

ANALISI MATEMATICA 2 (9 CFU)

2 Parte 8.7.2022

Cognome.....

Nome.....

n.matricola

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$$

a calcolare il gradiente di f in un punto generico di coordinate (x, y) ;

b calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(2, 1)$ nella direzione della retta $y = x - 1$ nel verso delle x crescenti;

c si verifichi che in ogni punto $(x, y) \neq (1, 0)$ il gradiente è ortogonale alle linee di livello rappresentate dall'equazione $f(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$;

Esercizio 2 Dato l'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}\}$$

a disegnarlo e/o descriverlo a parole;

b calcolare l'integrale triplo

$$\int \int \int_D (x - 1)^2 y^2 \, dx dy dz.$$

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{x(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2}$$

determinare tutti i punti critici e studiarne la natura.

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{(x - 1)y}}, \frac{x - 1}{\sqrt{(x - 1)y}} \right)$$

a stabilire il suo insieme di definizione e disegnare le linee di campo e verificare;

b stabilire se è conservativo e calcolare il potenziale;

c calcolare il lavoro dal campo $\mathbf{F}$ dal punto $A = (2, 2)$ al punto $B = (3, 4)$.

Esercizio 5

a Enunciare il teorema di Stokes e dimostrare che in due dimensioni è il teorema di Gauss-Green.

b Usare il teorema di Green per calcolare l'area all'interno dell'ellisse $9x^2 + 4(y - 1)^2 = 36$.

Esercizio 6 Sia ∂V il bordo del volume

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = (x - 1)^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2\}$$

ed $\mathbf{F}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (x - 1, y, 0)$$

a Scrivere i pezzi che costituiscono la superficie ∂V in forma parametrica e verificarne la regolarità.

b Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}$ attraverso ∂V e verificare il teorema della divergenza.