

ANALISI MATEMATICA 2 (9 CFU)

2 Parte 14.6.2024

Cognome.....

Nome.....

n.matricola

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy-x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

a determinare il suo insieme di definizione e stabilire se è continua e derivabile in $(0, 1)$;

b calcolare le derivate direzionali in $(0, 1)$ rispetto al generico versore $(\cos \theta, \sin \theta)$;

c stabilire se f è differenziabile in $(0, 1)$.

Esercizio 2

aDare la definizione di integrale di una funzione scalare su una superficie regolare.

b Sia S la superficie di equazione $z = x^3 + y^3$ (superficie cartesiana) con $(x, y) \in E$ e

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\iint_S \frac{z - x^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} dS$$

Esercizio 3 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x + x^2 + (y+1)^2}{1 + x^2 + (y+1)^2}$$

a Determinare il dominio, calcolare il gradiente e la matrice Hessiana di f .

b Determinare i punti critici di f e studiarne la natura. Stabilire se sono punti di massimo o di minimo assoluto.

a Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto di f sul disco di raggio 1 e centro $(1, -1)$.

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = ((x+1) \log[(x+1)^2 + y^2], y \log[(x+1)^2 + y^2]) .$$

a Stabilire il suo insieme di definizione.

b Verificare se il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale e dimostrare, senza calcolare il potenziale, che è conservativo.

c Calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.

d Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ per andare dal punto $(1, 2)$ al punto $(3, 4)$.

Esercizio 5 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x e^z + x^3, (y-1)^3 + (y-1)e^z, z^3 + e^z)$$

calcolare il flusso uscente del campo vettoriale attraverso la sfera S di centro $(0, 1, 0)$ e raggio R .

Esercizio 6 Sia Σ la porzione della sfera di centro $O = (0, 0, 0)$ e raggio 3 contenuta nel semispazio $x \geq 0$, orientata verso l'esterno (della sfera).

a Descrivere l'orientazione del bordo $\gamma = \partial\Sigma$. Dire se, viaggiando lungo la curva a partire dal punto $A = (0, 0, -3)$, si incontra prima il punto $B = (0, 3, 0)$ oppure il punto $C = (0, 0, 3)$.

b Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, 2y + z, -x + y)$ lungo γ orientata coerentemente con Σ utilizzando la definizione di lavoro.

c Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, 2y + z, -x + y)$ lungo γ orientata coerentemente con Σ utilizzando il teorema di Stokes.

ESAME 14.6.2024 PARTE 2

SCHEMA di SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} & (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

a)

$$D = \mathbb{R}^2$$

La funzione $\bar{f}$ è continua in $(0,1)$ se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y) = 0$$

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|x(y-1)|}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} \leq \frac{|x||y-1|}{|x|} = |y-1| \rightarrow 0 \quad y \rightarrow 1$$

$\Rightarrow$ la funzione $\bar{f}$ è continua in $(0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{d}{dx} f(x,1) \Big|_{x=0} = \frac{d}{dx} 0 \Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \frac{d}{dy} f(0,y) \Big|_{y=1} = \frac{d}{dy} 0 \Big|_{y=1} = 0$$

Le derivate direzionali in $(0,1)$ esistono $\Rightarrow$

la funzione $\bar{f}$ è differenziabile in $(0,1)$.

b)

$$D_x f(0,1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \theta, 1+t \sin \theta) - f(0,1)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cos \theta \sin \theta - 0}{|t|} \cdot \frac{1}{t} = \sin \theta \cos \theta \sin \theta$$

$\Rightarrow$ la derivata direzionale esiste se

$$\cos \theta = 0 \quad \text{oppure} \quad \sin \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

c) Per la differenziabilità studio se

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,1+k) - f(0,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2}$$

Se $k = mh$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh^2}{(1+m^2)h^2} = \frac{m}{1+m^2} \neq 0$$

$\Rightarrow$ la funzione non è differenziabile in $(0,1)$.

Esercizio 2

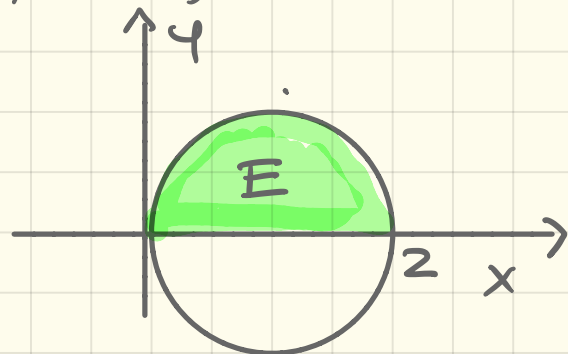
$$S \quad \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad (u,v) \in E$$

$$\vec{r}_u = (\partial_u x, \partial_u y, \partial_u z)$$

$$\vec{r}_v = (\partial_v x, \partial_v y, \partial_v z)$$

$$ds = |\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v| du dv$$

$$\int_S f ds = \int_E f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) |\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v| du dv$$



$$S: z = x^3 + y^3 \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^3 + v^3 \end{cases} \quad (u,v) \in E$$

$$\vec{r}_u = (1, 0, 3u^2)$$

$$\vec{r}_v = (0, 1, 3v^2)$$

$$\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v = (-3u^2, -3v^2, 1)$$

$$|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v| = \sqrt{9u^4 + 9v^4 + 1}$$

$$\iint_S \frac{z - x^3}{1 + 9(x^4 + y^4)} ds = \iint_E \frac{u^3 + v^3 - u^3}{\sqrt{1 + 9u^4 + 9v^4}} \cdot \sqrt{1 + 9u^4 + 9v^4} du dv$$

$$= \iint_E v^3 du dv = \int_0^\pi \int_0^1 \rho^3 \sin^3 \theta \rho d\rho d\theta$$

$$\begin{cases} u = 1 + \rho \cos \theta & \rho \in [0, 1] \\ v = \rho \sin \theta & \theta \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$= \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sec^3 \theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^\pi \sec \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta =$$

$$= \frac{1}{5} \left[-\cos \theta \Big|_0^\pi + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \Big|_0^\pi \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \left[2 + \frac{1}{3} (-2) \right] = \frac{4}{15}$$

ESERCIZIO 3

$$f(x,y) = \frac{x + x^2 + (y+1)^2}{1 + x^2 + (y+1)^2} \quad D = \mathbb{R}$$

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(1+2x)(1+x^2+(y+1)^2) - 2x(x+x^2+(y+1)^2)}{(1+x^2+(y+1)^2)^2}$$

$$= \frac{1 + \cancel{x^2} + (y+1)^2 + 2x + \cancel{2x^3} + \cancel{2x(y+1)^2} - \cancel{2x^2} - \cancel{2x^3} - \cancel{2x(y+1)^2}}{(1+x^2+(y+1)^2)^2}$$

$$= \frac{1 + (y+1)^2 + 2x - x^2}{(1+x^2+(y+1)^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2(y+1)(1+x^2+(y+1)^2) - 2(y+1)(x+x^2+(y+1)^2)}{(1+x^2+(y+1)^2)^2}$$

$$= \frac{2(y+1) + \cancel{2x^2(y+1)} + \cancel{2(y+1)^3} - \cancel{2x(y+1)} - \cancel{2x^2(y+1)} - \cancel{2(y+1)^3}}{(1+x^2+(y+1)^2)^2}$$

$$= \frac{2(y+1)(1-x)}{(1+x^2+(y+1)^2)^2}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)^2 - x^2 + 2x + 1 = 0 \\ (y+1)(1-x) = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} y = -1 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

$$P_1 = (1-\sqrt{2}, -1)$$

$$P_2 = (1+\sqrt{2}, -1)$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x=1 \\ (y+1)^2 - 1 + 2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ (y+1)^2 + 2 = 0 \text{ mai} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(2-2x)(1+x^2+(y+1)^2)^2 - 4(1+x^2+(y+1)^2)x((y+1)^2+1+2x-x^2)}{(1+x^2+(y+1)^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \frac{-(y+1)(1+x^2+(y+1)^2)^2 - 4x(1+x^2+(y+1)^2)(y+1)(1-x)}{(1+x^2+(y+1)^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \frac{(1-x)(1+x^2+(y+1)^2)^2 - 4(y+1)^2(1+x^2+(y+1)^2)(1-x)}{(1+x^2+(y+1)^2)^4}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$H_f(1-\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{\underbrace{(1+(1-\sqrt{2})^2)^2}_0} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\underbrace{(1+(1-\sqrt{2})^2)^2}_0} \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale con autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 > 0$

$\Rightarrow P_1(1-\sqrt{2}, -1)$ è un pto di minimo locale

$$H_f(1+\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$b = -\frac{2\sqrt{2}}{(1+(1+2\sqrt{2})^2)^2} < 0$$

Matrice diagonale con autovalori negativi.

$\Rightarrow (1+\sqrt{2}, -1)$ è un pto di massimo locale.

b) $\begin{cases} x = 1 + \cos\theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = -1 + \sin\theta \end{cases} \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$

$$f(1+\cos\theta, -1+\sin\theta) = \frac{\cos\theta + 1 + (\cos\theta + 1)^2 + \sin^2\theta}{1 + (\cos\theta + 1)^2 + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{3\cos\theta + 3}{3 + 2\cos\theta}$$

$$f'(\theta) = \frac{-3\sin\theta(3+2\cos\theta) + 2\sin\theta(3\cos\theta+3)}{(3+2\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{-9\sin\theta + 6\sin\theta}{(3+2\cos\theta)^2} = -\frac{3\sin\theta}{(3+2\cos\theta)^2} = 0 \Leftrightarrow \theta = 0, \pi$$

$$f(0) = \frac{6}{5} \quad f(\pi) = 0$$

Dato $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1\}$

è un insieme chiuso e limitato per il

teorema di Weierstrass in $\theta=0$ ho il max

in $\theta=\pi$ ho il minimo

$$\theta=0 \rightarrow P_1 = (2, -1)$$

$$\theta=\pi \rightarrow P_2 = (0, -1)$$

ESERCIZIO 4

$$\vec{F}(x,y) = \left((x+1) \lg[(x+1)^2 + y^2], y \lg[(x+1)^2 + y^2] \right)$$

a) $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (-1,0) \}$

insieme aperto, illimitato e connesso, non semplicemente connesso.

b) $\nabla \wedge \vec{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k} = \left(\frac{2(x+1)y}{(x+1)^2 + y^2} - \frac{2y(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right) \hat{k}$

$$\nabla \wedge \vec{F} = 0 \Rightarrow \text{il campo \u00e8 irrotazionale}$$

$\Rightarrow$ il campo \u00e8 localmente conservativo.

Dal Teorema sui campi conservativi si ha

che CNE S. \u00f2ffinch\u00e9 un campo sia conservativo

\u00e8 che $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \gamma$ chiusa, regolare e
lotta e semplice
contenuta in D.

Dimostriamo la CNE S. Sia γ una curva chiusa, regolare e
lotta e semplice contenuta in D.

Se $\gamma \subset D' \subset D$ e D' semplicemente connesso

dato che $\nabla \wedge \vec{F} = 0$ in D quindi in D'

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Se $\gamma \subset D' \subset D$ e D' non è semplicemente connesso $\Rightarrow (-1,0) \in D'$ e γ gira intorno al punto $(-1,0)$. Il campo è irrotazionale quindi se γ e γ' sono curve chiuse equivalenti

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Prendo $\gamma' = \mathcal{C}$ circonferenza centrata

$$\text{in } (-1,0) \quad (x+1)^2 + y^2 = 1 \quad \begin{cases} x = -1 + \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\cos\theta \cdot 0, \sin\theta \cdot 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) d\theta = 0$$

$\Rightarrow$ il campo è conservativo.

4) Calcolo del potenziale $\vec{F} = \nabla U$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = (x+1) \lg[(x+1)^2 + y^2] \\ \frac{\partial U}{\partial y} = y \lg[(x+1)^2 + y^2] \end{cases}$$

Use the 1st eq.

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int (x+1) \lg[(x+1)^2 + y^2] dx = \int dx = d(x+1) \\ &= \frac{1}{2} (x+1)^2 \lg[(x+1)^2 + y^2] - \int \frac{1}{2} \frac{(x+1)^2 \cancel{2(x+1)}}{(x+1)^2 + y^2} d(x+1) \\ &= \frac{1}{2} (x+1)^2 \lg[(x+1)^2 + y^2] - \int \frac{(y^2 + (x+1)^2)(x+1) - y^2(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} d(x+1) \\ &= \frac{1}{2} (x+1)^2 \lg[(x+1)^2 + y^2] - \int \left[(x+1) - y^2 \frac{(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right] d(x+1) \\ &= \frac{1}{2} (x+1)^2 \lg[(x+1)^2 + y^2] - \frac{1}{2} (x+1)^2 + \frac{y^2}{2} \lg[(x+1)^2 + y^2] + C(y) \\ &= \frac{1}{2} [(x+1)^2 + y^2] \lg[(x+1)^2 + y^2] - \frac{1}{2} (x+1)^2 + C(y) \end{aligned}$$

Use the second equation

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y \lg[(x+1)^2 + y^2] + y + C'(y) = y \lg[(x+1)^2 + y^2]$$

$$\Rightarrow C'(y) = -y \Rightarrow C(y) = -\frac{1}{2} y^2 + C$$

$$U(x, y) = \frac{1}{2} ((x+1)^2 + y^2) [\lg[(x+1)^2 + y^2] - 1] + C$$

d) $\int_{(1,2)}^{(3,4)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(3,4) - U(1,2) = \dots$

ESERCIZIO 5

$$\vec{F}(x, y, z) = (x e^z + x^3, (y-1)^3 + (y-1)e^z, z^3 + e^z) \quad D = \mathbb{R}^3$$

$$S: \quad x^2 + (y-1)^2 + z^2 = R^2$$

$$V: \quad x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq R^2 \quad S = \partial V$$

$$\Phi(\vec{F}, S) = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$$

Se uso il teorema della divergenza

(la superficie è regolare e $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$)

$$\Phi(\vec{F}, S) = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz =$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 3e^z + 3x^2 + 3(y-1)^2 + 3z^2$$

$$= \iiint_V [3e^z + 3(x^2 + (y-1)^2 + z^2)] \, dx \, dy \, dz = \rightarrow$$

Coordinate sferiche

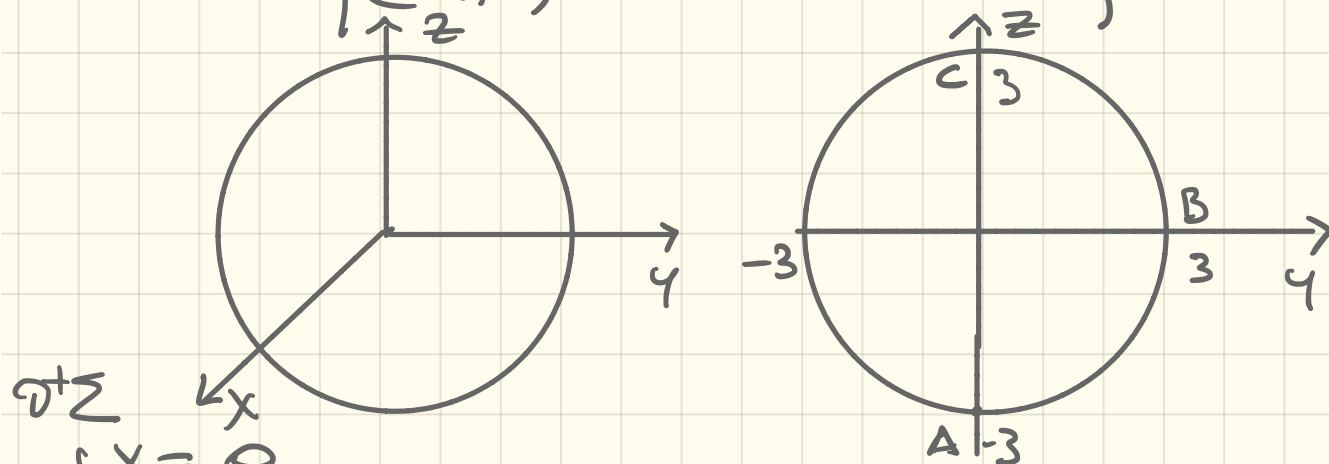
$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \in [0, R] \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta & \varphi \in [0, \pi] \\ z = \rho \cos \varphi & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (e^{p \cos \varphi} + 3p^2) p^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \\
&= 2\pi \int_0^R \int_0^\pi p^2 e^{p \cos \varphi} \sin \varphi \, d\varphi \, dp + \\
&\quad + 2\pi \int_0^R 3p^4 \, dp \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = \\
&= 2\pi \left[\int_0^R (-p e^{p \cos \varphi} \Big|_0^\pi) \, dp + \frac{3}{5} R^5 (-\cos \varphi) \Big|_0^\pi \right] = \\
&= 2\pi \left[\int_0^R -p (e^{-p} - e^p) \, dp + \frac{6}{5} R^5 \right] \\
&= 2\pi \left[\frac{6}{5} R^5 + 2 \int_0^R p \sinh p \, dp \right] = \\
&= 2\pi \left[\frac{6}{5} R^5 + 2 p \cosh p \Big|_0^R - \int_0^R \cosh p \, dp \right] \\
&= 2\pi \left[\frac{6}{5} R^5 + 2 R \cosh R - \sinh R \right]
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 6

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad x \geq 0\}$$

$$\partial \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 9\}$$



$$\partial^+ \Sigma = \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \cos \theta \\ z = 3 \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi] \rightarrow \text{ORIENTAZIONE POSITIVA}$$

Si incontra prima il punto $B = (0, 3, 0)$

e poi quello $C = (0, 0, 3)$

$$\vec{F}(x, y, z) = (x+y, 2y+z, -x+y) \quad D = \mathbb{R}^3 \quad \vec{F} \in C^1(D)$$

Usando la definizione di lavoro

$$\oint_{\partial^+ \Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (3 \cos \theta, 6 \cos \theta + 3 \sin \theta, 3 \cos \theta) \cdot (0, -3 \sin \theta, 3 \cos \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-18 \cos \theta \sin \theta - 9 \sin^2 \theta + 9 \cos^2 \theta) d\theta =$$

$$= -9 \sin^2 \theta \Big|_0^{2\pi} - 9 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} - \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = 0$$

TEOREMA d. STOKES $\vec{F} \in C^1(D)$

$$\iint_{\Sigma} \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m}_e dS = \oint_{\partial^+ \Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Sigma \quad \begin{cases} x = 3 \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = 3 \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = 3 \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \varphi \in [0, \pi] \\ \vartheta \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi] = I \end{array}$$

$$\vec{r}_\varphi = (3 \cos \varphi \cos \vartheta, 3 \cos \varphi \sin \vartheta, -3 \sin \varphi)$$

$$\vec{r}_\vartheta = (-3 \sin \varphi \sin \vartheta, 3 \sin \varphi \cos \vartheta, 0)$$

$$\vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\vartheta = (9 \sin^2 \varphi \cos \vartheta, 9 \sin^2 \varphi \sin \vartheta, 9 \sin \varphi \cos \varphi)$$

$$\hat{m}_e = \frac{\vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\vartheta}{|\vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\vartheta|}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y, 2y + z, -x + y)$$

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (1-1)\hat{i} - \hat{j}(-1-0) + \hat{k}(0-1) = \hat{j} - \hat{k} = (0, 1, -1)$$

$$\iint_{\Sigma} \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m}_e dS = \iint_{[0, \pi] \times I} (0, 1, -1) \cdot \vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\vartheta d\varphi d\vartheta$$

$$= \int_0^\pi \int_I (9 \sin^2 \varphi \sin \vartheta - 9 \sin \varphi \cos \vartheta) d\varphi d\vartheta =$$

$$= g \int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_I \sin \theta \, d\theta - g \int_0^\pi \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_I d\theta = 0$$

infatti:

$$\int_I \sin \theta \, d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} - \cos \theta \Big|_{3/2\pi}^{2\pi} = 1 - 1 = 0$$

$$\int_I d\theta = \pi \quad \int_0^\pi \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^\pi = 0$$