

ANALISI MATEMATICA 2 (9CFU)

1 Parte 25.6.2025

n.matricola

Cognome

Nome

Esercizio 1 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{n + n^4 x^4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a Determinare l'insieme di convergenza puntuale.

b Determinare l'insieme di continuità della somma della serie.

c Determinare l'insieme di derivabilità termine a termine.

Esercizio 2

Una molla a forma di elica, di equazione

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

a stabilire se la curva è: continua, chiusa, semplice;

b calcolare il vettore derivato e il suo modulo;

c stabilire se la curva è regolare precisando in caso contrario i punti non regolari;

d sapendo che la molla ha densità lineare di massa $\rho(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$, calcolare la massa e le coordinate del suo baricentro.

Esercizio 3 Data la funzione periodica di periodo $T = 2\pi$ definita sull'intervallo $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = x + 1 \quad x \in (-\pi, \pi]$$

a disegnare il grafico in $[-2\pi, 2\pi]$ e, usando la teoria, calcolare la somma della serie di Fourier associata ad $f(x)$;

b calcolare i coefficienti di Fourier di f , $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$;

c studiare la convergenza quadratica, puntuale e totale della serie di Fourier specificando il valore a cui essa converge nel punto $x = \pi$;

d dedurre il valore della somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2}.$$

Esercizio 4

a Utilizzando la serie geometrica, scrivere come serie di potenze la funzione

$$f(x) = \frac{3}{1 + (x - 1)^2}$$

precisando il raggio di convergenza.

b Integrando termine a termine, calcolare la somma della serie ottenuta.

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{(y - 1)^2 \sin(\pi x)}{[(x - 2)^2 + (y - 1)^2]^\alpha} [\log[(x - 2)^2 + y + 2] - \log(1 + y)]$$

a Determinarne il dominio di definizione e dire che tipo di insieme è (aperto, chiuso, limitato, connesso).

b Studiare il segno di f e dire per quali valori di $\alpha > 0$ può essere prolungata con continuità in $(2, 1)$.

Esercizio 6 Dati $\alpha > 0$ e la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2 y}{[(x-1)^2 + y^2]^\alpha} (|x - 1| + |y|) & (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

a stabilire i valori di α per cui è continua in $(1, 0)$;

b stabilire i valori di α per cui è derivabile in $(1, 0)$ ed, in caso affermativo, calcolare $\nabla f(1, 0)$;

c stabilire i valori di α per cui è differenziabile in $(1, 0)$.

ESAME 25.6.2025 SCHEMA SOLUZIONI PARTE 1

Es. 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{1+n^4 x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2}{1+n^3 x^4} \quad D = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{CN} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{x \neq 0}{\sim} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 x^2} = 0 \\ \quad \quad f_n(0) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{la CN è verificata} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Convergenza puntuale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2}{1+n^3 x^4} \stackrel{x \neq 0}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow$ La serie converge $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x=0 \quad f_n(0) = 0 \Rightarrow$ La serie converge in $x=0$

$\Rightarrow$ La serie converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$

Dato che $f_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ convergenza
ossente e puntuale coincidono.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2}{1+n^3 x^4} = S(x) \rightarrow \text{SOMMA della serie}$$

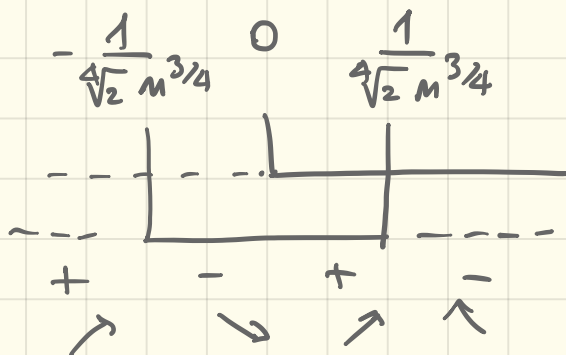
Per la continuità di $S(x)$
studio la convergenza totale

$$f_n(x) = m \frac{x^2}{1+m^3 x^4}$$

$$f'_n(x) = m \frac{2x(1+m^3 x^4) - x^2 4m^3 x^3}{(1+m^3 x^4)^2} = \frac{2x - 2m^3 x^5}{(1+m^3 x^4)^2}$$

$$= \frac{2x(1-2m^3 x^4)}{(1+m^3 x^4)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x(1-2m^3 x^4) \geq 0$$

$$x^4 \leq \frac{1}{2m^3} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2} m^{3/2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt[4]{2} m^{3/4}} < x < \frac{1}{\sqrt[4]{2} m^{3/4}}$$



$$f_n(x) \rightarrow 0$$

$x \rightarrow \pm\infty$

Le funzioni hanno un

$$\text{max in } x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2} \sqrt{m}}$$

$$f_n\left(\pm \frac{1}{(2m^3)^{1/4}}\right) = m \frac{\frac{1}{(2m^3)^{1/2}}}{1+m^3 \frac{1}{2m^3}} = \frac{m}{m^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{m}} = a_m \text{ me } \sum_{m=1}^{\infty} a_m = +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie non converge TOTALMENTE in $\mathbb{R}$.

$$\text{Definisco } I_\delta = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \delta\} \quad \delta > 0$$

$$|f_m(x)| = \frac{mx^2}{1+m^3x^4} \leq \frac{1}{m^2x^2} \leq \frac{1}{m^2\delta^2} \quad \forall x \in I_\delta$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2\delta^2} = \frac{1}{\delta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie converge TOTALMENTE in $I_\delta \quad \forall \delta > 0$

inoltre $f_m(x) \in C^0(I_\delta) \quad \delta > 0$

$\Rightarrow$ posso applicare il teorema sulla
continuità della somma delle serie in I_δ

$$\Rightarrow S(x) \in C^0(I_\delta) \quad \forall \delta > 0$$

ESTENSIONE della CONTINUITÀ a $\mathbb{R}$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : x_0 \in I_\delta \Rightarrow$$

dato che $S(x) \in C^0(I_\delta) \Rightarrow S(x)$ è

continua in $x_0 \Rightarrow S(x) \in C^0(\mathbb{R})$

DERIVABILITÀ TERMINE A TERMINE

$$f'_n(x) = \frac{2x - 2n^3x^5}{(1+n^3x^4)^2}$$

Per applicare le tesi su I_δ $\delta > 0$

- i) $f_n \in C^1(I_\delta)$ ok
- ii) $\sum_n f_n(x)$ converge $\forall x \in I_\delta$ ok
- iii) $\sum_n f'_n(x)$ converge totalmente in I_δ

Dimostro iii)

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{2x - 2n^3x^5}{(1+n^3x^4)^2} \right| \leq \frac{2|x|}{(1+n^3x^4)^2} + \frac{2n^3|x^5|}{(1+n^3x^4)^2}$$

$$\leq 2 \frac{1}{n^6 x^8} + \frac{2}{n^3 |x|^3} \leq \frac{2}{n^6 \delta^8} + \frac{2}{n^3 \delta^3} = Q_n \quad \forall x \in I_\delta$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n = \frac{2}{\delta^8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} + \frac{2}{\delta^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge totalmente
in I_δ $\forall \delta > 0$.

$\Rightarrow$ la serie è derivabile t.a.t. in I_δ
 $\forall \delta > 0$

Estensione derivabilità t.a.t. in $\mathbb{R}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : x_0 \in I_\delta$

dato che la serie è derivabile t.a.t.

in I_δ lo è anche in x_0

$\Rightarrow$ la serie è derivabile t.a.t. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Es. 2

$$\gamma: \vec{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2t) \quad t \in [0, 2\pi] = I$$

$\vec{r}(t)$ è continua poiché lo sono le sue componenti: $x(t), y(t), z(t)$

$$\vec{r}(0) = (2, 0, 0) \neq \vec{r}(2\pi) = (2, 0, 2\pi)$$

$\Rightarrow$ la curva è aperta

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 2)$$

$z'(t) = 2 > 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow$ la componente $z(t)$ è

monotona $\Rightarrow \vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2) \quad \forall t_1 \neq t_2$

$\Rightarrow$ la curva è semplice.

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4} = \sqrt{5} \neq 0 \quad \forall t \in I$$

Dato che $\vec{r} \in C^1(I)$ e $\vec{r}'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow$ la curva è regolare

$\rho(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$ densità lineare di massa

$$\begin{aligned} m &= \int_{\gamma} \rho \, ds = \int_0^{2\pi} \rho(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + 4t^2) \sqrt{5} \, dt = \\ &= \sqrt{5} \int_0^{2\pi} (1 + 4t^2) \, dt = \sqrt{5} \left(2\pi + \frac{4}{3} (2\pi)^3 \right) \end{aligned}$$

Coordinate del baricentro

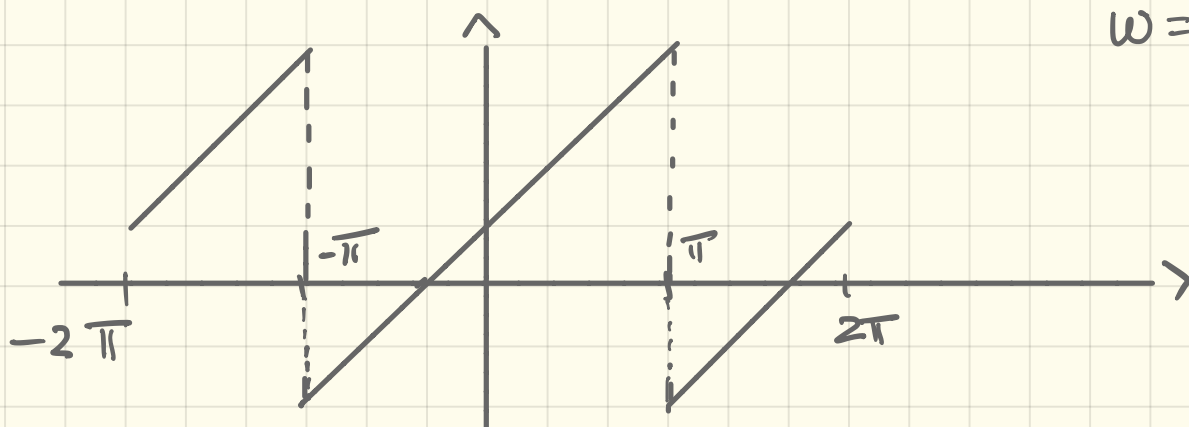
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \int_{\gamma} x \rho \, ds = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} x(t) \rho(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| \, dt \\ &= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) (1 + 4t^2) \sqrt{5} \, dt \\ &= \frac{\sqrt{5}}{m} \int_0^{2\pi} (1 + 4t^2 + \cos t + 4t^2 \cos t) \, dt = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{m} \left[2\pi + \frac{4}{3} (2\pi)^3 + \underbrace{4t^2 \sin t}_0 \bigg|_0^{2\pi} - 8 \int_0^{2\pi} t \sin t \, dt \right] \\ &= \frac{\sqrt{5}}{m} \left[2\pi + \frac{4}{3} (2\pi)^3 + 8t \cos t \bigg|_0^{2\pi} \right] = 1 + \frac{\sqrt{5}}{m} 16\pi \end{aligned}$$

gli calcoli
di $\bar{y}$ e
 $\bar{z}$ e
analoghi.

Es. 3

$$f(x) = x + 1 \quad x \in (-\pi, \pi] \quad T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$



Dal grafico si vede che f è regolare e tratti.

$$f \in C^1([-\pi, \pi]) \quad f(-\pi^+) = -\pi + 1 \neq f(\pi^-) = \pi + 1$$

$$f' = 1 \quad x \in (-\pi, \pi) \quad f \text{ non è derivabile in } x = \pm\pi$$

$$f'(-\pi^+) = 1 \quad f'(\pi^-) = 1$$

Posso applicare le teoremi della convergenza puntuale delle serie di Fourier $\Rightarrow$ La somma è

$$S(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} & x = \pm\pi \end{cases}$$

$$\text{Dato che } f \in C^0([-\pi, \pi]) \Rightarrow S(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ 1 & x = \pm\pi \end{cases}$$

Coef. d. Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x+1) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 + x \right]_{-\pi}^{\pi} = 2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x+1) \cos(kx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x \cos kx}_{\text{dispar}} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos kx}_{=0} dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x+1) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{k} \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{k} \cos k\pi + \frac{\pi}{k} \cos k\pi \right] = -\frac{2(-1)^k}{k}$$

$$f(x) \sim 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx$$

Convergenza Quadratica

f è limitata ed integrabile ^{TEO} $\Rightarrow$ la serie di Fourier converge in media quadratica ad $f(x)$ ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (S_n f(x) - f(x))^2 dx = 0$$

dove $S_n f(x) = 1 - 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \sin kx$

Somma parziale di Fourier

Convergenza puntuale $\rightarrow$ già trattato nel calcolo di $S(x)$

Convergenza totale

$$\max_{x \in (-\pi, \pi)} |f_k(x)| = \max_{x \in (-\pi, \pi)} \left| -2 \frac{(-1)^k}{k} \sin kx \right| = \frac{2}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} = +\infty \Rightarrow \text{la serie non}$$

converge totalmente

Dal calcolo della $S(x)$ si vede che $S(\pi) = 1$

Identità di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} (x+1)^2 dx = \pi \left[\frac{4}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + 2x + 1) dx = \cancel{\frac{2}{3}} \pi^{\cancel{3}} + \cancel{2\pi} = \cancel{2\pi} + \cancel{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2} = \pi^2$$

Es. 4

$$f(x) = \frac{3}{1 + (x-1)^2} = \frac{3}{1 - [-(x-1)^2]} =$$
$$= 3 \sum_{n=0}^{\infty} [-(x-1)^2]^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^{2n}$$

serie geometrica convergente se $|x-1| < 1$

$$R = 1 \quad x_0 = 1$$

$$f(x) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^{2n}$$



Usando le proprietà delle serie di potenze
posso integrare termine a termine su

$$I = (0, 2)$$

$$\int f(x) dx = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int (x-1)^{2n} dx$$

↓

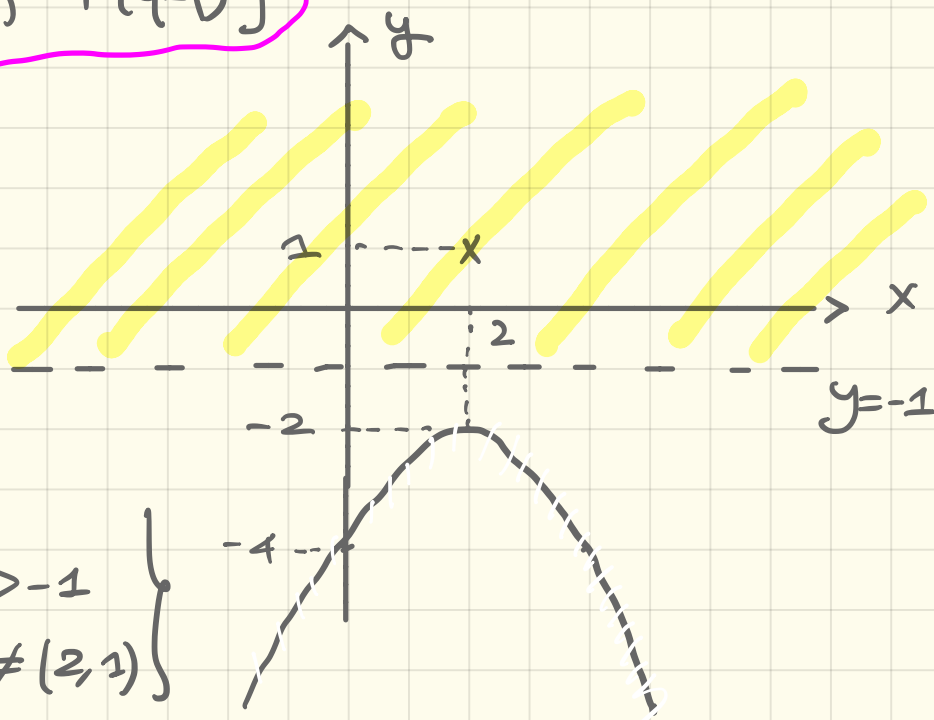
$$3 \text{ integ}(x-1) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x-1)^{2n+1}$$

Es. 5

$$f(x,y) = \frac{g(x,y) \sin(\pi x)}{[(x-2)^2 + (y-1)^2]^\alpha} h(x,y)$$

$g(x,y)$ $h(x,y)$

$$\begin{cases} (x,y) \neq (2,1) \\ y > -(x-2)^2 - 2 \\ y > -1 \end{cases}$$



$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} y > -1 \\ (x,y) \neq (2,1) \end{array} \right\}$$

insieme aperto, illimitato, connesso

Studio del segno

$$f(x,y) = g(x,y) \sin(\pi x) h(x,y)$$

$$g(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in D$$

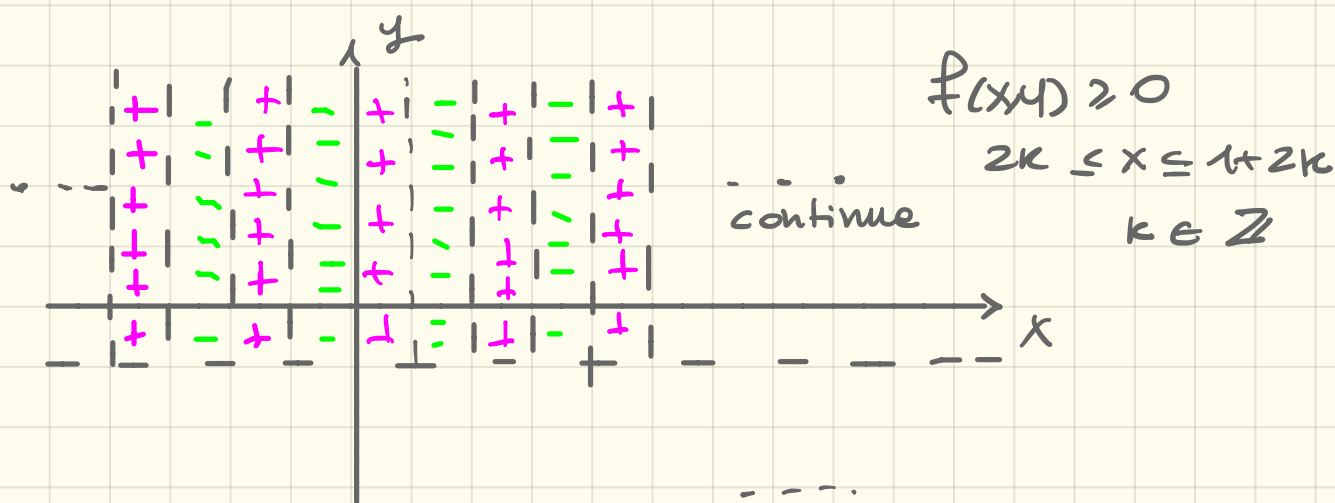
$$h(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in D \quad \text{perché}$$

$$(x-2)^2 + y + 2 \geq y + 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 \geq 0$$

$$\sin(\pi x) \geq 0 \Leftrightarrow +2k\pi \leq \pi x \leq \pi + 2k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow 2k \leq x \leq 1 + 2k$$



Studio $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} f(x, y)$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} h(x, y) = \lg 3 - \lg 2 = \lg \frac{3}{2}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} g(x, y) \sin(\pi x) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{se } \alpha < \frac{3}{2} \\ \text{infatti} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 + \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array}$$

Coordinate polari:

$$|g(1 + \rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin(\pi(1 + \rho \cos \theta))| =$$

$$= \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^{2\alpha}} |\sin(\pi + \pi \rho \cos \theta)| =$$

$$= \rho^{2-2\alpha} \sin^2 \theta |\sin \pi \cos \pi \rho \cos \theta + \cos \pi \sin(\pi \rho \cos \theta)|$$

$$= \rho^{2-2\alpha} \sin^2 \theta |\sin(\pi \rho \cos \theta)| \leq \rho^{3-2\alpha} \pi \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \quad \alpha < \frac{3}{2}$$

$$\leq \rho^{3-2\alpha} \pi \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \quad \text{se } \alpha < \frac{3}{2} \quad \rightarrow$$

se $\alpha > \frac{3}{2}$ il limite non esiste infatti:

$$g(1+\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin(\pi \rho \cos \theta) \sim \rho^{2-2\alpha} \sin^2 \theta \rho \pi \cos \theta$$
$$= \pi \rho^{3-2\alpha} \sin^2 \theta \cos \theta \left\{ \begin{array}{l} \pi \sin^2 \theta \cos \theta \text{ se } \alpha = \frac{3}{2} \\ \pm \infty \text{ se } \alpha > \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

↓
dipende dal segno
di $\cos \theta$

Es. 6

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2 y}{[(x-1)^2 + y^2]^\alpha} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

f è continua in $(1,0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{\text{Coord. polari} \\ (x,y) \rightarrow (1,0)}} f(x,y) = f(1,0) = 0$

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| \stackrel{\downarrow}{=} \frac{\rho^4 \cos^2 \theta |\sin \theta| (|\cos \theta| + |\sin \theta|)}{\rho^{2\alpha}} \\ \leq 2 \rho^{4-2\alpha} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4-2\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 2$$

$\Rightarrow f$ è continua in $(1,0)$ se $\alpha < 2$

Se $\alpha \geq 2$ il limite non esiste infatti

$$f = \rho^{4-2\alpha} \cos^2 \theta \sin \theta (|\cos \theta| + |\sin \theta|) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \begin{cases} \cos^2 \theta \sin \theta (|\cos \theta| + |\sin \theta|) & \alpha = 2 \\ \pm \infty & \alpha > 2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{d}{dx} f(x,0) \Big|_{x=1} = \frac{d}{dx} 0 \Big|_{x=1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{d}{dy} f(1,y) \Big|_{y=0} = \frac{d}{dy} 0 \Big|_{y=0} = 0$$

$$\nabla f(1,0) = (0,0)$$

$\forall \alpha > 0$

Differenziabilità $\vec{h} = (h, k)$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(1+h, k) - f(1,0) - \nabla f(1,0) \cdot \vec{h}}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^\alpha} \frac{(|h| + |k|)}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{\neq 0} \neq 0$$

Coordinate polari:

$$\begin{aligned} |f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - 0| &= |f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| = \\ &= \rho^{4-2\alpha-\frac{1}{2}} \cos^2 \theta |\sin \theta| (|\cos \theta| + |\sin \theta|) \leq \\ &\leq 2 \rho^{\frac{7}{2}-2\alpha} \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} 0 \iff \alpha < \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Per $\alpha \geq \frac{7}{4}$ il limite non esiste $\Rightarrow$

f è differenziabile per $\alpha < \frac{7}{4}$

non è differenziabile per $\alpha \geq \frac{7}{4}$