

ANALISI MATEMATICA 2 (9 CFU)

2 Parte 9.7.2025

Cognome.....

Nome.....

n.matricola

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{|x-1| \log(x+y^3)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} & (x, y) \neq (1, 0) \\ 1 & (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

a determinare il suo insieme di definizione e stabilire se è continua e derivabile in $(1, 0)$;

b calcolare le derivate direzionali in $(1, 0)$ rispetto al generico versore $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ e verificare se è valida la formula del gradiente;

c stabilire se f è differenziabile in $(1, 0)$.

Esercizio 2 Sia V il solido tridimensionale non omogeneo descritto dalla corona sferica di centro il punto $(1, 0, 0)$ e raggi R e $2R$, avente densità

$$\delta(y, x, z) = \frac{1}{R^3} \left(1 + \frac{|x-1||y|z^2}{R^4} \right)$$

Calcolare la massa totale dell'oggetto.

Esercizio 3 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x-1)^4 + (x-1)^2(y^2-1) + \frac{2}{3}(x-1)^3y$$

a determinare il dominio, calcolare il gradiente e la matrice Hessiana di f ;

b determinare i punti critici di f e studiarne la natura;

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2(x-1)e^{-y^2-z^2}, -2y[(x-1)^2 + z^2]e^{-y^2-z^2}, 2ze^{-y^2-z^2}(1 - (x-1)^2 - z^2) \right)$$

a determinare il dominio stabilire se è conservativo senza calcolare il potenziale;

b calcolare il potenziale;

b calcolare il lavoro del campo lungo la curva γ

$$\mathbf{r}(\theta) = (1 + \theta, \theta \cos \theta, \theta \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Esercizio 5 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(yz, (x-1)z, (x-1)y)}{\rho^2}, \quad \rho = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$$

a calcolare $\nabla \wedge \mathbf{F}$;

b calcolare il flusso uscente di $\nabla \wedge \mathbf{F}$ attraverso la superficie S data dalla semisfera di centro $(1, 0, 0)$ e raggio unitario nel semispazio $z \geq 0$;

c scrivere in forma parametrica la superficie S e studiarne la regolarità.

Esercizio 6 Calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = ((x-1)z, yz, |x-1|z)$$

uscente dalla superficie laterale del cono

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$$

orientando la normale in modo che si allontani dall'asse del cono.

ESAME 9.7.2025 PARTE 2 SCHEMA SOLUTIONS

Es. 1

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{|x-1| \lg(x+y^3)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} & (x,y) \neq (1,0) \\ 1 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

f è continua in $(1,0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = f(1,0) = 1$

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 1| &= \frac{|x-1| |\lg(x+y^3)|}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \leq \frac{|x-1| |\lg(x+y^3)|}{|x-1|} \\ &= |\lg(x+y^3)| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (1,0)} 0 \end{aligned}$$

Derivabilità: calcolo la derivata direzionale

$$D_{\vec{r}} f(1,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t \cos \theta| \lg(1 + t \cos \theta + t^3 \sin^3 \theta)}{|t| t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\cos \theta| \lg(1 + t \cos \theta + t^3 \sin^3 \theta)}{t} \sim$$

$$\sim \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\cos \theta| (t \cos \theta + t^3 \sin^3 \theta)}{t} = |\cos \theta| \cos \theta$$

$$\nabla f(1,0) = (1, 0)$$

$$\nabla f(1,0) \cdot \vec{v} = (1,0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \neq D_{\vec{v}}f(1,0)$$

$\Rightarrow$ la formula del gradiente non è verificata $\Rightarrow f$ non è differenziabile in $(1,0)$.

Es. 2

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : R^2 \leq (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2 \right\}$$

$$\delta(x, y, z) = \frac{1}{R^3} \left(1 + \frac{|x-1| |y| |z|^2}{R^4} \right)$$

$$M = \iiint_V \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = 1 + \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \in [R, 2R] \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ z = \rho \cos \varphi & \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$dx \, dy \, dz = \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$$M = \int_R^{2R} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{R^3} \left(1 + \rho^4 \frac{|\sin \varphi \cos \theta| |\sin \varphi \sin \theta| \cos^2 \varphi}{R^4} \right) \rho^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho$$

$$= \frac{1}{R^3} \left(\frac{28}{3} \pi R^3 + \int_R^{2R} \frac{\rho^6}{R^4} \, d\rho \int_0^{2\pi} |\cos \theta \sin \theta| \, d\theta \int_0^\pi \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \right) =$$

$$\int_0^{2\pi} |\cos\theta \sin\theta| d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{4}{2} \sin^2\theta \Big|_0^{\pi/2} = 2$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\varphi \cos^2\varphi d\varphi = \int_0^{\pi} \sin\varphi (1 - \cos^2\varphi) \cos^2\varphi d\varphi$$

$$= -\frac{1}{3} \cos^3\varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{5} \cos^5\varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$$

$$\int_R^{2R} \rho^6 d\rho = \frac{1}{7} (2^7 R^7 - R^7) = \frac{127}{7} R^7$$

$$M = \frac{1}{R^3} \left(\frac{28\pi}{3} R^3 + \frac{127}{7} R^3 \frac{8}{15} \right) = \frac{4}{3} \left(7\pi + \frac{254}{35} \right)$$

Es. 3

$$f(x,y) = \frac{(x-1)^4}{2} + (x-1)^2(y^2-1) + \frac{2}{3}(x-1)^3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1)^3 + 2(x-1)(y^2-1) + 2(x-1)^2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3$$

$$\begin{cases} 2(x-1)[(x-1)^2 + y^2 - 1 + (x-1)y] = 0 \\ 2(x-1)^2[y + \frac{1}{3}(x-1)] = 0 \end{cases}$$

La seconda si annulla su

$$x-1=0 \Rightarrow \text{retta di pti critici } (1, y_0)$$

$$y = -\frac{1}{3}(x-1) \Leftrightarrow (x-1) = -3y$$

Se $x \neq 1$ la prima si annulla se

$$9y^2 + y^2 - 1 - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow 7y^2 = 1$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{7}} \quad x = 1 \mp 3\sqrt{\frac{1}{7}}$$

$$P_1 \left(1 + \frac{3}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}} \right) \quad P_2 \left(1 - \frac{3}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}} \right)$$

$$H_f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} 3(x-1)^2 + y^2 - 1 + 2(x-1)y & (x-1)(2y + (x-1)) \\ (x-1)(2y + (x-1)) & (x-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$H_f\left(1 + \frac{3}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = 2 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{definita positiva} \\ \Rightarrow P_1 \text{ è un pto} \\ \text{di minimo} \\ \text{locale forte} \end{array}$$

$$H_f\left(1 - \frac{3}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{definita positiva} \\ \Rightarrow P_2 \text{ è un pto di} \\ \text{minimo} \\ \text{locale forte} \end{array}$$

$$H_f(1, y_0) = \begin{pmatrix} y_0^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ caso dubbio}$$

studio segno dell'incremento

$$\Delta f(1, y_0) = f(x, y) \geq 0$$

$$f(x, y) = (x-1)^2 \underbrace{\left[\frac{(x-1)^2}{2} + y^2 - 1 + 2\frac{(x-1)y}{3} \right]}_{g(x, y)} \geq 0$$

$\Rightarrow$ il segno dipende da $g(x,y)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,y_0)} g(x,y) = y_0^2 - 1$$

Se $y_0^2 - 1 > 0$ la funzione g (essendo continua) è positiva nella vicinanza di $(1, y_0) \Rightarrow (1, y_0)$ è un pto di minimo relativo se $y_0 < -1$ o $y_0 > 1$

Se $y_0^2 - 1 < 0$ la funzione g è negativa in un intorno di $(1, y_0) \Rightarrow (1, y_0)$ è un pto di max relativo se $-1 < y_0 < 1$

Se $y_0 = \pm 1$ la funzione g cambia

segno in un intorno del punto, infatti: se $y_0 = 1$

$$g(x, 1) = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{2(x-1)}{3} \sim \frac{2(x-1)}{3} \begin{cases} > 0 & x > 1 \\ < 0 & x < 1 \end{cases}$$

$$\text{se } y_0 = -1$$

$$g(x, -1) = \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{2}{3}(x-1) \sim \begin{cases} -\frac{2}{3}(x-1) & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{(x-1)^2}{2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (1, \pm 1)$ sono punti di sella.

Es. 4

$$\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y), F_3(x, y))$$

$$F_1(x, y) = 2(x-1) e^{-y^2-z^2} \quad F_2(x, y) = -2y[(x-1)^2 + z^2] e^{-y^2-z^2}$$

$$F_3(x, y) = 2z e^{-y^2-z^2} [1 - (x-1)^2 - z^2]$$

$$D = \mathbb{R}^2 \quad \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & \hat{i} (-4yz(1 - (x-1)^2 - z^2) e^{-y^2-z^2} - (-4zy + 4zy[(x-1)^2 + z^2]) e^{-y^2-z^2}) \\ & - \hat{j} (-4z(x-1) e^{-y^2-z^2} + 4z(x-1) e^{-y^2-z^2}) + \\ & + \hat{k} (-4y(x-1) e^{-y^2-z^2} + 4y(x-1) e^{-y^2-z^2}) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\nabla \wedge \vec{F} = 0 \quad \text{e } D \text{ semplicemente connesso}$$

$\Rightarrow$ il campo è conservativo.

$$\vec{F} = \nabla U$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2(x-1)e^{-y^2-z^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -2y[(x-1)^2+z^2]e^{-y^2-z^2} \\ \frac{\partial U}{\partial z} = 2z[1-(x-1)^2-z^2]e^{-y^2-z^2} \end{cases}$$

Dalla prima eq.

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int 2(x-1)e^{-y^2-z^2} dx = \\ &= (x-1)^2 e^{-y^2-z^2} + C(y, z) \end{aligned}$$

Usa la seconda eq.

$$-2y \cancel{(x-1)^2} e^{-y^2-z^2} + \frac{\partial C}{\partial y} = -2y \cancel{[(x-1)^2+z^2]} e^{-y^2-z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = -2yz^2 e^{-y^2-z^2} \Rightarrow C(y, z) = z^2 e^{-y^2-z^2} + C(z)$$

$$U(x, y, z) = (x-1)^2 e^{-y^2-z^2} + z^2 e^{-y^2-z^2} + C(z)$$

Usa la terza

$$\begin{aligned} -2z \cancel{(x-1)^2} e^{-y^2-z^2} + (\cancel{2z} - \cancel{2z^3}) e^{-y^2-z^2} + C'(z) &= \\ = 2z \cancel{[1-(x-1)^2-z^2]} e^{-y^2-z^2} &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C'(z) = 0 \Rightarrow C(z) = C$$

$$V(x, y, z) = \left[(x-1)^2 + z^2 \right] e^{-y^2 - z^2} + C$$

$$f: \quad \vec{r}(0) = (1, 0, 0) \quad \vec{r}(2\pi) = (1+2\pi, 2\pi, 0)$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= V(\vec{r}(2\pi)) - V(\vec{r}(0)) = \\ &= 4\pi^2 e^{-4\pi^2} \end{aligned}$$

Es. 5

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{(4z, (x-1)z, (x-1)y)}{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$$

$$D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 0, 0)\}$$

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$\hat{i} \left[(x-1) \left(\partial_y \left(\frac{y}{\rho^2} \right) - \partial_z \left(\frac{z}{\rho^2} \right) \right) \right] - \hat{j} \left[y \left(\partial_x \left(\frac{x-1}{\rho^2} \right) - \partial_z \left(\frac{y}{\rho^2} \right) \right) \right] \\ + \hat{k} \left[z \left(\partial_x \left(\frac{x-1}{\rho^2} \right) - \partial_y \left(\frac{y}{\rho^2} \right) \right) \right]$$

$$\partial_y \left(\frac{y}{\rho^2} \right) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{2y^2}{\rho^4} \quad \partial_x \left(\frac{x-1}{\rho^2} \right) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{2(x-1)^2}{\rho^4}$$

$$\partial_z \left(\frac{z}{\rho^2} \right) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{2z^2}{\rho^4}$$

$$\Rightarrow \nabla \wedge \vec{F} = \frac{2}{\rho^4} \left((x-1)(z^2 - y^2), y((x-1)^2 - z^2), z(y^2 - (x-1)^2) \right)$$

Sulla superficie di raggio unitario $\rho=1$

La normale alla superficie

$$\hat{n} = (x-1, y, z) \frac{1}{\rho} = (x-1, y, z) \quad \downarrow \rho=1$$

$$\nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{n} = (x-1)^2(z^2 - y^2) + y^2((x-1)^2 - z^2) + z^2(y^2 - (x-1)^2) \\ = 0$$

$\Rightarrow$ il flusso è nullo.

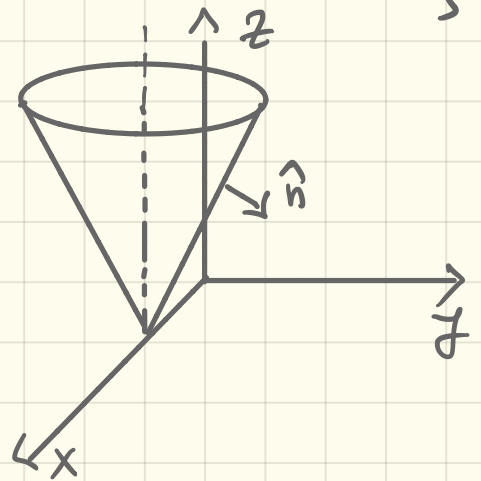
Es. 6

$$\vec{F}(x, y, z) = (x-1)z, yz, |x-1|z$$

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

Superficie Cartesiana

$$\begin{cases} x = 1+u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2} = f(u, v) \end{cases} \quad u^2 + v^2 \leq 4$$



$$\vec{r}_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} \right) \quad \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right)$$

$$\vec{r}_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

Il caso ha il vertice in $(1, 0, 0)$, la normale che si allontana dall'asse del caso ha la componente z negativa $\Rightarrow$

$$\hat{n}_e = \frac{\vec{r}_v \wedge \vec{r}_u}{|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v|} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, -1 \right)}{|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{u}{f} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{v}{f}$$



$$I(\vec{F}, S) = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}_e ds =$$

$$8 \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right)$$

$$= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{r}_v \wedge \vec{r}_u du dv =$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (u, v, |u|) \cdot (2u, 2v, -1) du dv$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (u^2 + v^2 - |u| \sqrt{u^2+v^2}) du dv = \begin{matrix} \text{coord.} \\ \text{polar} \end{matrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (p^2 - p^2 |\cos \theta|) p dp d\theta$$

$$= \int_0^2 p^3 dp \int_0^{2\pi} (1 - |\cos \theta|) d\theta = \frac{1}{4} 2^4 \left(2\pi - 4 \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} \right)$$

$$= 4(2\pi - 4) = 8(\pi - 2)$$