

ANALISI MATEMATICA 2 (9CFU)

1 Parte 12.6.2023

n.matricola

Cognome

Nome

Esercizio 1 Data la curva γ definita per $t \in [0, 1]$ dal vettore $\mathbf{r}(t)$ di componenti

$$\begin{cases} x &= 2 + \frac{2}{3}t^3 \\ y &= t - 1 \\ z &= 1 - t^2 \end{cases}$$

a stabilire se la curva è: continua, chiusa, semplice;

b calcolare il vettore derivato e il suo modulo;

c stabilire se la curva è regolare precisando in caso contrario i punti non regolari;

d calcolare la lunghezza della curva confrontandola con quella del segmento di estremi $A = \mathbf{r}(0)$ e $B = \mathbf{r}(1)$.

Esercizio 2 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)e^{n(x+2)}}{n + (\log n)^2}$$

a Determinare gli intervalli di convergenza puntuale ed assoluta e stimare dall'alto la somma della serie.

b Determinare gli intervalli di convergenza totale.

c Stabilire in quali intervalli la somma della serie $S(x)$ è continua.

d Stabilire in quali intervalli la serie è derivabile termine a termine.

Esercizio 3 Data la funzione periodica dispari di periodo $T = 4$

$$f(x) = \frac{2-x}{2} \quad x \in (0, \pi)$$

a Dopo aver disegnato il grafico di f nell'intervallo $[-4, 4]$, calcolare i coefficienti di Fourier di f , $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, e scrivere la serie di Fourier associata;

b studiare la convergenza in media quadratica della serie di Fourier;

c studiare la convergenza puntuale della serie di Fourier e calcolarne la somma;

d scrivere la serie che si ottiene derivando termine a termine la serie di Fourier studiarne la derivabilità termine a termine.

Esercizio 4 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log n + \sqrt{n}}{2n^2} [\cos(nx) + \sin(nx)] \quad x \in [0, 2\pi]$$

a studiarne la convergenza puntuale;

b dire se è possibile affermare a priori che la somma della serie è continua e se la serie è derivabile termine a termine.

c dire se può essere la serie di Fourier di una funzione limitata.

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{x(y-1)^3 - 2 \sin[(y-1)^2 x] \cos(y-1+2x)}{(y-1)^2 + x^2} \sqrt{1 - |(y-1)x|}$$

a Determinare il dominio di definizione e dire che tipo di insieme è (aperto, chiuso, limitato, connesso).

b Calcolare il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \rightarrow (1, 0)$.

Esercizio 6 Data la funzione

$$f(x, y) = \log \left(1 + \sqrt{(y-1)^2 + x^2} \right)$$

a stabilire in quale sottoinsieme del piano è continua;

b stabilire in quale sottoinsieme del piano è derivabile;

c stabilire in quale sottoinsieme del piano è differenziabile.

ESAME 12.6.2023 PARTE 1 SCHEMA SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

$$\gamma: \begin{cases} x = 2 + \frac{2}{3}t^3 \\ y = t - 1 \\ z = 1 - t^2 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

La curva $\bar{c}$ è continua perché lo sono le sue componenti

$$\vec{r}(0) = (2, -1, 1) \neq \vec{r}(1) = \left(\frac{8}{3}, 0, 0\right)$$

la curva è aperta

$$\vec{r}'(t) = (2t^2, 1, -2t) \in C^1([0, 1]) \quad (1)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{4t^4 + 1 + 4t^2} = \sqrt{(1 + 2t^2)^2} = 1 + 2t^2$$

$$|\vec{r}'(t)| \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1] \quad (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ la curva è regolare

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^1 (1 + 2t^2) dt = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$l(\overline{AB}) = \sqrt{\left(2 - \frac{8}{3}\right)^2 + (-1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + 1 + 1} = \sqrt{\frac{22}{9}}$$

$$l(\gamma) > l(\overline{AB})$$

ESERCIZIO 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2) e^{n(x+2)}}{n + \lg n} \quad f_n(x) = \frac{(x+2) e^{n(x+2)}}{n + \lg n}$$

$$\text{CN} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+2) e^{n(x+2)}}{n + \lg n} = 0 \quad \forall x \in (-\infty, -2] = I$$

(1) $f_n(-2) = 0 \Rightarrow$ la serie è identicamente nulla

$$|f_n(x)| = \frac{|x+2| e^{n(x+2)}}{n + \lg n} \quad \text{Applico criterio radice}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(x+2)} \sqrt[n]{\frac{|x+2|}{n + \lg n}} = e^{x+2} < 1$$

$\forall x \in (-\infty, -2)$

(1) + (2) $\Rightarrow$ la serie converge assolutamente

$\forall x \in (-\infty, -2] \Rightarrow$ la serie converge

puntualmente $\forall x \in (-\infty, -2] = I$

Convergenza TOTALE

$$f'_n(x) = \frac{e^{n(x+2)}}{n + \lg n} [1 + n(x+2)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + n(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x+2 \geq -\frac{1}{n} \Leftrightarrow x \geq -2 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow x = -2 - \frac{1}{n} \text{ pt di minimo per } f_n(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -2 - \frac{1}{m} \text{ pto di max per } |f_m(x)|$$

$$\Rightarrow \max_{x \in I} |f_m(x)| = |f_m(-2 - \frac{1}{m})| = \frac{1}{m} \cdot \frac{e^{-1}}{m + \lg m}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-1}}{m^2 + m \lg m} \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-1}}{m^2} < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente in I

$$\Rightarrow \text{i) } f_m(x) \in C^0(I)$$

$$\text{ii) } \sum_m f_m(x) \text{ converge totalmente in } I$$

$\Rightarrow$ la somma della serie è continua in $S(x)$.

$$|S(x)| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x+2) e^{m(x+2)}}{m + \lg m} \right| = |x+2| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{m(x+2)}}{m + \lg m}$$

$$\leq |x+2| \sum_{m=1}^{\infty} e^{m(x+2)} = |x+2| \left[\frac{1}{1 - e^{x+2}} - 1 \right]$$

DERIVABILITÀ TERMINE A TERMINE

$$\sum_{m=1}^{\infty} f'_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{m(x+2)} (1 + m(x+2))}{m + \lg m}$$

Convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$

$$CN \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = 0 \quad \forall x \in (-\infty, -2]$$

$$f'_n(-2) = \frac{1}{n + \lg n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \lg n} = +\infty$$

La serie delle derivate non converge in $x = -2$

Studio la convergenza totale in $(-\infty, -2) = I'$

$$f'_n(x) \sim (x+2)e^{n(x+2)}$$

$$\max_{x \in I'} |f'_n(x)| \sim \max_{x \in I'} |x+2|e^{n(x+2)} = \frac{e^{-1}}{n}$$

$$\sum_n \frac{e^{-1}}{n} = +\infty \Rightarrow \text{la serie delle derivate non converge totalmente in } (-\infty, -2)$$

$$I_{\delta, A} = [-A, -2-\delta] \quad A > 2+\delta \quad \delta > 0$$

$$\max_{x \in I_{\delta, A}} |f'_n(x)| \sim \max_{x \in I_{\delta, A}} |x+2|e^{n(x+2)} \leq (A+2)e^{-n\delta}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A+2)e^{-n\delta} \leq (A+2) \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\delta})^n \leq (A+2) \frac{1}{1-e^{-\delta}}$$

$\Rightarrow$ la serie delle derivate converge totalmente
in $I_{\delta, A} \quad \forall A, \delta \in \mathbb{R}^+ : A > 2 + \delta, \delta > 0$

Dato che $\forall A, \delta \in \mathbb{R}^+ : A > 2 + \delta, \delta > 0$

i) $f_m(x) \in C^1(I_{\delta, A})$

ii) $\sum_n f_m(x)$ converge in $I_{\delta, A}$

iii) $\sum_n f'_m(x)$ converge totalmente in $I_{\delta, A}$

$\Rightarrow$ la serie è derivabile termine a termine
in $I_{\delta, A}$, ovvero

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in I_{\delta, A}$$

La derivata è una definizione puntuale $\Rightarrow$
posso estendere la derivabilità f.e.t su tutto

$(-\infty, -2)$, infatti $\forall x_0 \in (-\infty, -2) \exists A, \delta \in \mathbb{R}^+$

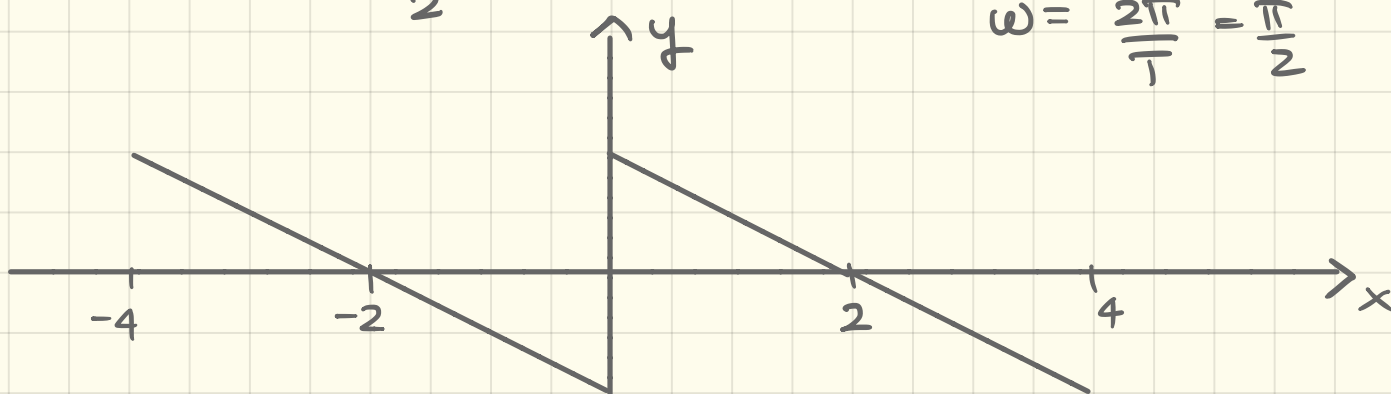
$A > 2 + \delta : x_0 \in I_{\delta, A} \Rightarrow$ la serie è derivabile
termine a termine in x_0 .

Esercizio 3

$$f(x) = \frac{2-x}{2} \quad x \in (0, 2)$$

$$T=4 \quad \text{DISPARI}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$



$a_k = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$ perché la funzione è dispari

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(k\omega x) dx =$$

$$= \frac{4}{4} \int_0^2 \frac{2-x}{2} \sin(k\omega x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (2-x) \sin(k\omega x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[(2-x) \frac{1}{k\omega} (-\cos(k\omega x)) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{\cos(k\omega x)}{k\omega} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k\omega} = \frac{2}{\pi k}$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin\left(k \frac{\pi}{2} x\right)$$

$f(x)$ è integrabile in $(-2, 2) \Rightarrow$ posso applicare le teoremi sulla convergenza in media quadratica $\Rightarrow$ la serie di Fourier converge ad f in media quadratica ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-2}^2 (f(x) - S_n f(x))^2 dx = 0$$

dove
$$S_n f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{\pi k} \sin(k \frac{\pi}{2} x)$$

Posso applicare le teoremi delle convergenze puntuali:

f è una funzione regolare e tratti in fatti

$f \in C^1(-2, 0) \cup (0, 2)$ e sono definiti

$f(0^-)$ $f(0^+)$ $f(-2^+)$ $f(2^-)$ $\Rightarrow$ La serie converge
 $f'(0^-)$ $f'(0^+)$ $f'(-2^+)$ $f'(2^-)$ puntualmente
 e la sua somma
 $S(x) \equiv \Rightarrow$

$$\Rightarrow S(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \forall x \in (-2, 2) \\ \frac{f(-2^+) + f(2^-)}{2} & \forall x = -2, 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

Utilizzando la continuità della funzione
in $[-2,0) \cup (0,2)$ la somma della serie è

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in (-2,0) \cup (0,2) \\ 0 & x = 0, -2, 2 \end{cases}$$

Derivando termine a termine la serie di
Fourier si ottiene

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi} \frac{k\pi}{2} \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) = \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ La serie delle derivate non converge

(le CN non è soddisfatte)

$\Rightarrow$ la serie non è derivabile t.e.t.

ESERCIZIO 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \lg n + \sqrt{n}}{2n^2} [\cos(nx) + \sin(nx)] \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$a_n = \frac{n \lg n + \sqrt{n}}{2n^2} \downarrow 0 \quad \text{ovvero} \quad n \rightarrow \infty$$

a_n converge monotonamente a zero

per $n \rightarrow \infty \Rightarrow$ posso applicare il teorema di convergenza puntuale delle serie

trigonometriche $\Rightarrow$ la serie converge puntualmente $\forall x \in (0, 2\pi)$

$$x = 0, 2\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \lg n + \sqrt{n}}{2n^2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{2n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie diverge

$$\sup_{x \in (0, 2\pi)} \frac{n \lg n + \sqrt{n}}{2n^2} |\cos(nx)| = \frac{n \lg n + \sqrt{n}}{2n^2} \sim \frac{\lg n}{2n} \geq \frac{1}{2n}$$

$$\sup_{x \in (0, 2\pi)} \frac{n \lg n + \sqrt{n}}{2n^2} |\sin(nx)| = \frac{n \lg n + \sqrt{n}}{2n^2} \sim \frac{\lg n}{2n} \geq \frac{1}{2n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = +\infty \Rightarrow \text{la serie non}$$

converge totalmente in $(0, 2\pi)$

$\Rightarrow$ non posso dire a priori che la
somma della serie è continua in $(0, 2\pi)$
(non posso applicare il teorema sulla
continuità della somma della serie)

Derivando termine a termine ottengo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \lg n + \sqrt{n}}{2n^2} n [-\sin(nx) + \cos(nx)]$$

$$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \lg n [-\sin(nx) + \cos(nx)]$$

questa serie non converge in questo non
è verificato la CN $\Rightarrow$ la serie non
è derivabile termine a termine.

Dato una serie di Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < +\infty \quad (\text{converge})$$

Da questo caso

$$a_n = b_n = \frac{n \lg n + \sqrt{n}}{2n^2} \sim \frac{\lg n}{2n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n \lg n + \sqrt{n}}{2n^2} \right)^2 \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg^2 n}{2n^2}$$

$$\frac{\lg^2 n}{2n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{2n^2} \sim \frac{1}{2n^{3/2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}} < +\infty \quad \text{converge.}$$

$\Rightarrow$ La serie trigonometrica può essere la serie di Fourier di una funzione $f(x)$ limitata.

ESERCIZIO 5

$$f(x,y) = \frac{x(y-1)^3 - 2 \operatorname{sen}[(y-1)^2 x] \cos(y-1+2x) \sqrt{1-|(y-1)x|}}{(y-1)^2 + x^2}$$

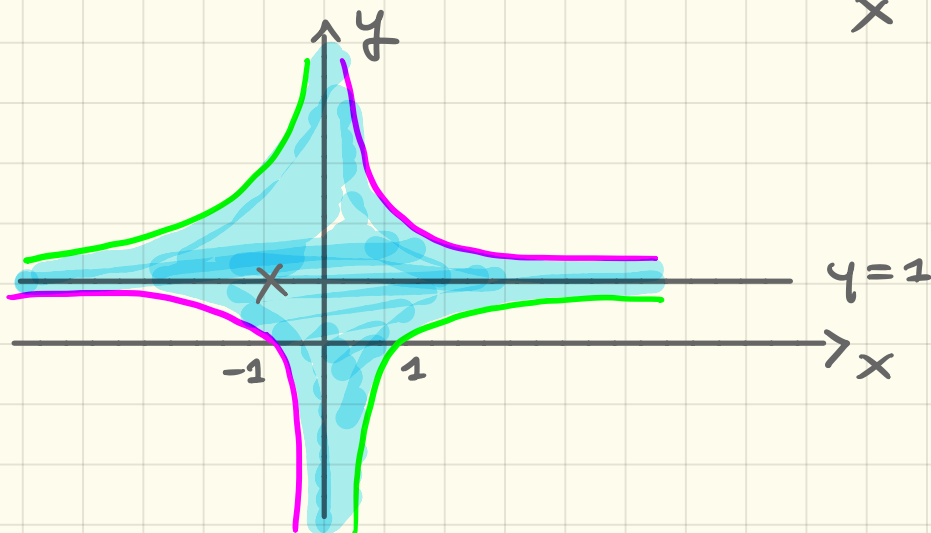
Dominio

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \\ 1 - |(y-1)x| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \neq (0,1) \\ |x(y-1)| \leq 1 \end{cases}$$

$$|x(y-1)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x(y-1) \leq 1$$

$$x(y-1) = 1 \quad y-1 = \frac{1}{x} \quad y = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{---}$$

$$x(y-1) = -1 \quad y-1 = -\frac{1}{x} \quad y = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{---}$$



Dominiu m̃e op̃rtu
m̃e chiũso
ieelimitat̃
connesso

luc̃i $f(x,y) = 0$ infatti
 $(x,y) \rightarrow (0,1)$

$$\text{luc̃i } \sqrt{1 - |(y-1)x|} = 1$$

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)|$$

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x(y-1)^3 - 2 \sin[(y-1)^2 x] \cos(y-1+2x)}{(y-1)^2 + x^2} \right| \sqrt{1 - |(y-1)x|}$$

$$\leq \left(\left| \frac{x(y-1)^3}{(y-1)^2 + x^2} \right| + \left| \frac{2 \sin[(y-1)^2 x] \cos(y-1+2x)}{(y-1)^2 + x^2} \right| \right) \sqrt{1 - |(y-1)x|}$$

$$\leq \left(\frac{|x||y-1|^3}{|y-1|^2} + 2 \left| \frac{\sin[(y-1)^2 x]}{(y-1)^2} \right| \right) \sqrt{1 - |(y-1)x|}$$

$$= \left(|x||y-1| + |x| \left| \frac{\sin[(y-1)^2 x]}{(y-1)^2 x} \right| \right) \sqrt{1 - |(y-1)^2 x|}$$

$\rightarrow 1$

$\rightarrow 0$

$(x,y) \rightarrow (0,1)$

ESERCIZIO 6

$$f(x,y) = \lg[1 + \sqrt{(y-1)^2 + x^2}]$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

$f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ perché composizione di funzioni continue

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \sqrt{(y-1)^2 + x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{(y-1)^2 + x^2}} \quad (x,y) \neq (0,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \sqrt{(y-1)^2 + x^2}} \cdot \frac{y-1}{\sqrt{(y-1)^2 + x^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) &= \left. \frac{d}{dx} f(x,1) \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} \lg(1+|x|) \right|_{x=0} \\ &= \left. \frac{1}{1+|x|} \operatorname{sg} x \right|_{x=0} = \begin{cases} 1 & x \rightarrow 0^+ \\ -1 & x \rightarrow 0^- \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la derivata non esiste in $(0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \left. \frac{d}{dy} f(0,y) \right|_{y=1} = \left. \frac{d}{dy} \lg(1+|y-1|) \right|_{y=1} \rightarrow$$

$$= \frac{1}{1+|y-1|} \operatorname{sgn}(y-1) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \rightarrow 1^+ \\ -1 & \text{se } y \rightarrow 1^- \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la derivata non esiste

$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ f è derivabile con
continuità in A ovvero $f \in C^1(A)$

$\Rightarrow f$ è differenziabile in A

f non è derivabile in $(0,1) \Rightarrow f$ non è
differenziabile in $(0,1)$.