

ANALISI MATEMATICA 2 (9 CFU)

2 Parte 25.6.2025

Cognome.....

Nome.....

n.matricola

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{y-2} e^{-\frac{(y-2)^2}{x^4}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

a determinare il suo insieme di definizione e stabilire se è continua e derivabile in $(0, 2)$;

b calcolare le derivate direzionali in $(0, 2)$ rispetto al generico versore $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ e verificare se è valida la formula del gradiente;

c dare la definizione di differenziabilità in un punto e stabilire se f è differenziabile in $(0, 2)$.

Esercizio 2 Dato il parabolide S avente come base il cerchio $(x-1)^2 + y^2 \leq 9$ e come vertice il punto $(1, 0, 8)$ riempito di un materiale con densità proporzionale alla distanza dalla base. Calcolare la terza componente del baricentro.

Esercizio 3 Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = (x-1)^4 + y^4 - 2(x-y-1)^2 + 3$$

a Determinare il dominio, calcolare il gradiente e la matrice Hessiana di f .

b Determinare i punti critici di f e studiarne la natura.

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\alpha x z + \frac{(y-1)z}{x}, z \log x - \frac{\alpha^2(y-1)}{2} \log z, x^\alpha + (y-1) \log x - \frac{(y-1)^2}{z} \right)$$

a determinare il dominio;

b stabilire per quali valori di α è conservativo in $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x > 0, z > 0\}$;

c per i valori di α determinati, calcolare il potenziale di $\mathbf{F}$ che si annulla in $(1, 1, 1)$.

d Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ per andare dal punto $(2, 2, 3)$ al punto $(3, 7, 2)$ lungo il segmento che congiunge i due punti.

Esercizio 5 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-z, 2(x-1), y)$$

a enunciare il teorema di Stokes

b utilizzare il teorema per calcolare la circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo la curva intersezione tra il paraboloide $z = (x-1)^2 + y^2$ ed il piano $z = 8$, indicando l'orientamento scelto.

c scrivere in forma parametrica la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = (x-1)^2 + y^2, z \in [0, 8]\}$ e studiarne la regolarità.

Esercizio 6 Calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(y+3, x, z\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} \right)$$

uscente dalla superficie del cilindro

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (y+3)^2 + x^2 - 2x \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}$$

ESAME 25.06.2025 PARTE 2 SCHEMA SOLUZIONE

Es. 1

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{y-2} e^{-\frac{(y-2)^2}{x^4}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

$$\text{CONTINUITÀ} \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} f(x,y) = 1$$

$$|f(x,y) - 1| = \left| \sqrt[3]{y-2} e^{-\frac{(y-2)^2}{x^4}} \right| \leq \sqrt[3]{|y-2|} \rightarrow 0 \quad (x,y) \rightarrow (0,2)$$
$$\Rightarrow f \text{ è continua in } (0,2)$$

DERIVABILITÀ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = \left. \frac{d}{dx} f(x,2) \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} 1 \right|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = \left. \frac{d}{dy} f(0,y) \right|_{y=2} = \left. \frac{d}{dy} 0 \right|_{y=2} = 0$$

$$\nabla f(0,2) = (0,0) \Rightarrow f \text{ è derivabile in } (0,2)$$

$$D_v f(0,2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \theta, 2 + t \sin \theta) - f(0,2)}{t} \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t} \sin \theta e^{-\frac{\sin^2 \theta}{t^2 \cos^4 \theta}}}{t} = 0 \Leftrightarrow \cos \theta \neq 0$$

$$\cos \theta = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow D_{\hat{r}} f(0,2) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 0 \Rightarrow D_{\hat{r}} f(0,2) = (0,0) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

$\Rightarrow$ la formula del gradiente è

$$\text{verificata} \quad D_{\hat{r}} f(0,2) = \nabla f \cdot \hat{r} = 0$$

f è differenziabile in $(x_0, y_0) \Leftrightarrow \vec{h} = (h, k)$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{h}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Differenziabilità in $(0,2)$:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{k} e^{-\frac{k^2}{h^4}}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\text{Se } k^2 = h^4 \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{k} e^{-1}}{\sqrt{|k| + k^2}} \sim \lim_{k \rightarrow 0^{\pm}} \frac{k^{1/3} e^{-1}}{|k|^{1/2}} = \pm \infty$$

$\Rightarrow f$ non è DIFFERENZIABILE in $(0,2)$

Ex. 3

$$f(x,y) = (x-1)^4 + y^4 - 2(x-y-1)^2 + 3 \quad D = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x-1)^3 - 4(x-y-1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x-y-1) = 0$$

Soummons

$$\begin{cases} (x-1)^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + (x-1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -y \\ y^3 + (-y-y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(y^2 - 2) = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (1,0) & (1-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ & (1+\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \end{matrix}$$

Dérivée seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12(x-1)^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(1,0) = 0 \Leftrightarrow$ non posso dire nulla

Studio dell'incremento in $(1,0)$

$$\Delta f(1,0) = f(x,y) - f(1,0) = (x-1)^4 + y^4 - 2(x-1-y)$$

$$\Delta f \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^4 + y^4 - 2(x-1-y) \geq 0$$

$$\text{Se } x=1 \quad \Delta f(1,0) = y^4 + 2y = y(y^3 + 2)$$

$$y(y^3 + 2) \geq 0 \quad \begin{array}{c} \sqrt[3]{-2} \quad 0 \\ \text{---|---|---} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array}$$

Im $y=0$ $\Delta f(1,0)$ cambia segno in fatti

$$\Delta f(1,0) \Big|_{x=1} \begin{cases} \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0 \\ \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (1,0) \text{ è un punto di sella}$$

Es. 3

Paraboloide con vertice in $(1, 0, 8)$

$$(x-1)^2 + y^2 + z - 8 \leq 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow z = -1$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + z - 8 \leq 0 \quad z \in [-1, 8] \right\}$$

$$\rho = c(z+1) \quad z+1 = \text{distanza dalla base}$$

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^8 c(z+1) \left(\iint_{(x-1)^2 + y^2 \leq 8-z} dx \, dy \right) dz \\ &= c \int_{-1}^8 (z+1) \pi (8-z)^2 \, dz = \pi c \int_{-1}^8 (z+1)(64 + z^2 - 16z) \, dz = \dots \end{aligned}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \frac{1}{M} \int_{-1}^8 z c(z+1) \left(\iint_{(x-1)^2 + y^2 \leq 8-z} dx \, dy \right) dz \dots$$

$$H_f(1-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = H_f(1+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$20 > 0 \quad \det H_f(1-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20^2 - 4^2 > 0$$

$\Rightarrow (1-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(1+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sono
pti di minimo locale forte

Es. 4

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\alpha x z + \frac{(y-1)z}{x}, z \log x - \frac{\alpha^2(y-1)}{2} \log z, x^\alpha + (y-1) \log x - \frac{(y-1)^2}{z} \right)$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, z > 0\} = E$$

Il dominio è un insieme aperto illimitato e semplicemente connesso

$\Rightarrow$ i valori di α che rendono il campo

conservativo sono quelli tali che $\nabla \wedge \vec{F} = 0$

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \\ &= \hat{i} \left(\log x - \frac{z(y-1)}{z} - \log x + \frac{\alpha^2(y-1)}{2z} \right) + \\ &\quad - \hat{j} \left(\alpha x^{\alpha-1} + \frac{y-1}{x} - \alpha x - \frac{y-1}{x} \right) + \\ &\quad + \hat{k} \left(\frac{z}{x} - \frac{z}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha^2}{2} = 2 \\ \alpha - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2 \end{aligned}$$

$\vec{F}$ é conservativo $\Leftrightarrow \alpha=2$

Campo é Potencial U

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \\ \frac{\partial U}{\partial z} = F_3 \end{array} \right. \Rightarrow U(x, y, z) = \int (2xz + (y-1)z) dx$$
$$= x^2 z + (y-1)z \lg x + C(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = z \lg x + \frac{\partial C}{\partial y} = z \lg x - 2(y-1) \lg z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = -2(y-1) \lg z \Rightarrow C(y, z) = -(y-1)^2 \lg z + C(z)$$

$$U(x, y, z) = x^2 z + (y-1)z \lg x - (y-1)^2 \lg z + C(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^2 + (y-1) \lg x - \frac{(y-1)^2}{z} + C'(z) = x^2 + (y-1) \lg x - \frac{(y-1)^2}{z}$$

$$\Rightarrow C'(z) = 0 \Rightarrow C'(z) = C$$

$$U(x, y, z) = x^2 z + (y-1)z \lg x - (y-1)^2 \lg z + C$$

$$U(1, 1, 1) = 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -1$$

$$U(x, y, z) = x^2z + (y-1)z \lg x - (4-y)^2 \lg z - 1$$

$$\mathcal{L} = U(3, 7, 2) - U(2, 2, 3) = \dots$$

Es. 5

$$\vec{F}(x, y, z) = (-z, 2(x-1), y)$$

Intersezione paraboloide e piano

$$\begin{cases} z = (x-1)^2 + y^2 \\ z = 8 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 8 \quad \&$$

Per il teorema di Stokes

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds \quad \partial \Sigma = C$$

Posso scegliere come superficie S

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 8, z = 8\}$$

$$\hat{n} = (0, 0, 1)$$

$$\begin{cases} x = 1 + p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \\ z = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} p \in [0, 2\sqrt{2}] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$\vec{r}_p = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \vec{r}_p \wedge \vec{r}_\theta = (0, 0, p)$$

$$\vec{r}_\theta = (-p \sin \theta, p \cos \theta, 0) \quad ds = |\vec{r}_p \wedge \vec{r}_\theta| dp d\theta$$
$$ds = p dp d\theta$$

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -z & 2(x-1) & y \end{vmatrix} = (1, -1, 2)$$

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} (1, -1, 2) \cdot (0, 0, 1) \, \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2\rho \, d\rho = 2\pi \cdot 8 = 16\pi \end{aligned}$$

Superficie $z = (x-1)^2 + y^2 = f(x, y)$

$\vec{r}(u, v)$

$$\begin{cases} x = u+1 \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \quad 0 \leq u^2 + v^2 \leq 8 \quad \begin{array}{l} \text{superficie} \\ \text{Cotesiana} \end{array}$$

$$|\vec{r}(u, v)| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \neq 0 \quad \forall (u, v)$$

$$f \in C^1$$

$\Rightarrow$ la superficie è regolare

Es. 6

$$\vec{F}(x, y, z) = (y+3, x, z \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2})$$

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y+3)^2 + x^2 - 2x \leq 0, 0 \leq z \leq 1\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y+3)^2 + (x-1)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}\end{aligned}$$

Flusso del campo

$$\Phi(\vec{F}, \partial\Sigma) = \iint_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, dS = \text{TEO. DIVERGENTA}$$

$$= \iiint_{\Sigma} \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 + 0 + \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2}$$

Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = 1 + \rho \cos \theta \\ y = -3 + \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{aligned} \rho &\in [0, 1] \\ \theta &\in [0, 2\pi] \\ z &\in [0, 1] \end{aligned}$$

$$dx dy dz = \rho d\rho d\theta dz$$

$$\Phi(\vec{F}, \partial Z) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \, \rho d\rho d\theta dz = \frac{2\pi}{3}$$