

## ANALISI MATEMATICA 2 (9CFU)

1 Parte 9.7.2025

n.matricola .....

Cognome .....

Nome .....

**Esercizio 1** Sia  $\gamma$  la curva piana con equazione polare

$$\rho = Re^{2\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad R > 0$$

- a** scrivere le equazioni parametriche e stabilire se la curva è: continua, chiusa, semplice;
- b** stabilire se la curva è regolare precisando in caso contrario i punti non regolari;
- b** calcolare la lunghezza dell'arco di curva;
- d** calcolare il centroide di  $\gamma$ .

**Esercizio 2** Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(e^{-n^2 x^2})$$

- a** Determinare l'insieme di convergenza puntuale.
- b** Determinare l'insieme di continuità della somma della serie.
- c** Determinare l'insieme di derivabilità termine a termine.

**Esercizio 3** Data la funzione periodica di periodo  $T = 4$  definita sull'intervallo  $[-2, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & 1 \leq |x| \leq 2 \end{cases}$$

- a** disegnare il grafico in  $[-6, 6]$  e, usando la teoria, calcolare la somma della serie di Fourier associata ad  $f(x)$  e studiare la velocità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier senza calcolarli;
- b** calcolare i coefficienti di Fourier di  $f$ ,  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  e  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ ;
- c** studiare la convergenza totale della serie di Fourier specificando il valore a cui essa converge nel punto  $x = 0$ ;

**Esercizio 4**

**a** Sviluppare in serie di potenze (McLaurin) la funzione

$$f(x) = \frac{2x - 8}{x^2 - 8x + 12}$$

precisando il raggio di convergenza.

- b** Integrando termine a termine, calcolare la somma della serie ottenuta.
- c** Calcolare la derivata di ordine  $n$  di  $f$  in  $x = 0$  ( $f^{(n)}(0)$ ).

**Esercizio 5** Data la funzione e  $\alpha > 0$

$$f(x, y) = \frac{[(x-1)^2 y^2]^\alpha \sin(2\pi x)}{(x-1)^2 + y^2} [\log[4 - y - (x-1)^2] - \log(4 - y)]$$

- a** Determinarne il dominio di definizione e dire che tipo di insieme è (aperto, chiuso, limitato, connesso).
- b** Studiare il segno di  $f$  e dire per quali valori di  $\alpha > 0$  può essere prolungata con continuità in  $(1, 0)$ .

**Esercizio 6** Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{[(x-1)^2 - y^3]^2}{(x-1)^2 + y^4} & (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

- a** stabilire se è continua in  $(1, 0)$ ;
- b** stabilire se è derivabile in  $(1, 0)$  ed, in caso affermativo, calcolare  $\nabla f(1, 0)$ ;
- c** stabilire se è differenziabile in  $(1, 0)$ .

# ESAME 9.7.2025 PARTE 1 SCHEMA SOLUZIONE

## Es. 1

$$\gamma: \rho = R e^{2\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad R > 0$$

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

La curva  $\bar{\gamma}$  è continua perché  $\rho \in C^0([0, 2\pi])$

$$\vec{r}(0) = \rho(0) (1, 0) \neq \vec{r}(2\pi) = \rho(2\pi) (1, 0)$$

$$\text{perché } \rho(0) = R \neq R e^{4\pi} = \rho(2\pi)$$

$\Rightarrow$  la curva  $\bar{\gamma}$  è aperta

$$|\vec{r}'(\theta)| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = R \sqrt{e^{4\theta} + 4e^{4\theta}} = R e^{2\theta} \sqrt{5}$$

$\vec{r} \in C^1([0, 2\pi])$  e  $\vec{r}'(\theta) \neq 0 \quad \forall \theta \Rightarrow$  la curva è regolare.

Dato  $\rho(\theta)$  è crescente

$$\vec{r}(\theta_1) \neq \vec{r}(\theta_2) \quad \forall \theta_1 \neq \theta_2$$

$\Rightarrow$  la curva è semplice.

$$\begin{aligned}
 l(\gamma) &= \int_{\gamma} ds = \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(\theta)| d\theta = \\
 &= R\sqrt{5} \int_0^{2\pi} e^{2\theta} d\theta = R\sqrt{5} \left. \frac{1}{2} e^{2\theta} \right|_0^{2\pi} = \\
 &= R\sqrt{5} \frac{e^{4\pi} - 1}{2}
 \end{aligned}$$

Coordinate centroide

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{l(\gamma)} \int_0^{2\pi} x(\theta) |\vec{r}'(\theta)| d\theta = \\
 &= \frac{1}{l(\gamma)} \int_0^{2\pi} R e^{2\theta} \cos\theta R\sqrt{5} e^{2\theta} d\theta = \\
 &= \frac{R^2\sqrt{5}}{l(\gamma)} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{4\theta} \cos\theta d\theta}_I =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} e^{4\theta} \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4+i} e^{(4+i)\theta} + \frac{1}{4-i} e^{(4-i)\theta} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{e^{4\theta}}{2} \left[ \frac{e^{i\theta}}{4+i} + \frac{1}{4-i} e^{-i\theta} \right]_0^{2\pi}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{8\pi}}{2} \left[ \frac{1}{4+i} + \frac{1}{4-i} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4+i} + \frac{1}{4-i} \right]$$

$$= \frac{e^{8\pi}-1}{2} \frac{8}{4+1} = \frac{4}{5} (e^{8\pi}-1)$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\cancel{R^2\sqrt{5}}}{\cancel{R\sqrt{5}}} \frac{2}{\cancel{e^{4\pi}-1}} \frac{4}{5} (\cancel{e^{4\pi}-1})(e^{4\pi}+1)$$

$$\bar{x} = \frac{8}{5} R (e^{4\pi}+1)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R e^{2\theta} \sin \theta R \sqrt{5} e^{2\theta} d\theta =$$

calcoli analoghi a quelli fatti  
per il calcolo di  $\bar{y}$ .

## Es. 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(e^{-n^2 x^2})$$

$$\text{CN } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(e^{-n^2 x^2}) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x \neq 0$$

Convergenza Assoluta

$$|\sin(e^{-n^2 x^2})| \leq e^{-n^2 x^2} \leq e^{-n x^2} = (e^{-x^2})^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\sin(e^{-n^2 x^2})| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x^2})^n < +\infty$$

$$e^{-x^2} < 1 \quad (\Rightarrow) \quad x \neq 0$$

$\Rightarrow$  la serie converge assolutamente e

puntualmente  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \exists S(x)$ :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(e^{-n^2 x^2})$$

$$0 \leq e^{-n x^2} \leq 1 < \pi/2 \Rightarrow \sin(e^{-n^2 x^2}) \text{ è decrescente in } x > 0 \\ \text{crescente in } x < 0$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |f_n(x)| = \sin(1) \Rightarrow \text{la serie non}$$

converge totalmente su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\text{Definisco } I_\delta = \{x \in \mathbb{R} : |x| > \delta\} \quad \delta > 0$$

$$\max_{x \in I_\delta} |f_n(x)| = |\sin(e^{-n^2 \delta^2})| \leq e^{-n^2 \delta^2} < e^{-n \delta^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \delta^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\delta^2})^n < +\infty$$

serie geometrica di ragione  $q = e^{-\delta^2} < 1$

$\Rightarrow$  la serie converge totalmente in  $I_\delta \forall \delta > 0$

$\Rightarrow$  Posso applicare teorema continuità della somma

in  $I_\delta \forall \delta > 0$

i)  $f_n \in C^0(I_\delta)$  ok

ii)  $\sum_n f_n(x)$  converge totalmente in  $I_\delta$  ok

$\Rightarrow S(x) \in C^0(I_\delta) \forall \delta > 0$

Estensione Continuità in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists \delta > 0 : x_0 \in I_\delta \Rightarrow S(x)$  è

continua in  $x_0 \Rightarrow S(x) \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$f'_n(x) = \cos(e^{-n^2 x^2}) (-2n^2 x e^{-n^2 x^2})$$

TEO. DERIVABILITÀ T. A. T. in  $I_{\delta, H} = \{x \in \mathbb{R} : \delta < |x| < H\}$

i)  $f_n(x)$  derivabile in  $I_{\delta, H}$  ok

ii)  $\sum_n f_n(x)$  converge in  $I_{\delta, H}$  ok

iii)  $\sum_n f'_n(x)$  converge totalmente in  $I_{\delta, H}$

Dimostriamo iii)

$$f'_n(x) = \cos(e^{-n^2 x^2}) (-2n^2 x e^{-n^2 x^2})$$

$$|f'_n(x)| \leq 2n^2 |x| e^{-n^2 x^2} \leq 2n^2 H e^{-n^2 \delta^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 H e^{-n^2 \delta^2} = 2H \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 \delta^2} \quad (*)$$

Criterio delle radici

$$\sqrt[n]{n^2 e^{-n^2 \delta^2}} = e^{-n \delta^2} \sqrt[n]{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

$\Rightarrow$  la serie (\*) converge TOTALMENTE in  $I_{\delta, H} \forall H > \delta > 0$

$\Rightarrow$  la serie è derivabile t.o.t. in  $I_{\delta, H} \forall H > \delta > 0$

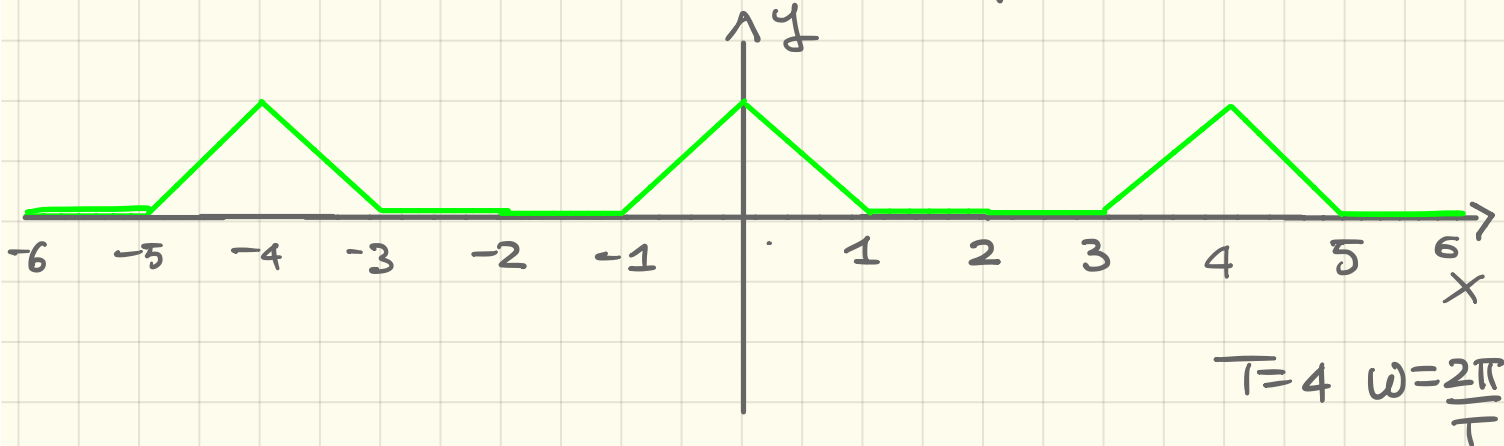
Estensione a  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists H > \delta > 0 : x_0 \in I_{\delta, H} \Rightarrow$  la serie è

derivabile t.o.t. in  $x_0 \Rightarrow$  la serie è derivabile  
t.o.t. in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Es. 3

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{per } |x| < 1 \\ 0 & \text{per } 1 \leq |x| \leq 2 \end{cases}$$



$$T=4 \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(x) \in C^0([-2, 2]) \quad f(-2) = f(2) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-1, 0) \\ -1 & x \in (0, 1) \\ 0 & x \in (-2, -1) \cup (1, 2) \end{cases}$$

$$f'(-1^+) = 1 \quad f'(-1^-) = 0 \quad f'(0^-) = 1 \quad f'(0^+) = -1$$

$$f'(1^-) = -1 \quad f'(1^+) = 0$$

$\Rightarrow$  i) La funzione è regolare a tratti  $\Rightarrow$  posso applicare il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier  $\Rightarrow$  la serie converge ad  $S(x)$  dove

$$S(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & x \in (-2, 2) \\ \frac{f(-2^+) + f(2^-)}{2} & x = -2, 2 \end{cases}$$

Quanto ii)  $f(x) \in C^0(-2, 2)$  e  $f(-2) = f(2) = 0$

$$\Rightarrow S(x) = f(x)$$

i) + ii) permette di applicare le teoreme sulle velocità di convergenza a zero dei coeff. di Fourier con  $m=0$

$$\Rightarrow a_k = o\left(\frac{1}{k}\right) \quad b_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$$

Calcolo dei coeff. di Fourier

$b_k = 0$  perché la funzione è pari,  $\omega = \frac{\pi}{2}$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = \frac{2}{4} \int_{-1}^1 (1 - |x|) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 (1-x) dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx$$

$$= \frac{2}{4} \int_{-1}^1 (1-|x|) \cos(k\omega x) dx = \int_0^1 (1-x) \cos(k\omega x) dx$$

$$= \frac{1-x}{k\omega} \sin k\omega x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin k\omega x}{k\omega} dx$$

$$= -\frac{1}{(k\omega)^2} \cos(k\omega x) \Big|_0^1 = \frac{1}{(k\omega)^2} (1 - \cos(k\frac{\pi}{2}))$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{2} x\right)$$

### Es. 4

$$f(x) = \frac{2x-8}{x^2-8x+12} = \frac{2x-8}{(x-6)(x-2)} = \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-2}$$

$$\frac{1}{x-6} = -\frac{1}{6} \frac{1}{1-x/6} = -\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{6}\right)^n \quad R=6$$

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-x/2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad R=2$$

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{6^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^{n+1} \quad R=2$$

Integrando termine a termine in  $|x| < 2$

$$\int f(x) dx = \int \frac{2x-8}{x^2-8x+12} dx = \lg|x^2-8x+12|$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{6^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$f^{(n)}(0) = n! a_n = -n! \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6^{n+1}} \right)$$

Es. 5

$$\alpha > 0$$

$$f(x,y) = \frac{((x-1)^2 y^2)^\alpha \sin(2\pi x)}{(x-1)^2 + y^2} [\lg(4-y-(x-1)^2) - \lg(4-y)]$$

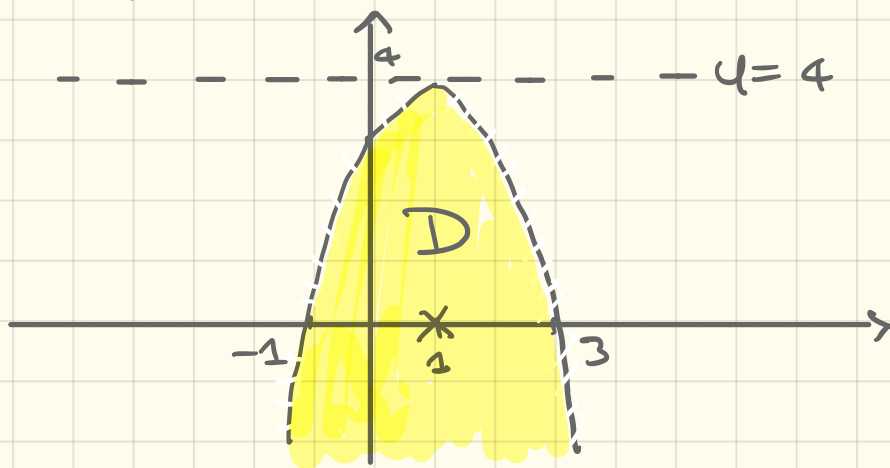
Domínio

$g(x,y)$

$h(x,y)$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \neq 0 \\ 4-y-(x-1)^2 > 0 \\ 4-y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \neq (1,0) \\ y < 4-(x-1)^2 \\ y < 4 \end{cases}$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R} : y < 4-(x-1)^2, (x,y) \neq (1,0) \}$$



$$x-1 = \pm 2$$

$$x = 3$$

$$x = -1$$

D insieme, aperto, illimitato e connesso

Studio del segno di  $f$

$$f(x,y) = g(x,y) \operatorname{sen}(2\pi x) h(x,y)$$

$$g(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in D$$

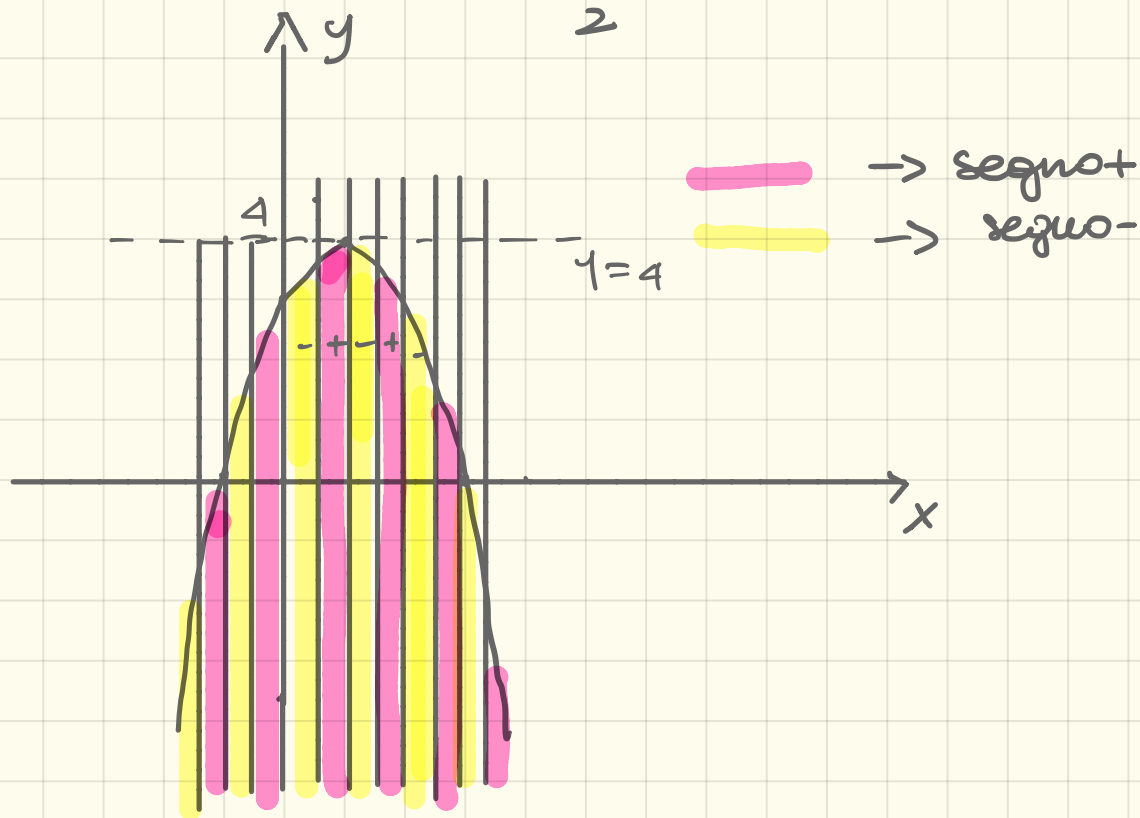
$$h(x,y) \leq 0 \quad \forall (x,y) \in D \quad \text{perché}$$

$$4 - y - (x-1)^2 \leq 4 - y$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen}(2\pi x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 + 2k\pi \leq 2\pi x \leq \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow k \leq x \leq \frac{1}{2} + k \quad k \in \mathbb{Z}^+$$



Problemdreieck bei  $(1,0)$

Studio ie

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} g(x,y) \operatorname{sen}(2\pi x) h(x,y)$$

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} h(x,y) = \lg 4 - \lg 4 = 0$$

$$2) \left| g(x,y) \operatorname{sen}(2\pi x) \right| = \left| \frac{(x-1)^{2\alpha} y^{2\alpha}}{(x-1)^2 + y^2} \operatorname{sen}(2\pi x) \right| = \text{coord. polari}$$

$$= \left| \rho^{4\alpha-2} (\cos \theta \operatorname{sen} \theta)^{2\alpha} \operatorname{sen}(2\pi(1 + \rho \cos \theta)) \right| =$$

$$= \left| \rho^{4\alpha-2} (\cos \theta \operatorname{sen} \theta)^{2\alpha} \operatorname{sen}[2\pi(1 + \rho \cos \theta)] \right| \left\{ \begin{array}{l} \leq 2\pi \rho^{4\alpha-1} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow \alpha > 1/4 \\ \leq 2\pi \quad \text{se } \alpha = 1/4 \end{array} \right.$$

$|\operatorname{sen}[2\pi(1 + \rho \cos \theta)]| = |\operatorname{sen}(2\pi \rho \cos \theta)| \sim$  non ha limite se  $\alpha < 1/4$  (ie limite dipende da  $\theta$ )  
 $\sim 2\pi |\rho \cos \theta| \leq 2\pi \rho$

Usando 1) e 2) ottengo

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1/4$$

e non ha limite se  $\alpha < 1/4 \Rightarrow f$  è prolungabile  
con continuità se  $\alpha \geq 1/4$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

Es. 6

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{[(x-1)^2 - y^3]^2}{(x-1)^2 + y^4} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

$f$  è continua in  $(1,0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = 0$

$$|f(x,y) - 0| = \frac{[(x-1)^2 - y^3]^2}{(x-1)^2 + y^4} = \frac{(x-1)^4 - 2(x-1)^2 y^3 + y^6}{(x-1)^2 + y^4}$$

$$\leq \frac{(x-1)^4}{(x-1)^2 + y^4} + \frac{2(x-1)^2 |y|^3}{(x-1)^2 + y^4} + \frac{y^6}{(x-1)^2 + y^4} \leq$$

$$\leq \frac{(x-1)^4}{(x-1)^2} + \frac{2(x-1)^2 |y|^3}{(x-1)^2} + \frac{y^6}{y^4} = (x-1)^2 + 2|y|^3 + y^2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (1,0)} 0$$

$\Rightarrow f(x,y)$  è continua in  $(1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{d}{dx} f(x,0) \Big|_{x=1} = \frac{d}{dx} (x-1)^2 \Big|_{x=1} = 2(x-1) \Big|_{x=1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{d}{dy} f(1,y) \Big|_{y=0} = \frac{d}{dy} y^2 \Big|_{y=0} = 2y \Big|_{y=0} = 0$$

$$\nabla f(1,0) = (0,0)$$

Differenziabilità in  $(1,0)$   $\vec{h} = (h,k)$

La funzione è differenziabile in  $(1,0)$  se

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{f(1+h,k) - f(1,0) - \nabla f(1,0) \cdot \vec{h}}{|\vec{h}|}}_{g(h,k)} = 0$$

$$|g(h,k) - 0| = |g(h,k)| = \frac{(h^2 - k^3)^2}{h^2 + k^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \frac{h^4 + k^6 - 2h^2k^3}{(h^2 + k^4)\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{h^4 + k^6 + 2h^2|k|^3}{(h^2 + k^4)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\leq \frac{h^4}{h^2|h|} + \frac{k^6}{k^4|k|} + \frac{2h^2|k|^3}{h^2|k|} = |h|^3 + |k| + 2k^2 \rightarrow 0 \quad (h,k) \rightarrow (0,0)$$

$\Rightarrow f$  è differenziabile in  $(1,0)$