

ANALISI MATEMATICA 2 (9CFU)

1 Parte 10.7.2023

n.matricola

Cognome

Nome

Esercizio 1 Data la curva γ definita da $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3 + 1)$, $t \in [0, 2]$

a stabilire se la curva è: continua, chiusa, semplice;

b calcolare il vettore derivato e il suo modulo;

c stabilire se la curva è regolare precisando in caso contrario i punti non regolari;

d calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{2x - y}{\sqrt{4 + 9x}} ds.$$

Esercizio 2 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log[n^2(x-1)] \sin(3nx)}{\sqrt{n^3 + 7(x-1)^2}}$$

a Determinare gli intervalli di convergenza puntuale ed assoluta.

b Determinare gli intervalli di convergenza totale.

c Stabilire in quali intervalli la somma della serie $S(x)$ è continua.

Esercizio 3 Data la funzione periodica di periodo $T = 2\pi$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \pi x & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ \pi x & \text{se } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

a Dopo aver disegnato il grafico di f nell'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$, calcolare i coefficienti di Fourier di f , $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, e scrivere la serie di Fourier associata;

b studiare la convergenza in media quadratica della serie di Fourier e calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$; **c** studiare la convergenza puntuale della serie di Fourier e calcolarne la somma;

d scrivere la serie che si ottiene derivando termine a termine la serie di Fourier studiare la derivabilità termine a termine.

Esercizio 4 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) \frac{x^{2+n}}{x+4}$$

a studiare la convergenza puntuale, assoluta;

b studiare la convergenza totale e la continuità della somma.

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + (y-1)^2}{(y-1)^2 + \frac{1}{2}|x|} \frac{\sqrt{y+x+3} - 2}{\log[9 - x^2 - (y-1)^2]}$$

a Determinare il dominio di definizione e dire che tipo di insieme è (aperto, chiuso, limitato, connesso).

b Calcolare il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \rightarrow (0, 1)$.

Esercizio 6 Data la funzione

$$f(x, y) = (x-1)y e^{\sqrt{|x+y-1|}}$$

a stabilire in quale sottoinsieme del piano è continua;

b stabilire in quale sottoinsieme del piano è derivabile;

c stabilire se è differenziabile in $(1, 0)$ ed in $(0, 1)$.

ESAME 10.7.2023 PARTE 1 SCHEMA SOLUZIONE

Esercizio 1

$$\vec{r}(t) = (t^2, t^3 + 1) \quad t \in [0, 2]$$

$\vec{r} \in C^1([0, 2])$ perché le sue componenti sono continue e derivabili:

$$\vec{r}(0) = (0, 1) \neq \vec{r}(2) = (4, 9) \Rightarrow \text{la curva è aperta}$$

$$\vec{r}'(t) = (2t, 3t^2) \quad \chi(t) = 3t^2 \geq 0$$

$\Rightarrow \chi(t)$ è monotona crescente

$\Rightarrow$ la curva è semplice.

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = |t| \sqrt{4 + 9t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$t = 0$ è un pto di non regolarità

$$\vec{r}(t) \in C^1([0, 2]) \quad \vec{r}'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (0, 2]$$

$\Rightarrow$ la curva è regolare in $(0, 2]$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{2x - y}{\sqrt{4 + 9x}} ds &= \int_0^2 \frac{2t^2 - (t^3 + 1)}{\sqrt{4 + 9t^2}} |t| \sqrt{4 + 9t^2} dt = \\ &= \int_0^2 (2t^3 - t^4 - t) dt = \left. \frac{2}{4} t^4 - \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{2} t^2 \right|_0^2 = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg[n^2(x-1)] \operatorname{sen}(3nx)}{\sqrt{n^3 + 7(x-1)^2}}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$$

$$CN \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg[n^2(x-1)] \operatorname{sen}(3nx)}{n^{3/2}} = 0 \quad \forall x \in D$$

CONVERGENZA ASSOLUTA

$$|f_n(x)| = \frac{|2 \lg n + \lg(x-1)| |\operatorname{sen}(3nx)|}{\sqrt{n^3 + 7(x-1)^2}} \leq$$

$$\leq \frac{2 \lg n + |\lg(x-1)|}{n^{3/2}}$$

Dato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{n^{3/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}} \quad \text{converge} \quad \frac{5}{4} > 1$$

$$|\lg(x-1)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{converge}$$

$\Rightarrow$ La serie converge assolutamente e puntualmente
 $\forall x \in D$.

CONVERGENZA TOTALE

$$f_m(x) = \frac{2 \lg m + \lg(x-1)}{\sqrt{m^3 + 7(x-1)^2}} \sin(3mx)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lg(x-1) = -\infty \quad \Rightarrow \quad |f_m(x)| \text{ è illimitato in } D, \text{ la serie non converge totalmente in } D.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg(x-1) = +\infty$$

Definisco

$$D_{a,b} = [1+a, b] \quad b > 1+a \quad a > 0$$

$$|f_m(x)| \leq \frac{2 \lg m + |\lg a| + |\lg b|}{m^{3/2}} \sim \frac{2 \lg m}{m^{3/2}}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \lg m}{m^{3/2}} \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente in $D_{a,b}$

$\forall a > 0 \quad b > 1+a$. Dimostrare $\forall a > 0, b > 1+a$

$$f_m(x) \in C^0(D_{a,b})$$

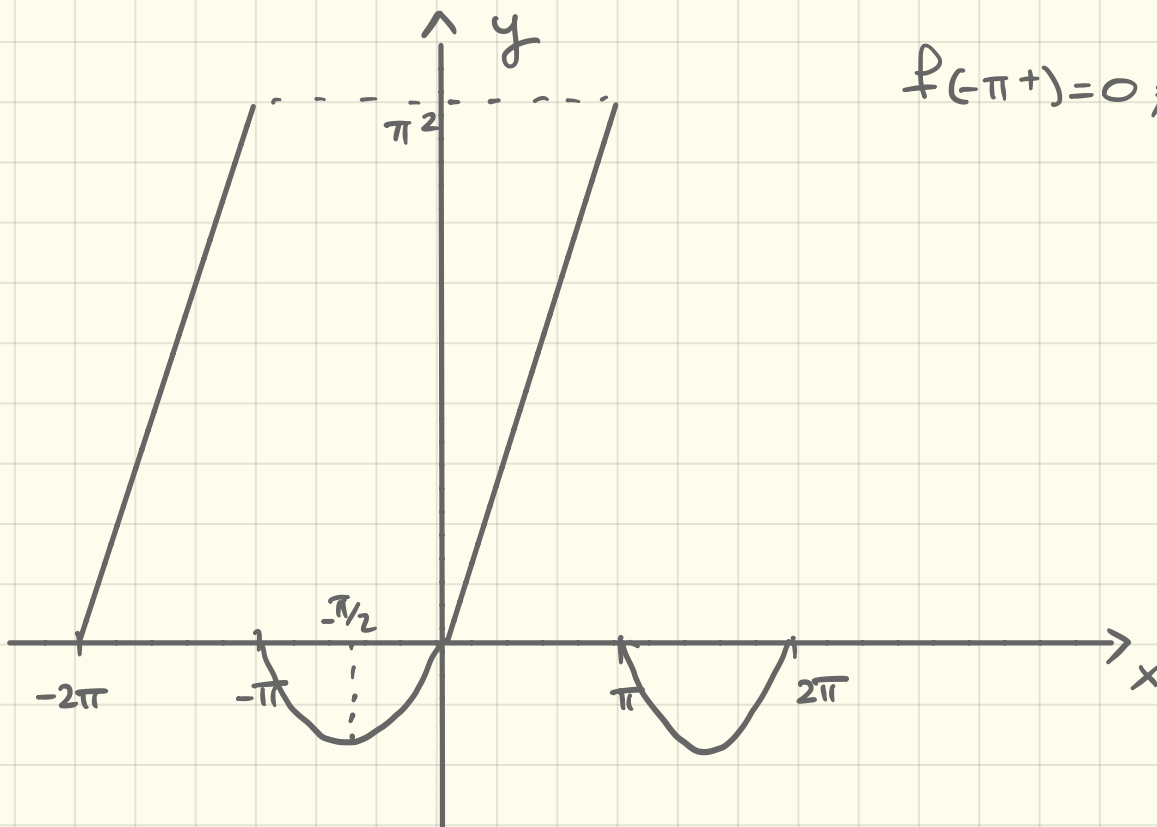
$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \text{ converge totalmente in } D_{a,b} \Rightarrow$$

la somma delle serie $S(x) \in C^0(D_{a,b})$.

La continuità delle somme può essere
estesa a D , ovvero $S(x) \in C^0(D)$, infatti
 $\forall x_0 \in D \quad \exists a > 0 \quad b > 1+a : x_0 \in D_{a,b}$
 $\Rightarrow S(x)$ è continua in x_0 .

Esercizio 3

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \pi x & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ \pi x & \text{se } x \in (0, \pi) \end{cases} \quad T = 2\pi$$



$$f(-\pi+) = 0 \neq f(\pi-) = \pi^2$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (x^2 + \pi x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x^2 dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi x dx = 0$$

$$= \left. \frac{1}{\pi} \frac{1}{3} x^3 \right|_{-\pi}^0 = \frac{1}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 x^2 \cos(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\pi x \cos(kx)}^{\text{fonction d'impair}} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left. \frac{x^2}{k} \sin(kx) \right|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{2x}{k} \sin(kx) dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left. \frac{2x \cos(kx)}{k^2} \right|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{2 \cos(kx)}{k^2} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{2\pi (-1)^k}{k^2} = \frac{2(-1)^k}{k^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 x^2 \sin(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \pi x \sin(kx) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 x^2 \sin(kx) dx + 2 \int_0^{\pi} \pi x \sin(kx) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2}{k} \cos(kx) \Big|_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \frac{2x}{k} \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} \pi x \sin(kx) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{k} (-1)^k + \frac{2x \sin kx}{k^2} \right]_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{2 \sin kx}{k^2} dx +$$

$$- \frac{\pi x \cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\pi \cos kx}{k} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{k} (-1)^k + \frac{2 \cos kx}{k^2} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{\pi^2}{k} ((-1)^k - 1) \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[2 \frac{1 - (-1)^k}{k^2} + \frac{\pi^2}{k} \right] = \frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi k^2} + \frac{\pi}{k}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^k}{k^2} \cos(kx) + \left(\frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi k^2} + \frac{\pi}{k} \right) \sin(kx) \right]$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + \pi & x \in (-\pi, 0) \\ \pi & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

$$f(x) \in C^1([-\pi, 0) \cup (0, \pi)) \quad \begin{aligned} f(-\pi^+) &= 0 & f(\pi^-) &= \pi^2 \\ f(0^+) &= f(0^-) &= 0 \\ f'(0^+) &= \pi &= f'(0^-) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ è regolare a tratti su $[-\pi, \pi) \Rightarrow$ la

serie converge puntualmente ad $S(x)$ dove

$$S(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \forall x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} & x = -\pi, \pi \end{cases}$$

dato $f \in C^0(-\pi, \pi)$

$$S(x) = \begin{cases} x^2 + \pi x & x \in (-\pi, 0) \\ \pi x & x \in [0, \pi) \\ \frac{\pi^2}{2} & x = -\pi, \pi \end{cases}$$

$f(x)$ è integrabile e limitata in $[-\pi, \pi)$

$\Rightarrow$ la serie di Fourier converge in media quadratica ad $f(x)$, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n f(x))^2 dx = 0$$

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

Usando l'uguaglianza di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} = \frac{13}{30} \pi^4$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (x^2 + \pi x)^2 dx + \int_0^{\pi} \pi^2 x^2 dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (x^4 + \pi^2 x^2 + 2\pi x^3) dx + \frac{\pi^2}{3} x^3 \Big|_0^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} \pi^2 x^3 + \frac{2\pi}{4} x^4 \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\pi^5}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{5} \pi^5 + \frac{2}{3} \pi^5 - \frac{\pi^5}{2} \right] = \pi^4 \frac{11}{30}$$

$$\frac{a_0^2}{2} = \frac{\pi^4}{3}$$

Dérivant terme à terme on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k a_k \sin(kx) + k b_k \cos(kx))$$

$k b_k \sim \pi \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ la série ne converge.

Oss. $f(-\pi^+) \neq f(\pi^-) \Rightarrow$ la série ne est dérivable terme à terme.

ESERCIZIO 4

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(m+2) \frac{x^{2+m}}{x+4} \quad \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -4\}$$

CONVERGENZA PUNTUALE ed ASSOLUTA

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(m+2) \frac{x^{2+m}}{x+4} = \frac{x^2}{x+4} \sum_{m=1}^{\infty} m(m+2) x^m$$

$\sum_{m=1}^{\infty} m(m+2) x^m$ è una serie di potenze

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{(m+1)(m+3)}{m(m+2)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow R = 1$$

$$x=1 \quad \sum_{m=1}^{\infty} m(m+2) \quad m(m+2) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie non converge

$$x=-1 \quad \sum_{m=1}^{\infty} m(m+2) (-1)^m \quad m(m+2) (-1)^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \nexists$$

$\Rightarrow$ la serie non converge

La serie di potenze converge assolutamente

e puntualmente $\forall x \in (-1, 1) \Rightarrow$ la serie di

potenze converge assolutamente e puntualmente $\forall x \in (-1, 1)$

CONVERGENZA TOTALE

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) \frac{x^{2+n}}{x+4}$$

$$I_{\delta} = [-\delta, \delta] \quad \delta \in (0, 1)$$

$$|f_n(x)| \leq n(n+2) \frac{\delta^{2+n}}{4-\delta}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) \frac{\delta^{2+n}}{4-\delta} = \frac{\delta^2}{4-\delta} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) \delta^n$$

$$\frac{(n+1)(n+3) \delta^{n+1}}{n(n+2) \delta^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta < 1 \Rightarrow \text{la serie converge}$$

La serie converge totalmente in $I_{\delta} \quad \forall \delta \in (0, 1)$

$$f_n(x) \in C^0(I_{\delta})$$

$$\Rightarrow S(x) \in C^0(I_{\delta})$$

$\sum_n f_n(x)$ converge totalmente

$S(x)$ = somma della serie

quindi $S(x) \in C^0(-1, 1)$ infatti visto quanto

dimostrato sopra $\forall x_0 \in (-1, 1) \exists \delta \in (0, 1) : x_0 \in I_{\delta}$

$\Rightarrow S(x)$ è continua in x_0 .

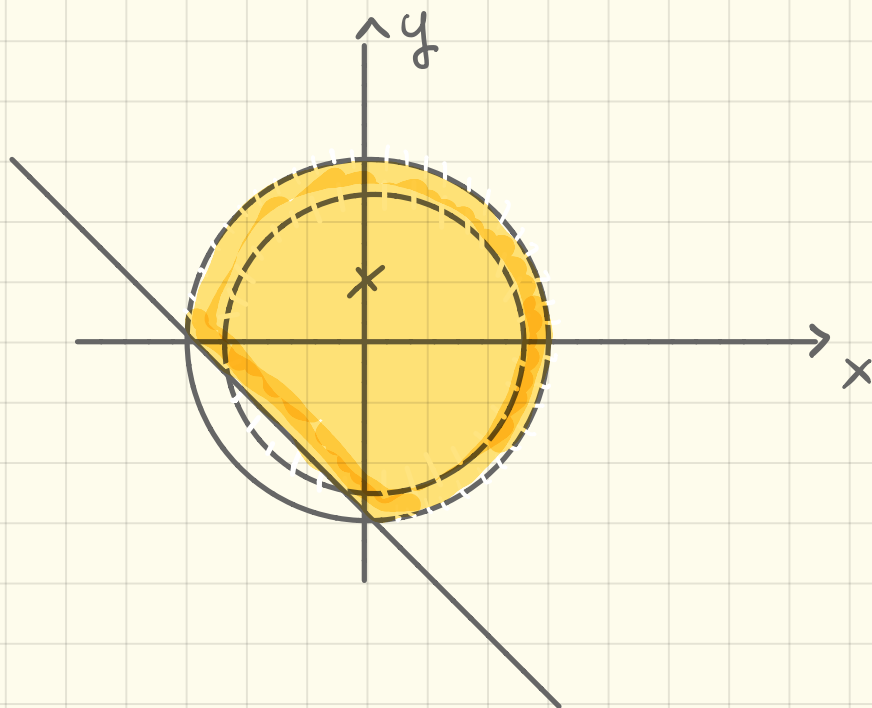
ESERCIZIO 5

$$f(x, y) = \frac{x^2 + (y-1)^2}{(y-1)^2 + \frac{1}{2}|x|} \cdot \frac{\sqrt{y+x+3} - 2}{\lg[9 - x^2 - (y-1)^2]}$$

$$\begin{cases} (y-1)^2 + \frac{1}{2}|x| \neq 0 \\ y+x+3 \geq 0 \\ 9 - x^2 - (y-1)^2 > 0 \\ 9 - x^2 - (y-1)^2 \neq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x, y) \neq (0, 1) \\ y \geq -x-3 \\ x^2 + (y-1)^2 < 9 \\ x^2 + (y-1)^2 \neq 8 \end{cases}$$



Insieme $\bar{M}$ aperto
 $\bar{M}$ chiuso, limitato
non connesso.

$$f(x,y) = \underbrace{\frac{x^2 + (y-1)^2}{(y-1)^2 + \frac{1}{2}|x|}}_{g(x,y)} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{4+x+3} - 2}{\lg[9 - x^2 - (y-1)^2]}}_{h(x,y)} = g(x,y) h(x,y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} h(x,y) = \frac{0}{\lg 9} = 0$$

$$|g(x,y)| = \left| \frac{x^2}{(y-1)^2 + \frac{1}{2}|x|} + \frac{(y-1)^2}{(y-1)^2 + \frac{1}{2}|x|} \right| \leq$$

$$\leq \frac{x^2}{\frac{1}{2}|x|} + \frac{(y-1)^2}{(y-1)^2} = 2|x| + 1$$

$$|f(x,y) - 0| \leq |f(x,y)| = |g(x,y)| |h(x,y)|$$

$$\leq (2|x| + 1) |h(x,y)| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,1)} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y) = 0$$

ESERCIZIO 6

$$f(x,y) = (x-1)y e^{\sqrt{|x+y-1|}}$$

$$D = \mathbb{R}^2 \quad f \in C^0(\mathbb{R}^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\sqrt{|x+y-1|}} \left(y + (x-1)y \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sgn}(x+y-1)}{\sqrt{|x+y-1|}} \right) \quad \text{se } x+y-1 \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\sqrt{|x+y-1|}} \left((x-1) + (x-1)y \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sgn}(x+y-1)}{\sqrt{|x+y-1|}} \right)$$

Se i punti sono sulla retta $y = -x+1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 1-x_0) = \frac{d}{dx} f(x, 1-x_0) \Big|_{x=x_0} = \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 = 1 \\ \nexists & \text{se } x_0 \neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 1-x_0) = \frac{d}{dy} f(x_0, y) \Big|_{y=1-x_0} = \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 = 1 \\ \nexists & \text{se } x_0 \neq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ derivate esistono solo nel pto sulle
retta $y = -x+1$

$\Rightarrow$ la funzione è derivabile in $A \cup \{(1,0)\}$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y+x-1 \neq 0 \}$$

Differenziabilità in $(1,0)$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk e^{\sqrt{|h+k|}} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

infatti

$$\left| \frac{hk e^{\sqrt{|h+k|}}}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq \frac{|hk| e^{\sqrt{|h+k|}}}{|h|} = |k| e^{\sqrt{|h+k|}} \rightarrow 0 \quad (h,k) \rightarrow (0,0)$$

in $(0,1)$ la funzione non è derivabile

$\Rightarrow$ non è differenziabile.