

ESAME 8.7.2022 PARTE 2 SCHEMA SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (2(x-1), 2y)$$

Dato che $f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ è differenziabile

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$$

$$D_{\hat{v}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \hat{v} \quad \begin{array}{l} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \hat{v} = (\cos \theta, \sin \theta) \end{array}$$

$$\Rightarrow D_{\hat{v}} f(2,1) = (2, 2) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = 2(\cos \theta + \sin \theta)$$

$$y = x-1 \quad x \text{ crescente} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$D_{\hat{v}} f(2,1) \Big|_{\theta=\pi/4} = 2\sqrt{2}$$

Linee di livello $(x-1)^2 + y^2 = c \quad c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$

in forma parametrica $\vec{r}(t) = (1 + \sqrt{c} \cos t, \sqrt{c} \sin t)$

$$t \in [0, 2\pi] \rightarrow$$

$\vec{r}'(t) = (-\sqrt{c} \sin t, \sqrt{c} \cos t)$ vettore tangente
alle linee di
livello.

In coordinate cartesiane $\vec{e}(-y, x-1)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \nabla f(x, y) \cdot (-y, x-1) &= (2(x-1), 2y) \cdot (-y, x-1) = \\ &= -2(x-1)y + 2y(x-1) = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla f \perp (-y, x-1) \Rightarrow \text{ie}$$

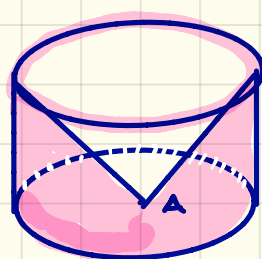
gradiente $\vec{e}$ perpendicolare alle
linee di livello.

ESERCIZIO 2

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right\}$$

D è il cilindro di raggio $R=2$ ed asse
parallelo all'asse z passante per

$$A = (1, 0, 0) \text{ dato da } (x-1)^2 + y^2 \leq 4$$



$$A = (1, 0, 0)$$

dal quale si toglie il cono circolare

$$z = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \text{ con vertice in } A.$$

$$\iiint_D (x-1)^2 y^2 dx dy dz =$$

$$= \iint_{(x-1)^2 + y^2 \leq 4} \left((x-1)^2 y^2 \int_0^{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} dz \right) dx dy$$

$$= \iint_{(x-1)^2 + y^2 \leq 4} \left((x-1)^2 y^2 \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right) dx dy =$$

Passo a coordinate polari: $\begin{cases} x = 1 + \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \begin{matrix} \rho \in [0, 2] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$

Jacobiano $\rightarrow \rho$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^4 \cos^2\theta \sin^2\theta \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^2 \rho^6 \, d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \frac{1-\cos 2\theta}{2} \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{7} \frac{2^7}{2^2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2(2\theta)) \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{7} 2^5 \left[2\pi - \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 4\theta}{2} \, d\theta \right] =$$

$$= \frac{2^5}{7} [2\pi - \pi] = \frac{32}{7} \pi.$$

ESERCIZIO 3

$$f(x, y) = \frac{x(4-y)}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(4-y)(x^2 + (y-1)^2) - 2x^2(4-y)}{(x^2 + (y-1)^2)^2} = \frac{(4-y)^3 - x^2(4-y)}{(x^2 + (y-1)^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (4-y) \frac{(4-y)^2 - x^2}{(x^2 + (y-1)^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2 + (y-1)^2) - 2(4-y)^2 x}{(x^2 + (y-1)^2)^2} = \frac{x^3 - (4-y)^2 x}{(x^2 + (y-1)^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2 - (4-y)^2)}{(x^2 + (y-1)^2)^2}$$

$$\begin{cases} \frac{(4-y)((4-y)^2 - x^2)}{(x^2 + (y-1)^2)^2} = 0 \\ \frac{x(x^2 - (4-y)^2)}{(x^2 + (y-1)^2)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-y)((4-y)^2 - x^2) = 0 \\ x(x^2 - (4-y)^2) = 0 \end{cases}$$

1° $\begin{cases} 4-y = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 1)$ pto critico ma non appartiene al dominio

2° $(4-y)^2 = x^2 \Leftrightarrow y-1 = \pm x \Leftrightarrow \begin{matrix} y = 1+x \\ y = 1-x \end{matrix} \quad x \neq 0$

2 rette di punti critici.

Studio la natura dei punti critici

$$y = x+1 \quad f(x, x+1) = \frac{1}{2}$$

Studio il minimo

$$\Delta f = f(x, y) - \frac{1}{2} = \frac{x(y-1)}{x^2+(y-1)^2} - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(y-1) - (x^2 + (y-1)^2) \geq 0$$

$$-(x - (y-1))^2 \geq 0 \quad \text{mai in } D$$

$$\Rightarrow \Delta f < 0 \quad \forall (x, y) \in D$$

$\Rightarrow y = x+1$ sono punti di massimo
($x \neq 0$)

$$y = -x+1 \quad f(x, -x+1) = -\frac{1}{2}$$

$$\Delta f = f(x, y) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{x(y-1)}{x^2+(y-1)^2} + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$2x(y-1) + x^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

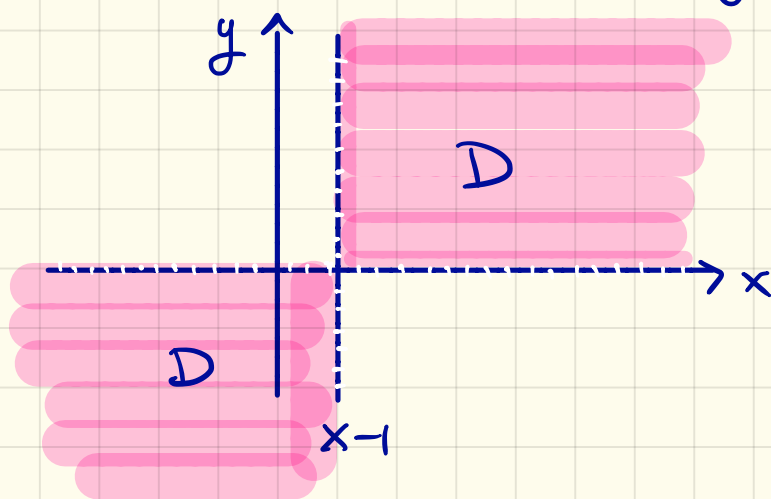
$$(x + (y-1))^2 > 0 \quad \forall (x, y) \in D$$

$\Rightarrow y = -x+1$ sono punti di minimo.
($x \neq 0$)

ESERCIZIO 4

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{(x-1)y}}, \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)y}} \right)$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)y > 0\}$$



D è aperto e limitato
non connesso

$$\nabla \wedge \vec{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k} = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(x-1)y}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(x-1)y}} \right) \hat{k} = 0$$

$\Rightarrow$ il campo è irrotazionale $\Rightarrow$ è localmente
conservativo. Calcolo il potenziale

$$\vec{F} = \nabla U$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{(x-1)y}} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)y}} \end{cases} \Rightarrow$$

Uso la prima equazione

$$U(x,y) = \int \frac{y}{\sqrt{(x-1)y}} dx = \sqrt{y} \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \\ = 2\sqrt{y(x-1)} + C(y)$$

Uso la seconda equazione

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{y}} + C'(y) = \frac{\cancel{x-1}}{\sqrt{(x-1)y}} \Rightarrow C'(y) = 0 \\ \Rightarrow C(y) = C$$

$$U(x,y) = 2\sqrt{(x-1)y} + C \quad (x-1)y \geq 0$$

Il dominio del campo è contenuto nel

dominio del potenziale $D_U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)y \geq 0\}$

$D \subset D_U \Rightarrow$ il campo è conservativo in D .

$$A = (2,2) \quad B = (3,4)$$

$$L = U(3,4) - U(2,2) = 2\sqrt{2 \cdot 4} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

LINEE di CAMPO

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{y}} dx = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x-1}} dy \Leftrightarrow$$

$$(x-1) dx = y dy$$

$$\frac{1}{2} (x-1)^2 = \frac{1}{2} y^2 + \frac{c}{2}$$

$$(x-1)^2 = y^2 + c \quad \text{iperbole}$$

$$\text{con asintoti} \quad y = \pm (x-1) .$$

ESERCIZIO 5

TEOREMA di STOKES

S superficie regolare orientata, orientata con vettore normale $\hat{m}$

∂S^+ bordo di S orientato positivamente, curva regolare parametrizzata da $\vec{r}$

$$\iint_S \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m} \, dS = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Se $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$

$$\nabla \wedge \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

S è una superficie sul piano x, y
 $\hat{m} = \hat{k}$

∂S^+ bordo della superficie $\Rightarrow$ curva sul piano $\vec{r}$

$$\nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

TEOREMA
GAUSS-GREEN

Sia $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4(y-1)^2 \leq 36 \}$

$$\text{Pseudo } \vec{F} = \frac{1}{2} (-y-1, x)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

applico il teorema di Gauss-Green

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S dx dy = |S|$$

$$|S| = \oint_{\partial S^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\partial S^+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4(y-1)^2 = 36 \}$$

$$\vec{r}(t) = (2 \cos t, 1 + 3 \sin t) \quad \vec{r}'(t) = (-2 \sin t, 3 \cos t) \\ t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\partial S^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-3 \sin t, 2 \cos t) \cdot (-2 \sin t, 3 \cos t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 6 dt = 6\pi \quad \Rightarrow |S| = 6\pi.$$

ESERCIZIO 6

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = (x-1)^2 + y^2 \quad 0 \leq z \leq 2 \}$$

$$\vec{F} = (x-1, y, 0) \quad \nabla \cdot \vec{F} = 2$$

V è un cono con vertice in $(1, 0, 0)$

$$\partial V = \partial V_1 \cup \partial V_2$$

∂V_1 superficie laterale del cono

$$\vec{r} \begin{cases} x = 1 + \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = \rho \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rho \in [0, 2] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array}$$

$$\vec{r}_\rho = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$$

$$\vec{r}_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

$$\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_\rho = (p \cos \theta, p \sin \theta, p) \quad \downarrow \text{verso l'esterno}$$

$\vec{r}(\rho, \theta)$ è differenziabile in $[0, 2] \times [0, 2\pi]$

$$|\vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta| = \sqrt{2\rho^2} = \rho\sqrt{2} \neq 0 \text{ se } \rho \neq 0$$

$\Rightarrow$ la superficie ha come unico punto critico il vertice.

∂V_2 è la base del cono $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 1 + \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \in [0, 2] \\ \vartheta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_\vartheta &= (-\rho \sin \vartheta, \rho \cos \vartheta, 0) \\ \vec{r}_\rho &= (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\vartheta &= (0, 0, \rho) \\ \Rightarrow \hat{m} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

$\vec{r}(\rho, \vartheta)$ è differenziabile in $[0, 2] \times [0, 2\pi]$

la superficie ha un unico punto non regolare dato da $\rho = 0$.

TEOREMA DIVERGENZA

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \hat{m} \, ds$$

Dato che $\nabla \cdot \vec{F} = 2$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz = 2|V| = 2 \frac{\pi}{3} 4 \cdot 2 = \frac{16\pi}{3}$$

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds = \iint_{\partial V_1} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds + \iint_{\partial V_2} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds$$

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V_1} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (p \cos \theta, p \sin \theta, 0) \cdot (p \cos \theta, p \sin \theta, p) \, dp \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 p^2 \, dp \, d\theta = 2\pi \left. \frac{1}{3} p^3 \right|_0^2 = \frac{16}{3} \pi \end{aligned}$$

$$\iint_{\partial V_2} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds = 0 \quad \text{because} \quad \vec{F} \cdot \hat{n} = 0$$