2}} + \frac{n^2}{2^{n^2+1}} \leq \frac{3}{2^n} \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \frac{1}{1 - 1/2} = 6$$

$$\Rightarrow f_n(x) \in C^1[0, \pi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge in } [0, \pi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) \text{ converge totalmente in } x \in [0, \pi]$$

$\Rightarrow$ Posso applicare il teorema sulla derivabilità

termine a termine in $[0, \pi] \Rightarrow$ la serie

è derivabile termine a termine in $[0, \pi]$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in [0, \pi]$$

STIMA dell'ALTO dello serie

$$f_m(x) \begin{cases} = 0 & x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \leq \frac{1}{|2+\sec x|^{n^2}} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} |f_m(x)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{|2+\sec x|^{n^2}} \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{|2+\sec x|^m} = \frac{1}{1 - \frac{1}{|2+\sec x|}} =$$

$$= \frac{|2+\sec x|}{|2+\sec x| - 1} \quad x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$$|S(x)| \begin{cases} = 0 & x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \\ \leq \frac{|2+\sec x|}{|2+\sec x| - 1} & x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t^2) \quad t \in [0, 1]$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$x, y, z \in C^0([0, 1]) \Rightarrow \vec{r}(t) \in C^0([0, 1])$$

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t)$$

$$z'(t) = 2t \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1] \Rightarrow z \text{ è crescente}$$

$$\Rightarrow \vec{r} \text{ è semplice in } [0, 1].$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{1 + 4t^2} \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

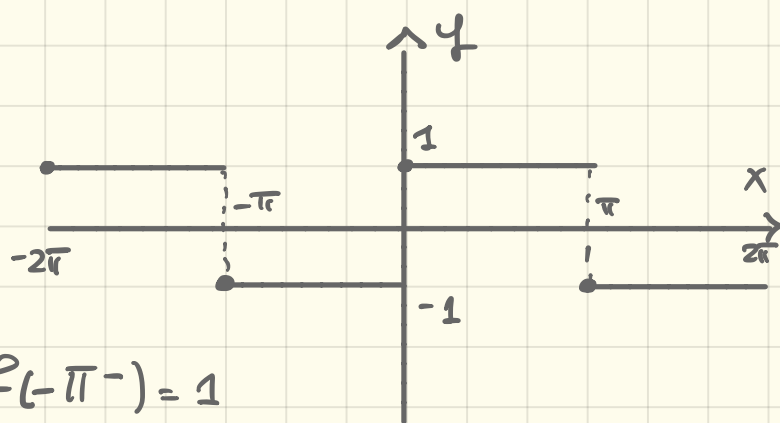
$$\vec{r} \in C^1[0, 1], |\vec{r}'(t)| \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1] \Rightarrow$$

la curva è regolare.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sqrt{z} \, ds &= \int_0^1 |t| \sqrt{1 + 4t^2} \, dt = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 8t \sqrt{1 + 4t^2} \, dt = \frac{1}{8} (1 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1) = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi) \\ -1 & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$



$$T = 2\pi$$

$$\begin{aligned} f(-\pi^+) &= -1 & f(-\pi^-) &= 1 \\ f(\pi^-) &= 1 & f(\pi^+) &= -1 \end{aligned}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = 0 \quad k=0, 1, \dots$$

in quanto integrale di una funzione
dispari su un intervallo pari

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{k} \cos(kx) \right)_0^{\pi} = -\frac{2}{k\pi} ((-1)^k - 1)$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0 & k = 2n \text{ pari} \\ \frac{4}{k\pi} & k = 2n+1 \text{ dispari} \end{cases}$$

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin[(2n+1)x]$$

Dato una successione $f_n(x) : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
ed una $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (integrabile.)

Si dice che $f_n \rightarrow f$ in media

quadratica se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx = 0$$

Dato che $f(x)$ (dell'esercizio) è una funzione
integrabile su $[-\pi, \pi]$ posso applicare le teoremi
sulle convergenze in media quadratica

della serie di Fourier associata ad f :

$$S_n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin[(2k+1)x]$$

e dire che $S_n f \rightarrow f$ in media quadratica

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (S_n f(x) - f(x))^2 dx = 0$$

CONVERGENZA PUNTUALE

f è monotona e tratti in $[-\pi, \pi] \Rightarrow$ la serie converge puntualmente $\forall x \in [-\pi, \pi]$ ed inoltre

$$S(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \forall x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} & x = -\pi, \pi \end{cases}$$

usando la continuità della funzione

$$\Rightarrow S(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, 0) \cup (\pi, 0) \\ 0 & x = 0, \pi, -\pi \end{cases}$$

VALUTAZIONE di PARSEVAL

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 2\pi = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^2}{\pi^2 (2k+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Esercizio 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} (x-1)^n}{\sqrt{n^3 - \lg n}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Serie di potenze $x_0 = 1$ $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 - \lg n}} \sim \frac{1}{n}$

Raggio della serie

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)^3 - \lg(n+1)}} \cdot \frac{\sqrt{n^3 - \lg n}}{\sqrt{n}} \right| \sim \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

$\Rightarrow R = 1 \Rightarrow$ la serie converge assolutamente

$$\forall x : |x-1| < 1 \Rightarrow x \in (0, 2)$$

$$x = 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} (-1)^n}{\sqrt{n^3 - \lg n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$\frac{1}{n} \downarrow 0 \Rightarrow$ la serie converge per il criterio di Leibnitz.

$$x = 2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 - \lg n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

La serie converge puntualmente $\forall x \in [0, 2)$

Per le proprietà delle serie di potenze

- la serie converge assolutamente in $[r, 2-r]$ $\forall r \in (0, 1)$
- la somma delle serie è continua in $(0, 2)$
- la proprietà di derivabilità termine a termine è verificata $\forall x \in (0, 2)$

Sia $S(x)$ la somma delle serie, sempre

per le proprietà delle serie di potenze, $S(x)$ è

sviluppiabile in serie di Taylor in $x=1$ e

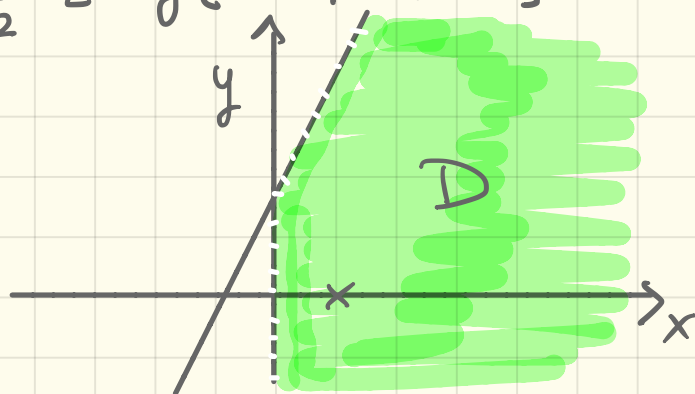
lo sviluppo coincide con la serie stessa.

ESERCIZIO 5

$$f(x,y) = \frac{y^2 \lg x}{(x-1)^2 + 3y^2} [\lg(2x-y+2) - 1]$$

Domio

$$\begin{cases} (x,y) \neq (1,0) \\ x > 0 \\ 2x - y + 2 > 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad y < 2x + 2$$



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (1,0), x > 0, y < 2x+2\}$$

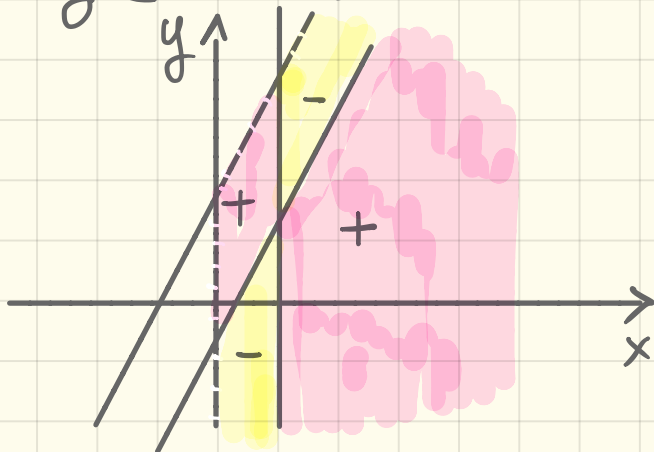
insieme aperto, connesso, illimitato

Segno di f

$$f(x,y) \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{y^2 \lg x}{(x-1)^2 + y^2} [\lg(2x-y+2) - 1] \geq 0$$

$$\lg x \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \geq 1$$

$$\lg(2x-y+2) \geq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2x+2-y \geq e \quad (\Leftrightarrow) \quad y \leq 2x+2-e$$



$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = 0$ verificata

$$|f(x,y) - 0| \leq \frac{y^2}{(x-1)^2 + y^2} |\lg x| |\lg(2x - y + 1) - 1| \leq$$

$$\leq |\lg x| |\lg(2x - y + 1) - 1| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (1,0)} 0$$

↓
uso che $\frac{y^2}{(x-1)^2 + y^2} \leq 1$

$\Rightarrow f(x,y)$ può essere prolungata con continuità
in $(1,0)$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \setminus \{(1,0)\} \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

ESERCIZIO 6

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^4 x y^2 + x^3 \cos y}{\sqrt{x^4 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

CONTINUITÀ in $(0,0)$

La funzione è continua in $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0 \quad (*)$$

Dimostriamo (*)

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 0| &= \left| \frac{e^4 x y^2 + x^3 \cos y}{\sqrt{x^4 + y^2}} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{e^4 x y^2}{\sqrt{x^4 + y^2}} \right| + \left| \frac{x^3 \cos y}{\sqrt{x^4 + y^2}} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{e^4 x y^2}{\sqrt{y^2}} \right| + \left| \frac{x^3 \cos y}{\sqrt{x^4}} \right| \leq \\ &\leq e^4 |x| |y| + |x| |\cos y| \rightarrow 0 \quad \Rightarrow f \text{ continua in } (0,0) \\ &\quad (x,y) \rightarrow (0,0) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx} f(x,0) \Big|_{x=0} = \frac{d}{dx} \frac{x^3}{x^2} \Big|_{x=0} = \frac{d}{dx} x \Big|_{x=0} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy} f(0,y) \Big|_{y=0} = \frac{d}{dy} 0 = 0$$

$$\nabla f(0,0) = (1,0)$$

DIFFERENZIABILITÀ in $(0,0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

devo quindi studiare il limite

$$\Rightarrow \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{e^k h k^2 + h^3 \cos k}{\sqrt{h^4+k^2}} - h \right) \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \stackrel{?}{=} 0$$

lungo $k=h$ ottengo

$$\left(\frac{e^h h^3 + h^3 \cosh}{\sqrt{h^4+h^2}} - h \right) \frac{1}{|h|\sqrt{2}} = \frac{h^3(e^h + \cosh) - h|h|\sqrt{1+h^2}}{\sqrt{2}|h|\sqrt{h^4+h^2}}$$

$$\sim \frac{h^3(e^h + \cosh) - h|h|}{\sqrt{2} h^2} = \frac{h(e^h + \cosh)}{\sqrt{2}} - \operatorname{sgn} h = -\operatorname{sgn} h$$

$\Rightarrow$ il limite non esiste $\Rightarrow$ funzione non è differenziabile in $(0,0)$.