

ESAME 20.6.2022 PARTE 2 SCHEMA SOLUTIONE

ESERCIZIO 1

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x} e^{-y^2 x} \quad D = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} \frac{1}{x^{2/3}} e^{-y^2 x} - y^2 \sqrt[3]{x} e^{-y^2 x} \quad x \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \sqrt[3]{x} e^{-y^2 x}$$

Studio l'esistenza delle derivate rispetto

ad x nei punti $x=0 \Leftrightarrow (0, y_0) \quad y_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} e^{-y_0^2 h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-y_0^2 h}}{h^{2/3}} = +\infty \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ la funzione non è derivabile in $(0, y_0) \quad y_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

A è un insieme aperto e $f \in C^1(A)$

$\Rightarrow f$ è differenziabile in A .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{2}) = \frac{1}{3}e^{-2} - 2e^{-2} = -\frac{5}{3}e^{-2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}e^{-2} \quad \nabla f(1, \sqrt{2}) = \left(-\frac{5}{3}e^{-2}, e^{-2}\right)$$

$$f(1, \sqrt{2}) = e^{-2}$$

$(1, \sqrt{2}) \in A \Rightarrow f$ è differenziabile in $(1, \sqrt{2})$:

1) esiste il piano tangente

$$z = e^{-2} - \frac{5}{3}e^{-2}(x-1) - 2\sqrt{2}e^{-2}(y-\sqrt{2})$$

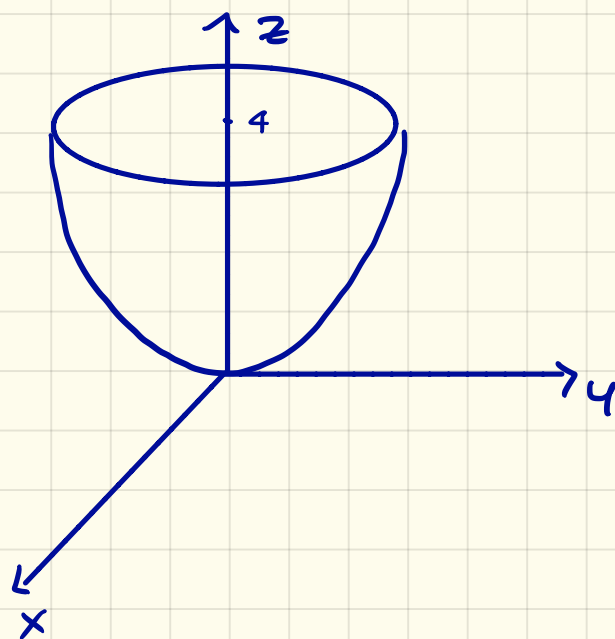
2) vale la formula del gradiente

$$D_v f(1, \sqrt{2}) = \nabla f(1, \sqrt{2}) \cdot \hat{v} = -\frac{5}{3}e^{-2}\cos\theta + e^{-2}\sin\theta$$

ESERCIZIO 2

$$z = x^2 + y^2$$

$$z \in [0, 4]$$



$$|V| = \iiint_V dx dy dz$$

$$= \int_0^4 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq z} dx dy \right) dz =$$

$$= \int_0^4 \left(\pi \sqrt{z} \right) dz = \pi \frac{2}{3} z^{3/2} \Big|_0^4 =$$

$$= \pi \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} \pi$$

$$z = x^2 + y^2$$

$$z = 4x - 12y$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq z \leq 4x - 12y \rightarrow$ il piano deve
stare sopra il
paraboloid

$$|V| = \iiint_V dx dy dz = \iint_A \left(\int_{x^2+y^2}^{4x-12y} dz \right) dx dy$$

Scrivo meglio le condizioni per determinare A

$$4x - 12y \geq x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 12y \leq 0$$

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 - 4 - 36 \leq 0$$

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 \leq 40$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-6)^2 \leq 40\}$$

$$\Rightarrow |V| = \iint_A (4x - 12y - x^2 - y^2) dx dy = - \iint_A [(x-2)^2 + (y-6)^2 - 40] dx dy$$

$$\begin{cases} x = 2 + \rho \cos \theta \\ y = 6 + \rho \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \in [0, 2\sqrt{10}] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$|V| = - \int_0^{2\sqrt{10}} \int_0^{2\pi} [\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - 40] \rho d\rho d\theta =$$

$$= -2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 - \frac{40}{2} \rho^2 \right]_0^{2\sqrt{10}} = -2\pi \left[-\frac{40 \cdot 40}{4} \right]$$

$$= 800\pi$$

ESERCIZIO 3

$$f(x, y) = e^{(x-1)^4 - 4(x-1)^2 y + 3y^2} \quad D = \mathbb{R}^2$$

la funzione esponenziale è crescente $\Rightarrow$

i punti stazionari di f sono tutti e soli

i punti critici di $g(x, y) = (x-1)^4 - 4(x-1)^2 y + 3y^2$.

Studio i punti critici di g

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4(x-1)^3 - 8(x-1)y = 4(x-1)[(x-1)^2 - 2y] = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -4(x-1)^2 + 6y = -2[2(x-1)^2 - 3y] = 0$$

$$1) x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (1, 0)$$

$$2) 2y = (x-1)^2 \Rightarrow y = \frac{(x-1)^2}{2} \Rightarrow 2(x-1)^2 - \frac{3}{2}(x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad y = 0$$

Unico punto critico è $(1, 0)$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 12(x-1)^2 - 8y \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 6 \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -8(x-1)$$

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \det H_f(1,0) = 0$$

$\Rightarrow$ non posso dire nulla.

Studio l'incremento

$$g(x,y) - g(1,0) = g(x,y) \geq 0$$

$$(x-1)^4 - 4(x-1)^2 y + 3y^2 \geq 0$$

$$\text{Se pongo } x=1 \quad g(1,y) = 3y^2 \geq 0$$

$$\text{Se pongo } y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{3}}$$

$$g\left(x, \frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) = (x-1)^4 - \frac{4}{\sqrt{3}}(x-1)^4 + (x-1)^4 =$$

$$= \left(2 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)(x-1)^4 = 2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)(x-1)^4 \leq 0$$

$\Rightarrow (1,0)$ è un punto di sella.

La funzione non ha un massimo globale perché non è limitata superiormente $\rightarrow$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, 0)} f(x,y) = +\infty$$

è limitata inferiormente perché $f(x,y) > 0$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 2(x-1)^2) = 0$$

ma $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}} f(x,y) = 0$ non è un minimo.

La funzione non estremo locale.

ESERCIZIO 4

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-2y}{4y^2+3x^2}, \frac{2x}{3x^2+4y^2} \right)$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0) \}$$

$$\nabla \wedge \vec{F} = \hat{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) =$$

$$= \hat{k} \left(\frac{2(3x^2+4y^2) - 12x^2 - (-2(4y^2+3x^2) + 16y^2)}{(4y^2+3x^2)^2} \right) =$$

$$= \hat{k} \frac{6x^2 + 8y^2 - 12x^2 + 8y^2 + 6x^2 - 16y^2}{(3x^2+4y^2)^2} = 0$$

$\Rightarrow \nabla \wedge \vec{F} = 0$ il campo è irrotazionale $\Rightarrow$ è localmente conservativo.

$$f: 3x^2+4y^2=1 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ y = \frac{1}{2} \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin \theta, \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta, \frac{1}{2} \cos \theta \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos^2 \theta \right) d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ il campo non è conservativo.

Sia γ' una qualunque curva semplice, regolare chiusa al cui interno sia contenuta l'origine. Il campo è irrotazionale $\Rightarrow \gamma$ e γ' sono equivalenti: ovvero

$$\int_{\gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Il campo non è conservativo ma dato che $\nabla \wedge \vec{F} = 0$ è localmente conservativo

$\Rightarrow$ posso calcolare il potenziale locale

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \end{cases}$$

Usando la prima equazione

$$U(x, y) = \int \frac{-2y}{4y^2 + 3x^2} dx = -\frac{2y}{4y^2} \int \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{x^2}{y^2}} dx$$

$\rightarrow$

$$= -\frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{x^2}{y^2}} d\left(\frac{\sqrt{3}x}{2y}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x}{y}\right) + c(y)$$

Usa la seconda equazione

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x}{y^2}\right) + c' =$$

$$= F_2 = \frac{2x}{3x^2 + 4y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}y^2}{4y^2 + 3x^2} \frac{x}{\cancel{2}y^2} + c'(y) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{3}x^2 + 4y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(y) = 0 \quad c(y) = c$$

$$U(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x}{y}\right) + c \quad y \neq 0$$

il potenziale esiste ma non è definito su tutto il dominio di $\tilde{F}$.

Esiste $D' \subset D$ D' semplicemente connesso

talé che $A(1,1), B(2,4) \in D'$

$\vec{F}$ ni D' é conservativo

$$\begin{aligned} L_{AB}(\vec{F}) &= U(2,4) - U(1,1) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Esercizio 5

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2+z^2}, \frac{y}{(x-1)^2+y^2+z^2}, \frac{z}{(x-1)^2+y^2+z^2} \right)$$

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z=2, (x-1)^2+y^2 \leq 1 \}$$

Archio di raggio 1 nel piano $z=2$

$$\begin{cases} x = 1 + \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \in [0, 1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{F}(\rho, \theta) \text{ è differenziabile} \\ \text{in } [0, 1] \times [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$\vec{r}_\rho = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta \neq 0 \text{ se } \rho \neq 0 \Rightarrow \rho=0 \text{ unico pts di non regolarità}$$

$$\vec{r}_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0) \quad \vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta = (0, 0, \rho)$$

$\vec{F}$ è un campo conservativo in D

$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \neq (1,0,0) \}$ ie
con potenziale $\bar{u}$

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2} \lg[(x-1)^2+y^2+z^2] + c$$

$$\Rightarrow \nabla \wedge \vec{F} = 0$$

$$\partial S \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = 2 \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

∂S è la circonferenza di raggio 1
centrata in $(1, 0, 2)$ sul piano $z=2$;
essendo il campo conservativo

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\iint_S \nabla \cdot \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

$\Rightarrow$ Teorema di Stokes è verificato.

ESERCIZIO 6

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y \leq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, -yz, 0)$$

$$\partial V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

S_1 calotta sferica

$$\begin{cases} x = \cos\theta \sin\varphi & \varphi \in [0, \pi] \\ y = \sin\theta \sin\varphi & \theta \in [\pi/4, 5\pi/4] \\ z = \cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{r}_\theta = (-\sin\theta \sin\varphi, \cos\theta \sin\varphi, 0)$$

$$\vec{r}_\varphi = (\cos\theta \cos\varphi, \sin\theta \cos\varphi, -\sin\varphi) \quad A = [0, \pi] \times [\pi/4, 5\pi/4]$$

$$\vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\theta = (\cos\theta \sin^2\varphi, \sin\theta \sin^2\varphi, \sin\varphi \cos\varphi)$$

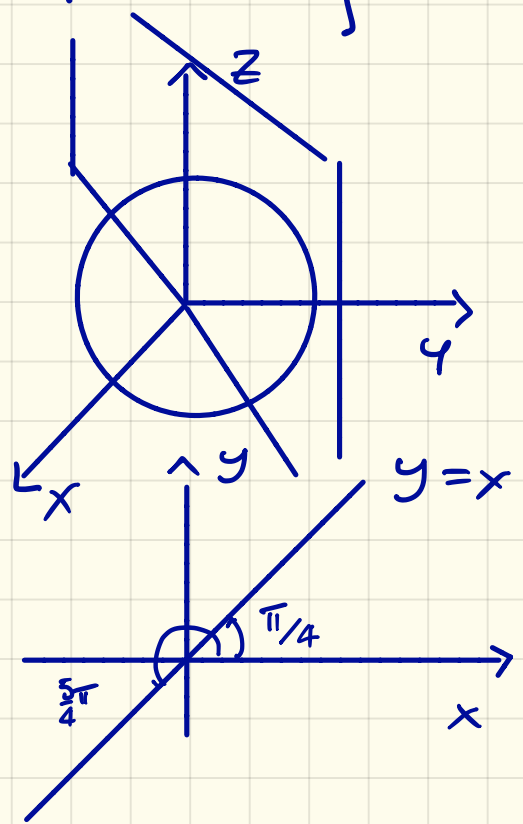
$\vec{r}(\varphi, \theta)$ è differenziabile in A in quanto $\vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\theta = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0, \pi$

$\varphi = 0, \pi$ 2 punti singolari.

$$S_2 \quad \vec{r}(\varphi, \rho) \begin{cases} x = \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\varphi & \rho \in [0, 1] & \vec{r}_\rho = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\varphi, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\varphi, \cos\varphi\right) \\ y = \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\varphi & \varphi \in [0, \pi] & \vec{r}_\varphi = \left(\rho \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\varphi, \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\varphi, -\rho \sin\varphi\right) \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{r}_\varphi \wedge \vec{r}_\rho = \left(\rho \frac{\sqrt{2}}{2}, -\rho \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \neq 0$$

$\vec{r}(\varphi, \rho)$ è differenziabile
 $\wedge \rho \neq 0$



$$S_3 \quad \begin{cases} x = -\rho \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \\ y = -\rho \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad (\rho, \varphi) \in [0, 1] \times [0, \pi] = A$$

$\vec{F}(\rho, \varphi)$ e' differenziabile
in A

$$\vec{r}_\rho = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi, -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi, \cos \varphi \right)$$

$$\vec{r}_\varphi = \left(-\rho \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi, -\rho \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi, -\rho \sin \varphi \right)$$

$$\vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\varphi = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \rho, -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho, 0 \right) \neq 0 \text{ se } \rho \neq 0$$

S_2 e S_3 sono regolari tranne in $\rho = 0$

$$\nabla \cdot \vec{F} = y - z$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_V (y - z) \, dx \, dy \, dz$$

$$V \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{aligned} \varphi &\in [0, \pi] \\ \theta &\in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \\ \rho &\in [0, 1] \end{aligned}$$

$$\iiint \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_0^1 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_0^\pi (\rho \sin \theta \sin \varphi - \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^1 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_0^\pi (\rho^3 \sin \theta \sin^2 \varphi - \rho^3 \cos \varphi \sin \theta) \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$\nearrow \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$

$$= \frac{1}{4} \left(-\cos \theta \right)_{\pi/4}^{5\pi/4} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{m}_e \, dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{m}_e \, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{m}_e \, dS + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{m}_e \, dS$$

Gli integrali sono integrali elementari
 di funzioni trigonometriche che non
 sono più difficili.