

ESAME 20.6.2022 PARTE 1
SCHEMA SOLUZIONE
ESERCIZIO 1

$$\gamma: \rho = 2\theta^2 \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

$$\vec{r}(\theta) = 2\theta^2 (\cos\theta, \sin\theta) \rightarrow \text{curva \u00e9 continua}$$

$$\vec{r}(-\pi) = 4\pi^2 (-1, 0) = 4\pi^2 (-1, 0) \rightarrow \text{curva chiusa}$$

$$\theta^2 = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ \u00e9 l'unico}$$

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi] \quad \theta_1 \neq \theta_2 \quad (\cos\theta_1, \sin\theta_1) \neq (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$$

\u2192 la curva \u00e9 semplice.

$$\vec{r}'(\theta) = 4\theta (\cos\theta, \sin\theta) + 2\theta^2 (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$|\vec{r}'(\theta)| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{4\theta^4 + 16\theta^2} = 2|\theta|\sqrt{\theta^2 + 4}$$

$$\vec{r} \in C^1[-\pi, \pi] \quad \vec{r}'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$$

la curva ha un punto di non regolarit\u00e0 in $\theta = 0$,

\u00e9 una curva regolare a tratti.

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} |\theta| \sqrt{\theta^2 + 4} d\theta = 4 \int_0^{\pi} \theta \sqrt{\theta^2 + 4} d\theta = 4 \cdot \frac{2}{3} (\theta^2 + 4)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{3} [(\pi^2 + 4)^{3/2} - 4^{3/2}] \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m^2(x-1)}}{m(x-1)+1}$$

$$\text{CN } \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$I = (1, +\infty)$$

Dato che $f_m(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow$ convergenza puntuale ed assente coincidono.

Convergenza puntuale: applico il criterio delle radici

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{e^{-m^2(x-1)}}{m(x-1)+1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{e^{-m(x-1)}}{\sqrt[m]{m(x-1)+1}} = 0 < 1 \quad \forall x \in I$$

$\Rightarrow$ la serie converge puntualmente $\forall x \in I$

CONVERGENZA TOTALE

$$\sup_{x \in I} \frac{e^{-m^2(x-1)}}{m(x-1)+1} = 1 \quad f_m(x) \text{ è decrescente su } I$$

$\Rightarrow$ la serie non converge totalmente su I

$$I_\delta = [1+\delta, +\infty) \quad \delta > 0$$

$$\max_{x \in I_\delta} \frac{e^{-m^2(x-1)}}{m(x-1)+1} = \frac{e^{-m^2\delta}}{m\delta+1}$$

$$\Rightarrow |f_m(x)| \leq \frac{e^{-m^2\delta}}{m\delta+1} = a_m$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m^2\delta}}{m\delta+1} \text{ converge (posso applicare il criterio)} \\ \text{della radice}$$

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente in $I_\delta \quad \forall \delta > 0$

CONTINUITÀ della SOMMA della serie $S(x)$
 $\forall \delta > 0$

$$f_m(x) \in C^0(I_\delta)$$

$$\Rightarrow S(x) \in C^0(I_\delta)$$

$\sum_m f_m(x)$ converge totalmente in I_δ

Quota dato che $\forall x_0 \in I \quad \exists \delta > 0 : x_0 \in I_\delta$

$\Rightarrow S(x)$ è continua in $x_0 \Rightarrow S(x) \in C^0(I)$.

DERIVABILITÀ

$$f'_m(x) = \frac{-m^2 e^{-m^2(x-1)}}{[m(x-1)+1]^2} - \frac{m e^{-m^2(x-1)}}{[m(x-1)+1]^2}$$

$$= - \frac{m^2 e^{-m^2(x-1)}}{m(x-1)+1} - \frac{m e^{-m^2(x-1)}}{(m(x-1)+1)^2}$$

Studio la convergenza totale delle serie
delle derivate in $I_\delta \quad \forall \delta > 0$

$$|f'_m(x)| \leq \frac{m^2 e^{-m^2 \delta}}{m\delta + 1} + \frac{m e^{-m^2 \delta}}{(m\delta + 1)^2} = a_n$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 e^{-m^2 \delta}}{m\delta + 1} \quad \text{converge}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m e^{-m^2 \delta}}{(m\delta + 1)^2} \quad \text{converge}$$

} posso applicare il
criterio del
rapporto

$\forall \delta > 0$

$$f_m(x) \in C^2(I_\delta)$$

$$\sum_n f_m(x) \quad \text{converge}$$

$$\sum_n f'_m(x) \quad \text{converge totalmente in } I_\delta$$

$\Rightarrow$ la serie è derivabile termine a

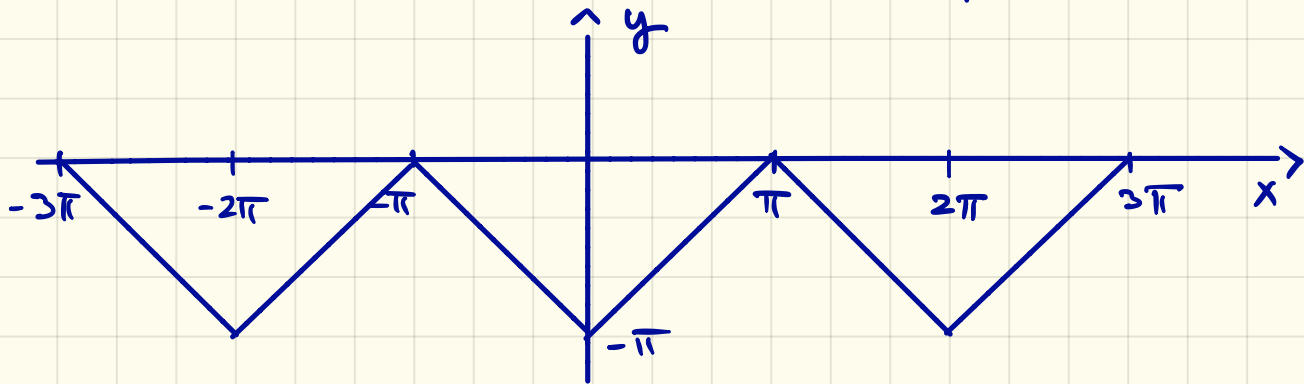
$$\text{termine in } I_\delta \Rightarrow S(x) \in C^1(I_\delta)$$

Quanto dato che $\forall x_0 \in I \exists \delta > 0 : x_0 \in I_\delta$

$$\Rightarrow S(x) \text{ è derivabile in } x_0 \Rightarrow S(x) \in C^1(I).$$

ESERCIZIO 3

$$f(x) = -\pi + x \quad x \in [0, \pi) \quad \text{peri} \quad T = 2\pi$$



funzione peri $\Rightarrow b_k = 0$ $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-\pi + x) dx =$$

$$= \left. \frac{(-\pi + x)^2}{\pi} \right|_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{\pi} = -\pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-\pi + x) \cos(kx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\left. (-\pi + x) \frac{\sin(kx)}{k} \right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left. \frac{\cos(kx)}{k^2} \right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} 0 & k = 2n \\ -\frac{4}{\pi k^2} & k = 2n+1 \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

La funzione è continua quindi integrabile
in $[-\pi, \pi]$ $\Rightarrow$ la serie di Fourier converge
ad $f(x)$ in media quadratica:

$$S_m f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(kx)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (S_m f(x) - f(x))^2 dx = 0$$

$f(x)$ è regolare a tratti $\Rightarrow$ la serie di
Fourier converge puntualmente

$$S(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \forall x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & x = -\pi, \pi \end{cases}$$

Essendo $f(-\pi) = f(\pi)$ la funzione è
continua su tutto $\mathbb{R} \Rightarrow S(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

CONVERGENZA TOTALE

$$|a_k \cos(kx)| \leq \frac{4}{\pi k^2} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k^2} < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$.

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)x]$$

$$f(0) = -\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Identità di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

$$2 \int_0^{\pi} (-\pi+x)^2 dx = \frac{2}{3} (-\pi+x)^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^3$$

$$\frac{2}{3} \pi^3 = \pi \left[\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{(2n+1)^4} \cdot \frac{1}{\pi^2} \right]$$

$$\frac{\pi^3}{6} = \frac{16}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

ESERCIZIO 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1}$$

Serie di potenze $x_0 = 1$ $a_n = \frac{1}{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad R = 1$$

La serie converge assolutamente e puntualmente

$$\text{se } |x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$x = 2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{non converge}$$

$$x = 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \frac{1}{n+1} \downarrow 0 \quad \text{posso applicare}$$

il criterio di Leibnitz $\Rightarrow$ la serie converge

la serie converge in $x=0$

la serie converge puntualmente in $[0, 2)$

la serie converge assolutamente in $(0, 2)$

CONVERGENZA TOTALE

$$I = (0, 2)$$

$$\sup_{x \in I} \frac{(x-1)^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \quad \text{non converge}$$

$$I_\delta = [\delta, 2-\delta] \Leftrightarrow |x-1| \leq 1-\delta \quad \delta \in (0, 1)$$

$$\max_{x \in I_\delta} \frac{(x-1)^n}{n+1} \leq \frac{(1-\delta)^n}{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\delta)^n}{n+1} \quad (*) \text{ applico il criterio delle radici}$$

$$\sqrt[n]{\frac{(1-\delta)^n}{n+1}} = \frac{1-\delta}{\sqrt[n]{n+1}} \rightarrow 1-\delta < 1$$

la serie (*) converge

$\Rightarrow$ la serie di potenze converge totalmente

in $I_\delta \forall \delta \in (0, 1)$.

CONTINUITÀ $S(x)$: $\forall \delta \in (0, 1)$

$$f_n(x) \in C^0(I_\delta)$$

$$\Rightarrow S(x) \in C^0(I_\delta)$$

$\sum_n f_n(x)$ converge totalmente in I_δ

$$\forall x_0 \in I \exists \delta \in (0, 1) : x_0 \in I_\delta \Rightarrow S(x) \text{ è}$$

$$\text{continua in } x_0 \Rightarrow S(x) \in C^0(I).$$

ESERCIZIO 5

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2 y^3}{y^4 + (x-1)^4} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 y^3}{y^4 + (x-1)^4} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2(x-1)y^3(y^4 + (x-1)^4) - 4(x-1)^5 y^3}{(y^4 + (x-1)^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2(x-1)^2(y^4 + (x-1)^4) - 4y^6(x-1)^2}{(y^4 + (x-1)^4)^2}$$

$(x,y) \neq (1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \left. \frac{d}{dx} f(x,0) \right|_{x=1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \left. \frac{d}{dy} f(1,y) \right|_{y=0} = 0$$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}) \Rightarrow f$ è differenziabile in
 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

DIFFERENZIABILITÀ in $(1,0)$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 k^3}{h^4 + k^4} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \neq 0$$

in fatti

$$\text{se } h=k \quad \frac{h^5}{2h^4} \frac{1}{|h|\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} h \xrightarrow{h \rightarrow 0^\pm} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

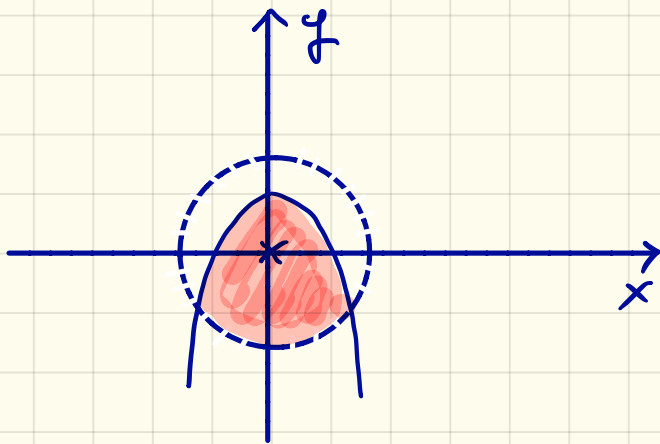
$\Rightarrow$ la funzione non è differenziabile in $(1,0)$

$\Rightarrow f$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

ESERCIZIO 6

$$f(x, y) = \frac{x^2(y-x)}{x^2+y^2} [\lg(2-x^2-y^2) + \sqrt{1-y-x^2}]$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \neq 0 \\ 2-x^2-y^2 > 0 \\ 1-y-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \neq (0, 0) \\ x^2+y^2 < 2 \\ y \leq -x^2+1 \end{cases}$$



Insieme connessa,
limitata, n  aperta
n  chiusa.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \lg(2-x^2-y^2) = \lg 2 \quad \text{funzione continua}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{1-y-x^2} = 1 \quad \text{funzione continua}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} (y-x) = 0 \quad \text{uniforme}$$

$$\left| \frac{x^2}{x^2+y^2} (y-x) \right| \leq |y-x| \rightarrow 0 \quad (x,y) \rightarrow (0,0)$$