

ANALISI MATEMATICA 2 (9 CFU)

2 Parte 6.6.2022

Cognome.....

Nome.....

n.matricola

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log^3(1+|y+1|)}{(y+1)^2+x^2} + e^x & \text{se } (x, y) \neq (0, -1) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, -1) \end{cases}$$

a stabilire se la funzione è continua e differenziabile nel punto $(0, -1)$;

b calcolare le derivate direzionali in $(0, -1)$ rispetto al generico versore $(\cos \theta, \sin \theta)$;

c calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(0, -1)$ lungo la direzione normale esterna nel punto $(0, -1)$ al cerchio di centro $(1, -1)$ e raggio 1.

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x, y) = 4(y-1)^2 - (y-1)^4 - 4(y-1)^2 x^2$$

a determinare tutti i punti critici e studiarne la natura.

b dimostrare che i punti di massimo locale trovati sono anche punti di massimo globale.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_T (x^4 y - e^{x+y} y) dx dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(6, 0)$.

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x-1}{4y^2 + (x-1)^2}, \frac{4y}{(x-1)^2 + 4y^2} \right).$$

a Stabilire il suo insieme di definizione.

b Verificare se il campo è irrotazionale e stabilire, senza calcolare il potenziale, se è conservativo .

c Calcolare, in caso affermativo, il potenziale.

d Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ per andare da $A = (-2, 0)$ a $B = (-1, 1)$.

Esercizio 5 Sia $\partial\Sigma$ il bordo del volume

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 1\}$$

ed $\mathbf{F}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (x(y-1), (y-1)z, z)$$

a Scrivere la superficie in forma parametrica e verificarne la regolarità.

b Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}$ attraverso $\partial\Sigma$ e verificare il teorema della divergenza.

Esercizio 6 Dati il campo vettoriale $\vec{F}$ e la superficie S definiti da

$$\vec{F}(x, y, z) = (z, x-1, y) \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - (x-1)^2 - y^2; 2 \leq z \leq 4\}$$

a Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso S orientata verso l'alto usando la definizione di flusso.

b Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso S orientata verso l'esterno usando il teorema di Stokes.