

ANALISI MATEMATICA 2 (9CFU)

1 Parte 14.6.2024

n.matricola

Cognome

Nome

Esercizio 1 Data la curva γ definita per $t \in [0, 1]$ dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}t^2, t, 3t^2 \right)$$

a stabilire se la curva è: continua, chiusa, semplice;

b calcolare il vettore derivato e il suo modulo;

c stabilire se la curva è regolare precisando in caso contrario i punti non regolari;

d calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} (y + z) ds.$$

Esercizio 2 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-2|^n}{(x-2)^{2n} + n^{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

a Determinare i valori di α tali che la serie converge puntualmente in $|x-2| < 1$.

b Determinare i valori di α tali che la serie converge puntualmente in $|x-2| > 1$.

c Determinare i valori di α tali che la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$.

d Porre $\alpha = \frac{1}{2}$ e dimostrare che la somma della serie è continua in $|x-2| < 1$.

e Determinare i valori di α tali che la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 Data la funzione periodica di periodo $T = 2\pi$

$$f(x) = 1 - x \quad x \in [-1, 1]$$

a Disegnare il grafico in $[-2, 2]$, calcolare i coefficienti di Fourier di f , $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, e scrivere la serie di Fourier associata;

b Dare la definizione di convergenza in media quadratica, dire a cosa converge la serie in media quadratica e dire perché;

c Studiare la convergenza puntuale della serie di Fourier e calcolarne la somma;

d Studiare la velocità di convergenza zero dei coefficienti di Fourier e dire se sono in accordo con le proprietà di regolarità della funzione.

Esercizio 4 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n} + 3}{n^3 + 2 + \log n} [\sin(nx) + \cos(nx)] \quad x \in [0, 2\pi]$$

a studiarne la convergenza puntuale;

b dire se è possibile affermare a priori che la somma della serie è continua e se la serie è derivabile termine a termine.

c dire se può essere la serie di Fourier di una funzione limitata integrabile in $[-1, 1]$.

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{|2x^4 + (y - x^2)^3|}{|x|^3 + 3|y - x^2|^3} \log(y - x^2 + 1) \left(\sqrt{2x + y + 2} - 1 \right)$$

a Determinare il dominio di definizione e dire che tipo di insieme è (aperto, chiuso, limitato, connesso).

b Calcolare il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Esercizio 6 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} (y-1)x^4 e^{-\frac{y-1}{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a stabilire se è continua in $(0, 1)$;

b stabilire se è derivabile in $(0, 1)$;

d stabilire se è differenziabile in $(0, 1)$;

ESAME 14.6.2024 PARTE 1

SCHEMA SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

$$f: \vec{r}(t) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} t^2, t, 3t^2 \right) \quad t \in I = [0, 1]$$

a) le componenti di $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono continue $\Rightarrow \vec{r} \in C^0(I)$

$$\vec{r}(0) = (0, 0, 0) \neq \vec{r}(1) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 1, 3 \right)$$

$\Rightarrow$ la curva è aperta

$$\vec{r}'(t) = (3\sqrt{2}t, 1, 6t) \Rightarrow \vec{r} \in C^1(I)$$

$y'(t) = 1 > 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow$ la curva è semplice

$$b) \vec{r}'(t) = (3\sqrt{2}t, 1, 6t)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{18t^2 + 1 + 36t^2} = \sqrt{54t^2 + 1} \neq 0 \quad \forall t \in I$$

$$c) \vec{r} \in C^1(I) \text{ e } |\vec{r}'(t)| \neq 0 \quad \forall t \in I$$

$\Rightarrow$ la curva è regolare.

$$\int_{\gamma} (y+z) ds = \int_0^1 (y(t) + z(t)) |\vec{r}'(t)| dt =$$

$$= \int_0^1 (t + 3t^2) \sqrt{1 + 54t^2} dt = I$$

$$\sinh \theta = \sqrt{54} t \quad \cosh \theta d\theta = \sqrt{54} dt$$

$$\theta^* \text{ definido de } \sinh \theta^* = \sqrt{54}$$

$$I = \int_0^{\theta^*} \left(\frac{\sinh \theta}{\sqrt{54}} + \frac{3}{54} (\sinh \theta)^2 \right) \sqrt{1 + (\sinh \theta)^2} \frac{\cosh \theta d\theta}{\sqrt{54}}$$

$$= \int_0^{\theta^*} \left(\frac{\sinh \theta}{\sqrt{54}} + \frac{3(\sinh \theta)^2}{54} \right) \frac{(\cosh \theta)^2}{\sqrt{54}} d\theta$$

$$\sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \quad \cosh \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

$$= \int_0^{\theta^*} \left[\frac{(e^{\theta} - e^{-\theta})(e^{\theta} + e^{-\theta})^2}{54 \cdot 8} + \frac{3(e^{\theta} + e^{-\theta})^2 (e^{\theta} - e^{-\theta})^2}{16 \cdot 54 \cdot \sqrt{54}} \right] d\theta = \dots$$

Esercizio 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-2|^n}{|x-2|^{2n} + n^\alpha} \quad \alpha > 0$$

CN $\frac{|x-2|^n}{|x-2|^{2n} + n^\alpha} \sim \begin{cases} \frac{|x-2|^n}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 & \text{se } |x-2| < 1 \\ \frac{1}{|x-2|^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 & \text{se } |x-2| > 1 \\ \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 & \text{se } |x-2| = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ la CN è verificata $\forall \alpha > 0$.

a) $|x-2| < 1$ In questo caso

$$\frac{|x-2|^n}{|x-2|^{2n} + n^\alpha} \sim \frac{|x-2|^n}{n^\alpha} = f_n(x)$$

Usiamo il criterio del rapporto

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \frac{n^\alpha}{|x-2|^n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} |x-2| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x-2| < 1$$

$\Rightarrow$ la serie converge puntualmente $\forall \alpha > 0$

$$\text{se } |x-2| < 1.$$

b) $|x-2| > 1$ in questo caso

$$\frac{|x-2|^m}{|x-2|^{2n+m\alpha}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{|x-2|^m} \quad \forall \alpha > 0$$

$\Rightarrow$ la serie è asintotica alla serie geometrica $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|x-2|} \right)^m$ che

converge purché $\frac{1}{|x-2|} < 1$

$\Rightarrow$ la serie converge puntualmente $\forall \alpha > 0$
se $|x-2| > 1$.

c) Per quanto visto ai punti a) e b)
dobbiamo studiare il caso $|x-2| = 1$

quindi la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1+m\alpha} \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\alpha} \quad \text{che converge se } \alpha > 1$$

$\Rightarrow$ Usando quanto visto ai punti a) e b)

$\Rightarrow$ la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$ se $\alpha > 1$.

d) $\alpha = \frac{1}{2} \quad |x-2| < 1 \quad I = [1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 1\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-2|^n}{|x-2|^{2n} + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Studio la convergenza totale della serie

$$|f_n(x)| = f_n(x) = \frac{|x-2|^n}{|x-2|^{2n} + \sqrt{n}} \leq \frac{\delta^n}{\sqrt{n}} \quad \text{se } |x-2| \leq \delta < 1$$

$$|x-2| \leq \delta < 1 \Leftrightarrow x \in [2-\delta, 2+\delta] = I_\delta \quad \delta \in (0, 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^n}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \quad \begin{array}{l} \text{serie geometrica} \\ \text{convergente } \delta \in (0, 1) \end{array}$$

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente in $I_\delta \quad \forall \delta \in (0, 1)$

Posso applicare le teoremi sulle continuità della somma della serie, infatti: $\forall \delta \in (0, 1)$

i) $f_n(x) \in C^0(I_\delta)$

ii) la serie $\sum_n f_n(x)$ converge totalmente in I_δ

$\Rightarrow$ la somma della serie $S(x) \in C^0(I_\delta)$

Inoltre dato che $\forall x \in I \exists \delta \in (0, 1) : x \in I_\delta$ possiamo concludere che $S(x) \in C^0(I)$.

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-2|^n}{(x-2)^{2n} + m^\alpha}$$

Per semplicità del calcolo pongo $y = x-2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y|^n}{y^{2n} + m^\alpha}$$

$$f_n(y) = \frac{|y|^n}{y^{2n} + m^\alpha} \text{ è pari}$$

Studio la derivata per $y \geq 0$ $f_n(y) = \frac{y^n}{y^{2n} + m^\alpha}$

$$f'_n(y) = \frac{n y^{n-1} (y^{2n} + m^\alpha) - 2n y^{2n-1} y^n}{(y^{2n} + m^\alpha)^2} =$$

$$= \frac{n y^{n-1} (m^\alpha - y^{2n})}{(y^{2n} + m^\alpha)^2} \geq 0 \Leftrightarrow y^{2n} \leq m^\alpha$$

$$\Leftrightarrow y \leq m^{\alpha/2n} \Rightarrow y = m^{\alpha/2n} \text{ è un pto di max}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = f_n(m^{\alpha/2n}) = \frac{m^{\alpha/2}}{2 m^\alpha} = \frac{1}{2 m^{\alpha/2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 n^{\alpha/2}}$$

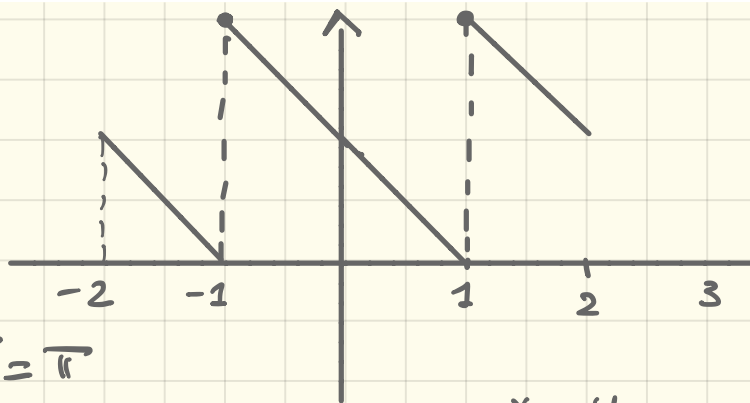
converge se $\frac{\alpha}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ se $\alpha > 2$.

ESERCIZIO 3

$$f(x) = 1-x, x \in [-1, 1]$$

$$T=2$$



a) $f \in C^0(-1, 1)$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$f(-1^+) = 2 \neq f(1^-) = 0$$

y =

$$x \quad y$$

$$-2 \quad 1$$

$$-1 \quad 0$$

$$y = -x - 1$$

$$a_0 = \int_{-1}^1 (1-x) dx = x - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^1 = 2$$

$$a_k = \int_{-1}^1 (1-x) \cos(k\omega x) dx =$$

$$= (1-x) \frac{1}{k\omega} \sin(k\omega x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \left(-\frac{\sin(k\omega x)}{k\omega} \right) dx = 0$$

$$b_k = \int_{-1}^1 (1-x) \sin(k\omega x) dx =$$

$$= -(1-x) \frac{\cos(k\omega x)}{k\omega} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\cos(k\omega x)}{k\omega} dx = \frac{2(-1)^k}{k\omega}$$

$$f \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k\omega} \sin(k\omega x)$$

b) Una successione di funzioni $f_n(x): [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge in media quadratica ad $f(x): [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sse $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx = 0$

$f(x) = 1-x$ $x \in [-1,1]$ $T=2$ è una funzione limitata ed integrabile in $[-1,1]$ posso quindi applicare il teorema sulla convergenza in media quadratica delle serie di Fourier

$\Rightarrow$ la serie di Fourier di f converge in media quadratica ad f ovvero data

$$S_n f(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^k}{k\pi} \sin(k\pi x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 (S_n f(x) - f(x))^2 dx = 0$$

c) $f(x)$ è monotona a tratti (vedi grafico)

$\Rightarrow$ Posso applicare le teoremi sulla convergenza puntuale della serie di Fourier delle funzioni monotone a tratti che dice
la serie converge puntualmente $\forall x \in I = [-1, 1]$
ed inoltre la somma della serie $S(x)$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \forall x \in (-1, 1) \\ \frac{f(-1^+) + f(1^-)}{2} & \forall x = -1, 1 \end{cases}$$

Dato che $f(x) \in C^0(-1, 1) \Rightarrow$

$$S(x) = \begin{cases} 1-x & x \in (-1, 1) \\ 1 & x = -1, 1 \end{cases}$$

d) $f(-1^+) \neq f(1^-)$ la condizione di periodo non è verificata, la serie non è dividibile termine a termine. Questo è in accordo

$$\text{con } b_k = \frac{2(-1)^k}{k\pi}$$

Esercizio 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{\sqrt[4]{n+3}}{n^3+2+\lg n}}_{f_n(x)} [\sin(nx) + \cos(nx)] \quad x \in [0, 2\pi]$$

CN

$$Q_n = \frac{\sqrt[4]{n+3}}{n^3+2+\lg n} \sim \frac{1}{n^{11/4}} \rightarrow 0 \quad \forall x \in [0, 2\pi]$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{\sqrt[4]{n+3}}{n^3+2+\lg n} \quad \forall x \in [0, 2\pi]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n+3}}{n^3+2+\lg n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/4}} < +\infty$$

$\Rightarrow$ La serie converge assolutamente in $[0, 2\pi]$

$\Rightarrow$ 1) La serie converge puntualmente $\forall x \in [0, 2\pi]$

2) Dato che $f_n(x) \in C^0([0, 2\pi])$ posso applicare il teorema sulla continuità della somma della serie $S(x) \Rightarrow S(x) \in C^0([0, 2\pi])$

Per la derivabilità f.a.t. devo verificare

- i) $f_n(x) \in C^1([0, 2\pi])$ ok iii) $\sum_n f'_n(x)$ converge
 ii) $\sum_n f_n(x)$ converge ok TOTALMENTE
 $\hookrightarrow$

$$f'_m(x) = (-1)^m \frac{m(\sqrt[4]{m+3})}{m^3+2+\lg m} [\cos(mx) - \sec(mx)]$$

$$|f'_m(x)| \leq \frac{m(\sqrt[4]{m+3})}{m^3+2+\lg m}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(\sqrt[4]{m+3})}{m^3+2+\lg m} \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{7/4}} \quad \text{converge}$$

$$\Rightarrow \sum_n f_n(x) \text{ converge totalmente}$$

$\Rightarrow$ la serie è derivabile t. a. t. ovunque

$$S'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f'_m(x)$$

Affinché possa essere la serie di Fourier di una funzione limitata si deve avere che

$$\sum_n a_n^2 \text{ sia convergente}$$

$$\sum_n a_n^2 \sim \sum_n \frac{1}{n^{1/2}} \text{ convergente}$$

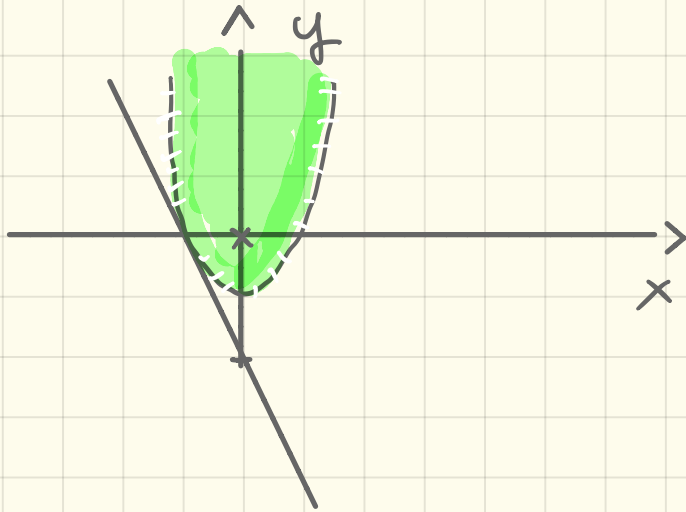
$\Rightarrow$ Può essere la serie di Fourier di una funzione limitata integrabile.

ESERCIZIO 5

$$f(x, y) = \frac{12x^4 + (4-x^2)^3}{|x|^3 + 3|4-x^2|^3} \lg(4-x^2+1) (\sqrt{2x+y+2}-1)$$

Domínio

$$\begin{cases} x^3 + 3|4-x^2|^3 \neq 0 \\ 4-x^2+1 > 0 \\ 2x+y+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \neq (0, 0) \\ y > x^2 - 1 \\ y \geq -2x - 2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} y > x^2 - 1 \\ y \geq -2x - 2 \end{array} \right.$$



1) è connesso, iecimitato ed aperto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \quad \text{infatti}$$

$$|f(x,y) - 0| = \frac{12x^4 + (4-x^2)^3}{|x|^3 + 3|4-x^2|^3} |\lg(4-x^2+1)| |\sqrt{2x+y+2}-1|$$

$$\leq \left[\frac{2x^4}{|x|^3} + \frac{|4-x^2|^3}{3|4-x^2|} \right] |\lg(4-x^2+1)| |\sqrt{2x+y+2}-1|$$

$$= \left(2|x| + \frac{1}{3} \right) |\lg(4-x^2+1)| |\sqrt{2x+y+2}-1| \rightarrow 0 \quad (x,y) \rightarrow (0,0)$$

ESERCIZIO 6

$$D = \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \begin{cases} (y-1)x^4 e^{-\frac{y-1}{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a) La funzione è continua in $(0, 1)$

$$\text{se } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} f(x, y) = f(0, 1) = 0$$

Faccio le limite lungo

$$y-1 = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x+1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^5 e^{-\frac{1}{x^3}} = \begin{cases} 0 & x \rightarrow 0^+ \\ +\infty & x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le limite non esiste $\Rightarrow$ la funzione

non è continua in $(0, 1)$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = \left. \frac{d}{dx} f(x, 1) \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} 0 \right|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = \left. \frac{d}{dy} f(0, y) \right|_{y=1} = \frac{d}{dy} 0 = 0$$

La funzione è derivabile in $(0, 1)$

c) Dal punto a) si vede che la funzione non è continua in $(0, 1) \Rightarrow$ non è differenziabile.