

ANALISI MATEMATICA 2 (9 CFU)

2 Parte 12.6.2023

Cognome.....

Nome.....

n.matricola

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y-1|^\alpha \cos x}{\sqrt{(y-1)^2 + x^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

si studi al variare del parametro $\alpha > 0$ **a** il dominio e la continuità;

b la derivabilità (derivate direzionali) ;

c la differenziabilità.

Esercizio 2 Determinare gli estremi locali e globali della funzione

$$f(x, y) = x^2 \log(2 + y) + x^2(y + 1)^2$$

Esercizio 3 Nel piano xy si consideri la lamina omogenea Ω avente la forma della corona circolare espressa in coordinate polari da $1 \leq \rho \leq 2$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 3\pi/2$. Calcolare le coordinate del baricentro della lamina.

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \left(\frac{z^2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}, \frac{z^2 y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}, 2z\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right).$$

a Stabilire il suo insieme di definizione.

b Verificare se il campo è irrotazionale e dimostrare che è conservativo senza calcolare il potenziale.

c Calcolarne un potenziale.

d Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 3)t \in [0, \pi]$

Esercizio 5 Dati il campo vettoriale $\vec{F}$ e la superficie S definiti da

$$\vec{F}(x, y, z) = (zy - y, x, z - 1) \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: y^2 = x^2 + 4(z - 1)^2, |y| \leq 1\}$$

a Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso S orientata verso l'esterno usando la definizione di flusso.

b Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso S orientata verso l'esterno usando il teorema di Stokes.

Esercizio 6 Sia Σ la superficie descritta da

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x - 1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

ed $\mathbf{F}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (z^3, z^2, z)$$

a Scrivere la superficie in forma parametrica e verificarne la regolarità.

b Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}$ attraverso Σ e verificare il teorema della divergenza.

ESAME 12.6.2023 PARTE 2

ESERCIZIO 1

$$f(x,y) = \begin{cases} |x-1|^\alpha \frac{\cos(2\pi x)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

Continuità: la funzione è continua

$$\forall (x,y) \neq (1,0)$$

per verificare la continuità in $(1,0)$
bisogna verificare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = 0$$

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = \frac{|x-1|^\alpha |\cos(2\pi x)|}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \cos(2\pi x) = 1$$

$$\text{Dimostrato che } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{|x-1|^\alpha}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$$

→

$$\left| \frac{|x-1|^\alpha}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} - 0 \right| = \rho^{\alpha-1} |\cos\theta|^\alpha$$

$$\rho^{\alpha-1} |\cos\theta|^\alpha \begin{cases} \leq \rho^{\alpha-1} \rightarrow 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ |\cos\theta|^\alpha & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \forall \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \alpha \in (0,1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la funzione è continua in $(1,0)$
se e soltanto se $\alpha > 1$.

Derivabilità e differentiabilità

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\alpha |x-1|^{\alpha-1} \sin(x-1) \cos 2\pi x - 2\pi \sin 2\pi x |x-1|^\alpha}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} +$$

$$- \frac{|x-1|^\alpha (x-1)}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} \cos(2\pi x) \quad \begin{matrix} (x,y) \neq (1,0) \\ x \neq 1 \text{ se } 0 < \alpha \leq 1 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{y}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} \cos(2\pi x) \quad (x,y) \neq (1,0)$$

Se $\alpha > 1$ $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\})$

$\Rightarrow f$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

Calcolo la derivata direzionale in $(1,0)$

$$D_{\hat{v}} f(1,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((1,0) + \hat{v}t) - f(1,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|^\alpha |\cos \theta|^\alpha \cos(2\pi t \cos \theta)}{t|t|} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} |t|^{\alpha-2} \operatorname{sgn} t |\cos \theta|^\alpha \cos(2\pi t \cos \theta) = \begin{cases} 0 & \alpha > 2 \\ \pm |\cos \theta|^\alpha & \alpha = 2 \\ 0 & \alpha = \pi/2, 3/2 \text{ e } t \in \mathbb{R} \\ \pm \infty & \alpha < 2 \end{cases}$$

La funzione è derivabile in $(1,0)$

se e soltanto se $\alpha > 2$

Se $0 < \alpha \leq 2$ la funzione non è derivabile

in $(1,0)$, esiste solo la derivata rispetto ad y .

Studio la differenziabilità in $(1,0)$ per $\alpha > 2$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|h|^\alpha \cos[2\pi(1+h)]}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos[2\pi(1+h)]$$

dimostro che

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|h|^\alpha}{h^2+k^2} = 0 \rightarrow$$

$$\left| \frac{|h|^\alpha}{h^2+k^2} - 0 \right| = \frac{|h|^\alpha}{h^2+k^2} = \rho^{\alpha-2} |\cos\theta|^\alpha \leq \rho^{\alpha-2} \xrightarrow{\alpha>2} 0$$

$\Rightarrow$ la funzione è differenziabile in $(1,0)$ per $\alpha > 2$

Studio la derivabilità in $(1, y_0)$, $y_0 \neq 0$, $0 < \alpha \leq 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, y_0) = \left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=1^\pm} = \pm \infty$$

$\Rightarrow$ la derivata non esiste in $(1, y_0)$ per $0 < \alpha \leq 1$

$\Rightarrow$ non è derivabile in $(1, y_0)$ per $0 < \alpha \leq 1$.

Ricapitolando

$$0 < \alpha \leq 1$$

f è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

f è derivabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=1\}$

$$1 < \alpha \leq 2$$

f è continua in $\mathbb{R}^2$

f è derivabile e differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

$$\alpha > 2$$

la funzione è continua, derivabile e differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}$$

$$f(x, y) = x^2 \lg(2+2y) + x^2(2y+1)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x (\lg(2+2y) + (2y+1)^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \left(\frac{2}{2+2y} + 4(2y+1) \right) = 0$$

1) $x=0$ retta di punti critici

$$2) \frac{1}{1+y} + 8y + 4 = 0$$

$$1 + 8y + 8y^2 + 4 + 4y = 0 \text{ mai infatti}$$

$$8y^2 + 12y + 5 = 0 \quad y = \frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{8}$$

$(0, y_0)$ $y_0 > -1$ retta di punti critici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 (\lg(2+2y) + (2y+1)^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 \left(-\frac{1}{(1+y)^2} + 8 \right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(\frac{1}{1+y} + 4(2y+1) \right) 2x$$

$$H_f(0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 \lg(2+2y_0) + 2(2y_0+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det H_f(0, y_0) = 0$$

non posso dire nulla

Studio l'incremento

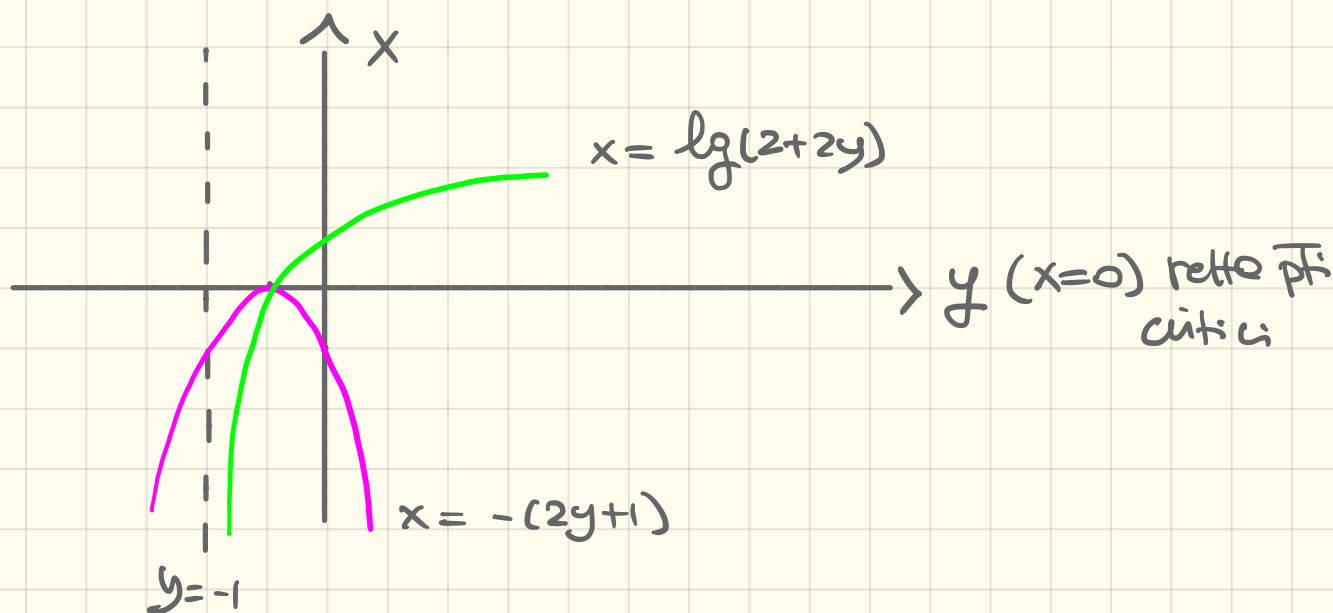
$$\Delta f = f(x, y) - f(0, y_0) = f(x, y) \geq 0$$

$$x^2 [\lg(2+2y) + (2y+1)^2] \geq 0$$

$x^2 \geq 0$ sempre

$$\lg(2+2y) + (2y+1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \lg(2+2y) \geq -(2y+1)^2 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}$$



Se $y_0 \in (-1, -1/2)$ $(0, y_0)$ è un pto di massimo locale

Se $y_0 = -1/2$ $(0, y_0)$ è un pto di sella

Se $y_0 \in (-1/2, +\infty)$ $(0, y_0)$ è un pto di minimo locale

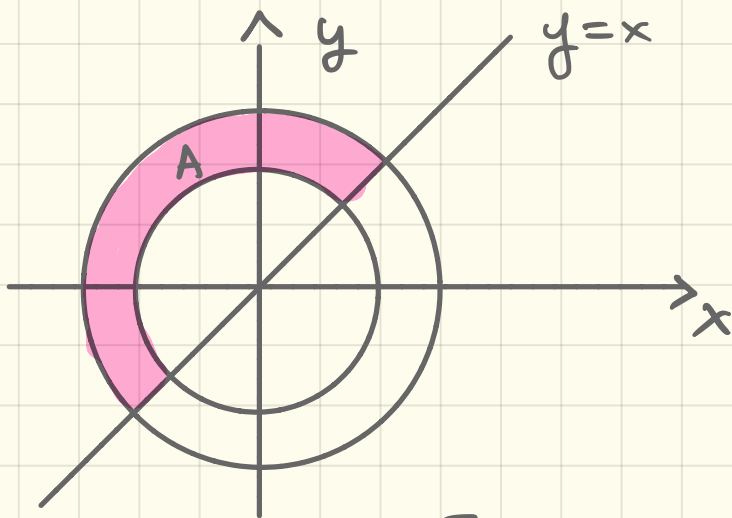
Se funzione è illimitata superiormente

$\Rightarrow$ non ha massimo globale

Se funzione è illimitata inferiormente

$\Rightarrow$ non ha minimo globale

Esercizio 3



$$|A| = \int_2^3 \int_{\pi/4}^{5/4\pi} \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{2} \rho^2 \pi = \frac{1}{2} (9-4)\pi = \frac{5}{2}\pi$$

$$\bar{x} = \frac{1}{|A|} \int_2^3 \int_{\pi/4}^{5/4\pi} \rho \cos\theta \, \rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{2}\pi} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_2^3 \left(\sin\theta \right) \Big|_{\pi/4}^{5/4\pi} = \frac{2}{15\pi} \cdot 19 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{38\sqrt{2}}{15\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{|A|} \int_2^3 \int_{\pi/4}^{5/4\pi} \rho \sin\theta \, \rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{2}\pi} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_2^3 \left(-\cos\theta \right) \Big|_{\pi/4}^{5/4\pi} = \frac{2}{15\pi} \cdot 19 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{38\sqrt{2}}{15\pi}$$

$\bar{y}$ poteva essere trovato anche per simmetria, deve essere sulla retta $y = -x$.

ESERCIZIO 4

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{z^2 x}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}}, \frac{z^2 y + z^2}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}}, 2z \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \right)$$

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \neq (0, -1, z) \}$$

insieme aperto, illimitato, connesso ma

non semplicemente connesso

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \\ &= \hat{i} \left(\frac{2z(y+1)}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} - \frac{2z(y+1)}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} \right) + \\ &- \hat{j} \left(\frac{2xz}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} - \frac{2zx}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} \right) + \hat{k} \left(-\frac{xz^2(y+1)}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} + \frac{z^2 x(y+1)}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} \right) \\ &= 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ il campo è irrotazionale in D

$\Rightarrow$ è localmente conservativo in D .

TEOREMA $\vec{F} = \nabla U \Leftrightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

per ogni curva regolare, semplice, chiusa contenuta in D , indico Γ l'insieme di queste curve

$$\Gamma = \{ \gamma \subset D : \gamma \text{ regolare, semplice, chiusa} \}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

$$\Gamma_1 = \{ \gamma \subset D : \gamma \text{ regolare, semplice, chiusa, non contiene all'interno l'origine } (0, -1, z) \}$$

$$\Gamma_2 = \{ \gamma \subset D : \gamma \text{ regolare, semplice, chiusa, contiene all'interno l'origine } (0, -1, z) \}$$

(a) $\forall \gamma \in \Gamma_1$ esiste un insieme semplicemente connesso $B_\gamma \subset D$ su cui $\vec{F}$ è campo conservativo $\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

(b) Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di raggio unitario

centrata in $(0, -1, 0)$ $\vec{r}(t) = (\cos t, -1 + \sin t, 0)$
 $t \in [0, 2\pi]$

$\mathcal{C} \in \Gamma_2$, usando le proprietà dei campi in

equivalenti per campi irrotazionali:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \forall \gamma \in \Gamma_2$$

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (0, 0, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma_2$$

$$(a) + (b) \Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \Rightarrow \text{ie}$$

campo è CONSERVATIVO $\Rightarrow \vec{F} = \nabla U$

Calcolo U

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \\ \frac{\partial U}{\partial z} = F_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2z \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$U(x, y, z) = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \int 2z \, dz =$$

$$= z^2 \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + f(x, y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{z^2 x}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z^2 x}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x, y) = g(y)$$

$$\Rightarrow U(x, y, z) = z^2 \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + g(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{z^2 (y+1)}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} + g'(y) = \frac{z^2 y + z^2}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}}$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

$$\Rightarrow U(x, y, z) = z^2 \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + C$$

$$\gamma \quad \vec{r}(0) = (1, -1, 2) \quad \vec{r}(\pi) = (-1, -1, 2)$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}(\pi)) - U(\vec{r}(0)) = U(1, -1, 2) - U(-1, -1, 2)$$

$$\gamma \quad = 4 - 4 = 0 \quad \text{Le circonferenze centrate}$$

in $(0, -1, z)$ sono linee equipotenziali

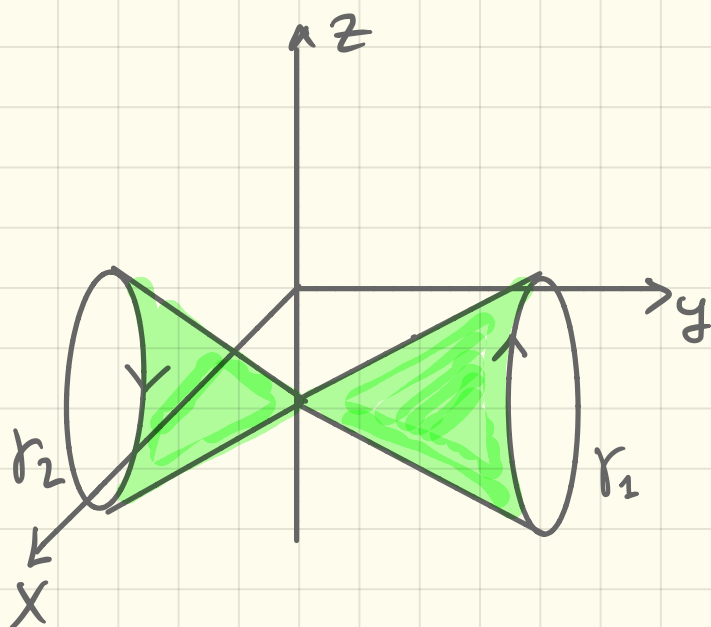
ESERCIZIO 5

$$\vec{F}(x, y, z) = ((z+2)y, x, z+2)$$

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 = x^2 + 4(z+2)^2 \quad |y| \leq 1 \}$$

$$y = \pm \sqrt{x^2 + 4(z+2)^2}$$

$$|y| \leq 1$$



$$\begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = t \\ z = -2 + \frac{t}{2} \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} t \in [-1, 1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$\vec{r}_t = (\cos \theta, 1, \frac{\sin \theta}{2})$$

$$\vec{r}_\theta = (-t \sin \theta, 0, \frac{t}{2} \cos \theta)$$

$$\vec{r}_t \wedge \vec{r}_\theta = \left(\frac{t}{2} \cos \theta, -\frac{t}{2} \cos^2 \theta - \frac{t}{2} \sin^2 \theta, t \sin \theta \right)$$

$$\vec{r}_t \wedge \vec{r}_\theta = \left(\frac{t}{2} \cos \theta, -\frac{t}{2}, t \sin \theta \right)$$

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(0) - \hat{j}(-y) + \hat{k}(1 - (z+2)) \\ &= (0, +y, -z-1) \end{aligned} \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\int_S \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m} \, dS &= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \nabla \wedge \vec{F}(\vec{r}(t, \theta)) \cdot \vec{r}_t \wedge \vec{r}_\theta \, dt \, d\theta = \\
&= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} (0, t, 1 - \frac{t}{2} \sin \theta) \cdot (\frac{t}{2} \cos \theta, -\frac{t}{2}, t \sin \theta) \, dt \, d\theta = \\
&= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{t^2}{2} + t \sin \theta - \frac{t^2}{2} \sin^2 \theta \right) dt \, d\theta = \\
&= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + t \sin \theta \right) d\theta \, dt = \\
&= \int_{-1}^1 \left(-\frac{t^2}{2} \cdot 2\pi - \frac{t^2}{4} \cdot 2\pi \right) dt = -\pi \frac{3}{2} \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^1 = -\pi
\end{aligned}$$

Usando il teorema di Stokes

$$\int \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m} \, dS$$

Usando il teorema di Stokes

$$\int_S \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m} \, dS = \int_{\partial S^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\partial S^+ = \gamma_1^+ \cup \gamma_2^+$$

$$\gamma_1^+ \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 1 \\ z = -2 + \frac{1}{2} \sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_2^+ \begin{cases} x = -\cos\theta \\ y = -1 \\ z = -2 - \frac{1}{2} \sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [2\pi, 0]$$

$$\oint_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin\theta, \cos\theta, \frac{1}{2} \sin\theta \right) \cdot \left(-\sin\theta, 0, \frac{1}{2} \cos\theta \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{4} \sin\theta \cos\theta \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (-1 + \cos 2\theta + \sin\theta \cos\theta) d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\oint_{\gamma_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin\theta, -\cos\theta, -\frac{1}{2} \sin\theta \right) \cdot \left(\sin\theta, 0, -\frac{1}{2} \cos\theta \right) d\theta$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{4} \sin\theta \cos\theta \right) d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

ESERCIZIO 6

$$\vec{F} = (z^3, z^2, z)$$

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1\}$$

$$\begin{cases} x = \cos\theta \sin\varphi \\ y = \sin\theta \sin\varphi \\ z = \cos\varphi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [0, \pi] \end{array}$$

$$\vec{r}(\theta, \varphi) \in C^1([0, 2\pi] \times [0, \pi])$$

$\vec{r}$ è differenziabile in $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$

$$\vec{r}_\varphi = (\cos\theta \cos\varphi, \sin\theta \cos\varphi, -\sin\varphi)$$

$$\vec{r}_\theta = (-\sin\theta \sin\varphi, \cos\theta \sin\varphi, 0)$$

$$\vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\theta = (\cos\theta \sin^2\varphi, \sin\theta \sin^2\varphi, \sin\varphi \cos\varphi)$$

$$|\vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\theta| = 0 \iff \sin\varphi = 0 \iff \varphi = 0, \pi$$

$\Rightarrow$ la superficie sferica ha due punti non regolari.

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \hat{n} \, d\Sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{F}(\vec{r}(\theta, \varphi)) \cdot \vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\theta \, d\varphi \, d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos^3 \varphi, \cos^2 \varphi, \cos \varphi) \cdot (\cos \varphi \sin^2 \varphi, \sin \varphi \cos^2 \varphi, \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\underbrace{\cos^3 \varphi \sin^2 \varphi \cos \varphi}_{=0} + \underbrace{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \sin \varphi}_{=0} + \sin \varphi \cos^3 \varphi) d\varphi d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = -2\pi \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso usando le teoreme della divergenza

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

$\partial V = \Sigma$ $V =$ sfera di raggio 1 centrata in $(0, -1, 0)$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV = |V| = \frac{4}{3}\pi$$